

基本分析

李逸

东南大学丘成桐中心、东南大学数学学院

感谢

东南大学 19 级毓琇理科实验班(按姓氏拼音排序)

崔雪红、刘碧璇、秦靖雯

整理上课笔记

感谢下列同学指出讲义中的错误与不足 (按姓氏拼音排序)

陈昕、胡蓉、李嘉淇、李文哲、刘春辰、王晓波、王泽川

田国凯、孙茗欣、魏佳蓓、杨帆、杨欣、易英鹏

张凌枫、张明远、朱康华

初稿版次: 第12 版

二零二零年五月四日

目 录

第一章 序	15
1.1 前言	15
1.2 使用说明	16
1.3 符号和常用记号说明	16
1.4 作者声明	17
1.5 预备知识 I: 集合与映射	18
1.5.1 集合的任意并和交	18
1.5.2 集合的 Cartesian 乘积: I	18
1.5.3 映射	19
1.5.4 * 范畴	20
1.5.5 关系	24
1.5.6 集合的 Cartesian 乘积: II	27
1.5.7 有限集、可数集和不可数集	29
1.6 预备知识 II: 函数	33
1.6.1 几类特殊的函数	33
1.6.2 * 素数和素数基本定理	34
1.6.3 超越数 π 和 e	42
1.6.4 * 度量空间	42
1.6.5 * 泛函	45
1.7 参考文献	46
第一部分 单变量理论	49
第二章 极限理论 I: 数列极限	51
2.1 收敛数列	51
2.1.1 定义	51
2.1.2 例子	51
2.2 收敛数列的性质	54
2.2.1 基本性质	54
2.2.2 收敛数列的代数运算/四则运算	57
2.2.3 无穷小和无穷大数列	58
2.2.4 Stolz 定理	60
2.3 数列收敛的判别法则	70
2.3.1 单调数列	71
2.3.2 三个重要的常数 π 、 e 、和 γ	72

2.3.3	子列	78
2.3.4	Cauchy 数列	80
2.3.5	* Ramanujan 恒等式	88
2.3.6	* Cantor 集	92
2.4	参考文献	93
第三章	极限理论 II: 函数极限	95
3.1	函数极限	95
3.1.1	定义	96
3.1.2	函数极限的性质	97
3.1.3	两个重要的极限	98
3.1.4	Heine 定理	100
3.1.5	* Bohr-Mollerup-Artin 定理	101
3.2	函数的阶估计	103
3.2.1	无穷小	103
3.2.2	无穷大	107
3.2.3	等价替换	107
3.3	函数的连续和间断	112
3.3.1	连续函数	112
3.3.2	函数的间断点	115
3.3.3	连续函数的性质	117
3.3.4	一致连续	123
3.4	参考文献	129
第四章	导数理论	131
4.1	微分和导数	131
4.1.1	微分	131
4.1.2	导数	133
4.1.3	线性逼近	136
4.1.4	单侧导数	136
4.2	求导法则	139
4.2.1	算术运算	139
4.2.2	反函数的求导	141
4.2.3	链式法则	142
4.2.4	隐函数的求导	144
4.3	高阶导数	145
4.3.1	记号	145
4.3.2	算术运算	148
4.4	极值定理	151

4.4.1	极值	151
4.4.2	Fermat 引理	152
4.4.3	Darboux 定理	152
4.5	微分中值定理	153
4.5.1	Rolle 定理	153
4.5.2	Lagrange 定理	155
4.5.3	Cauchy 定理	158
4.6	L'Hospital 法则	162
4.6.1	$\frac{0}{0}$ 型	162
4.6.2	$\frac{\infty}{\infty}$ 型	163
4.6.3	其它型	165
4.7	Taylor 公式	166
4.7.1	Peano 型余项	167
4.7.2	Lagrange 型余项	167
4.7.3	Cauchy 型余项	169
4.7.4	Taylor 级数	174
4.8	微分学的应用	176
4.8.1	单调函数和一阶导数	177
4.8.2	凸函数和一阶、二阶导数	178
4.8.3	极值和一阶、二阶导数	183
4.8.4	函数画图	185
4.8.5	Newton 方法	185
4.9	参考文献	185
第五章	积分理论	187
5.1	不定积分	187
5.1.1	原函数和不定积分	187
5.1.2	基本不定积分表 I	188
5.2	不定积分的基本性质	189
5.2.1	线性性质	189
5.2.2	变量替换	191
5.2.3	分部积分及基本不定积分表 II	193
5.2.4	有理函数的原函数	198
5.2.5	形如 $\int R(\sin x, \cos x)dx$ 的原函数	202
5.2.6	形如 $\int R(x, y(x))dx$ 的原函数	204
5.2.7	* 椭圆积分	210
5.2.8	* 超几何级数	216
5.3	定积分	219
5.3.1	Riemann 积分的定义	219

5.3.2	可积的必要条件	222
5.3.3	可积的充分条件	223
5.3.4	* Lebesgue 判别法则: 可积的充要条件	230
5.4	定积分的基本性质	233
5.4.1	基本性质	233
5.4.2	积分中值定理	235
5.4.3	微积分基本定理	245
5.4.4	Newton-Leibniz 公式	250
5.4.5	分部积分法	253
5.4.6	变量替换法	260
5.5	反常积分	262
5.5.1	反常积分 I	263
5.5.2	收敛判别法	276
5.5.3	反常积分 II: Cauchy 主值积分	295
5.5.4	* Euler 积分和 Γ 函数的刻画	295
5.5.5	Froullani 积分	298
5.5.6	* 对数积分和素数基本定理	299
5.5.7	* Dirichlet 核	300
5.6	定积分的应用	301
5.6.1	面积	301
5.6.2	弧长	302
5.6.3	曲率	304
5.6.4	体积	305
5.6.5	旋转曲面的表面积	306
5.6.6	* 椭圆积分	307
5.7	参考文献	308
第六章 级数理论		311
6.1	数项级数	311
6.1.1	数项级数	311
6.1.2	数项级数的 Cauchy 收敛	312
6.2	正项级数	316
6.2.1	上极限和下极限	317
6.2.2	正项级数判别法	320
6.2.3	当 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n / a_{n+1} = 1$ 时的判别法	324
6.3	任意项级数	329
6.3.1	级数的绝对收敛和条件收敛	329
6.3.2	交错级数和 Leibniz 判别法	329
6.3.3	Abel 判别法和 Dirichlet 判别法	330

目 录	7
6.3.4 级数的乘法	332
6.3.5 级数的重排	336
6.4 * 无穷级数和无穷乘积	343
6.4.1 * 无穷乘积	343
6.4.2 * 无穷级数和无穷乘积	346
6.4.3 * 无穷乘积的绝对收敛和条件收敛	347
6.4.4 * Γ 函数的 Euler-Gauss 公式和 Weierstrass \wp 函数简介	348
6.5 参考文献	358
第二部分 线性代数与常微分方程	361
第七章 矩阵和行列式	363
第八章 二次型和矩阵变换	365
第九章 常微分方程基本理论	367
第十章 常微分方程基本定理	369
第三部分 多变量理论	371
第十一章 多变量极限理论	373
11.1 Euclidean 空间及其子集	373
11.1.1 Euclidean 空间 \mathbb{R}^n	373
11.1.2 \mathbb{R}^n 中的点列收敛	378
11.1.3 \mathbb{R}^n 中的有界集、开集和闭集	379
11.2 \mathbb{R}^n 中的连续性	382
11.2.1 闭区域套定理、Bozarno-Weierstrass 定理和 Cauchy 收敛准则	382
11.2.2 * 紧致度量空间的刻画和道路连通集	385
11.3 多元函数的极限	387
11.3.1 向量值函数	387
11.3.2 多元函数的极限	388
11.3.3 二元函数的累次极限	389
11.4 多元函数的连续性	391
11.4.1 多元函数连续定义及基本性质	391
11.4.2 向量值函数的极限和连续	393
11.4.3 向量值连续函数的三大定理	394
11.4.4 习题课	395

11.5 参考文献	398
第十二章 多变量导数理论	401
12.1 多元函数的微分和偏导数	401
12.1.1 多元函数的微分	401
12.1.2 多元函数的偏导数	402
12.1.3 多元函数的方向导数	405
12.1.4 多元函数的高阶导数	407
12.1.5 多元函数的高阶微分	409
12.1.6 向量值函数的微分和偏导数	409
12.2 多元复合函数的求导法则	410
12.2.1 多元复合函数求偏导的链式法则	410
12.2.2 多元函数的一阶全微分的不变性	412
12.3 多元函数的微分中值定理和 Taylor 公式	414
12.3.1 多元函数的微分中值定理	414
12.3.2 多元函数的 Taylor 公式	415
12.4 隐函数定理	419
12.4.1 隐函数	419
12.4.2 隐函数定理	420
12.4.3 向量值隐函数定理	424
12.4.4 逆映射定理	426
12.5 偏导数的几何应用	428
12.5.1 空间曲线的切线和法平面	428
12.5.2 空间曲面的切平面和法线	431
12.6 无条件极值问题	433
12.6.1 多元函数的极值	433
12.6.2 多元函数的最值	435
12.6.3 最小二乘法	435
12.7 条件极值问题	436
12.7.1 条件极值和 Lagrange 函数	436
12.7.2 * 等周不等式	438
12.7.3 * 最优传输问题	438
12.8 参考文献	438
第十三章 多变量积分理论	441
13.1 重积分	441
13.1.1 可求面积区域	442
13.1.2 二重积分	445
13.1.3 n 重积分	447

13.1.4	重积分的基本性质	448
13.2	重积分的 Fubini 定理	449
13.2.1	矩形区域上的 Fubini 定理	449
13.2.2	x -型区域和 y -型区域上的 Fubini 定理	452
13.2.3	* Stieltjes 积分	455
13.3	重积分的变量替换	470
13.3.1	二重积分的变量替换	470
13.3.2	n 重积分的变量替换	475
13.4	反常二重积分	481
13.4.1	无界区域上的反常二重积分	482
13.4.2	无界函数的反常二重积分	484
13.4.3	应用	485
13.4.4	* Poisson 核、Hilbert 变换和 Riesz 变换	485
13.5	* 微分形式	487
13.5.1	* 微分形式和外积	487
13.5.2	* 上同调群	489
13.6	重积分的应用	491
13.6.1	曲面面积	491
13.6.2	* 极小曲面	493
13.7	第一型曲线积分和曲面积分	494
13.7.1	第一型曲线积分	494
13.7.2	第一型曲面积分	498
13.8	第二型曲线积分和曲面积分	501
13.8.1	第二型曲线积分	501
13.8.2	第二型曲面积分	504
13.9	Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式	509
13.9.1	Green 公式	509
13.9.2	曲线积分的路径无关性	515
13.9.3	Gauss 公式	518
13.9.4	Stokes 公式	521
13.9.5	* 流形上的 Stokes 公式	523
13.10	场论简介	525
13.10.1	向量场	525
13.10.2	数量场的等值面和梯度场	525
13.10.3	向量场的散度	526
13.10.4	向量场的旋度	526
13.10.5	管量场和有势场	527
13.10.6	Hamilton 算子	528

13.11	* 调和函数	529
13.11.1	* 平均值性质	529
13.11.2	* 基本解	536
13.11.3	* 内梯度估计和 Harnack 估计	542
13.11.4	* 能量方法	548
13.12	* Navier-Stokes 方程简介	551
13.12.1	* 有界区域上的流体	551
13.12.2	* 外面区域上的流体	551
13.12.3	* 无界区域上的流体	551
13.13	参考文献	551
第十四章 多变量级数理论		553
14.1	函数项级数和函数列	553
14.1.1	收敛域	553
14.1.2	函数列和函数项级数的基本问题与一致收敛	557
14.1.3	一致收敛的判别法	560
14.2	一致收敛级数的性质	569
14.2.1	连续性	569
14.2.2	可积性	572
14.2.3	可导性	574
14.2.4	常微分方程基本定理	578
14.3	幂级数	579
14.3.1	幂级数收敛域	579
14.3.2	幂级数基本性质	587
14.3.3	Taylor 级数再探和初等函数的幂级数展开	594
14.4	* Tauberian 理论简介	604
14.4.1	* 发散级数	604
14.4.2	* 级数求和的一般定义	608
14.4.3	* 求和的正则性问题	612
14.4.4	* Tauberian 理论	612
14.5	参考文献	613
第十五章 含参变量积分		617
15.1	含参变量定积分	617
15.1.1	含参变量定积分的定义	618
15.1.2	含参变量定积分的基本性质	618
15.2	含参变量广义积分	625
15.2.1	含参变量广义积分的一致收敛	626
15.2.2	含参变量广义积分的一致收敛的判别法	628

15.2.3	含参变量广义积分的基本性质	635
15.3	* 二探 Euler 积分	645
15.3.1	* Ramanujan 不等式	648
15.3.2	* Gamma 函数和 Riemann ζ -函数	654
15.3.3	* Gamma 函数和 Hausdorff 维数	655
15.4	* 三探 Γ, Ψ, Φ 函数和 Mellin 变换	661
15.4.1	* \mathbb{R}^+ 上的调和函数	665
15.4.2	* Ψ 和 Φ 函数	681
15.4.3	* Γ 函数的 Euler 定义	690
15.4.4	* Euler 和 Weierstrass 乘积公式	692
15.4.5	* $\Gamma(z)$ 的渐近展开	695
15.5	* 模形式	705
15.5.1	* k 权模形式	706
15.5.2	* k 权 Eisenstein 级数和尖点形式	707
15.6	参考文献	709
第十六章 Fourier 级数		713
16.1	Fourier 级数展开	713
16.1.1	平方可积函数空间和正交函数系	713
16.1.2	2π 周期函数的 Fourier 展开	715
16.1.3	正弦级数和余弦级数	717
16.1.4	任意周期函数的 Fourier 展开	718
16.2	Fourier 级数的收敛判别法	719
16.2.1	Fourier 级数的唯一性	722
16.2.2	卷积	724
16.2.3	好核	726
16.2.4	Riemann 引理	732
16.2.5	Fourier 级数的逐点收敛定理	733
16.2.6	* Fourier 级数的一致收敛性	737
16.2.7	几个反例	740
16.3	\mathbb{R} 上的 Fourier 变换	743
16.3.1	适度递减函数	743
16.3.2	Fourier 变换	745
16.3.3	\mathbb{R} 上的热核	751
16.3.4	Poisson 求和公式	754
16.3.5	Theta 和 zeta 函数	755
16.3.6	S^1 上的热核	756
16.3.7	Heisenberg 不确定原理	757
16.4	Fourier 级数的性质	759

16.4.1	Fourier 级数的分析性质	759
16.4.2	Fourier 级数的平方逼近性质	760
16.5	* 等周不等式	765
16.5.1	弧长和面积	765
16.5.2	等周不等式	766
16.6	参考文献	768
第四部分 数学分析后续：高等分析初步		771
第十七章	Fourier 分析	773
第十八章	实分析	775
第十九章	复分析	777
第二十章	泛函分析	779
第五部分 数学分析后续：拓扑学初步		781
第二十一章	范畴理论	783
第二十二章	基本群	785
第二十三章	微分流形	787
第二十四章	代数拓扑	789
第六部分 数学分析后续：微分几何学初步		791
第二十五章	Riemann 流形	793
第二十六章	复流形	795
第二十七章	Riemann 曲面	797
第二十八章	Einstein 方程	799
第七部分 数学分析后续：Lie 群初步		801
第二十九章	群论和 Galois 理论	803

目 录	13
第三十章 拓扑群与 Lie 群	805
第三十一章 $SL_2(\mathbb{C})$ 上的分析	807
第三十二章 Poincaré 模型	809
第八部分 数学分析后续: 模形式初步	811
第三十三章 模形式和 Eisenstein 级数	813
第三十四章 Hecke 算子	815
第三十五章 L 函数	817
第三十六章 Galois 表示	819
第九部分 数学分析后续: (待补充)	821

第一章 序

心即理也。天下又有心外之事，心外之理乎？…若只是温清之节、奉养之宜，可一日二日讲之而尽，用得甚学问思辨？惟于温清时，也只要此心纯乎天理之极；奉养时，也只要此心纯乎天理之极。此则非有学问思辨之功，将不免于毫厘千里之谬，所以虽在圣人，尤加「精一」之训。若只是那些仪节求得是当，便谓至善，即如今扮戏子，扮得许多温清奉养的仪节是当，亦可谓之至善矣？——《传习录》理学编卷一

§1.1 前言

数学分析是大学一年级的基础课程，在不同的院系也常称为高等数学亦或冠以各种前缀的数学分析。这门课程目前为止已有不少优秀的古今中外教材，即有名家大师写的专著，也有不少滥竽充数的所谓“教材”。有些知识点编书者没有搞懂，却东抄西抄不加消化理解地乱写一气，对学生很不负责任。编写教材，鄙人认为有以下几点需要注意：

其一，参考优秀教材是不可避免地，但是要有自己的特色和特点。从而每本教材的选材其实体现了编书者的个人爱好和教学理念。

其二，要有自己的特点和特色不是乱写胡写，而是要编书者不仅教书要教的好而且科研也要做的好，这样不仅可以告诉学生数学分析中哪些部分需要学习后续课程才能得到深刻理解和自我升华，而且可以把最新最好的前沿数学以数学分析这种大一学生可以接受的方式让学生开阔学术眼界和提高学问品味。

其三，要适当增加大一学生可以听懂的而又很重要的数学知识点，这样可以把后续课程甚至研究生课程有机地联系起来。

其四，标注所参考的文献，而且最好写上原始出处，便于学生阅读大师的原文和养成严谨的治学态度。

有鉴于此，数学分析课程的所谓“改革”是不可避免地，但是这改革却不是通常意义下的“教改”。这令我想起了李文忠公在前清光绪二十四年七月二十日¹上的《裁并官职折》，从中摘抄几句如下²：

…近日臣工条奏，多以裁汰冗员为言，虽未必尽可准行，而参酌情形，实亦有亟当改革者。…百度事务繁多，度支岁入有常，岂能徒供无用之冗费，至碍当务之急需。…惟归并之后，事既更张，有同新创；其中头绪繁多，一切事宜，非仓猝所能遽定。庶名虽改而实犹存，不致冒昧从事，致滋贻误，…

¹西元 1898 年 9 月 5 日，这一年诞生了周恩来、彭德怀、刘少奇、叶企孙、朱自清等，而俾斯麦、奕訢、谭嗣同等去世。

²雷颐著：李鸿章与晚清四十年(增订版)，山西人民出版社，2019。

要真正做到“改革”目前数学分析课程的教材和教法,确实不是一件容易的事.当然国内已经有同行前辈做了不少有益的尝试,比如北京大学张筑生教授写的《数学分析新讲》,清华大学陈天权教授写的《数学分析讲义》,南京大学梅加强教授写的《数学分析》,当然还有国内不少优秀的教材在这里就不一一举例说明.

本讲义部分内容是鄙人当初在上海交通大学时候给数学系大二学生和安泰经管学院大一新生(非常感谢两个班级的学生)上数学分析课的讲稿,现在将这些讲稿和本次讲义融合而成目前的分析初稿.

本稿试图把上面提到的四点淋漓尽致地体现出来,但是鉴于鄙人水平有限而不可能面面俱到,笔误和纰漏在所难免,烦请各位同仁与同学批评和斧正.

李逸

西元二零一九年六月

提笔于南京鸡笼山成贤街东南大学内



牢骚太盛防肠断,风物长宜放眼量.莫道昆明池水浅,观鱼胜过富春江. — 毛泽东,《七律·和柳亚子先生》,一九四九年四月二十九日.

§1.2 使用说明

由于东南大学理科实验班采用的教材是数学学院张福保、薛金美两位教授编写的《数学分析讲义》(或参考张福保、薛金美、潮小李三位教授编写的《数学分析讲义》,科学出版社 2019 年出版),所以本讲义中传统数学分析部分的标题就按照张/薛书上的标题,主要是为了方便学生.有些小标题就按照作者的意愿来标识.

目前本讲义暂时不会正式出版,因为好的讲义需要时间的积累和具体教学实践来打磨.我会放在自己主页上供大家免费使用:

<https://math.seu.edu.cn/ly/list.htm>

说明:目前的版本是已经把数学分析部分写完,至于其它部分以后会陆续逐一添加.

§1.3 符号和常用记号说明

数域说明. \mathbb{N} 表示为所有自然数之集合 (亦包含 0), 而 \mathbb{N}^* 表示所有非零自然数之集合. 整数域, 有理数域, 实数域, 复数域分别表示为 $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 和 \mathbb{C} . 对给定的数域 $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$, 符号 \mathbb{F}_+ 或 $\mathbb{F}_{>0}$ 表示 \mathbb{F} 中大于零的元素构成的集合, 同样地我们可以定义 $\mathbb{F}_{\geq 0}, \mathbb{F}_{>0}$ 或 $\mathbb{F}_{<0}$, 和 $\mathbb{F}_{\leq 0}$.

复数域中的元素表示为 $z = x + iy$, 其中 i 是虚根 $\sqrt{-1}$.

字体说明. 对流形或抽象的空间我们用拉丁大写字母的 “mathcal 型” 来表示, 比如 $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{X}, \mathcal{Q}$ 等.

人名表示说明. 本讲义中出现的外国人名均采用相应的英文人名来标示, 比如 Sobolev (索伯列夫). 华人人名均用中文来标示, 并在其后附上英文标示. 比如, 著名数学大师丘成桐教授, 其英文为 Shing-Tung Yau (按照英文惯例, 名在前, 姓在后). 从而依照这个说明, 应该写成丘成桐 (Shing-Tung Yau). 又比如著名的几何学家李伟光 (Peter Li). 由于港澳台 (亦包括 49 年之前的国人和侨居海外的华人) 人名的英文发音和汉语拼音发音不甚相似, 所以这些人名均采用上述之说明, 即中文加英文. 而大陆的学者, 就直接写出对应的中文名字.

其它符号说明. 证明的结尾用符号 \square 来表示. * 表示较难的章节, 可再第二遍时仔细琢磨; 但是作者强烈鼓励读者按照顺序阅读下来, 你会发现数学乐趣.

§1.4 作者声明

本讲义是作者多年来教学与科研的心得和体会, 非常愿意与诸君分享. 在未正式出版之前, 诸位可在本人主页上免费下载.

讲义中不可避免的有纰漏和笔误, 请读者批评斧正, 这样可以让我更加的完善本讲义. 由于这是作者的第一本中文讲义, 如有语句不通顺的地方, 也请读者批评指正.

本人的常用联系邮箱如下:

yilicms@seu.edu.cn

yilicms@gmail.com

yilicms@163.com

最后以王阳明先生的名句,也是本讲义的宗旨,来结束这一节的内容:

知行合一.

§1.5 预备知识 I: 集合与映射

本节将中学里的集合和映射做了些适当的加深. 首先回顾下几个常用的记号:

- \forall : “任意”
- \exists : “存在”
- $!$: 唯一
- $\exists!$: “存在且唯一”
- $A \Rightarrow B$: “A 推出 B”
- $A \Leftrightarrow B$: “A 和 B 等价”
- $A := B$: “A 由 B 定义”

给定一个集合 A , 其幂集定义为

$$2^A := \{\text{所有 } A \text{ 的子集}\}.$$

显然根据定义 $2^A \supseteq A$.

§1.5.1 集合的任意并和交

假设 \mathcal{A} 是一个集族 (即元素是集合的集合). 我们定义并和交如下:

(1) 并:

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A := \{x : x \in A \text{ 存在某个 } A \in \mathcal{A}\}.$$

(2) 交:

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A := \{x : x \in A \text{ 对任意 } A \in \mathcal{A}\}.$$

当 $\mathcal{A} = \emptyset$ 是空集时, 定义 $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \emptyset$.

§1.5.2 集合的 Cartesian 乘积: I

假设 A, B 是两个给定的集合.

(1) Cartesian 乘积:

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \text{ 且 } b \in B\}.$$

这里的符号 (a, b) 表示 a 和 b 的有序对, 其定义如下.

(2) 有序对:

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

这里 a 称为有序对的第一坐标而 b 称为有序对的第二坐标.

§1.5.3 映射

假设 C 和 D 是两个给定的集合.

(1) 一个赋值法则 R 是指满足条件

$$(c, d) \in R \text{ 和 } (c, d') \in R \implies d = d'$$

的 $C \times D$ 的子集.

(2) 假设 R 是一个赋值法则. 定义

$$\mathbf{Dom}(R) \equiv R \text{ 的定义域} := \{c \in C : \exists d \in D \text{ 使得 } (c, d) \in R\},$$

$$\mathbf{Im}(R) \equiv R \text{ 的像域} := \{d \in D : \exists c \in C \text{ 使得 } (c, d) \in R\}.$$

一个映射 f 是指一个二元对 (R, B) , 其中 R 是一个赋值法则, B 是一个集合 (称为 f 的值域), 满足 $\mathbf{Im}(R) \subseteq B$.

(1) f 的定义域 $\equiv \mathbf{Dom}(f) := \mathbf{Dom}(R)$.(2) f 的像域 $\equiv \mathbf{Im}(f) := \mathbf{Im}(R)$.

(3) 我们引入记号:

$$f : A \longrightarrow B, \quad a \longmapsto f(a),$$

这里 A 是 f 的定义域, B 是 f 的值域 (从而导致 $\mathbf{Im}(f) \subseteq B$), $f(a)$ 是 B 中满足条件 $(a, f(a)) \in R$ 的唯一元素.

例1.5.1. 假设 $C = D = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $R = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$, $B = \mathbb{R}$. 此时 $A = \mathbb{R}$, $\mathbf{Im}(f) = \mathbb{R}_{\geq 0}$.

考虑两个映射 $f : A \rightarrow B$ 和 $g : B \rightarrow C$.

(1) 对任意给定的 A 的子集 A_0 , 定义 f 在 A_0 上的限制为映射 $f|_{A_0} = f : A_0 \rightarrow B$.

(2) 复合:

$$g \circ f : A \rightarrow C, \quad a \mapsto c$$

这里 $f(a) = b$ 和 $g(b) = c$ 对某个 $b \in B$ 成立.

假设 $f : A \rightarrow B$ 是一映射.

(1) f 是单射如果

$$f(a) = f(a') \implies a = a'.$$

(2) f 是满射如果

$$\forall b \in B \exists a \in A \text{ 满足 } f(a) = b.$$

(3) f 是双射如果 f 既是单的又是满的.

(4) 若 f 是双射, 我们定义它的逆映射 f^{-1} 如下

$$f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b.$$

引理1.5.2. 假设 $f : A \rightarrow B$ 为一映射. 如果存在 f 的左逆 $g : B \rightarrow A$ (即 $g(f(a)) = a$ 对所有 $a \in A$ 都成立) 和 f 的右逆 $h : B \rightarrow A$ (即 $f(h(b)) = b$ 对所有 $b \in B$ 都成立), 则 $g = h = f^{-1}$.

练习1.5.3. (1) 证明若 f 有左逆, 则 f 是单射; 若 f 有右逆, 则 f 是双射.

(2) 给出存在左逆但不存在右逆的映射的例子.

(3) 给定的映射可以有多个左逆或右逆吗?

(4) 证明引理 1.5.2.

假设 $f : A \rightarrow B$ 是一个映射, $A_0 \subseteq A, B_0 \subseteq B$.

(1) A_0 在 f 下的像集 $\equiv f(A_0) := \{f(a) : a \in A_0\}$.

(2) B_0 在 f 下的原像集 $\equiv f^{-1}(B_0) := \{a \in A : f(a) \in B_0\}$. 特别地, 如果 $B = \{b\}$, 则符号 $f^{-1}(b) := f^{-1}(\{b\})$ 一般情形下不再是一个单元素集; 如果 f 本身是双射, 此时符号 $f^{-1}(b)$ 与之前的定义一样.

(3) 下列包含关系显然成立:

$$A_0 \subseteq f^{-1}(f(A_0)), \quad B_0 \supseteq f(f^{-1}(B_0)).$$

我们可以找到例子来说明上述包含关系可以严格取到, 即等号不一定成立 (请你试着找下).

如果在映射定义中 B 是一个数域, 那么我们把映射称为函数.

§1.5.4 * 范畴

范畴 \mathcal{C} 由如下要素所构成:

- 1) \mathcal{C} 中的对象构成类 $\mathbf{Ob}(\mathcal{C})$,
- 2) $\forall \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ 中的二元组 (X, Y) , \exists 集合 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ (称为 X 到 Y 的态射),
- 3) $\forall \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ 中的三元组 (X, Y, Z) , \exists 映射 (称为复合映射)

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z), \quad (f, g) \longmapsto g \circ f.$$

这些要素满足条件

- (a) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$,
- (b) $\forall X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C}) \exists \text{id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ 使得

$$f \circ \text{id}_X = f, \quad \text{id}_X \circ g = g$$

对任意 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 和 $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ 都成立.

例1.5.4. 下面是一些经典的范畴.

- (1) **Set**: 集合和映射
- (2) **Group**: 群和群同态 (抽象代数中)
- (3) **Vect_R**: 实向量空间和实线性映射 (高等代数中)
- (4) **Top**: 拓扑空间和连续映射 (拓扑学中)
- (5) **Calabi-Yau 范畴**: 微分几何/代数几何 \rightsquigarrow 同调镜像对称/SYZ 猜想.

假设 \mathcal{C} 是范畴.

- (1) 通常把态射 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 记作 $f: X \rightarrow Y$.
- (2) $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 称为同构如果存在态射 $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ 满足

$$f \circ g = \text{id}_Y \quad \text{和} \quad g \circ f = \text{id}_X.$$

- (3) \mathcal{C}' 称为 \mathcal{C} 的子范畴如果 \mathcal{C}' 本身是范畴并满足下列条件

- $\mathbf{Ob}(\mathcal{C}') \subseteq \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$,
- $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 对任意 $X, Y \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C}')$ 都成立,

- $\text{id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, X)$ 对每个 $X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C}')$ 都成立.

称 \mathcal{C}' 是 \mathcal{C} 的子范畴如果它本身是范畴并且 $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 对任意二元组 (X, Y) 都成立.

(4) **Top** 是 **Set** 的子范畴, 但不是完全子范畴.

(5) \mathcal{C} 的对偶范畴 \mathcal{C}° 定义如下:

$$\mathbf{Ob}(\mathcal{C}^\circ) := \mathbf{Ob}(\mathcal{C}), \quad \text{Hom}_{\mathcal{C}^\circ}(X, Y) := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X).$$

(6) 令 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

- f 是单的对任意 $W \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ 和任意 $g, g' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)$ 满足 $f \circ g = f \circ g'$, 都有 $g = g'$.

$$W \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{g'} \end{array} X \xrightarrow{f} Y$$

- f 是满的对任意 $Z \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ 和任意 $h, h' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ 满足 $h \circ f = h' \circ f$, 都有 $h = h'$.

$$X \xrightarrow{f} Y \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \xrightarrow{h'} \end{array} Z$$

- f 是双的如果它即是单的还是满的.

(7) $P \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ 是始的对任何 $Y \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$, 集合 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, Y)$ 只包含一个元素. $Q \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ 是终的对任何 $X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$, 集合 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Q)$ 只包含一个元素.

练习1.5.5. (1) 证明两个始的 (或终的) 对象必同构.

(2) 证明同构必是双的, 但反之则不一定成立.

范畴之间的(共变)函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ 由如下要素构成:

- 1) 映射 $F: \mathbf{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Ob}(\mathcal{C}')$,
- 2) $\forall \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ 二元组 $(X, Y), \exists$ 映射 $F: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), F(Y))$.

这些要素满足条件

- a) $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$, 和
- b) $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.

反变函子 $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ 是函子 $G: \mathcal{C}^{\circ} \rightarrow \mathcal{C}'$.

例1.5.6. (1) 遗忘函子 $F: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$.

(2) 基本群函子 $\pi_1: \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Group}$, $(X, x) \mapsto \pi_1(X, x)$ (X 在 x 的基本群).

(3) 任给 $X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$, 定义

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot): \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}, \quad Z \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z),$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X): \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}, \quad Z \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X).$$

则

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot)$ 是共变的而 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X)$ 是反变的.

考察两个函子 $F_1, F_2: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$. 函子之间的态射或自然变换 $\theta: F_1 \rightarrow F_2$ 构成如下:

$$X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C}) \implies \theta(X) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F_1(X), F_2(X)).$$

这些要素使得下面的图

$$\begin{array}{ccc} F_1(X) & \xrightarrow{\theta(X)} & F_2(X) \\ F_1(f) \downarrow & & \downarrow F_2(f) \\ F_1(Y) & \xrightarrow{\theta(Y)} & F_2(Y) \end{array} \quad F_2(f) \circ \theta(X) = \theta(Y) \circ F_1(f),$$

可交换, 即, $F_2(f) \circ \theta(X) = \theta(Y) \circ F_1(f)$, $\forall X, Y \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C}), \forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

定义1.5.7. 给定范畴 $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$, 定义新的范畴 $\mathbf{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ 如下:

$$\mathbf{Ob}(\mathbf{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')) := \{\text{函子 } F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'\}$$

和

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')} (F_1, F_2) := \{\text{态射 } \theta: F_1 \rightarrow F_2\}.$$

定义1.5.8. 假设 \mathcal{C} 是范畴. $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ 是可表函子若 $\exists X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ 使得 F 在 $\mathbf{Func}(\mathcal{C}, \mathbf{Set})$ 中和 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot)$ 同构.

注1.5.9. 如果 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ 是可表的, 则 X 在同构意义下是唯一的并把它称为 F 的表示.

定义1.5.10. 函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ 是完全忠实的 如果 $\forall X, Y \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$, 映射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), F(Y))$ 是双的.

定理1.5.11. (Yoneda 引理) (1) 对任意 $X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ 和 $F \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C}^\vee)$, 这里 $\mathcal{C}^\vee := \mathbf{Func}(\mathcal{C}^\circ, \mathbf{Set})$, 下面同构

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}^\vee}(\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X), F) \simeq F(X)$$

在 \mathbf{Set} 里成立, 这里 $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^\vee$ 是函子定义为 $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X) := \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X)$.

(2) $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}$ 是完全忠实函子.

证: (1) 对每个 $f \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}^\vee}(\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X), F)$, 赋予 $\phi(f) \in F(X)$ 如下:

$$f(X) : \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) \longrightarrow F(X), \quad \text{id}_X \longmapsto \phi(f) := f(X)(\text{id}_X).$$

反之, 对每个 $s \in F(X)$, 赋予 $\psi(s) \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}^\vee}(\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X), F)$ 如下:

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \xrightarrow{F} \mathbf{Hom}_{\mathbf{Set}}(F(X), F(Y)) \xrightarrow{s} F(Y)$$

这里 $\psi(s)(Y) := s \circ F$. 故 ϕ 和 ψ 互为逆同态.

(2) 对任意 $X, Y \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$, 下列同构

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}^\vee}(\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X), \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y)) \simeq \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, Y)(X) = \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

推出 $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}$ 是完全忠实的. \square

§1.5.5 关系

集合 A 上的关系是指 $A \times A$ 的子集 C . 如果 C 是 A 的关系, 则 $(x, y) \in C$ 记作 xCy .

集合 A 上的等价关系是指 A 上的关系 C 并满足如下性质:

- a) (自反性) $\forall x \in A \implies xCx$,
- b) (对称性) $xCy \implies yCx$,
- c) (传递性) xCy 和 $yCz \implies xCz$.

记号: 用 \sim 来表示等价关系.

(1) $x \in A$ 的等价类:

$$[x] := \{y \in A : y \sim x\} \ni x.$$

(2) 两个等价类要么不相交要么完全相等. 因此

$$A = \bigcup \{[x] : x \in A\}.$$

(3) 集合 A 的剖分是指 A 的一些互不相交的非空子集构成的集族且这些子集的并是 A .

(4) 给定 A 的一个剖分 \mathcal{D} , 则存在 A 上的由该剖分诱导出来的等价关系 \sim .

实际上, 定义 A 上的关系 \sim 为 $x \sim y$ 当且仅当 x, y 都属于 \mathcal{D} 中的某个元素. 易证 \sim 是 A 上的等价关系.

A 上的关系 C 称为**序关系**或**简单序**或**线性序**, 如果它满足如下性质:

- a) (相容性) $\forall x, y \in A$ 且 $x \neq y \implies$ 要么 xCy 要么 yCx ,
- b) (非自反性) 不存在 $x \in A$ 使得 xCx 成立,
- c) (传递性) xCy 和 $yCz \implies xCz$.

记号: 用 $<$ 表示序关系.

(1) 等价地说:

- a) $x \neq y \implies$ 要么 $x < y$ 要么 $y < x$,
- b) $x < y \implies x \neq y$,
- c) $x < y$ 和 $y < z \implies x < z$.

(2) $x \leq y$ 是指 $x < y$ 或 $x = y$.

(3) 假设 $(X, <)$ 是**有序集**, 即 X 上存在一个序关系 $<$. 对 $a < b$, 定义 X 中的**开区间**为

$$(a, b) := \{x \in X : a < x < b\}.$$

如果 $(a, b) = \emptyset$, 称 a 是 b 的**直接前位点** 而把 b 称为 a 的**直接后位点**.

(4) 考察两个有序集 $(A, <_A)$ 和 $(B, <_B)$. 称 A 和 B 有相同的**序型**如果集合之间存在保序的双射. 也就是说, 存在双射 $f: A \rightarrow B$ 满足

$$a_1 <_A a_2 \implies f(a_1) <_B f(a_2).$$

比如, $((-1, 1), <)$ 和 $(\mathbb{R}, <)$ 有相同的序型 ($x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$); $(\{0\} \cup (1, 2), <)$ 和 $([0, 2), <)$ 有相同的序型 ($0 \mapsto 0$ and $x \mapsto x - 1$ for $1 < x < 2$).

(5) 假设 $(A, <_A)$ 和 $(B, <_B)$ 是两个有序集. 定义 $A \times B$ 上的序关系 $<$ 如下:

$$(a_1, b_1) < (a_2, b_2)$$

若 $a_1 <_A a_2$ 或者若 $a_1 = a_2$ 但 $b_1 <_B b_2$.

假设 $(A, <)$ 是有序集, A_0 是 A 的子集.

(1) b 是 A_0 的**最大数**如果 $b \in A_0$ 且 $x \leq b$ 对任何 $x \in A_0$ 都成立. a 是 A_0 的**最小数**如果 $a \in A_0$ 且 $a \leq x$ 对任何 $x \in A_0$ 都成立.

- (2) A_0 是有上界的如果存在 $b \in A$ 使得 $x \leq b$ 对任意 $x \in A_0$ 都成立. 称 b 是 A_0 的一个上界. 令

$$\sup(A_0) := A_0 \text{ 的所有上界中的最小元}$$

为 A_0 的最小上界 or 上确界.

A_0 是有下界的如果存在 $a \in A$ 使得 $a \leq x$ 对任意 $x \in A_0$ 都成立. 称 a 是 A_0 的一个下界. 令

$$\inf(A_0) := A_0 \text{ 的所有下界中的最大元}$$

为 A_0 的最大下界 or 下确界.

- (3) 有序集 $(A, <)$ 满足最小上界性质 (或简记 **LUBP**) 如果 A 的任何非空有上界子集 A_0 有最小上界. 类似地, 有序集 $(A, <)$ 满足最大下界性质 (或简记 **GLBP**) 如果 A 的任何非空有下界子集 A_0 有最大下界. 注意到 **LUBP** \Leftrightarrow **GLBP**.

集合 $B := (-1, 0) \cup (0, 1)$ 不可能满足最小下界性质 (请验证!).

集合 A 上的关系 $<$ 称为严格偏序如果它满足下面性质:

- 1) (非自反性) $a < a$ 不可能成立,
- 2) (传递性) $a < b$ 和 $b < c \Rightarrow a < c$.

平面 \mathbb{R}^2 上存在自然的严格偏序 $<$:

$$(x_0, y_0) < (x_1, y_1) \iff y_0 = y_1 \text{ 且 } x_0 < x_1.$$

假设 $(A, <)$ 是严格偏序集, 即 $<$ 是 A 上的一个严格偏序.

- (1) 若 $B \subseteq A$, B 的上界是 A 中的元素 c 使得对任何 $b \in B$, 要么 $b = c$ 要么 $b < c$.
- (2) A 的最大元是 A 中的元素 m 使得不存在 A 中的元素 a 满足 $m < a$.
- (3) **Zorn 引理** (1935):

假设集合 A 上有一个严格偏序. 如果 A 的任何简单序子集在 A 中都有上界, 则 A 必有最大元.

Zorn 引理的一个简单应用如下: 考察集合 $A = \{a_n\}_{n \geq 1}$ 这里 $a_i \in \mathbb{R}$ 且 $|a_i| \leq M$ 对某个正数 M 成立. 从而 $(A, <)$ 是严格偏序集. 根据 Zorn 引理, A 有最大元.

一般地, 考察函数数列 $f(x, t)$, 这里 $|f(x, t)| \leq M$ 对任意 $x \in [0, 1]$ 和 $t \in \mathbb{R}$ 都成立. 对每个 $x \in [0, 1]$, 定义集合

$$A_x := \{f(x, t)\}_{t \in \mathbb{R}}.$$

则 A_x 有最大元 $f(x)$. 故得到映射

$$f: [0, 1] \longrightarrow A := \bigcup_{x \in [0, 1]} A_x, \quad x \longmapsto f(x).$$

一个很自然的问题是研究函数 $f(x)$ 的性质.

§1.5.6 集合的 Cartesian 乘积: II

假设 \mathcal{A} 是非空集族. \mathcal{A} 的指标映射是指从某个集合 J 到 \mathcal{A} 的满射映射 f . 这个集合 J 称为指标集.

- (1) (\mathcal{A}, f) 称为集合的指标类.
- (2) 给定 $\alpha \in J$, 把集合 $f(\alpha) \in \mathcal{A}$ 记作 A_α , 并把集合的指标类记作 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$.
- (3) 定义

$$\begin{aligned} \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha &:= \{x : \exists \alpha \in J \text{ 使得 } x \in A_\alpha\}, \\ \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha &:= \{x : \forall \alpha \in J, x \in A_\alpha\}. \end{aligned}$$

- (4) 若 $J = \{1, \dots, n\}$, 把 (3) 写成

$$\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha = \bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i, \quad \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha = \bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i.$$

- (5) 若 $J = \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 把 (3) 写成

$$\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha = \bigcap_{i \geq 1} A_i, \quad \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha = \bigcap_{i \geq 1} A_i.$$

假设 $m \in \mathbb{N}$. 给定集合 X , 定义 X 的 m -数组 为函数

$$x: \{1, \dots, m\} \longrightarrow X$$

对每个 $i \in \{1, \dots, m\}$, 记

$$x(i) := x_i,$$

并称为 x 的 i -坐标, 和 $x = (x_1, \dots, x_m)$.

(1) 假设 $\{A_1, \dots, A_m\}$ 是由集合 $\{1, \dots, m\}$ 作为指标集的集合类. 令

$$X := A_1 \cup \dots \cup A_m.$$

定义这个指标类的 **Cartesian 乘积**, 写作

$$\prod_{1 \leq i \leq m} A_i,$$

为由 X 的满足 $x_i \in A_i, 1 \leq i \leq m$, 的所有 m - 数组 (x_1, \dots, x_m) 构成的集合.

注1.5.12. (1) $A \times B$ 现在有两种不同的定义:

$$A \times_1 B := \{(a, b) : a \in A \text{ 和 } b \in B\},$$

$$A \times_2 B := \{x : \{1, 2\} \rightarrow A \cup B \text{ 满足 } x(1) \in A \text{ 和 } x(2) \in B\}.$$

可以证明这两种定义实际上是等价的. 定义双射映射

$$f : A \times_1 B \rightarrow A \times_2 B, \quad (a, b) \mapsto f((a, b))$$

这里 $f((a, b))(1) = a$ 和 $f((a, b))(2) = b$. 由于 f 是双的, $A \times_1 B \cong A \times_2 B$.

(2) 对集合 A, B, C , 有三种互相等价的 **Cartesian 乘积**

$$A \times (B \times C), \quad (A \times B) \times C, \quad A \times B \times C.$$

特别地, 对每个 $m \geq 1$ 可定义 **Cartesian 乘积** A^m .

给定集合 X , 定义 X 的 ω - 数组 为映射

$$x : \mathbb{Z}_{\geq 1} \rightarrow X, \quad n \mapsto x_n := x(n),$$

并记作 $x = (x_n)_{n \geq 1}$. 假设 $\{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}}$ 是指标集为正整数的集合类. 令

$$X := \bigcup_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} A_i.$$

$\{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}}$ 的 **Cartesian 乘积**, 记作

$$\prod_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} A_i,$$

定义为由 X 的满足 $x_i \in A_i$ 的所有 ω - 数组 $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}}$ 构成的集合.

一般地, 令 J 是指标集, X 是集合.

(1) X 的 J -数组是指映射

$$x: J \longrightarrow X, \quad \alpha \longmapsto x_\alpha := x(\alpha),$$

这里 x_α 称为 x 的 α -坐标. 记 $x = (x_\alpha)_{\alpha \in J}$.

(2) 引入

$$X^J := \{X \text{ 的 } J\text{-数组}\}.$$

(3) 假设 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ 是集合的指标类, $X := \cup_{\alpha \in J} A_\alpha$. $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ 的 **Cartesian 乘积**, 记作

$$\prod_{\alpha \in J} A_\alpha.$$

定义为由 X 的满足 $x_\alpha \in A_\alpha$ 的所有 J -数组 $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ 构成的集合.

当 X_n 都是 \mathbb{R} , 得到

$$\mathbb{R}^\omega := \prod_{n \geq 1} X_n.$$

§1.5.7 有限集、可数集和不可数集

在这小节我们研究集合

$$\{0, 1\}^\omega := \prod_{n \geq 1} X_n$$

这里 $X_n := \{0, 1\}$.

定义1.5.13. 集合 A 称为有限的, 如果它要么是空集, 要么存在 A 和某个集合 $\{1, \dots, n\}$ 之间的双射. 当 $A = \emptyset$ 时, 称 A 是基数 0, 否则称 A 是基数 n .

引理1.5.14. 假设 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, A 是非空集合, $a_0 \in A$. 存在 A 和 $\{1, \dots, n+1\}$ 之间的双射 f 当且仅当存在 $A \setminus \{a_0\}$ 和 $\{1, \dots, n\}$ 之间的双射 g .

证: \Leftarrow : 定义映射 $f: A \rightarrow \{1, \dots, n+1\}$ 为

$$f(a_0) := n+1, \quad f(x) := g(x) \quad (x \neq a_0).$$

\Rightarrow : 若 $f(a_0) = n+1$, 则定义 $g := f|_{A \setminus \{a_0\}}$. 现在假设 $f(a_0) = m \in \{1, \dots, n\}$, 令 $a_1 \in A$ 为满足 $f(a_1) = n+1$ 的元素. 则必有 $a_1 \neq a_0$. 定义映射 $h: A \setminus \{a_0\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ 为 $h(a_1) = m$ 和 $h(x) := f(x) \quad (x \neq a_1)$. \square

定理1.5.15. 令 A 是集合, 并假设存在双射 $f: A \rightarrow \{1, \dots, n\}$ (对某个 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$). 若 B 是 A 的真子集, 则不存在双射 $g: B \rightarrow \{1, \dots, n\}$, 但是 (只要 $B \neq \emptyset$) 存在双射 $h: B \rightarrow \{1, \dots, m\}$ (对某个 $m < n$).

证: 不失一般性, 不妨假设 $B \neq \emptyset$. 我们利用数学归纳法证明这个定理. 当 $n = 1, A = \{a\}, B = \emptyset$. 假设该定理对 n 成立. 令 $f: A \rightarrow \{1, \dots, n+1\}$ 为双射, B 是 A 的非空真子集. 取 $a_0 \in B$ 和 $a_1 \in A \setminus B$. 根据引理1.5.14, 存在双射 $g: A \setminus \{a_0\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$. 由于 $B \setminus \{a_0\}$ 是 $A \setminus \{a_0\}$ 的真子集, 归纳假设推出不存在双射 $h: B \setminus \{a_0\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, 且要么 $B \setminus \{a_0\} = \emptyset$ 要么存在双射 $k: B \setminus \{a_0\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ (对某个 $m < n$). 再次应用引理1.5.14 得到定理对 $n+1$ 也成立. \square

推论1.5.16. (1) 若 A 有限, 则不存在 A 与它真子集之间的双射.

(2) $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 不是有限集.

(3) 有限集 A 的基数由 A 唯一确定.

(4) 有限集的任何子集都是有限的. 如果 B 是有限集 A 的真子集, 则 B 的基数严格小于 A 的基数.

(5) $B \neq \emptyset \Rightarrow$ 下面断言等价:

(i) B 是有限的,

(ii) 存在满映射从某个 $\{1, \dots, n\}$ 到 B ,

(iii) 存在单映射从 B 到某个 $\{1, \dots, n\}$.

(6) 有限集的有限并和有限 Cartesian 乘积都是有限的.

证: (1) 假设 B 是 A 的真子集且存在双射 $f: A \rightarrow B$. 因为 A 是有限的, 存在双射 $g: A \rightarrow \{1, \dots, n\}$. 从而 $g \circ f^{-1}: B \rightarrow \{1, \dots, n\}$ 是双射, 但这是不可能的!

(2) 定义映射 $f: \mathbb{Z}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 1} \setminus \{1\}$ 为 $f(n) := n+1$. 因为 $\mathbb{Z}_{\geq 1} \setminus \{1\}$ 是真子集且 f 是双的, 从 (1) 得到 $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 不可能是有限的.

(3) 假设 $f: A \rightarrow \{1, \dots, n\}$ 和 $g: A \rightarrow \{1, \dots, m\}$ 都是双的, 这里 $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. 故 $g \circ f^{-1}: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ 是双的从而 $m = n$.

(4) 显然.

(5) (i) \Rightarrow (ii): 显然. (ii) \Rightarrow (iii): 假设 $f: \{1, \dots, n\} \rightarrow B$ 是满的. 定义 $g: B \rightarrow \{1, \dots, n\}$ 为

$$g(b) := f^{-1}(\{b\}) \text{ 中的最小元.}$$

若 $b \neq b', f^{-1}(\{b\}) \cap f^{-1}(\{b'\}) = \emptyset$, 所以 g 是单的. (iii) \Rightarrow (i): 假设 $g: B \rightarrow \{1, \dots, n\}$ 是单的. 则存在某个 $m \leq n$ 使得 $g: B \rightarrow \{1, \dots, m\}$ 是双的. 从而 B 是有限的.

(6) 假设 A 和 B 都是有限的而且都是非空的. 存在双射 $f: \{1, \dots, m\} \rightarrow A$ 和 $g: \{1, \dots, n\} \rightarrow B$, 对某些 m 和 n . 定义

$$h: \{1, \dots, m+n\} \longrightarrow A \cup B, \quad i \longmapsto \begin{cases} f(i), & 1 \leq i \leq m, \\ g(i-m), & m+1 \leq i \leq m+n. \end{cases}$$

由于 h 是满的, 根据 (5) 得到 $A \cup B$ 是有限的. 归纳假设可证明有限集的有限并也是有限的.

从下列关系

$$A \times B := \bigcup_{a \in A} \{a\} \times B$$

得到 $A \times B$ 从而有限集的有限 Cartesian 乘积都是有限的. \square

不巧的是, 有限集无限 Cartesian 乘积是很复杂的. 我们需要以下定义.

定义1.5.17. (1) 集合 A 称为无限的如果他不是有限的. A 称为无限可数的如果存在双射 $f: A \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

(2) 集合 A 称为可数的如果它要么是有限要么是无限可数的. A 称为不可数的如果它不是可数的.

有些书上把定义1.5.17中的无限可数的称为可数的, 而把可数的称为至多可数的.

定理1.5.18. $B \neq \emptyset \implies$ 下列断言等价:

- (a) B 是可数的,
- (b) 存在满映射 $f: \mathbb{Z}_{\geq 1} \rightarrow B$,
- (c) 存在单映射 $g: B \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

证: (a) \implies (b): 显然.

(b) \implies (c): 令 $f: \mathbb{Z}_{\geq 1} \rightarrow B$ 是满的. 定义 $g: B \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 为 $g(b) := f^{-1}(\{b\})$ 中的最小元.

(c) \implies (a): 令 $g: B \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 为单的. 则存在 B 与 $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 的某个子集之间的双射. 因此只要证明 $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 的每个子集都是可数的 (见引理1.5.19). \square

引理1.5.19. 如果 C 是 $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 的无限子集, 则 C 是无限可数的.

证: 定义双射 $h: \mathbb{Z}_{\geq 1} \rightarrow C$ 如下. 记 $h(1)$ 为 C 中的最小元. 假设 $h(1), \dots, h(n-1)$ 已经定义, 令

$$h(n) := C \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq n-1} h(i) \text{ 中的最小元.}$$

断言 1: h 是单的. 若 $m < n$, 则 $h(m) \in h(\{1, \dots, n-1\})$ 从而 $h(m) \neq h(n)$.

断言 2: h 是满的. 取 $c \in C$. h 是单映射推出 $h(\mathbb{Z}_{\geq 1})$ 是无限的而且 $h(n) > c$ 对某个 $c \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 成立. 令

$$m := \mathbb{Z}_{\geq 1} \text{ 中满足 } h(m) \geq c \text{ 的最小元.}$$

对每个 $i = 1, \dots, m-1$, 有 $h(i) < c$ 从而 $c \in C \setminus \cup_{1 \leq i \leq m-1} h(i)$. 根据 $h(m)$ 的定义, 必有 $h(m) \leq c$. 因此 $h(m) = c$. \square

推论1.5.20. (1) 可数集的子集也是可数的.

(2) $\mathbb{Z}_{\geq 1} \times \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 是无限可数的.

证: (1) 假设 $A \subseteq B$ 且 B 是可数的. 根据定理 1.5.18, 存在单映射 $f: B \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 1}$. 故 $f|_A: A \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 也是单的, 从而 A 是可数的.

(2) 因为 $\mathbb{Z}_{\geq 1} \times \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 是无限集, 只要构造单映射 $f: \mathbb{Z}_{\geq 1} \times \mathbb{Z}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 1}$. 定义

$$f(n, m) := 2^n 3^m.$$

若 $f(n, m) = f(p, q)$, 则 $2^n 3^m = 2^p 3^q$. 若 $n < p$, 则 $3^m = 2^{p-n} 3^q$, 矛盾! 所以 $n = p$ 且 $m = q$. \square

定理1.5.21. (1) 可数集的可数并是可数的.

(2) 可数集的有限 Cartesian 乘积是可数的.

(3) $\{0, 1\}^\omega$ 是不可数的.

(4) 给定集合 A . 则不存在单映射 $f: 2^A \rightarrow A$ 和满映射 $g: A \rightarrow 2^A$.

(5) $2^{\mathbb{Z}_{\geq 1}}$ 是不可数的.

证: 观察到 (5) 可由 (4) 和定理 1.5.18 得到.

(1) 假设 $\{A_n\}_{n \in J}$ 是可数集的指标类, 这里指标集 J 要么是 $\{1, \dots, N\}$ 要么是 $\mathbb{Z}_{\geq 1}$. 假设每个集合 $A_n \neq \emptyset$. 根据定理 1.5.18, 存在满映射 $f_n: \mathbb{Z}_{\geq 1} \rightarrow A_n$ 和 $g: \mathbb{Z}_{\geq 1} \rightarrow J$. 定义

$$h: \mathbb{Z}_{\geq 1} \times \mathbb{Z}_{\geq 1} \longrightarrow \bigcup_{n \in J} A_n, \quad (k, m) \longmapsto f_{g(k)}(m).$$

则 h 是满映射.

(2) 不失一般性, 只要证明两个可数集 A 和 B 的 Cartesian 乘积是可数的. 就像在 (1) 中一样, 存在满映射 $f: \mathbb{Z}_{\geq 1} \rightarrow A$ 和 $g: \mathbb{Z}_{\geq 1} \rightarrow B$. 定义 $h: \mathbb{Z}_{\geq 1} \times \mathbb{Z}_{\geq 1} \rightarrow A \times B$ 为 $h(m, n) := (f(m), g(n))$.

(3) 令 $X = \{0, 1\}$. 对任意给定的映射 $g: \mathbb{Z}_{\geq 1} \rightarrow X^\omega$, 断言 g 不可能是满的. 记

$$g(n) := (x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \dots, x_{nm}, \dots), \quad x_{ij} \in \{0, 1\}.$$

定义 $\mathbf{y} := (y_i)_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}}$ 为

$$y_n := \begin{cases} 0, & x_{nn} = 1, \\ 1 & x_{nn} = 0. \end{cases}$$

则 $\mathbf{y} \in X^\omega$ 但是 $\mathbf{y} \notin g(\mathbb{Z}_{\geq 1})$.

(4) 只要证明给定映射 $g: A \rightarrow 2^A$, g 不可能是满的 (因为单映射的存在性可以推出满映射的存在性). 定义

$$B := \{a \in A : a \in A \setminus g(a)\} \in 2^A.$$

假设 $g(a_0) = B$. 故

$$a_0 \in B \iff a_0 \in A \setminus g(a_0) \iff a_0 \in A \setminus B.$$

所以 g 不是满的. \square

练习1.5.22. (1) 实数 x 称为代数的 如果它满足多项式方程 (该多项式次数为正)

$$0 = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{Q}.$$

假设每个多项式方程只有有限多个根, 证明代数数集合是可数的.

(2) 一个实数称为超越的 如果它不是代数的. 假设 \mathbb{R} 是不可数的, 证明超越数集合是不可数的 (比如 e, π 都是超越数).

练习1.5.23. 称两个集合 A 和 B 有相同基数 如果 A 和 B 之间存在双射.

(1) 假设 $B \subseteq A$ 并假设存在双射 $f: A \rightarrow B$, 证明 A 和 B 有相同基数. [提示: 定义 $A_1 := A, B_1 := B$, 且对任意 $n \geq 2, A_n := f(A_{n-1}), B_n := f(B_{n-1})$. 则 $A_1 \supseteq B_1 \supseteq A_2 \supseteq B_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$. 令

$$h: A \longrightarrow B, \quad x \longmapsto \begin{cases} f(x), & \text{if } x \in A_n \setminus B_n \text{ 对某个 } n, \\ x, & \text{其它情形.} \end{cases}$$

]

(2) (**Schroeder-Berstein 定理**) 如果存在单映射 $A \rightarrow B$ 和 $B \rightarrow A$, 则 A 和 B 有相同基数.

§1.6 预备知识 II: 函数

中学时期我们学过六类初等函数:

- (1) 常值函数: $y = c$,
- (2) 幂函数: $y = x^a, a \neq 0$,
- (3) 指数函数: $y = a^x, a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}$,
- (4) 对数函数: $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1, x > 0$,
- (5) 三角函数: $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x$,
- (6) 反三角函数: $\sin^{-1} x, \cos^{-1} x, \tan^{-1} x, \cot^{-1} x, \sec^{-1} x, \csc^{-1} x$.

§1.6.1 几类特殊的函数

我们也知道比如周期函数, 有界函数, 奇/偶函数, 单调函数, 反函数等常见的几类特殊函数.

例1.6.1. (a) Dirichlet 函数

$$D(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(b) 符号函数

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

(c) 取整函数

$$\lfloor x \rfloor := n \text{ if } n \leq x < n + 1,$$

and

$$\langle x \rangle := x - \lfloor x \rfloor.$$

(d) 定义

$$\pi(x) := \#(\text{素数} \leq x).$$

(e) Möbius 函数

$$\mu(n) := \begin{cases} (-1)^r, & n = p_1 \cdots p_r \text{ 且 } p_1, \dots, p_r \text{ 各异,} \\ 0, & \text{其它情形.} \end{cases}$$

(f) Margoldt 函数

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \ln p, & n = p^\alpha, \alpha \geq 1, \\ 0, & \text{其他情形.} \end{cases}$$

(g) 双曲函数:

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

注意到 $y = \sin x$ (或 $y = \sinh x$) 是常微分方程 $y'' + y = 0$ (或 $y'' - y = 0$) 的解.

§1.6.2 * 素数和素数基本定理

Euclid 几千年前已经证明了素数由无穷多个. 令

$$p_1 < p_2 < \cdots < p_n < \cdots$$

为全体素数. 假设素数只有有限多个, 比如 $p_1 < p_2 < \cdots < p_N$. 那么我们考虑一个新的正整数 $a := p_1 \cdots p_N + 1$. 如果这个数 a 是素数, 则我们得到一个比 p_1, \cdots, p_N 都要大的新的素数, 产生矛盾. 因此这个数 a 一定是合数. 根据素数分解定理, 至少有一个素数, 不妨假设为 p_1 , 整除 a 从而整除 1, 矛盾! 从而素数一定由无穷多个.

接下来有两个很自然的问题.

1. 是否存在一个公式可以表示每个素数? 即, 是否存在素数的一般表达式? 答案是, 有的且有许多个! 但是没有一个是有意思的. 比如, 考察如下给出第 n 个素数的公式

$$p_n = 1 + \sum_{1 \leq m \leq 2^n} \left[\left[\frac{n}{1 + \pi(m)} \right]^{1/n} \right].$$

这里 $\pi(x)$ 表示所有不超过 x 的素数的个数. $n = 2$ 时候, 根据上面这个公式我们得到

$$p_2 = 1 + \left[\left[\frac{2}{1 + \pi(1)} \right]^{1/2} \right] + \left[\left[\frac{2}{1 + \pi(2)} \right]^{1/2} \right] + 0 + 0 = 1 + 1 + 1 = 3.$$

但是这种公式没有任意意义, 原因是为了得到第 n 个素数的值, 我们必须预先知道 $\pi(1), \cdots, \pi(2^n)$ 的值.

2. 素数分布的形态. 从上面 Euclid 的证明中我们可以发现

$$p_{k+1} \leq p_1 \cdots p_k + 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

根据 $p_1 = 2$, 我们可以证明

$$p_k \leq 2^{2^{k-1}}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.6.1)$$

事实上, 由数学归纳法得到

$$p_{k+1} \leq \prod_{1 \leq i \leq k} p_i + 1 \leq \prod_{1 \leq i \leq k} 2^{2^{i-1}} + 1 = 2^{2^k - 1} + 1 = 2^k.$$

推论1.6.2. 对任意 $x \geq 2$, 有

$$\pi(x) > \ln \ln x. \quad (1.6.2)$$

证明: 选择一个自然数 ℓ 使得不等式 $2^{\ell-1} \leq x < 2^\ell$ 成立. 根据 (1.6.1) 我们得到 $p_\ell \leq 2^{2^{\ell-1}}$ 从而 $\pi(x) \geq \ell$ 成立. 因为 $2^\ell > \ln x / \ln 2$ 和 $0 < \ln 2 < 1$, 我们得到

$$\pi(x) \geq \ell > \frac{\ln(\ln x / \ln 2)}{\ln 2} > \frac{\ln \ln x}{\ln 2} > \ln \ln x$$

成立. \square

根据级数展开 (级数理论在 第六章)

$$2 \geq \frac{p}{p-1} = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}, \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} z^n,$$

我们得到如下不等式 (积分理论在 第五章)

$$\begin{aligned} 2^{\pi(x)} &\geq \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \prod_{p \leq x} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots\right) \\ &\geq \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \geq \int_1^{\lfloor x \rfloor + 1} \frac{dt}{t} = \ln(\lfloor x \rfloor + 1) > \ln x, \end{aligned}$$

从而不等式 $\pi(x) > \ln \ln x / \ln 2 > \ln \ln x$ 对任意 $x \geq 2$ 都成立.

1896 年 **Poussion** (1866 - 1962, 比利时) 和 **Hadamard** (1865 - 1963, 法国) 分别独立证明了素数定理

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}. \quad (1.6.3)$$

早在 1762 年, **Euler** (1707 - 1783, 瑞士) 认为 $\pi(x)$ 逼近到 $x / \ln x$. 而在之后的 1792 年, 15 岁的 **Gauss** (1777 - 1855, 德国) 也做出了同样的断言. 1798 年 **Legendre** (1752 - 1833, 法国) 猜测出关于 $\pi(x)$ 的一个好的逼近: 存在两个常数 A 和 B 使得

$$\pi(x) \sim \frac{x}{A \ln x + B} \quad (1.6.4)$$

成立, 并且在之后的 1808 年预测 $A = 1$ 和 $B = -1.08366$. **Gauss** 是第一个写出如下对数积分的定义

$$\mathbf{li}(x) := \mathbf{P.V.} \int_0^x \frac{dt}{\ln t} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_0^{1-\epsilon} + \int_{1+\epsilon}^x \right) \frac{dt}{\ln t}, \quad x \geq 2, \quad (1.6.5)$$

这是 $\pi(x)$ 的一个很好的逼近. 上面定义的对数积分也可重新写成

$$\mathbf{li}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_0^{1-\epsilon} + \int_{1+\epsilon}^2 \right) \frac{dt}{\ln t} + \mathbf{Li}(x), \quad (1.6.6)$$

这里

$$\mathbf{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\ln t} \quad (1.6.7)$$

是一个定积分 (定积分理论在 第五章). 令 $s := 2 - t$ 得到

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_0^{1-\epsilon} + \int_{1+\epsilon}^2 \right) \frac{dt}{\ln t} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_0^{1-\epsilon} \frac{dt}{\ln t} + \int_0^{1-\epsilon} \frac{ds}{\ln(2-s)} \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_0^1 \frac{du}{\ln(1-u)} + \int_\epsilon^1 \frac{du}{\ln(1+u)} \right) = \int_0^1 \left[\frac{1}{\ln(1-u)} + \frac{2}{\ln(1+u)} \right] du. \end{aligned}$$

根据

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} u^{1/2} \left[\frac{1}{\ln(1-u)} + \frac{1}{\ln(1+u)} \right] = \lim_{u \rightarrow 0^+} u^{1/2} = 0,$$

我们发现上述积分 (反常积分理论在第五章) 是有定义的而且 $\mathbf{li}(x)$ 对每个 $x \geq 2$ 都是有限的. 由分部积分得到

$$\mathbf{Li}(x) = \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2} + \int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t} = \frac{x}{\ln x} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right). \quad (1.6.8)$$

特别地, 素数定理可以重新陈述为

$$\mathbf{li}(x) \sim \mathbf{Li}(x) \sim \frac{x}{\ln x} \sim \pi(x), \quad (1.6.9)$$

当 $x \rightarrow +\infty$ 时. 由于

$$\mathbf{Li}(x) = \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{\ln^2 x} - \frac{2}{\ln 2} - \frac{2}{\ln^2 2} - 2 \int_2^x \frac{dt}{\ln^3 t} = \frac{x}{\ln x} \left[1 + \frac{1}{\ln x} + O\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right) \right]$$

我们得到

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \frac{1}{1 - \frac{1}{\ln x}} = \frac{x}{\ln x - 1}, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (1.6.10)$$

Chebyshev (1821 - 1894, 俄罗斯) 证明了如果函数 $\pi(x)/(x/\ln x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时存在极限 (极限理论在第三章), 则极限一定等于 1. 1850 年, **Chebyshev** 证明了不等式

$$c_1 \frac{x}{\ln x} \leq \pi(x) \leq c_2 \frac{x}{\ln x} \quad (1.6.11)$$

对任何 $x \geq 10$ 都成立, 这里

$$c_1 := \ln \frac{2^{1/2} 3^{1/3} 5^{1/5}}{30^{1/30}} \approx 0.921292, \quad c_2 := \frac{6}{5} c_1 \approx 1.1055.$$

我们把不等式 (1.6.11) 称为 **Chebyshev** 不等式.

定理1.6.3. (Erdős) 对任意 $x \geq 2$, 我们有

$$\frac{3 \ln 2}{8} \frac{x}{\ln x} \leq \pi(x) \leq 6 \ln 2 \frac{x}{\ln x}. \quad (1.6.12)$$

证明: 首先我们来证明如下一个引理.

引理1.6.4. 令 p 是一个素数且令 $e_p(n!)$ 是 $n!$ 中素数分解中 p 出现的次数. 则

$$e_p(n!) = \sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor. \quad (1.6.13)$$

首先注意到 (1.6.13) 中是对有限项进行求和. 举个例子来说明这个公式. 取 $p = 2$ 和 $n = 4$ 得到

$$e_2(4!) = e_2(24) = e_2(2^3 \times 3) = 3 = 2 + 1 = \left\lfloor \frac{4}{2^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4}{2^2} \right\rfloor.$$

证明: 假设公式 (1.6.13) 对 n 成立. 对 $n+1$ 根据素数分解定理我们可以写成 $n+1 = p^u m$ 的形式, 其中 $p \nmid m$. 从而得到

$$e_p((n+1)!) = e_p(n!) + u = \sum_{1 \leq k \leq u} \left(\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor + 1 \right) + \sum_{k > u} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

但是因为

$$\left\lfloor \frac{n+1}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor + 1 \quad \text{若 } 1 \leq k \leq u, \quad \left\lfloor \frac{n+1}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \quad \text{若 } k > u,$$

我们证明了 (1.6.13) 对 $n+1$ 也是成立. \square

继续完成定理 1.6.3 的证明. 如果 $n > 1$, 则

$$\prod_{n < p \leq 2n} p \left| \binom{2n}{n} \right| \prod_{p < 2n} p^{r_p} \quad (1.6.14)$$

这个 r_p 是满足不等式 $p^{r_p} \leq 2n < p^{r_p+1}$ 的唯一整数. 对任意 $p > 2n$, p 出现在 $\binom{2n}{n}$ 中的指数等于

$$e_p \left(\binom{2n}{n} \right) = e_p((2n)!) - 2e_p(n!) = \sum_{k \geq 1} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right).$$

对任何 $y > 0$ 观察到

$$\lfloor 2y \rfloor - 2\lfloor y \rfloor = 1, \quad \text{若 } \frac{k}{2} \leq y < \frac{k+1}{2}$$

其中 $k \geq 0$ 是某个整数. 更进一步, 当 $k > r_p$ 时, $p^k > 2n$, 所以 $\lfloor 2n/p^k \rfloor = 0$ 和 $\lfloor n/p^k \rfloor = 0$ 对这样的 k 都成立. 所以

$$e_p \left(\binom{2n}{n} \right) \leq \sum_{1 \leq k \leq r_p} 1 = r_p$$

成立从而推出 (1.6.14). (1.6.14) 中第二个整除关系意味着

$$\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\pi(2n)}.$$

利用二项式展开 $(1+1)^{2n} = \sum_{0 \leq k \leq 2n} \binom{2n}{k}$ 和不等式 $\binom{2n}{n} \geq \binom{2n}{k}$ 对任何 $k = 0, 1, \dots, 2n$ 都成立, 我们得到

$$\binom{2n}{n} > \frac{2^{2n}}{2n+1} > 2^n, \quad n \geq 3.$$

(作为数学归纳法的练习, 请验真第二个不等式). 结合上面两个不等式得到

$$2^n < \frac{2^{2n}}{2n+1} < \binom{2n}{n} < (2n)^{\pi(2n)} \implies \pi(2n) > \frac{\ln 2}{2} \frac{2n}{\ln(2n)}, \quad n \geq 3.$$

假设 $x \geq 8$, 令 n 是满足不等式 $2n \leq x < 2n+2$ 的唯一正整数. 显然 $n \geq 3$. 进一步我们有 $2n > x-2 \geq 3x/4$. 由于函数 $y \mapsto y/\ln y$ 对任意 $y \geq e$ 是递增, 我们得到对 $x \geq 8$

$$\pi(x) \geq \pi(2n) \geq \frac{\ln 2}{2} \frac{2n}{\ln(2n)} \geq \frac{\ln 2}{2} \frac{3x/4}{\ln(3x/4)} = \frac{3 \ln 2}{8} \frac{x}{\ln x + \ln \frac{3}{4}} > \frac{3 \ln 2}{8} \frac{x}{\ln x}.$$

这个不等式显然对 $x \in [2, 8)$ 也成立.

练习1.6.5. 证明不等式 (1.6.14).

接下来证明: 对任意 $x \geq 2$ 有

$$\pi(x) \leq 6 \ln 2 \frac{x}{\ln x}.$$

根据 (1.6.14) 得到 $\prod_{n < p \leq 2n} p < (1+1)^{2n} = 2^{2n}$ 且

$$2n \ln 2 > \sum_{n < p \leq 2n} \ln p \geq \ln n [\pi(2n) - \pi(n)] = \pi(2n) \ln n - \pi(n) \left(\ln \frac{n}{2} + \ln 2 \right).$$

利用 $\pi(n) \leq n$ 推出

$$\pi(2n) \ln n - \pi(n) \ln \frac{n}{2} < 2n \ln 2 + \pi(n) \ln 2 < (3 \ln 2)n.$$

引入函数

$$f(n) := \pi(2n) \ln 2;$$

得到不等式

$$f(n) - f(n/2) < (3 \ln 2)n.$$

取 $n = 2^i$ ($2 \leq i \leq k$) 得到

$$f(2^i) - f(2^{i-1}) < (3 \ln 2)2^i.$$

故

$$\pi(2^{k+1}) \ln(2^k) < 3 \ln 2 \sum_{2 \leq i \leq k} 2^i + \pi(4) \ln 2 < 3 \ln 2 \sum_{1 \leq i \leq k} 2^i < (3 \ln 2)2^{k+1}$$

从而

$$\pi(2^{k+1}) < (6 \ln 2) \frac{2^k}{\ln(2^k)}.$$

给定 $x \geq 2$, 选择正整数 $k \geq 1$ 使得 $2^k \leq x < 2^{k+1}$ 成立. 若 $x \geq 4$, 则 $k \geq 2$ 和 $2^k \geq 4 > e$. 即 $2^k / \ln(2^k) \leq x / \ln x$ 只要 $x \geq 4$. 综上所述

$$\pi(x) \leq \pi(2^{k+1}) < 6 \ln 2 \frac{2^k}{\ln(2^k)} < (6 \ln 2) \frac{x}{\ln x}. \quad \square$$

Bertrand 假设:

- (1) 1845 年 **Joseph Bertrand** 证明了只要 $n \leq 6 \cdot 10^6$, 区间 $[n, 2n]$ 内至少有一个素数.
- (2) **Bertrand** 猜测 (1) 对任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 也成立.
- (3) 1850 年 **Chebyshev** 证明了 (2).

定理 1.6.6. 对每个 $n \in \mathbb{N}$, 存在素数 p 满足 $n < p \leq 2n$.

证: 下面证明属于 **Erdős**.

步骤 1: 对每个 $n \in \mathbb{N}$,

$$\prod_{p \leq n} p < 4^n.$$

不失一般性, 不妨假设 $n \geq 3$ 且结论对每个 $k-1, \dots, n-1$ 都成立. 若 n 是偶数, 则

$$\prod_{p \leq n} p = \prod_{p \leq n-1} p.$$

因此只要假设 n 是奇数. 记 $n = 2m + 1$ 并观察到

$$\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \binom{2m+1}{m+1} \leq \frac{2^{2m+1}}{2} = 4^m.$$

所以

$$\prod_{p \leq 2m+1} p = \left(\prod_{p \leq m+1} p \right) \left(\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \right) \leq 4^{m+1} \cdot 4^m = 4^{2m+1}.$$

步骤 2: 若 $n \geq 3$, p 是素数且 $\frac{2}{3}n < p \leq n$, 则

$$p \nmid \binom{2n}{n}.$$

实际上, $p > \frac{2}{3}n \geq 2$. 因为 $3p > 2n$, p 和 $2p$ 是 p 的 $\leq 2n$ 的唯一两个倍数. 从而 $p^2 \parallel (2n)!$. 由于

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2},$$

推出 $\binom{2n}{n}$ 不可能是 p 的倍数.

步骤 3: 假设 $n \geq 4$ 且结论对某个 n 不成立 (从而在区间 $[n, 2n]$ 内不存在任何素数). 在这一步, 将证明 $n < 512$. 根据 **步骤 2**, 整除 $\binom{2n}{n}$ 的每个素数 p 必须 $\leq \frac{2}{3}n$. 令 $p^\alpha \parallel \binom{2n}{n}$. 则

$$\alpha \leq r_p \quad \text{和} \quad p^{r_p} \leq 2n < p^{r_p+1}.$$

如果 $\alpha \geq 2$, 则 $p^2 \leq p^\alpha \leq 2n$ 和 $p \leq \sqrt{2n}$, 从而

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &= \prod_{p|(2n)} p = \left(\prod_{p|(2n), \alpha=1} p^\alpha \right) \left(\prod_{p|(2n), \alpha \geq 2} p^\alpha \right) \\ &\leq \prod_{p \leq 2n/3} p \cdot \prod_{p \leq \sqrt{2n}} p^{r_p} \leq 4^{2n/3} \cdot (2n)^{\sqrt{2n}}. \end{aligned}$$

利用 $\binom{2n}{n} \geq 2^{2n}/(2n+1)$ 得到

$$4^{2n/3} (2n)^{\sqrt{2n}} \geq \frac{4^n}{2n+1} \Rightarrow 4^{n/3} \leq (2n)^{\sqrt{2n}+2} \Rightarrow \frac{\ln 2}{3} (2n) < (\sqrt{2n}+2) \ln(2n).$$

引入 $y := \sqrt{2n}$, 推出不等式

$$\frac{\ln 2}{3} y^2 - 2(y+2) \ln y < 0.$$

考察函数 $f(y) := \frac{\ln 2}{3} y^2 - 2(y+2) \ln y$ 这里 $y \geq 0$. 从

$$f'(y) = \frac{2 \ln 2}{3} y - 2 \ln y - 2 \frac{y+2}{y}, \quad f''(y) = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{2}{y} + \frac{4}{y^2} > \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{2}{y},$$

我们看到当 $y > 32$ 时, $f''(y) > 0$. 但是 $f'(32) = \frac{64}{3} \ln 2 - 2 \ln(32) - 2.2 > 0$, 得到 $f'(y) > 0$ 对任何 $y \geq 32$ 都成立. 特别地, $f(y) \geq f(32)$ 对任何 $y \geq 32$ 都成立. 由于

$$f(32) = 2^{10} \frac{\ln 2}{3} - 340 \times \ln 2 = \frac{1024 - 1020}{3} \ln 2 = \frac{4}{3} \ln 2 > 0,$$

不等式 $f(y) > 0$ 对任意 $y \geq 32$ 都成立. 这个矛盾推出 $y < 32$ 或 $n < 512$.

对每个 $n = 1, \dots, 511$, 区间 $[n, 2n]$ 总是包含一个素数. 从而步骤 3 中的假设错误. \square

孪生素数猜想:

(1) 从定理 1.6.6 得到

$$p_{n+1} - p_n \leq p_n. \quad (1.6.15)$$

猜想 1.6.7. (Gramer, 1936) 证明

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{(\ln p_n)^2} \leq 1. \quad (1.6.16)$$

sup/inf 极限之后会定义.

(2) Baker-Haman-Pintz (2001) 证明了

$$p_{n+1} - p_n < p_n^{0.525}, \quad n \gg 1. \quad (1.6.17)$$

(4) 若 p 和 $p+2$ 都是素数, 称 $(p, p+2)$ 是孪生素数对.

猜想1.6.8. (孪生素数猜想) 存在无穷多个正整数 n 使得 $p_{n+1} - p_n = 2$. 等价地

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (p_{n+1} - p_n) = 2. \quad (1.6.18)$$

(4) **Goldston-Pintz-Yildirim** (2009-2010) 证明了

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{\ln p_n} = 0, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{\sqrt{\ln p_n (\ln \ln p_n)^2}} < \infty. \quad (1.6.19)$$

定理1.6.9. (张益唐, 2013)

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (p_{n+1} - p_n) \leq 7 \times 10^7. \quad (1.6.20)$$

假设 $b_1 < \dots < b_k$ 为一列正整数. 对每个素数 p , 引入

$$v_{b_1, \dots, b_k}(p) := \#\{b_i \pmod{p} : 1 \leq i \leq k\}. \quad (1.6.21)$$

当 $k=2$, $(b_1, b_2) = (0, 2)$, 得到

$$v_{0,2}(p) = \#\{0 \pmod{p}, 2 \pmod{p}\} = \begin{cases} 1, & p=2, \\ 2, & p \geq 3. \end{cases} \implies v_{0,2}(p) < p.$$

猜想1.6.10. (Dickson, 1904) 若 $v_{b_1, \dots, b_k}(p) < p$ 对所有素数 p 都成立, 则存在无穷多个正整数 n 使得 $n+b_1, \dots, n+b_k$ 都是素数.

显然猜想 1.6.10 可推出猜想 1.6.8.

猜想1.6.11. (Hardy-Littlewood, 1923) 对任意 $x, y \geq 1$, 证明

$$\pi(x+y) \leq \pi(x) + \pi(y). \quad (1.6.22)$$

Hensley-Richards (1972) 证明了猜想 1.6.10 和猜想 1.6.11 是不相容的. 人们相信猜想 1.6.10 是对的, 而猜想 1.6.11 是错误的.

§1.6.3 超越数 π 和 e

接下来我们会证明

$$\begin{aligned} e &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}, \\ \frac{\pi^2}{6} &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}, \\ n! &\sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (\text{Stirling}) \end{aligned} \quad (1.6.23)$$

§1.6.4 * 度量空间

考察 n 维 Euclidean 空间 \mathbb{R}^n , 通常的距离函数 $d_{\mathbb{R}^n}$ 定义为

$$d_{\mathbb{R}^n}(x, y) := \left(\sum_{1 \leq i \leq n} (x^i - y^i)^2 \right)^{1/2}, \quad x = (x^1, \dots, x^n), \quad y = (y^1, \dots, y^n).$$

在中学时期我们知道

- $d_{\mathbb{R}^n}(x, y) \geq 0$ 且 $d_{\mathbb{R}^n}(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$,
- $d_{\mathbb{R}^n}(x, y) = d_{\mathbb{R}^n}(y, x)$,
- $d_{\mathbb{R}^n}(x, z) \leq d_{\mathbb{R}^n}(x, y) + d_{\mathbb{R}^n}(y, z)$.

定义1.6.12. 度量空间 (metric space) 是指二元组 (X, d) , 其中 X 是非空集合, d 是 X 上的度量 (metric). 换句话说, 映射 $d: X \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 满足

- (1) (非负性) $d(x, y) \geq 0$ 且 $d(x, y) = d(y, x)$,
- (2) (对称性) $d(x, y) = d(y, x)$,
- (3) (三角不等式) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

称 d 是有限的如果 d 的像集包含在 \mathbb{R} 内.

任意度量空间诱导出某个集合上的有数量度. 实际上, 假设 (X, d) 是度量空间, 取一点 $x \in X$. 定义

$$[x]_d := \{y \in X : d(x, y) \neq \infty\}.$$

则 $y \in [x]_d \Leftrightarrow y \sim_d x$ 是等价关系. 从而 d 是 $[x]_d$ 上的有数量度.

定义1.6.13. 度量空间之间的映射 $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ 称为等距的 (isometric) 若

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in X. \quad (1.6.24)$$

距离保持的双射称为等距映射 (isometry), 两个度量空间是等距的如果它们之间存在一个等距映射.

例1.6.14. (1) 在任意非空集合 X 上, 可以定义平凡度量

$$d_{\mathbb{R}}(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1 & x \neq y. \end{cases} \quad (1.6.25)$$

(2) 令 $X = \mathbb{R}$. 存在两个有用的距离:

$$d(x, y) := |x - y|, \quad d_{\ln}(x, y) := \ln(1 + |x - y|). \quad (1.6.26)$$

第二个距离会出现在微分几何和复代数几何中.

(3) 任给两个距离空间 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) , 定义 $X \times Y$ 上的乘积度量为

$$d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := (d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2))^{1/2}. \quad (1.6.27)$$

(4) $X = \mathbb{R}^n$:

$$d_{\mathbb{R}^n}(x, y) := \left(\sum_{1 \leq i \leq n} (x^i - y^i)^2 \right)^{1/2}.$$

(5) 给定距离空间 (X, d) 和常数 $\lambda > 0$, 定义

$$d_\lambda(x, y) := \lambda d(x, y). \quad (1.6.28)$$

(6) 若 (X, d) 是度量空间且 $Y \subseteq X$ 是子集, 则 $(Y, d_Y := d|_X)$ 本身也是度量空间.

假设 (X, d) 是度量空间.

(1) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 称为**Cauchy 数列** 如果 $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$ 当 $n, m \rightarrow \infty$. 即, $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $d(x_n, x_m) < \epsilon$ 对任意 $n, m \geq n_0$ 都成立.

(2) 度量空间 (X, d) 是**完备的 (complete)** 如果任意的 Cauchy 数列都有位于 X 内的极限. 显然极限存在必唯一.

(3) $(\mathbb{R} \setminus 0, d_{\mathbb{R}}|_{\mathbb{R} \setminus 0})$ 是不完备的.

(4) 对 $\delta > 0$, 定义 $A \subseteq X$ 的 δ - 领域为

$$A_\delta := \{x \in X : d(x, A) < \delta\}$$

其中 $d(x, A) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}$.

(5) 两个集合 $A, B \subseteq X$ 间的**Hausdorff 距离**定义为

$$d_{\mathbf{H}}^X(A, B) := \inf\{\delta > 0 : A \subseteq B_\delta \text{ 且 } B \subseteq A_\delta\}. \quad (1.6.29)$$

两个度量空间 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 间的**Gromov-Hausdorff 距离**定义为

$$d_{\mathbf{GH}}((X, d_X), (Y, d_Y)) := \inf \left\{ d_{\mathbf{H}}^Z(f(X), g(Y)) : \begin{array}{l} (Z, d_Z) \text{ 度量空间且} \\ f : X \hookrightarrow Z, g : Y \hookrightarrow Z \\ \text{等距嵌入} \end{array} \right\}, \quad (1.6.30)$$

这里**等距嵌入**是指 $(X, d_X) \rightarrow (f(X), d_Z|_{f(X)})$ 和 $(Y, d_Y) \rightarrow (g(Y), d_Z|_{g(Y)})$ 都是等距映射.

一列度量空间 $\{(X_n, d_n)\}_{n \geq 1}$ 在 **Gromov-Hausdorff** 意义下收敛到度量空间 (X, d) , 记作 $(X_n, d_n) \rightarrow_{\text{GH}} (X, d)$, 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{\text{GH}}((X_n, d_n), (X, d)) = 0. \quad (1.6.31)$$

比如, 一列半径趋于 0 的 \mathbb{R}^3 中的圆柱体在 Gromov-Hausdorff 意义下收敛到 \mathbb{R}^3 中的一条直线.

这个概念主要用来研究和处理“奇异空间”, 特别的是在研究 Ricci 流中 (Hamilton 最早引入该流来研究 Poincaré 猜想, 即任何简单闭三维流形同胚于 S^3). Poincaré 猜想最后被 Perelman 解决, 当然很多数学家补全了详细的证明.

§1.6.5 * 泛函

考察函数

$$f(x) := x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

易证 f 连续, $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(0) = 0$, 且 $f'(0) = 0$.

令 X 表示 \mathbb{R} 上所有函数构成的集合并考虑映射

$$\mathcal{F} : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(0)^2.$$

显然 $\min_{f \in X} \mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(0) = 0$.

问题: 如何定义 \mathcal{F} 的“导数”?

定义 1.6.15. \mathbb{R} 上的向量空间 是集合 X , 里面元素用 x, y, z, \dots (称为向量) 来表示, 上附带加法 (+) 和乘法 (\cdot) 两种运算, 并满足性质

- (1) $x + y \in X, \forall x, y \in X$,
- (2) $a \in \mathbb{R}, x \in X \implies a \cdot x \in X$,
- (3) $x, y \in X \implies x + y = y + x$,
- (4) $x, y, z \in X \implies (x + y) + z = x + (y + z)$,
- (5) $\exists 0 \in X$ (**zero vector**) 使得 $x + 0 = x, \forall x \in X$,
- (6) $\forall x \in X, \exists -x \in X$ 使得 $x + (-x) = 0$,
- (7) $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x \in X \implies a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x$,
- (8) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall x, y \in X \implies a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$,
- (9) $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x \in X \implies (a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$,

$$(10) \forall x \in X, 1 \cdot x = x.$$

换句话说, $(X, +, \cdot)$ 是向量空间如果 $(X, +)$ 是 Abelian 群且 $(X, +, \cdot)$ 是左 \mathbb{R} -模.

例1.6.16. (1) \mathbb{R}^n 是向量空间.

(2) 任给区间 $I \subset \mathbb{R}$, 定义

$$X := \{I \text{ 上的实值函数}\}.$$

令

$$(\phi + \psi)(x) := \phi(x) + \psi(x), \quad (a \cdot \phi)(x) := a \cdot \phi(x).$$

则 $(X, +, \cdot)$ 是向量空间.

(3) 令

$$X' := \{f \in X : f(0) - f(1) = 1\}$$

这里 X 是 (2) 中的向量空间 (取 $I = [0, 1]$). 则 $(X', +, \cdot)$ 不是向量空间 (提示: 考虑函数 $f(x) = 1 - x$ 和 $g(x) = 1 - x^2$).

定义1.6.17. X 上的泛函 \mathcal{F} 是向量空间 X 到 \mathbb{R} 的映射.

例1.6.18. (泛函的例子) (1) $\mathcal{F}(x) := (x^2)^2 - (x^1)^2$ for $x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$.

(2) $X = C[0, \pi/2]$ 定义为 $[0, \pi/2]$ 上连续函数构成的向量空间, 令

$$\mathcal{F}(\phi) := \int_0^{\pi/2} [2\phi(x)^3 + 9(\sin x)\phi(x)^2 + 12(\sin^2 x)\phi(x) - \cos x] dx.$$

(3) $X = \mathbb{R}^2$, and

$$\mathcal{F}(x) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

定义1.6.19. 给定泛函 $\mathcal{F} : X \rightarrow \mathbb{R}$. \mathcal{F} 在 $x \in D \subseteq X$ 的 Gâteaux 变分定义为

$$\partial \mathcal{F}(x; h) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}(x + \epsilon h) - \mathcal{F}(x)}{\epsilon}. \quad (1.6.32)$$

例1.6.20. (1) $\mathcal{F}(x) := (x^2)^2 - (x^1)^2$ for $x = (x^1, x^2)$,

$$\partial \mathcal{F}(x; h) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{[(x^2 + \epsilon h^2)^2 - (x^1 + \epsilon h^1)^2] - (x^2)^2 - (x^1)^2}{\epsilon} = 2(x^2 h^2 - x^1 h^1).$$

(2) 取例 1.6.18 (2) 中的 \mathcal{F} , 则

$$\partial \mathcal{F}(\phi; \psi) = \int_0^{\pi/2} [6\phi(x)^2\psi(x) + 18\sin x\phi(x)\psi(x) + 12\sin^2 x\psi(x)] dx.$$

(3) 取例 1.6.18 (3) 中的 \mathcal{F} , 则

$$\partial \mathcal{F}(\mathbf{0}; \mathbf{h}) = \begin{cases} (h^2)^2 / (h^1)^2, & h^1 \neq 0, \\ 0, & h^1 = 0. \end{cases}$$

§1.7 参考文献

1. Munkres, James R. *Topology*, Second edition, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000. xvi+537 pp. ISBN: 0-13-181629-2 MR3728284
2. Kashiwara, Masaki; Schapira, Pierre. *Categories and sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer-Verlag, Berlin, 2006. x+497 pp. ISBN: 978-3-504-27949-5; 3-540-27949-0 MR21822076 (2006k:18001)
3. Kashiwara, Masaki; Schapira, Pierre. *Sheaves on manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer-Verlag, Berlin, 1990. x+512 pp. ISBN: 3-540-51861-4 MR1074006 (92a:58132)
4. Iwaniec, Henryk; Kowalski, Emmanuel. *Analytic number theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. xii+615 pp. ISBN: 0-8218-3633-1 MR2061214 (2005h: 11005)
5. 徐森林, 薛春华 编著: **数学分析**, 清华大学出版社, 2005.
6. 张福保, 薛金美, 潮小李 主编: **数学分析讲义**, 科学出版社, 2019.
7. 梅加强 编著: **数学分析**, 高等教育出版社, 2015.
8. 邓建平 编: **微积分 I 和 II**, 科学出版社, 2019.
9. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis I*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+574 pp. ISBN: 3-540-40386-8
10. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis II*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xvi+681 pp. ISBN: 3-540-40633-6
11. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis I*, Translated from the 1988 German original by Gary Brookfield, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. xiv+426 pp. ISBN: 3-7643-7153-6
12. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis II*, Translated from the 1999 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. xii+400 pp. ISBN: 978-3-7643-7472-3; 3-7643-7472-3
13. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis III*, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. xii+468 pp. ISBN: 978-3-7643-7479-2; 3-7643-7479-2

14. 汪林 著: 数学分析中的问题和反例, 现代数学基础 56, 高等教育出版社, 2015.
15. 裴礼文 编著: 数学分析中的典型问题与方法 (第二版), 高等教育出版社, 2015.
16. 朱尧辰 编著: 数学分析例选通过范例学技巧, 哈尔滨工业大学出版社, 2013.
17. 周民强 编著: 数学分析习题演练 (第一、二、三册), 科学出版社, 2018.
18. 吉米多维奇 著 (李荣涑, 李植 译): 数学分析习题集 (根据 2010 年俄文版翻译), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.

第一部分

单变量理论

第二章 极限理论 I: 数列极限

圣人亦是学知, 众人亦是生知. —《传习录》理学编卷二

§2.1 收敛数列

假设 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个函数. 它的像集是由一些离散的点所构成:

$$f(0), f(1), f(2), f(3), \dots$$

方便期间, 我们记作 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 并称为一个**数列**. 一般地, 一个数列就是某个函数 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ 的像集.

§2.1.1 定义

定义2.1.1. 给定一个数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

(1) $a \in \mathbb{R}$ 称为 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 的**极限**, 如果 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ 使得

$$|a_n - a| < \epsilon$$

对任意 $n > N$ 都成立. 此时我们记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 或 $a_n \rightarrow a$.

之后我们会证明数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 的极限若存在必唯一.

(2) 数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **收敛** 如果存在 $a \in \mathbb{R}$ 使得 $a_n \rightarrow a$. 否则的话, 我们称数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **发散**.

在上述定义中, 我们要注意“2”个 \forall 和“1”个 \exists : ϵ 是任意的正数, 但是一旦找到便是固定的数了. 在证明极限时候, 目标是去寻找“ N ”使得不等式对任意的 $n > N$ 都成立.

在几乎所有求极限中, N 是 $\epsilon(a)$ 的函数, 并随着 ϵ 的变小而变大.

在上述定义中, “2”个 $<$ 其实可以改为 \leq , 这个修改不影响定义本身. 另外, $< \epsilon$ 可以改为 $< 10\epsilon, \leq 13\epsilon$ 等, 原因在于 ϵ 本身是任意的.

§2.1.2 例子

这一小节我们来练习“ ϵ - N ”语言.

例2.1.2. (1) $|q| < 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.

(3) $a \geq 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

证: (1) 如果 $q = 0$, 每个 q^n 均为零. 从而我们可以假设 $0 < |q| < 1$. 此时

$$|q^n - 0| < \epsilon \iff |q|^n < \epsilon \iff n > \frac{\ln \epsilon}{\ln |q|}.$$

那么, $\forall \epsilon > 0, \exists N = \lceil \ln \epsilon / \ln |q| \rceil + 1$ 使得

$$|q^n - 0| < \epsilon \text{ 只要 } n > N.$$

(2) 观察到

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

我们可以取 $N = \lceil 1/4\epsilon^2 \rceil + 1$.

(3) 不失一般性, 假设 $a > 1$. 因此 $\sqrt[n]{a} > 1$ 且可写成 $\sqrt[n]{a} = 1 + y_n$. 由于 $y_n > 0$ 得到

$$a = (1 + y_n)^n = 1 + ny_n + \frac{n(n-1)}{2}y_n^2 + \cdots + y_n^n > 1 + ny_n.$$

上述不等式可重新写成

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = |y_n| < \frac{a-1}{n} \rightarrow 0.$$

这样我们找到 N 只要 $N > (a-1)/\epsilon$.

(4) 类似 (3), 令 $\sqrt[n]{n} = 1 + y_n$, 其中 $y_n > 0$. 同理得到

$$n = (1 + y_n)^n = 1 + ny_n + \frac{n(n-1)}{2}y_n^2 + \cdots + y_n^n > 1 + \frac{n(n-1)}{2}y_n^2.$$

和 (3) 唯一区别是, 在这里二项式展开中我们取第一项和第三项. 原因是右边已经出现了 n , 如果在二项式展开中我们只取前面两项, 那么很明显 y_n 的绝对值被 $(n-1)/n$ 所控制. 但是 $(n-1)/n$ 不可能趋于零. 最后得到

$$|\sqrt[n]{n} - 1| = |y_n| < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \rightarrow 0.$$

这里只要 $N > 1 + 2/\epsilon^2$. \square

假设 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 发散. 即对 $\forall a \in \mathbb{R}$, 都有 $a_n \not\rightarrow a$. 归纳为

$$a_n \not\rightarrow a \iff \exists \epsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n_0 > N \text{ 使得 } |a_{n_0} - a| \geq \epsilon_0.$$

例2.1.3. (1) 证明数列 $\{(-1)^{n-1}\}_{n \geq 1}$ 发散.

(2) 证明数列 $\{\sin n\}_{n \geq 1}$ 发散.

证: (1) 首先证明 $(-1)^{n-1} \not\rightarrow 1$. $\exists \epsilon_0 = 1, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n_0 = 2N > N$ 满足

$$|a_{n_0} - 1| = |(-1)^{n_0-1} - 1| = |-2| = 2 > 1 = \epsilon_0.$$

接下来对任意 $a \neq 1$, 证明 $(-1)^{n-1} \not\rightarrow a$. $\epsilon \epsilon_0 = |a - 1|/2, \forall N \in \mathbb{N}, \epsilon n_0 = 2N + 1$ 满足 $|a_{n_0} - a| = |1 - a| > \epsilon_0$.

(2) 由于 $|\sin n| \leq 1$, 我们只要证明 $\forall A \in [-1, 1], \sin n \not\rightarrow A$. 不失一般性, 假设 $0 \leq A \leq 1$. $\exists \epsilon_0 = \sqrt{2}/2, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n_0 = \lfloor (2N\pi - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{4} \rfloor$ 满足 $\sin n_0 < -\sqrt{2}/2$ 且 $|\sin n_0 - A| \geq \sqrt{2}/2 = \epsilon_0$. \square

注2.1.4. (1) 例 2.1.2 告诉我们

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0 \not\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ 存在.}$$

(2) 例 2.1.3 告诉我们

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ 有界} \not\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ 存在.}$$

例2.1.5. 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

证: $\forall \epsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $|a_n - a| < \epsilon/2$ 对任意 $n > N_0$ 都成立. 注意到

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - a \right| = \left| \frac{a_1 + \cdots + a_n - na}{n} \right| \\ &= \left| \frac{a_1 + \cdots + a_{N_0} - N_0a}{n} + \frac{(a_{N_0+1} - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} \right| \\ &\leq \frac{|a_1 + \cdots + a_{N_0} - N_0a|}{n} + \frac{|a_{N_0+1} - a| + \cdots + |a_n - a|}{n} \\ &\leq \frac{n - N_0}{n} \frac{\epsilon}{2} + \frac{|a_1 + \cdots + a_{N_0} - N_0a|}{n}. \end{aligned}$$

只要取

$$N > \max \left\{ N_0, \frac{|a_1 + \cdots + a_{N_0} - N_0a|}{\epsilon/2} \right\}.$$

我们得到

$$\left| \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - a \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \quad \square$$

例2.1.6. 任意实数都是某个有理数列的极限.

证: 任给一个实数 $a \in \mathbb{R}$. 定义 $a_n := \lfloor na \rfloor / n$. 因为

$$na - 1 < \lfloor na \rfloor \leq na,$$

我们得到

$$a - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor na \rfloor}{n} < a$$

或者

$$|a_n - a| = \left| \frac{\lfloor na \rfloor}{n} - a \right| < \frac{1}{n} \rightarrow 0. \quad \square$$

例2.1.7. $a \in \mathbb{R} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a^n/n! = 0$.

证: 由于 $a \in \mathbb{R}$ 是一个给定的实数, 可以找到 $N_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $|a| \leq N_0$ 成立. 观察到下面的不等式

$$\left| \frac{a^n}{n!} - 0 \right| = \frac{|a|^n}{n!} = \frac{|a|^{N_0}}{N_0!} \times \frac{|a|}{N_0+1} \times \cdots \times \frac{|a|}{n} \leq \frac{|a|^{N_0}}{N_0!} \times \frac{|a|}{n} \quad (n \geq N_0).$$

$\forall \epsilon > 0, \exists N > \max\{N_0, |a|^{N_0+1}/N_0!\epsilon\}, \forall n > N$, 有 $|a^n/n! - 0| < \epsilon$ 成立. \square

例2.1.8. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{n^2-3} = 3$.

证: 根据极限定义考虑

$$\left| \frac{3n^2}{n^2-3} - 3 \right| = \left| \frac{9}{n^2-3} \right| = \frac{9}{|n^2-3|} = \frac{9}{(n+\sqrt{3})(n-\sqrt{3})} < \frac{9}{n}$$

只要 $n \geq 3$. 因此当 $n > 9/\epsilon$ 时候, 得到 $|3n^2/(n^2-3) - 3| < \epsilon$. \square

例2.1.9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1} = \frac{3}{2}$.

证: 只要注意到

$$\left| \frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1} - \frac{3}{2} \right| = \frac{3}{4\sqrt{n}-2} \leq \frac{5}{4\sqrt{n}-2\sqrt{n}} = \frac{5}{2\sqrt{n}} < \frac{3}{\sqrt{n}}. \quad \square$$

例2.1.10. 如果 $a_n := 0.3 \cdots 3$ (n 个 3) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.\dot{3} = \frac{1}{3}$.

证: 只要注意到

$$\begin{aligned} |a_n - 0.\dot{3}| &= \left| \underbrace{0.33 \cdots 33}_n - \underbrace{0.33 \cdots 33}_{n-1} 33 \cdots \right| = \left| \underbrace{0.00 \cdots 00}_n 33 \cdots \right| \\ &< \underbrace{0.00 \cdots 01}_{n-1} = \frac{1}{10^{n-1}}. \quad \square \end{aligned}$$

§2.2 收敛数列的性质

收敛数列的基本性质有唯一性、有界性、保号性等.

§2.2.1 基本性质

在定义 2.1.1 中我们留下了一个没有给出证明的断言, 即数列极限存在必唯一. 在这小节我们给出这个断言的证明.

定理2.2.1. (1) (唯一性) $a_n \rightarrow a, a_n \rightarrow b \implies a = b$.

(2) (有界性) $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 收敛 $\implies \{a_n\}_{n \geq 1}$ 有界.

(3) (保序性) $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b, a < b \implies \exists N \in \mathbb{N}$ 使得 $a_n < b_n$ 对任意 $\forall n \geq N$ 都成立.

(4) $a_n \rightarrow a, b < a < c \implies \exists N \in \mathbb{N}$ 使得 $b < a_n < c$ 对任意 $\forall n > N$ 都成立.

(5) (保号性) $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b, a_n \leq b_n (\forall n > N) \implies a \leq b$.

(6) $a_n \rightarrow a \implies |a_n| \rightarrow |a|$.

证: (1) 任给 $\epsilon > 0, \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ 使得

$$|a_n - a| < \epsilon \quad (\forall n > N_1) \quad \text{和} \quad |b_n - b| < \epsilon \quad (\forall n > N_2)$$

都成立. 从而

$$|a - b| \leq |a_n - b| + |a_n - a| < 2\epsilon \quad (\forall n > \max\{N_1, N_2\}).$$

根据 ϵ 的任意性, 我们必须有 $a = b$ 成立.

(2) 取 $\epsilon = 1, \exists N_1 \in \mathbb{N}$ 使得 $a - 1 < a_n < a + 1$ 对任何 $\forall n > N_1$ 都成立. 因此 $\forall n \geq 1$,

$$\min\{a_1, \dots, a_N, a - 1\} \leq a_n \leq \max\{a_1, \dots, a_N, a + 1\}.$$

(3) 取 $\epsilon = \frac{b-a}{2} > 0, \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ 使得

$$|a_n - a| < \frac{b-a}{2} \quad (n > N_1) \quad \text{和} \quad |b_n - b| < \frac{b-a}{2} \quad (n > N_2)$$

都成立. 从而

$$a_n < \frac{b-a}{2} + a = \frac{b+a}{2} < b_n \quad (n > \max(N_1, N_2)).$$

(4) 在 (3) 中令 $b_n \equiv b$, 我们可以找到 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $b = b_n < a_n (n > N)$ 成立.

(5) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b < a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 成立, 则根据 (3) 我们得到 $b_n < a_n$ 对所有 $n > N$ 都成立.

(6) $a_n \rightarrow a$ 意味着 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ 使得 $|a_n - a| < \epsilon$ 对任意 $n > N$ 都成立. 从而 $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \epsilon$. \square

注2.2.2. (1) $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 有界 $\not\Rightarrow \{a_n\}_{n \geq 1}$ 收敛.

(2) $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b, a_n < b_n \not\Rightarrow a < b$. 比如, $a_n = 1/n, b_n = 2/n$, 但是 $a = b = 0$.

(3) $\{|a_n|\}_{n \geq 1}$ 收敛 $\not\Rightarrow \{a_n\}_{n \geq 1}$ 收敛. 比如 $a_n = (-1)^{n-1}$.

定理2.2.3. (夹逼定理) 如果不等式 $x_n \leq y_n \leq z_n$ 对所有 $n \geq N_0$ 都成立, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$.

证: $\forall \epsilon > 0, \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ 使得

$$|x_n - a| < \epsilon, \quad |z_n - a| < \epsilon$$

成立. 从而

$$a - \epsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \epsilon$$

对任意 $n > \max\{N_0, N_1, N_2\}$ 都成立. 故 $y_n \rightarrow a$. \square

例2.2.4. (1) $a_1, \dots, a_k > 0 \implies$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + \dots + a_k^n} = \max\{a_1, \dots, a_k\}. \quad (2.2.1)$$

(2) 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[n]{2} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n} = 1. \quad (2.2.2)$$

(3) 求极限

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

证: (1) 不失一般性, 假设 $\max\{a_1, \dots, a_k\} = a_1$. 则得到

$$a_1 < \sqrt[n]{a_1^n + \dots + a_k^n} \leq \sqrt[n]{ka_1^n} = (\sqrt[n]{k})a_1 \rightarrow a_1.$$

最后一步利用了例 2.1.2 (3).

(2) 实际上有下列不等式

$$\frac{1+1+\dots+1}{n} \leq \frac{1+\sqrt[n]{2}+\dots+\sqrt[n]{n}}{n} \leq \frac{\sqrt[n]{n}+\dots+\sqrt[n]{n}}{n}$$

从而推出 $1 \leq (1 + \sqrt[n]{2} + \dots + \sqrt[n]{n})/n \leq \sqrt[n]{n} \rightarrow 1$. 最后一步利用例 2.1.2 (4).

(3) 回忆下阶乘:

$$\begin{aligned} n! &= 1 \times 2 \times 3 \cdots \times n, \\ (2n)!! &= 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n, \\ (2n-1)!! &= 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1), \\ (2n)! &= (2n)!! \cdot (2n-1)!!. \end{aligned}$$

对每个 $k \in \mathbb{N}$ 有

$$\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1}$$

成立.

$$\begin{aligned} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} &= \prod_{1 \leq k \leq n} \frac{2k-1}{2k} < \prod_{1 \leq k \leq n} \frac{2k}{2k+1} = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n}{3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)} \\ &= \frac{1}{\frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n}} \times \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{(2n)!!} \times \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

推出

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

从而极限为 0. \square

§2.2.2 收敛数列的代数运算/四则运算

假设给定两个数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 和 $\{b_n\}_{n \geq 1}$, 我们可以很自然地问数列 $a_n \pm b_n$, $a_n b_n$, a_n/b_n (对充分大的 n 有 $b_n \neq 0$) 的收敛性.

定理2.2.5. 假设 $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 那么有

$$\alpha a_n \pm \beta b_n \rightarrow \alpha a \pm \beta b, \quad a_n b_n \rightarrow ab, \quad \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b} \quad (b \neq 0). \quad (2.2.3)$$

证: (1) $b_n \rightarrow b$ 推出 $-b_n \rightarrow -b$. 故只要证明 $\alpha a_n + \beta b_n \rightarrow \alpha a + \beta b$ 即可. 但这个极限可有下不等式给出

$$0 \leq |(\alpha a_n + \beta b_n) - (\alpha a + \beta b)| \leq |\alpha| |a_n - a| + |\beta| |b_n - b| \rightarrow 0.$$

(2) $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都收敛推出存在两个正数 M_1, M_2 使得 $\implies |a_n| \leq M_1$ 和 $|b_n| \leq M_2$ 成立. 下列计算

$$0 \leq |a_n b_n - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \leq M_1 |b_n - b| + M_2 |a_n - a| \rightarrow 0$$

得到 $a_n b_n \rightarrow ab$.

(3) $b_n \rightarrow b \implies |b_n| \rightarrow |b|$. 根据假设条件 $|b| > 0$, 由定理2.2.1 (3) 得到不等式 $|b_n| > |b|/2$ 对充分大的 n 成立. 下列计算

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{b(a_n - a) - a(b_n - b)}{b_n b} \right| \\ &\leq \frac{|b| |a_n - a| + |a| |b_n - b|}{|b_n| |b|} \leq \frac{2}{|b|^2} (|b| |a_n - a| + |a| |b_n - b|) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

得到 $a_n/b_n \rightarrow a/b$. \square

注2.2.6. (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ 存在 $\nRightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在或 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 存在. 比如, $a_n = (-1)^{n-1}$, $b_n = (-1)^n$.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n$ 存在 $\nRightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在或 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 存在. For 比如, $a_n = b_n = (-1)^{n-1}$.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n$ 存在 $\nRightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在或 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 存在. 比如, $a_n = (-1)^n$, $b_n = n$.

例2.2.7. (1) 对所有 $a > 0$ 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1. \quad (2.2.4)$$

(2) 对所有 $q > 1$ 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_q n}{n} = 0. \quad (2.2.5)$$

(3) 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

证: (1) 例2.1.2 推出 (2.2.4) 对所有 $a \geq 1$ 都成立. 当 $0 < a < 1$ 时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

(2) 实际上根据 $q > 1$ 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 < q^\epsilon \implies \sqrt[n]{n} < q^\epsilon \quad (\forall n > N).$$

故只要

$$\frac{\log_q n}{n} < \epsilon \quad (\forall n > N) \implies \frac{\log_q n}{n} \rightarrow 0.$$

(3) 令 $a_n = 1/\sqrt[n]{n!}$. 因为 $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ 得到

$$\begin{aligned} (n!)^2 &= (1 \times 2 \times \cdots \times n) \times [n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1] \\ &= [1 \times n][2 \times (n-1)] \cdots [k \times (n-k+1)] \cdots \times [n \times 1]. \end{aligned}$$

对任意 $1 \leq k \leq n$ 有不等式 $(k-1)(n-k) \geq 0$ 成立, 从而 $k(n-k+1) \geq n$ 成立. 带入上述恒等式得到

$$(n!)^2 \geq n^n \implies n! \geq n^{n/2} \implies \sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n}.$$

这表明 $a_n \leq 1/\sqrt{n}$ 从而推出 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. \square

§2.2.3 无穷小和无穷大数列

根据之前内容知道若极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 存在, 则数列 $b_n := a_n - a$ 的极限也存在且满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. 由此可以引入如下概念.

数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 称为无穷小, 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 或者 $a_n \rightarrow 0$. 即无穷小数列就是极限为 0 的数列.

$$(1) a_n \rightarrow a \iff a_n - a \rightarrow 0 \iff a_n = a + \alpha_n \text{ 且 } \alpha_n \rightarrow 0.$$

$$(2) a_n \rightarrow 0 \iff |a_n| \rightarrow 0.$$

$$(3) a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow 0 \implies a_n + b_n, a_n - b_n, a_n b_n \rightarrow 0.$$

$$(4) a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow 0 \not\Rightarrow a_n/b_n \rightarrow 0. \text{ 比如,}$$

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{n}, & \frac{a_n}{b_n} \equiv 1, \\ b_n = \frac{1}{n}, & \end{cases} \quad \begin{cases} a_n = \frac{1}{n}, & \frac{a_n}{b_n} = n, \\ b_n = \frac{1}{n^2}, & \end{cases} \quad \begin{cases} a_n = \frac{1}{n^2}, & \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n}. \\ b_n = \frac{1}{n}, & \end{cases}$$

$$(5) a_n \rightarrow 0, |b_n| \leq M \implies a_n b_n \rightarrow 0.$$

在平面上考察以 $(0,1)$ 为圆心 1 为半径的圆 C . 显然 C 和 x 轴交于原点 $(0,0)$. 取点 $P = (0,2)$, 这是 C 和 y 轴的交点. 任取 x 轴上的点 Q , 作直线 PQ 交 C 于 R 点. 随着点 Q 跑遍整个 x 轴, 我们发现点 R 跑遍整个圆 C 除了 P 点. 因此可以想象

$$\mathbb{R} \cup \{\infty\} \iff C \iff S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

这种观点很自然的把 ∞ 点等同于 $(0,2)$ 点.

数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 称为**无穷大**, 若 $\forall C > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ 使得

$$|a_n| \geq C \text{ 对任何 } n > N$$

都成立.

记号: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ 或 $a_n \rightarrow \infty$.

(1) 定义

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty & \iff \{a_n\}_{n \geq 1} \text{ 是无穷大数列} \\ \text{或 } a_n \rightarrow +\infty & \iff \text{且 } a_n > 0 (\forall n \geq N_0). \end{aligned}$$

(2) 定义

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty & \iff \{a_n\}_{n \geq 1} \text{ 是无穷大数列} \\ \text{或 } a_n \rightarrow -\infty & \iff \text{且 } a_n < 0 (\forall n \geq N_0). \end{aligned}$$

(3) $a_n \rightarrow +\infty$ or $a_n \rightarrow -\infty \implies a_n \rightarrow \infty$. 但是反之不一定对, 比如 $a_n = (-1)^n n$.

$$(4) a_n, b_n \rightarrow \pm\infty \implies a_n + b_n \rightarrow \pm\infty.$$

$$(5) a_n \rightarrow \pm\infty, b_n \rightarrow \mp\infty \implies a_n - b_n \rightarrow \pm\infty.$$

$$(6) a_n \rightarrow \infty, |b_n| \geq M > 0 \implies a_n b_n \rightarrow \infty.$$

$$(7) a_n, b_n \rightarrow \pm\infty \implies a_n b_n \rightarrow \pm\infty.$$

$$(8) a_n \rightarrow \pm\infty, b_n \rightarrow \mp\infty \implies a_n b_n \rightarrow -\infty.$$

(9) $a_n \rightarrow 0, a_n \neq 0 \implies 1/a_n \rightarrow \infty$.

例2.2.8. (1) $|q| > 1 \implies q^n \rightarrow \infty$. 实际上,

$$|q^n| = |q|^n \geq |q|^{\frac{\ln C}{\ln |q|}} = C$$

只要 $n \geq N > \ln C / \ln |q|$.

(2) $a_n := \sum_{1 \leq k \leq n} 1/(\sqrt{n} + \sqrt{k}) \rightarrow +\infty$. 实际上,

$$a_n > \frac{n}{2\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{2} \rightarrow +\infty.$$

(3) 令

$$a_n := \frac{x_0 n^k + x_1 n^{k-1} + \cdots + x_{k-1} n + x_k}{y_0 n^\ell + y_1 n^{\ell-1} + \cdots + y_{\ell-1} n + y_\ell}, \quad (k, \ell \in \mathbb{N}, x_0 y_0 \neq 0).$$

由于

$$a_n = n^{k-\ell} \frac{x_0 + \frac{x_1}{n} + \cdots + \frac{x_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{x_k}{n^k}}{y_0 + \frac{y_1}{n} + \cdots + \frac{y_{\ell-1}}{n^{\ell-1}} + \frac{y_\ell}{n^\ell}},$$

得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} 0, & k < \ell, \\ x_0/y_0, & k = \ell, \\ \infty, & k > \ell. \end{cases}$$

(4) $a_n = \sqrt[n]{n!} \rightarrow +\infty$. 观察到

$$(n!)^2 = (1 \cdot n)[2 \cdot (n-1)] \cdots [k(n-k)] \cdots (n \cdot 1) = \prod_{1 \leq k \leq n} [k(n-k+1)] \geq n^2$$

这是因为不等式 $(k-1)(n-k) \geq 0$ ($1 \leq k \leq n$) 可推出 $k(n-k+1) \geq n$ 成立.

§2.2.4 Stolz 定理

这个定理主要是来处理“ ∞/∞ ”型或“ $0/0$ ”型极限. 假设数列 $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$ 都是无穷小, 那么定理2.2.5中最后一个结论(即数列的商)就不一定成立. 如果数列 $a_n \rightarrow \infty$, $b_n \rightarrow \infty$ 都是无穷大, 我们可以把商 a_n/b_n 转化成两个无穷小数列的商:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1/b_n}{1/a_n}$$

这里 $1/b_n \rightarrow 0$ 和 $1/a_n \rightarrow 0$ 是无穷小数列.

因此“ ∞/∞ ”型或“ $0/0$ ”型极限本质上是一回事. 但是针对这两种情形 Stolz 定理的内容还是有一些细微的差异.

定理2.2.9. (Stolz 定理 I: “ ∞/∞ ”型) 给定两个数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 和 $\{y_n\}_{n \geq 1}$. 如果

$$y_n < y_{n+1}, \quad y_n \rightarrow +\infty, \quad \text{和} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a \quad (\text{是实数或 } \pm\infty),$$

那么有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a. \quad (2.2.6)$$

证: 情形 1: $a = 0$. $\forall \epsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}$ 使得

$$|x_n - x_{n-1}| < \epsilon(y_n - y_{n-1}), \quad \forall n > N_1.$$

特别地, 得到

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} \right| < \epsilon \left(1 - \frac{y_{n-1}}{y_n} \right).$$

上述不等式中, x_n/y_n 是我们希望的, 但是其余项都不是我们希望的. 为了舍去这些额外项, 当 $n > N_1$ 利用三角不等式得到

$$|x_n - x_{N_1}| \leq \sum_{N_1+1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}| \leq \sum_{N_1+1 \leq i \leq n} \epsilon(y_i - y_{i-1}) = \epsilon(y_n - y_{N_1});$$

即

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{x_{N_1}}{y_{N_1}} \right| \leq \epsilon \left(1 - \frac{y_{N_1}}{y_n} \right) < \epsilon.$$

但是 $y_n \rightarrow +\infty, \exists N_2 \in \mathbb{N}$ 使得 $|x_{N_1}/y_n| < \epsilon$ 对任意 $n > N_2$ 都成立. 最后把这些带入得到

$$\left| \frac{x_n}{y_n} \right| \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$

只要 $n > N = \max\{N_1, N_2\}$.

情形 2: $a \neq 0$. 基本想法是构造新的数列把情形 2 归结到情形 1, 从而可应用情形 1 的结果. 令

$$\tilde{x}_n := x_n - ay_n.$$

简单计算得到

$$\frac{\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{(x_n - ay_n) - (x_{n-1} - ay_{n-1})}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - a \rightarrow 0.$$

根据情形 1 的结论得到 $\tilde{x}_n/y_n \rightarrow 0$ 或 $x_n/y_0 \rightarrow a$.

情形 3: $a = +\infty$. $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ 使得 $x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} > 0$ ($\forall n > N_1$) 成立. 更进一步

$$x_n - x_{N_1} = \sum_{N_1+1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}) > \sum_{N_1+1 \leq i \leq n} (y_i - y_{i-1}) = y_n - y_{N_1}.$$

让 $n \rightarrow +\infty$ 得到 $x_n \rightarrow +\infty$. 根据情形 1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

情形 4: $a = -\infty$. 观察到

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \rightarrow -\infty \iff \frac{(-x_n) - (-x_{n-1})}{y_n - y_{n-1}} \rightarrow +\infty.$$

此时可应用情形 3 的结论得到. \square

实际应用中, 如果商 $a_n = x_n/y_n$ 中分母 y_n 单调递增且趋于 $+\infty$, 那么我们马上想到是不是可以应用定理 2.2.9. 如果真的要应用这个定理, 还需要保证另一个条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a$$

是否存在.

定理 2.2.10. (Stolz 定理 II: “0/0” 型) 给定两个数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 和 $\{y_n\}_{n \geq 1}$. 如果

$$x_n \rightarrow 0, \quad y_n > y_{n+1}, \quad y_n \rightarrow 0, \quad \text{和} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} = a \quad (\text{是实数或 } \pm\infty)$$

那么有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} = a. \quad (2.2.7)$$

证: 情形 1: $a \in \mathbb{R}$. $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ 使得

$$a - \epsilon < \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} < a + \epsilon, \quad \forall n > N,$$

成立, 或

$$(a - \epsilon)(y_n - y_{n+1}) < x_n - x_{n+1} < (a + \epsilon)(y_n - y_{n+1}), \quad \forall n > N.$$

特别地,

$$(a - \epsilon)(y_n - y_{n+p}) < x_n - x_{n+p} < (a + \epsilon)(y_n - y_{n+p}), \quad \forall n > N \text{ and } p \geq 1.$$

令 $p \rightarrow +\infty$ 得到

$$(a - \epsilon)y_n \leq x_n \leq (a + \epsilon)y_n \implies \left| \frac{x_n}{y_n} - a \right| \leq \epsilon.$$

情形 2: $a = +\infty$. 给定 $C > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ 使得 $x_n - x_{n+1} > C(y_n - y_{n+1})$ 成立 $\implies x_n - x_{n+p} > C(y_n - y_{n+p})$ 对 $\forall n > N$ 和 $p \geq 1$ 也成立. 让 $p \rightarrow +\infty$ 得到 $x_n/y_n \geq C$.

情形 3: $a = -\infty$. 此时证明和定理 2.2.9 情形 4 的证明类同. \square

请注意定理 2.2.10 和定理 2.2.9 中假设条件的细微差别.

例2.2.11. (1) $a_n \rightarrow a \implies$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \frac{a}{2}.$$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 或 $\pm\infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) = a$.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = \ell \implies$ 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/n$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i \leq n} a_i$.

(4) $a_n \leq a_{n+1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

(5) $a_n = s_n - s_{n-1}$, $\sigma_n = \frac{1}{n+1}(s_0 + \cdots + s_n)$, $na_n \rightarrow 0$, σ_n 收敛 $\implies s_n$ 也收敛且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n.$$

证: (1) 令 $y_n := a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n$ 和 $y_n := n^2$. 根据定理2.2.9,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{n^2 - (n-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{2n-1} = \frac{a}{2}.$$

(2) 令 $x_n = a_1 + \cdots + a_n$ 和 y_n . 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

(3) 令 $x_n := a_n$ 和 $y_n = n$. 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{n - (n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_{n-1}) = \ell.$$

对第二个极限, 令 $x'_n := a_1 + \cdots + a_n$ 和 $y'_n = n^2$. 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x'_n}{y'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x'_n - x'_{n-1}}{y'_n - y'_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2 - (n-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2n-1} = \frac{\ell}{2}.$$

(4) 由 $a_n \leq a_{n+1}$ 得到 $\sigma_n := \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) \leq na_n/n = a_n$. 另一方面, 对所有 $m > n$,

$$\sigma_m = \frac{1}{m} \left(\sum_{1 \leq i \leq n} a_i + \sum_{n+1 \leq i \leq m} a_i \right) \geq \frac{1}{m} \sum_{1 \leq i \leq n} a_i + \frac{m-n}{m} a_n.$$

根据夹逼定理得到 $a_n \rightarrow a$.

(5) 观察到

$$s_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{1 \leq i \leq n} ia_i.$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{1 \leq i \leq n} ia_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{1 \leq i \leq n} ia_i - \sum_{1 \leq i \leq n-1} ia_i}{(n+1) - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0. \quad \square$$

(6) 根据(3), 知道 $a_n \rightarrow a \implies \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) \rightarrow a$. 但是, 反之不一定成立. 比如数列 $\{(-1)^n\}_{n \geq 1}$.

例2.2.12. (1) $k \in \mathbb{Z}_+ \implies$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{2}.$$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - a) = b, k \in \mathbb{Z}_+ \implies$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_1 + 2^k a_2 + \cdots + n^k a_n}{n^{k+1}} - \frac{a}{k+1} \right) = \frac{b}{k} + \frac{a}{2}.$$

证: (1) 利用定理2.2.9 得到

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(k+1)(1^k + \cdots + n^k) - n^{k+1}}{(k+1)n^k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(k+1)(1^k + \cdots + n^k) - n^{k+1}] - [(k+1)(1^k + \cdots + (n-1)^k) - (n-1)^{k+1}]}{(k+1)n^k - (k+1)(n-1)^k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(k+1)n^k - [n^{k+1} - (n-1)^{k+1}]}{(k+1)[n^k - (n-1)^k]} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2}k(k+1)n^k + \cdots}{k(k+1)n^k + \cdots} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(2) 观察到

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_1 + 2^k a_2 + \cdots + n^k a_n}{n^{k+1}} - \frac{a}{k+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(k+1) \sum_{1 \leq i \leq n} i^k a_i - a n^{k+1}}{(k+1)n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(k+1)n^k a_n - a(n^{k+1} - (n-1)^{k+1})}{(k+1)[n^k - (n-1)^k]} \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} n^{k+1} - (n-1)^{k+1} &= (n-1+1)^{k+1} - (n-1)^{k+1} \\ &= (k+1)(n-1)^k + \frac{k(k+1)}{2}(n-1)^{k-1} + \cdots. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_1 + 2^k a_2 + \cdots + n^k a_n}{n^{k+1}} - \frac{a}{k+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(k+1)a_n n^k - (k+1)a(n-1)^k - \frac{ak(k+1)}{2}(n-1)^{k-1} + \cdots}{(k+1)[k(n-1)^{k-1} + \cdots]} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(k+1)n^k(a_n - a) + (k+1)a[n^k - (n-1)^k] - \frac{k(k+1)a}{2}(n-1)^{k-1} + \cdots}{(k+1)[k(n-1)^k + \cdots]} \\ &= \frac{b}{k} + a - \frac{a}{2} = \frac{b}{k} + \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

定理2.2.13. (Toeplitz 定理) 假设 $p_{n0} + p_{n1} + \cdots + p_{nm} = 1$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都成立, 且每个 $p_{ij} \geq 0$. 令

$$y_n := \sum_{0 \leq i \leq n} p_{ni} x_i, \quad n \in \mathbb{N}.$$

那么下列论断等价:

- (i) $x_n \rightarrow a \implies y_n \rightarrow a$,
(ii) 对每个 $m \in \mathbb{N}$ 都有 $p_{nm} \rightarrow 0$.

证: (i) \implies (ii): 取 $x_n = \delta_{nm}$ 得到 $x_n \rightarrow 0$ 和 $y_n = p_{nm} (n \geq m)$. 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{nm} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

(ii) \Leftarrow (i): 假设 $x_n \rightarrow a$. 则 $\exists M > 0$ 使得 $|x_n - a| \leq M$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}_+$ 都成立. $\forall \epsilon > 0, \exists N^* \in \mathbb{N}$ 使得 $|x_n - a| < \epsilon/2$ 对所有 $n > N^*$ 都成立. 但是根据极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ni} = 0$, 我们得到 $\exists N_i > N^*$ 使得如下不等式

$$0 \leq p_{ni} \leq \frac{\epsilon}{2N^*M}, \quad \forall n > N_i$$

成立. 令 $N := \max_{0 \leq i \leq N^*} N_i$. 得到

$$\begin{aligned} |y_n - a| &= \left| \sum_{0 \leq i \leq n} p_{ni} x_i - \sum_{0 \leq i \leq n} p_{ni} a \right| \\ &\leq \sum_{0 \leq i \leq N^*} p_{ni} |x_i - a| + \sum_{N^*+1 \leq i \leq n} p_{ni} |x_i - a| \\ &< MN^* \frac{\epsilon}{2N^*M} + \frac{\epsilon}{2} \sum_{N^*+1 \leq i \leq n} p_{ni} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \quad \square \end{aligned}$$

例2.2.14. (1) $b_n > 0, b_0 + b_1 + \cdots + b_n \rightarrow \infty, a_n/b_n \rightarrow s \implies$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{b_0 + b_1 + \cdots + b_n} = s.$$

(2) $p_k > 0, \frac{p_n}{p_0 + p_1 + \cdots + p_n} \rightarrow 0, s_n \rightarrow s \implies$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{0 \leq i \leq n} s_i p_{n-i}}{\sum_{0 \leq i \leq n} p_i} = s.$$

(3) $p_k, q_k > 0, \frac{p_n}{p_0 + \cdots + p_n} \rightarrow 0, \frac{q_n}{q_0 + \cdots + q_n} \rightarrow 0 \implies$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{\sum_{0 \leq i \leq n} r_i} = 0.$$

这里 $r_n := \sum_{0 \leq i \leq n} p_i q_{n-i}$.

证: (1) 令 $x_n := a_n/b_n$, $p_{nm} := b_m / \sum_{0 \leq i \leq n} b_i$, 和 $y_n := \sum_{0 \leq i \leq n} p_{ni} x_i$. 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{nm} = 0, \quad \sum_{0 \leq i \leq n} p_{ni} = 1, \quad p_{nm} \geq 0.$$

根据定理 2.2.13, 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{0 \leq i \leq n} a_i}{\sum_{0 \leq i \leq n} b_i} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s.$$

(2) 令 $p_{nm} := p_{n-m} / \sum_{0 \leq i \leq n} p_i$, 这里 $0 \leq m \leq n$ 且 $n = 1, 2, \dots$, 和

$$x_n := s_n, \quad y_n := \sum_{0 \leq i \leq n} p_{ni} x_i = \frac{\sum_{0 \leq i \leq n} s_i p_{n-i}}{\sum_{0 \leq i \leq n} p_i}.$$

(3) 令

$$P_n := \sum_{0 \leq i \leq n} p_i, \quad Q_n := \sum_{0 \leq i \leq n} q_i, \quad R_n := \sum_{0 \leq i \leq n} r_i,$$

和

$$p_{nm} := \frac{p_{n-m} Q_m}{\sum_{0 \leq i \leq n} p_i Q_{n-i}}, \quad x_n := \frac{q_n}{Q_n}, \quad y_n := \sum_{0 \leq i \leq n} p_{ni} x_i. \quad \square$$

例 2.2.15. (1) 证明

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n+2}{\sqrt{6}}\right)^n. \quad (2.2.8)$$

(2) 证明

$$n < \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n. \quad (2.2.9)$$

证: (1) 在例 2.2.8 (4) 中我们已经证明了不等式

$$(n!)^2 = \prod_{1 \leq k \leq n} [k(n-k+1)] \geq n^n$$

从而

$$n! > n^{n/2} = (\sqrt{n})^n.$$

不等式 (2.2.8) 给出了 $n!$ 的一个比 $(\sqrt{n})^n$ 更好的下界估计. 利用数学归纳法, 假设 $k! > (k/3)^k$ 成立. 由于

$$(k+1)! = (k+1)k! > (k+1) \left(\frac{k}{3}\right)^k,$$

为了归纳证明 $(k+1)! > ((k+1)/3)^{k+1}$ 只要证明

$$(k+1) \left(\frac{k}{3}\right)^k > \left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1}$$

或

$$3k^k > (k+1)^k \iff \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < 3.$$

但是根据二项式展开得到

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k &= 1 + 1 + \sum_{2 \leq i \leq k} \frac{k(k-1) \cdots (k-i+1)}{i!} \frac{1}{k^i} \\ &< 2 + \sum_{2 \leq i \leq k} \frac{1}{i!} < 2 + \sum_{2 \leq i \leq k} \frac{1}{i(i-1)} < 3. \end{aligned}$$

利用数学归纳法证明上界, 假设 $k! < ((k+2)/\sqrt{6})^k$ 成立. 根据 $(k+1)! = (k+1)k! < (k+1)((k+2)/\sqrt{6})^k$, 只要证明

$$(k+1) \left(\frac{k+2}{\sqrt{6}}\right)^k < \left(\frac{k+3}{\sqrt{6}}\right)^{k+1}.$$

实际上,

$$\begin{aligned} \left(\frac{k+3}{\sqrt{6}}\right)^{k+1} &= \left(\frac{k+2}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{k+1} > \left(\frac{k+2}{\sqrt{6}}\right)^{k+1} + (k+1) \left(\frac{k+2}{\sqrt{6}}\right)^k \frac{1}{\sqrt{6}} \\ &\quad + \frac{(k+1)k}{2} \left(\frac{k+2}{\sqrt{6}}\right)^{k-1} \frac{1}{(\sqrt{6})^2} + \frac{(k+1)k(k-1)}{6} \left(\frac{k+2}{\sqrt{6}}\right)^{k-2} \frac{1}{(\sqrt{6})^3} \\ &= \left(\frac{k+2}{\sqrt{6}}\right)^k \left[\frac{k+2}{\sqrt{6}} + \frac{k+1}{\sqrt{6}} + \frac{k(k+1)}{2\sqrt{6}(k+2)} + \frac{(k+1)k(k-1)}{6\sqrt{6}(k+2)^2} \right] \\ &= \left(\frac{k+2}{\sqrt{6}}\right)^k \frac{16k^3 + 75k^2 + 125k + 72}{6\sqrt{6}(k+2)^2}. \end{aligned}$$

现在断言

$$\frac{16k^3 + 75k^2 + 125k + 72}{6\sqrt{6}(k+2)^2} > k+1 \iff 16k^3 + 75k^2 + 125k + 72 > 6\sqrt{6}(k^3 + 5k^2 + 8k + 4)$$

对任何 k 都成立. 但是这个不等式可以有如下观察得到: $16 > 6\sqrt{6}$, $75 > 30\sqrt{6}$, $125 > 48\sqrt{6}$, 和 $72 > 24\sqrt{6}$.

(2) 这个可以有二项式展开得到:

$$\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 1 + n \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2 + \cdots > \frac{n(n-1)}{2} \frac{4}{n} = 2(n-1).$$

当 $n \geq 2$, 得到 $2(n-1) \geq n$. \square

目前为止求极限的方法可归纳为如下几点:

- (1) 用“ ϵ - N ”语言 (不过要是先知道或判断极限)
- (2) 用夹逼定理

(3) 用 Stolz 定理

(4) 单调有界数列必有极限 (之后我们会证明这个结论) 告诉我们什么样的数列会有极限

(4) Cauchy 准则给出数列是否收敛的充分必要条件 (之后我们会证明这个结论)

例2.2.16. 令 $x_1 = a$, $x_2 = b$, 和 $x_n = (x_{n-1} + x_{n-2})/2$. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

证: 观察到

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n + x_{n-1}}{2} - x_n = \frac{x_{n-1} - x_n}{2} = \dots = \frac{x_2 - x_1}{(-2)^{n-1}} = \frac{b-a}{(-2)^{n-1}}$$

和

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sum_{1 \leq m \leq n} (x_{m+1} - x_m) + x_1 = (b-a) \sum_{1 \leq m \leq n} \frac{1}{(-2)^{m-1}} + a \\ &= (b-a) \frac{1 - (-1/2)^{n-1}}{1 - (-1/2)} + a \rightarrow \frac{2}{3}(b-a) + a = \frac{2b+a}{3}. \quad \square \end{aligned}$$

例2.2.17. (1) 假设 $\lambda \in \mathbb{R}$ 且 $|\lambda| < 1$. 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - \lambda a_n) = (1-\lambda)a.$$

(2) 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (4a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n) = a.$$

证: (1) “ \Rightarrow ” 显然成立. 现在假设 $a_{n+1} - \lambda a_n \rightarrow (1-\lambda)a$. 令

$$x_n := a_{n+1} - \lambda a_n.$$

故

$$\frac{a_{n+1}}{\lambda^{n+1}} = \frac{a_n}{\lambda^n} + \frac{x_n}{\lambda^{n+1}}$$

从而

$$a_n = \lambda^n \left(a_0 + \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{x_{k-1}}{\lambda^k} \right), \quad n \in \mathbb{Z}_+$$

成立. 如果 $0 < \lambda < 1$, 得到 $\lambda^n \rightarrow 0$ 从而利用定理 2.2.9 得到

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 + \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{x_{k-1}}{\lambda^k}}{(\frac{1}{\lambda})^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x_n}{\lambda^{n+1}}}{(\frac{1}{\lambda})^{n+1} - (\frac{1}{\lambda})^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{1-\lambda} = \frac{(1-\lambda)a}{1-\lambda} = a. \end{aligned}$$

若 $\lambda = 0$, 结论是明显的. 如果 $-1 < \lambda < 0$, 考察偶数项

$$a_{2n} = \lambda^{2n} \left(a_0 + \sum_{1 \leq k \leq 2n} \frac{x_{k-1}}{\lambda^k} \right).$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \frac{1}{1 - \lambda^2} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{2n+1} + \lambda x_{2n}) = a.$$

类似地

$$-a_{2n+1} = (-\lambda)^{2n+1} \left(a_0 + \sum_{1 \leq k \leq 2n+1} \frac{x_{k-1}}{\lambda^k} \right)$$

和

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = -\frac{1}{\lambda^2 - 1} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{2n+2} + \lambda x_{2n+1}) = a.$$

根据定理 2.3.9, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

(2) 假设 $4a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n \rightarrow a$. 观察到

$$\begin{aligned} 4a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n &= 4 \left(a_{n+2} - a_{n+1} + \frac{1}{4}a_n \right) \\ &= 4 \left[\left(a_{n+2} - \frac{1}{2}a_{n+1} \right) - \frac{1}{2} \left(a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n \right) \right] := 4 \left(y_{n+1} - \frac{1}{2}y_n \right). \end{aligned}$$

因此得到

$$y_{n+1} - \frac{1}{2}y_n \rightarrow \frac{1}{4}a = \left(1 - \frac{1}{2} \right) \frac{a}{2}.$$

根据 (1), 推出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{a}{2} \quad \text{or} \quad a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n \rightarrow \left(1 - \frac{1}{2} \right) a.$$

再次利用 (1) 得到 $a_n \rightarrow a$. \square

例 2.2.18. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^m}{a^n}$$

这里 $a > 1, m \in \mathbb{Z}_+$.

解: 如果 $m = 1$ 则利用定理 2.2.9 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - (n-1)}{a^n - a^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^{n-1}(a-1)} = 0.$$

对一般的 m 利用收敛数列的四则运算法则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^m}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^m - (n-1)^m}{a^n - a^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(n-1)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2!}(n-1)^{m-2} + \dots}{a^{n-1}(a-1)}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a-1} \sum_{1 \leq k \leq m} \frac{m(m-1) \cdots (m-k+1)}{k!} \frac{(n-1)^{m-k}}{a^{n-1}} \\
&= \frac{1}{a-1} \sum_{1 \leq k \leq m} \frac{m(m-1) \cdots (m-k+1)}{(a-1)k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{m-k}}{a^n}.
\end{aligned}$$

根据归纳假设, 这个极限等于 0. \square

实际上利用 Heine 定理和函数极限的性质, 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^m}{a^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^m}{a^x} = \frac{m}{\ln a} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{m-1}}{a^x} = \cdots = \frac{m!}{(\ln a)^m} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{a^x} = 0.$$

例2.2.19. 定义

$$a_{n+1} := \sin a_n, \quad n \in \mathbb{N} \text{ 和 } 0 < a_0 < \pi.$$

证明

$$a_n \text{ 递增且 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

更进一步

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{3/n}} = 1.$$

证: $a_1 = \sin a_0 \in (0, \pi)$. 一般情形下可证明 $0 < a_n < \pi$. 因为 $\sin x < x$ 对任意 $x \in (0, \pi)$ 成立, 得到 $a_{n+1} < a_n$. 根据定理 2.3.1, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 比如说是 $\alpha \in [0, \pi)$. 故 $\alpha = \sin \alpha$ 从而 $\alpha = 0$.

根据定理 2.2.9,

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{na_n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{a_n^2}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2}}{(n+1) - n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sin^2 a_n} - \frac{1}{a_n^2} \right) = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

这里我们利用了一个未加证明的结果:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{3}}{x^4} = \frac{1}{3}$$

和 $\sin^2 x \sim (x - \frac{x^3}{6} + o(x^4))^2 \sim x^2 - \frac{x^4}{3} + \cdots$. 这些会在下一章给出证明. \square

§2.3 数列收敛的判别法则

最重要的是判别法则是 Cauchy 法则, 因为它给出了数列是否收敛的充分必要条件.

§2.3.1 单调数列

数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 称为(单调) 递增(或递减) 如果 $a_n \leq a_{n+1}$ (或 $a_n \geq a_{n+1}$) 对任意 $n = 1, 2, \dots$ 都成立. 因为数列极限是研究 n 充分大时的性质, 所以在研究单调数列的极限时, 可以把“对任意 $n = 1, 2, \dots$ 都成立”换成只要“对充分大的 n 都成立”.

单调递增或单调递减的数列统称单调数列.

定理2.3.1. 假设数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 单调. 下列断言等价

$$\{a_n\}_{n \geq 1} \text{ 收敛} \iff \{a_n\}_{n \geq 1} \text{ 有界.} \quad (2.3.1)$$

证: \implies : 显然.

\impliedby : 不失一般性, 不妨假设 $a_n \leq a_{n+1}$. 令 $E := \{a_n : n = 1, 2, \dots\}$. 如果 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 有界, 根据 Zorn 引理上确界 $a := \sup E$ 存在且 $a_n \leq a$.

$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ 使得 $a - \epsilon < a_N \leq a$ 成立, 否则的话, $a - \epsilon$ 将是 E 的一个上界. 由于 a_n 递增, 得到 $a - \epsilon < a_n \leq a$ 对所有 $n > N$ 都成立. \square

例2.3.2. (1) $a_1 := \sqrt{2}, a_{n+1} := \sqrt{2 + a_n} (n \geq 1) \implies$ 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(2) $a_1 > 0, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}) (n \geq 1) \implies$ 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

证: (1) 观察到

- 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 “ $a = \sqrt{2 + a}$ ” $\implies (a - 2)(a + 1) = 0 \implies a = 2$.
- $a_2 = \sqrt{2 + a_1} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > a_1, a_2 < \sqrt{2 + 2} = 2; a_3 = \sqrt{2 + a_2} > \sqrt{2a_2} > a_2$.

一般地我们断言

$$\sqrt{2} \leq a_n < 2 \text{ 和 } a_{n+1} > a_n.$$

实际上, $\sqrt{2} \leq a_n < 2 \implies a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + 2} = 2$, 而 $a_{n+1} > a_n \implies a_{n+2} = \sqrt{2 + a_{n+1}} > \sqrt{2a_{n+1}} > a_{n+1}$. 因此 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 单调递增且有界 $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

(2) $\forall n \geq 1$, 有 $a_n > 0$ 并且

$$a_{n+1} - 1 = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right) - 1 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{a_n} - \frac{1}{\sqrt{a_n}} \right)^2 \geq 0.$$

另一方面,

$$a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(a_n + a_n) = a_n.$$

从而 $a_n \geq a_{n+1} \geq \dots \geq 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 存在且 $a \geq 1$. 解方程 $a = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$ 并注意到 a 的有界性, 得到 $a = 1$. \square

例2.3.3. $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} (n \geq 1) \implies$ 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

证: 观察到

$$a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{2}{3}, \quad a_4 = \frac{3}{5}, \quad a_5 = \frac{5}{8}, \quad \dots$$

断言 $\{a_{2n}\}_{n \geq 1}$ 递增但 $\{a_{2n-1}\}_{n \geq 1}$ 递减, 且 $\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1$. 事实上明显的不等式 $\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1 \implies a_{n+1} \geq \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ 和 $a_{n+1} \leq \frac{1}{1+0} = 1$. 更进一步

$$a_{2n+2} = \frac{1}{1+a_{2n+1}} \geq \frac{1}{1+a_{2n-1}} = a_{2n}, \quad a_{2n+1} = \frac{1}{1+a_{2n}} \leq \frac{1}{1+a_{2n-2}} = a_{2n-1}.$$

令 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = A$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = B \implies B = 1/(1+A)$ 且 $A = 1/(1+B) \implies A = B = (\sqrt{5}-1)/2$. 即 $a_n \rightarrow (\sqrt{5}-1)/2$. \square

§2.3.2 三个重要的常数 π 、 e 、和 γ

在高中时候, 知道常数 $\pi = 3.1415926\dots$ 和 $e = 2.7182818284590\dots$.

A. 常数 π . 下面的结论最早由 Euler 得到, 然而当时的证明方法是不严格的.

定理2.3.4. (Euler, 1734) 常数 π 可以有下面数列得到:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq n \leq N} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (2.3.2)$$

证: (1) 第一个证明是 John Scholes 给出.

断言 1: $\forall m \in \mathbb{N}$,

$$\cot^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \dots + \cot^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right) = \frac{2m(2m-1)}{6}.$$

考察恒等式

$$\cos(nx) + i \sin(nx) = e^{inx} = (e^{ix})^n = (\cos x + i \sin x)^n.$$

比较两边虚数部分得到

$$\sin(nx) = \binom{n}{1} \sin x \cos^{n-1} x - \binom{n}{3} \sin^3 x \cos^{n-3} x \pm \dots$$

令 $n := 2m+1$ 和 $x = \frac{r\pi}{2m+1} (1 \leq r \leq m) \implies$

$$0 = \sin(nx) = \binom{n}{1} \sin x \cos^{n-1} x - \binom{n}{3} \sin^3 x \cos^{n-3} x \pm \dots$$

两边同除以 $\sin^n x (0 < x < \frac{\pi}{2})$ 得到

$$0 = \binom{n}{1} \cot^{n-1} x - \binom{n}{3} \cot^{n-3} x \pm \dots$$

$$= \binom{2m+1}{1} \cot^{2m} x - \binom{2m+1}{3} \cot^{2m-2} x \pm \dots$$

定义多项式如下

$$P(t) := \binom{2m+1}{1} t^m - \binom{2m+1}{3} t^{m-1} \pm \dots + (-1)^m \binom{2m+1}{2m+1}.$$

此多项式有 m 个不同的根

$$a_r := \cot^2 \left(\frac{r\pi}{2m+1} \right), \quad 1 \leq r \leq m.$$

所以

$$P(t) = \binom{2m+1}{1} \prod_{1 \leq r \leq m} \left[t - \cot^2 \left(\frac{r\pi}{2m+1} \right) \right].$$

特别地

$$\sum_{1 \leq r \leq m} a_r = \frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}} = \frac{2m(2m-1)}{6}.$$

断言 2: $\forall m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$,

$$\sum_{1 \leq r \leq m} \csc^2 \left(\frac{r\pi}{2m+1} \right) = \frac{2m(2m+2)}{6}.$$

事实上

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq r \leq m} \csc^2 \left(\frac{r\pi}{2m+1} \right) &= \sum_{1 \leq r \leq m} \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{r\pi}{2m+1} \right)} \\ &= \sum_{1 \leq r \leq m} \left[1 + \cot^2 \left(\frac{r\pi}{2m+1} \right) \right] = m + \frac{2m(2m-1)}{6}. \end{aligned}$$

在区间 $(0, \pi/2)$ 内, 下列不等式成立:

$$0 < \sin y < y < \tan y, \quad 0 < \cot y < \frac{1}{y} < \csc y, \quad 0 < \cot^2 y < \frac{1}{y^2} < \csc^2 y.$$

作为推论得到

$$\frac{2m(2m-1)}{6} < \sum_{1 \leq r \leq m} \left(\frac{2m+1}{r\pi} \right)^2 < \frac{2m(2m+2)}{6}.$$

等价地

$$\frac{\pi^2}{6} \frac{2m}{2m+1} \frac{2m-1}{2m+1} < \sum_{1 \leq r \leq m} \frac{1}{r^2} < \frac{\pi^2}{6} \frac{2m}{2m+1} \frac{2m+2}{2m+1}.$$

最后令 $m \rightarrow \infty$ 推出 $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$.

(2) 第二个证明由 **Beukers-Calabi-Kolk** 给出. 注意到

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)^2}.$$

故

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \iff \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

引入二重积分

$$J := \iint_{[0,1] \times [0,1]} \frac{dx dy}{1-x^2-y^2} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

做变量替换

$$u = \cos^{-1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}}, \quad v := \cos^{-1} \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2y^2}},$$

从而 $x = \sin u / \cos v, y = \sin v / \cos u$, 且

$$J = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2-u} du dv = \frac{\pi^2}{8}. \quad \square$$

常数 π 还有其它有趣的表达形式:

$$\begin{aligned} \pi &= 4 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{1+2n}, \\ \pi &= 16 \arctan \frac{1}{5} - 4 \arctan \frac{1}{239}, \\ \pi &= 24 \arctan \frac{1}{8} + 8 \arctan \frac{1}{57} + 4 \arctan \frac{1}{239}. \end{aligned}$$

B. 常数 e . 定义三个数列如下

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad e_n := 1 + \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k!} = \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{1}{k!}.$$

断言 1: 对每个 n ,

$$a_n < a_{n+1}, \quad b_n > b_{n+1}.$$

证: 对每个 n ,

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{n(n-1) \cdots (n-k)}{k!} \frac{1}{n^k} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = a_{n+1}. \end{aligned}$$

对 b_n ,

$$\begin{aligned} \frac{b_{n-1}}{b_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{1 + \frac{1}{n-1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} > \left(1 + \frac{n}{n^2 - 1}\right) \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} > \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1. \end{aligned}$$

断言 2: 极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n := e \quad (2.3.3)$$

存在.

证: 由于

$$a_n < 1 + 1 + \sum_{2 \leq k \leq n} \frac{1}{k!} \leq 2 + \sum_{2 \leq k \leq n} \frac{1}{k(k-1)} = 3 - \frac{1}{n} < 3,$$

根据定理 2.3.1 和断言 1 知道极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ 都存在.

因为 $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)a_n$, 利用收敛数列的四则运算得到 $B = 1 \times A = A$. \square

断言 3: $\forall n \in \mathbb{Z}_+$,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < e < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \quad (2.3.4)$$

断言 4: 极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = e \quad (2.3.5)$$

存在.: 观察到 $e_n < e_{n+1}$ 和

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\ &> 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right). \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$ 得到

$$e \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} = e_k.$$

另一方面, $a_n < e_n$. 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = e$. \square

例 2.3.5. (1) $\forall n \geq 1 \implies$

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n! < e \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}. \quad (2.3.6)$$

(2) 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}. \quad (2.3.7)$$

证: (1) $\forall k \geq 1$,

$$\left(\frac{k+1}{k}\right)^k < e < \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1}.$$

所以

$$\frac{(n+1)^n}{n!} = \prod_{1 \leq k \leq n} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k < e^n < \prod_{1 \leq k \leq n} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}.$$

(2) 根据 (1) 得到

$$\frac{n+1}{e} < \sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{e} \sqrt[n]{n+1}$$

且

$$\frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{e} < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < \frac{n+1}{n} \cdot \sqrt[n]{n+1} \cdot \frac{1}{e}.$$

令 $n \rightarrow \infty$ 推出 (2.3.7). \square

根据 (2.3.7) 得到

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \sim \frac{1}{e} \implies n! \sim n^n e^{-n}$$

当 n 很大时成立.

C. 常数 γ . 给定 $p > 0$ 并令

$$S_n := \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k^p}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

则 $S_n < S_{n+1}$, 且

$$\begin{aligned} S_n &\leq S_{2^n-1} \\ &= 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right)}_{< 2^{-(p-1)}} + \underbrace{\left(\frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{7^p}\right)}_{< 4^{-(p-1)} = 2^{-2(p-1)}} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{(n-1)p}} + \cdots + \frac{1}{(2^n-1)^p}\right)}_{< 2^{-(n-1)(p-1)}} \\ &< \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{p-1}}} = \frac{2^{p-1}}{2^{p-1} - 1}. \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \text{ 对任意 } p > 1 \text{ 都存在.}$$

当 $p = 1$, 根据定理 2.2.9 得到

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\ln n - \ln(n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)} = 1, \end{aligned}$$

这是因为 (利用 (2.3.4))

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

作为推论得到

$$S_n \geq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \rightarrow +\infty, \text{ if } 0 < p \leq 1.$$

特别地

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \ln n \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

定义数列

$$a_n := \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k} - \ln n. \quad (2.3.8)$$

从而

$$a_n > a_{n+1} > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ 存在.}$$

事实上

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n > \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} - \ln n = \ln \frac{n+1}{n} > 0$$

和

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < 0.$$

定义2.3.6. Euler 常数 γ 定义为

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k} - \ln n \right). \quad (2.3.9)$$

猜想2.3.7. γ 是无理数, 即, $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

一个更进一步的猜想是说 γ 是超越数. a 是超越数如果对任意整系数多项式 $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 都不可能使 $P(a) = 0$ 成立. 超越数的存在最早由 Liouville 在 1844 年证明的, 他所给的数是

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad a_n := \frac{1}{10!} + \frac{1}{10^2!} + \cdots + \frac{1}{10^n!}.$$

不是超越数的数称为代数数.

定理2.3.8. (1) (Liouville, 1840) e 是无理数.

(2) π 是无理数.

证: (1) 回顾

$$e = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{1}{k!}.$$

假设 $e = a/b$ 是有理数, 其中 $a, b > 0$. 则

$$n!be = n!a, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

另一方面,

$$\begin{aligned} bn!e &= bn! \left[\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) + \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots \right) \right] \\ &= bn! \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) \\ &\quad + b \underbrace{\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \right)}_{\frac{1}{n+1} < ? < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots = \frac{1}{n}} \end{aligned}$$

当 n 充分大时, 右边第二项不再是整数. 这个矛盾说明 e 不是有理数.

(2) 这里几乎最简单的证明是属于 **Niven** (1946) 的. 假设 $\pi = a/b$ 是有理数. 引入多项式

$$f(x) := \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}, \quad F(x) := f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x).$$

但是简单计算表明

$$\mathbb{Z} \ni F(\pi) + F(0) = \int_0^\pi f(x) \sin x dx$$

这里被积函数满足 $0 < f(x) \sin x < \frac{\pi^n a^n}{n!} \ll 1$ (当 $n \gg 1$). \square

1873 年法国数学家 **Hermite** 证明了 e 是超越数. 之后, 1882 年德国数学家 **Lindeman** 证明了 π 也是超越数. 著名的 **Hilbert 23 个问题** (**Hilbert** 在 1900 年的国际数学家大会上提出) 中的第 7 题就是问: 如果 a 是不等于 0 和 1 的代数数, b 是无理代数数, 则 a^b 是超越数. 这个猜想现已被 **Gelfond** (1929) 和 **Schneider/Siegel** (1935) 分别独立证明. 作为直接推论得到 $2^{\sqrt{2}}, 2^{\sqrt{-2}}, i^{\sqrt{2}}, e^\pi (= (-1)^{-i})$ 都是超越数.

§2.3.3 子列

假设 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是一个数列, $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 是严格递增函数. 数列 $\{a_{\varphi(k)}\}_{k \geq 1}$ 称为 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 的子列并记作 $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$.

定理 2.3.9. (1) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则对任意子列 $\{a_{n_k}\}_{k \geq 1}$ 都有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a.$$

- (2) $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 收敛 \implies 每个子列收敛.
- (3) $\exists \{a_{n_k}\}_{k \geq 1}$ 的发散子列 $\implies \{a_n\}_{n \geq 1}$ 发散.
- (4) \exists 两个极限不等的收敛数列 $\implies \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 发散.
- (5) $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 收敛 $\iff \{a_{2n-1}\}_{n \geq 1}$ 和 $\{a_{2n}\}_{n \geq 1}$ 都收敛且有相同的极限.

证: (1)-(4) 可以根据定义可得. 对 (5), 假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = a$. $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ 使得

$$|b_n - a| < \epsilon, \quad |c_n - a| < \epsilon, \quad b_n := a_{2n}, \quad c_n := a_{2n-1}.$$

对 a_n , 若 $n = 2k$, 则 $|a_n - a| < \epsilon$ ($n > 2N$); 若 $n = 2k - 1$, 则 $|a_n - a| < \epsilon$ ($n > 2N - 1$). \square

例2.3.10. (Fibonacci 数列) 令

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad (n \geq 2) \implies \text{求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

引入

$$b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

则

$$b_n = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{b_{n-1}}.$$

在例2.3.3 已经证明了

$$b_{2n-1} < b_{2n+1}, \quad b_{2n} > b_{2n+2}, \quad 1 \leq b_n \leq 2.$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_{n-1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618.$$

a_n 的显示表达式为

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

这个可以推到如下. 假设可以写成

$$a_n - \alpha a_{n-1} = \beta (a_{n-1} - \alpha a_{n-2}).$$

从而必须有

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = -1$$

所以 $(\alpha, \beta) = ((1 + \sqrt{5})/2, (1 - \sqrt{5})/2)$ 或 $((1 - \sqrt{5})/2, (1 + \sqrt{5})/2)$. 根据

$$\begin{aligned} a_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2} a_{n-1} &= \frac{1-\sqrt{5}}{2} \left(a_{n-1} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} a_{n-2} \right), \\ a_n - \frac{1-\sqrt{5}}{2} a_{n-1} &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \left(a_{n-1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} a_{n-2} \right) \end{aligned}$$

最后得到

$$\begin{aligned} a_n - \frac{1-\sqrt{5}}{2}a_{n-1} &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \left(a_2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}a_1\right), \\ a_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2}a_{n-1} &= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \left(a_2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}a_1\right). \end{aligned}$$

消去 a_{n-1} 得到 a_n 的表达式.

定理2.3.11. (Bolzano-Weierstrass 定理) 每个有界数列都有一个收敛的子列.

证: 假设数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 有界, 即 $a_n \in [a, b]$ 对某个闭区间 $[a, b]$ 和所有 $n \geq 1$ 成立. 区间对分得到 $[a, \frac{a+b}{2}]$ 和 $[\frac{a+b}{2}, b]$ 至少有一个包含无穷多个 a_n , 不妨记为 $[a_1, b_1]$. 取一点 $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$. 这个对分过程继续下去, 得到一系列闭区间

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_k, b_k] \supset \cdots$$

满足

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \rightarrow 0 \quad \text{和} \quad \exists x_{n_k} \in [a_k, b_k].$$

但是 a_n 增减而 b_n 递减, 根据单调有界数列必有极限得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ 都存在. 除此之外

$$0 \leq b - a \leq b_n - a_n \rightarrow 0.$$

因而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$$

且 $c \in [a_k, b_k]$ 对每个 k 都成立. 根据 $|x_{n_k} - c| \leq b_k - a_k$ 得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = c$.
□

定理2.3.12. 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 无界 $\implies \exists$ 子列 $\{a_{n_k}\}_{k \geq 1}$ 使得 $\{a_{n_k}\}_{k \geq 1}$ 无界.

证: $\exists n_1$ 满足 $|a_{n_1}| > 1$. 从而 $\exists n_2 > n_1$ 满足 $|a_{n_2}| > 2$. 因此 \exists 子列 $\{n_k\}_{k \geq 1}$ 使得 $|a_{n_k}| \geq k$ 成立. □

§2.3.4 Cauchy 数列

数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 称为 **Cauchy 数列** 如果 $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ 使得 $|a_n - a_m| < \epsilon$ 对任何 $n, m \geq N$ 都成立.

例2.3.13. (1) $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 不是 Cauchy, 这里 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

(2) $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 是 Cauchy, 这里 $a_n = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

证: (1) $\forall n \geq 1$,

$$a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

(2) $\forall n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} &= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} > \frac{1}{2(n+1)\sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

故 $\forall m > n$,

$$a_m - a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{m\sqrt{m}} < \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{m}} < \frac{2}{\sqrt{n}}. \quad \square$$

注2.3.14. Cauchy 数列必有界.

证: $\exists N \in \mathbb{N}$ 使得 $|a_m - a_n| < 1$ 对任意 $m, n \geq N$ 都成立. \square

定理2.3.15. (Cauchy 判别法则) 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 收敛 $\iff \{a_n\}_{n \geq 1}$ 是 Cauchy 数列.

证: \implies : 假设极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 存在. 则 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ 满足

$$|a_n - a| < \epsilon, \quad \forall n > N.$$

故

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < 2\epsilon$$

对任何 $n, m > N$ 都成立.

\impliedby : $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ 满足 $|a_n - a_{N_0+1}| < 1, \forall n > N_0$. 特别地, $|a_n| \leq M$. 根据定理 2.3.11, \exists 子列 $\{a_{n_k}\}_{k \geq 1}$ 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$. 更进一步

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \epsilon + |a_{n_k} - a|$$

只要 $n, n_k > N$. \square

注2.3.16. 上述定理对一般的度量空间不一定成立. 比如,

$$x_0 = 2, \quad x_{n+1} := \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) \in \mathbb{Q}.$$

则 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 是 \mathbb{Q} 中的 Cauchy 数列, 但是 $x_n \rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

注2.3.17. 之前已经定义过, 度量空间是完备的如果 \forall Cauchy 数列都是收敛的. 因此 \mathbb{R} 是完备的, 但是 \mathbb{Q} 不完备.

注2.3.18. Riemannian 流形的“完备性”可以用每个测地线是否可以无限延长来刻画.

例2.3.19. 假设数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ 满足条件 $a_n > 0$, $\sqrt{a_1} \geq \sqrt{a_0} + 1$, 且

$$\left| a_{n+1} - \frac{a_n^2}{a_{n-1}} \right| \leq 1, \quad \forall n \geq 1.$$

证明极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \theta \geq 1$$

存在而且数列 $\{a_n/\theta^n\}_{n \geq 1}$ 收敛.

证: 这是一个抽象的数列, 我们可以考虑利用Cauchy收敛法则证明. 首先注意到

$$\left| a_2 - \frac{a_1^2}{a_0} \right| \leq 1 \implies \left| \frac{a_2}{a_1} - \frac{a_1}{a_0} \right| \leq \frac{1}{a_1}$$

根据不等式

$$\frac{a_1}{a_0} \geq \frac{(1 + \sqrt{a_0})^2}{a_0} = 1 + \frac{2}{\sqrt{a_0}} + \frac{1}{a_0} > 1 + \frac{1}{\sqrt{a_0}}$$

得到

$$\frac{a_2}{a_1} \geq \frac{a_1}{a_0} - \frac{1}{a_1} \geq \left(1 + \frac{2}{\sqrt{a_0}} + \frac{1}{a_0} \right) - \frac{1}{a_0} > 1 + \frac{1}{\sqrt{a_0}}.$$

对 $n = 3$ 类似地可以从

$$\left| \frac{a_3}{a_2} - \frac{a_2}{a_1} \right| \leq \frac{1}{a_2} \quad \text{和} \quad \left| \frac{a_3}{a_2} - \frac{a_1}{a_0} \right| \leq \left| \frac{a_3}{a_2} - \frac{a_2}{a_1} \right| + \left| \frac{a_2}{a_1} - \frac{a_1}{a_0} \right|$$

得到

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_3}{a_2} - \frac{a_1}{a_0} \right| &\leq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} < \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{a_0}}} \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} \right) \\ &< \frac{1}{a_0} \left[\frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{a_0}}} + \frac{1}{(1 + \frac{1}{\sqrt{a_0}})^2} \right] < \frac{1}{a_0} \frac{(1 + \frac{1}{\sqrt{a_0}})^{-1}}{1 - (1 + \frac{1}{\sqrt{a_0}})^{-1}} \\ &= \frac{1}{a_0} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{a_0}}} = \frac{1}{\sqrt{a_0}}. \end{aligned}$$

特别地, 得到不等式

$$\frac{a_3}{a_2} > \frac{a_1}{a_0} - \frac{1}{\sqrt{a_0}} > \frac{(1 + \sqrt{a_0})^2}{a_0} - \frac{1}{\sqrt{a_0}} > 1 + \frac{1}{\sqrt{a_0}}.$$

一般地, 从上述不等式我们断言

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 + \frac{1}{\sqrt{a_0}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

实际上, 假设上述断言对任何 $n \leq m$ 都成立, 且令 $\alpha = 1 + \frac{1}{\sqrt{a_0}} > 1$. 从而得到

$$a_k > \alpha a_{k-1} > \cdots > \alpha^k a_0, \quad \forall 1 \leq k \leq m+1.$$

对 $n = m + 1$, 得到

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} - \frac{a_1}{a_0} \right| &\leq \sum_{1 \leq k \leq m+1} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} - \frac{a_k}{a_{k-1}} \right| \leq \sum_{1 \leq k \leq m+1} \frac{1}{a_k} \\ &\leq \frac{1}{a_0} \sum_{1 \leq k \leq m+1} \frac{1}{\alpha^k} < \frac{1}{a_0(\alpha - 1)} < \frac{1}{\sqrt{a_0}}. \end{aligned}$$

从而

$$\frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} > \frac{a_1}{a_0} - \frac{1}{\sqrt{a_0}} > 1 + \frac{1}{\sqrt{a_0}}.$$

为了应用 Cauchy 判别准则, 对任意 $p > q$ 得到

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{p+1}}{a_p} - \frac{a_{q+1}}{a_q} \right| &\leq \sum_{q+1 \leq k \leq p} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} - \frac{a_k}{a_{k-1}} \right| \leq \sum_{q+1 \leq k \leq p} \frac{1}{a_k} \\ &\leq \frac{1}{a_q} \sum_{1 \leq k \leq p-q} \frac{1}{\alpha^k} < \frac{\sqrt{a_0}}{a_q}. \end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 由上述断言得到

$$a_n > \left(1 + \frac{1}{\sqrt{a_0}}\right)^n a_0 \rightarrow +\infty$$

从而发现数列 $\{a_{n+1}/a_n\}_{n \geq 1}$ 收敛到某个实数 $\theta > 1$.

令 $p \rightarrow \infty$ 在下列不等式

$$\left| \frac{a_{p+1}}{a_p} - \frac{a_{q+1}}{a_q} \right| < \frac{\sqrt{a_0}}{a_q}$$

推出

$$\left| \frac{a_{q+1}}{a_q} - \theta \right| \leq \frac{\sqrt{a_0}}{a_q}.$$

从而对任意 $p > q$ 我们得到

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_p}{\theta^p} - \frac{a_q}{\theta^q} \right| &\leq \sum_{1 \leq k \leq p-q} \left| \frac{a_{q+k}}{\theta^{q+k}} - \frac{a_{q+k-1}}{\theta^{q+k-1}} \right| \leq \sum_{1 \leq k \leq p-q} \frac{\sqrt{a_0}}{\theta^{q+k}} = \frac{\sqrt{a_0}}{\theta^q} \sum_{1 \leq k \leq p-q} \frac{1}{\theta^k} \\ &\leq \frac{\sqrt{a_0}}{\theta^q} \frac{\theta^{-1}}{1 - \theta^{-1}} = \frac{\sqrt{a_0}}{\theta^q} \frac{1}{\theta - 1} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

当 $q \rightarrow \infty$. 因此数列 $\{a_n/\theta^n\}_{n \geq 1}$ 是 Cauchy 数列从而收敛. \square

例2.3.20. 定义数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ 如下:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 3$$

和

$$\begin{vmatrix} 1 & a_n & a_{n-1} \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-3} \end{vmatrix} = 1, \quad \forall n \geq 3.$$

求 a_n 的通项并证明极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ 存在.

证: 对行列式做初等变换: 首先第一行减去第二行, 然后第二行减去第三行. 从而得到

$$\begin{aligned} 1 &= \begin{vmatrix} 1 & a_n & a_{n-1} \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_n - a_{n-1} & a_{n-1} - a_{n-2} \\ 1 & a_{n-1} - a_{n-2} & a_{n-2} - a_{n-3} \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-3} \end{vmatrix} \\ &= (a_n - a_{n-1})(a_{n-2} - a_{n-3}) - (a_{n-1} - a_{n-2})^2, \quad \forall n \geq 3. \end{aligned}$$

利用这个递推计算得到

$$a_3 = 5, \quad a_4 = 10, \quad a_5 = 23, \quad \dots$$

回到例 2.3.10, 考虑 Fibonacci 数列 $\{F_n\}_{n \geq 1}$:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (\forall n \geq 3), \quad F_1 = F_2 = 1.$$

F_n 的显示表达式如下

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n), \quad \alpha := \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta := \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

利用这个通项公式马上可以得到下面的恒等式 (请验证!):

$$F_{n+1}^2 = F_n F_{n+2} + (-1)^n \quad (\forall n \geq 1).$$

为了避免繁琐的计算, 我们利用数学归纳法来证明上述这个断言. 假设 $F_{n+1}^2 = F_n F_{n+2} + (-1)^n$. 因此

$$\begin{aligned} F_{n+2}^2 &= (F_n + F_{n+1})^2 = F_{n+1}^2 + F_n^2 + 2F_n F_{n+1} = F_{n+1}^2 + F_n(F_n + F_{n+1}) + F_n F_{n+1} \\ &= F_{n+1}^2 + F_n F_{n+2} + F_n F_{n+1} + F_{n+1} F_{n+2} - F_{n+1} F_{n+2} \\ &= F_{n+1}(F_{n+1} + F_{n+2}) - (F_{n+1} - F_n)F_{n+2} + F_n F_{n+1} \\ &= F_{n+1} F_{n+3} - F_{n-1} F_{n+2} + F_n F_{n+1} = F_{n+1} F_{n+3} - F_{n-1}(F_n + F_{n+1}) + F_n F_{n+1} \\ &= F_{n+1} F_{n+3} - F_{n-1} F_{n+1} + F_n(F_{n+1} - F_{n-1}) = F_{n+1} F_{n+3} - [F_n^2 - (-1)^{n-1}] + F_n^2 \\ &= F_{n+1} F_{n+3} + (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

特别地得到

$$F_{2n-3} F_{2n-5} = 1 + F_{2n-4}^2, \quad \forall n \geq 3.$$

当 $n = 3$ 时, 计算可得

$$\begin{aligned} F_{2n-3} &= F_3 = 2 = a_3 - a_2 = a_n - a_{n-1}, \\ F_{2n-4} &= F_2 = 1 = a_2 - a_1 = a_{n-1} - a_{n-2}, \\ F_{2n-5} &= F_1 = 1 = a_1 - a_0 = a_{n-2} - a_{n-3}. \end{aligned}$$

现在三个初值一样而且递推方程结构一样, 因此

$$a_n - a_{n-1} = F_{2n-3}, \quad \forall n \geq 2.$$

最后我们推出

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{2 \leq k \leq n} F_{2k-3} = a_1 + F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-3} \\ &= a_1 + F_2 + (F_4 - F_2) + (F_6 - F_4) + \cdots + (F_{2n-2} - F_{2n-4}) \\ &= a_1 + F_{2n-2} = 2 + F_{2n-2}. \end{aligned}$$

从而得到

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n-2} \right] \\ &= 2 + \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right], \quad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

根据 $a_n = 2 + F_{2n-2}$ 得到

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{2 + F_{2n-2}}{2 + F_{2n}} = \frac{F_{2n-2} \frac{2}{F_{2n-2}} + 1}{F_{2n} \frac{2}{F_{2n}} + 1} \\ &= \frac{\alpha^{2n-2} [1 - (\beta/\alpha)^{2n-2}] \frac{2}{F_{2n-2}} + 1}{\alpha^{2n} [1 - (\beta/\alpha)^{2n}] \frac{2}{F_{2n}} + 1}. \end{aligned}$$

因为 $\beta/\alpha = \frac{\sqrt{5}-3}{4} \in (-1, 1)$, 得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{\alpha^2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. \square

例2.3.21. 定义数列 $\{x_n\}_{n \geq 0}$ 如下

$$x_0 = 1, \quad x_n = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} \quad (\forall n \geq 1).$$

证明数列 $\{x_n\}_{n \geq 0}$ 发散但是 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n / \sqrt{2n} = 1$.

证: 假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. 由于 x_n 递增且 $x_n > 0$, 得到 $x = x + \frac{1}{x}$. 但是这个方程无解从而数列 $\{x_n\}_{n \geq 0}$ 发散.

因为

$$x_n^2 = \left(x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} \right)^2 = x_{n-1}^2 + \frac{1}{x_{n-1}^2} + 2 > x_{n-1}^2 + 2$$

得到

$$x_n^2 > x_{n-1}^2 + 2 > x_{n-2}^2 + 4 > \cdots > x_0^2 + 2n > 2n.$$

故我们可以引入

$$y_n := x_n^2 - 2n > 0, \quad \forall n \geq 1.$$

简单计算得到

$$y_{n+1} = x_{n+1}^2 - 2(n+1) = \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)^2 - 2(n+1) = y_n + \frac{1}{y_n + 2n}.$$

从而

$$y_n < y_{n+1} < y_n + \frac{1}{2n}, \quad \forall n \geq 1.$$

递推得到

$$y_n < \frac{1}{2(n-1)} + y_{n-1} < \frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{2(n-2)} + y_{n-2} < \cdots < y_1 + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k \leq n-1} \frac{1}{k}.$$

我们已经证明了数列 $\{a_n := \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k} - \ln n\}_{n \geq 1}$ 递减, 故

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} < \ln(n-1) + 1.$$

因此

$$0 < y_n < 2 + \frac{\ln(n-1) + 1}{2} = \frac{\ln(n-1)}{2} + \frac{5}{2}, \quad \forall n \geq 2.$$

作为直接推论得到

$$1 < \frac{x_n}{\sqrt{2n}} < \sqrt{1 + \frac{5}{4n} + \frac{\ln(n-1)}{4n}}.$$

利用夹逼定理推出 $x_n/\sqrt{2n} \rightarrow 1$. \square

例2.3.22. 假设数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ 满足条件: $a_0 = 0, 0 < a_n < a_{n+1}, a_n \rightarrow +\infty$ 且 $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{a_n} = +\infty$. 再假设 s_0, \dots, s_n 是下列线性方程组的解

$$\sum_{0 \leq j \leq n} \frac{s_j}{a_i + a_j + 1} = \frac{1}{m + a_i + 1}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

这里 $m \in \mathbb{N}$. 定义

$$I_n := \frac{1}{2m+1} - \sum_{0 \leq i \leq n} \frac{s_i}{m + a_i + 1}.$$

求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

证: 考虑 $(n+1) \times (n+1)$ 矩阵 A 和 $n+1$ 维向量 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$ 如下:

$$A = \left(\frac{1}{a_i + a_j + 1} \right)_{0 \leq i, j \leq n}, \quad \mathbf{a} = \left(\frac{1}{m + a_0 + 1}, \dots, \frac{1}{m + a_n + 1} \right) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

此时上述线性方程组可以写成

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}^T \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^T \\ \frac{1}{2m+1} \end{bmatrix}$$

这里 $\mathbf{s} = (s_0, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. 从而得到

$$I_n = \frac{\det B}{\det A},$$

这里

$$B = \begin{bmatrix} A & \mathbf{a}^T \\ \mathbf{a} & \frac{1}{2m+1} \end{bmatrix}$$

为了计算 A 和 B 的行列式, 我们利用Cauchy 行列式:

$$D_n := \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} \quad (a_i, b_i \in \mathbb{C}, a_i + b_j \neq 0).$$

则

$$D_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} [(a_i - a_j)(b_i - b_j)] \Big/ \prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j).$$

为了利用数学归纳法证明, 前 $n-1$ 行减去第 n 行得到

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} \frac{a_n - a_1}{(a_1+b_1)(a_n+b_1)} & \frac{a_n - a_1}{(a_1+b_2)(a_n+b_2)} & \cdots & \frac{a_n - a_1}{(a_1+b_n)(a_n+b_n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_n - a_{n-1}}{(a_{n-1}+b_1)(a_n+b_1)} & \frac{a_n - a_{n-1}}{(a_{n-1}+b_2)(a_n+b_2)} & \cdots & \frac{a_n - a_{n-1}}{(a_{n-1}+b_n)(a_n+b_n)} \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} \\ &= \frac{\prod_{1 \leq i \leq n-1} (a_n - a_i)}{\prod_{1 \leq i \leq n} (a_n + b_i)} \cdot \Delta_n, \end{aligned}$$

这里

$$\Delta_n := \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

前 $n-1$ 列减去第 n 列得到

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{b_n - b_1}{(a_1+b_1)(a_1+b_n)} & \frac{b_n - b_2}{(a_1+b_2)(a_1+b_n)} & \cdots & \frac{b_n - b_{n-1}}{(a_1+b_{n-1})(a_1+b_n)} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{b_n - b_1}{(a_2+b_1)(a_2+b_n)} & \frac{b_n - b_2}{(a_2+b_2)(a_2+b_n)} & \cdots & \frac{b_n - b_{n-1}}{(a_2+b_{n-1})(a_2+b_n)} & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{b_n - b_1}{(a_{n-1}+b_1)(a_{n-1}+b_n)} & \frac{b_n - b_2}{(a_{n-1}+b_2)(a_{n-1}+b_n)} & \cdots & \frac{b_n - b_{n-1}}{(a_{n-1}+b_{n-1})(a_{n-1}+b_n)} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\prod_{0 \leq i \leq n-1} (b_n - b_i)}{\prod_{1 \leq j \leq n-1} (a_j + b_n)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 1 \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{n-1}} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{\prod_{0 \leq i \leq n-1} (b_n - b_i)}{\prod_{1 \leq j \leq n-1} (a_j + b_n)} \cdot D_{n-1}.
\end{aligned}$$

结合这两个等式推出

$$D_n = \frac{\prod_{1 \leq i \leq n-1} (a_n - a_i)(b_n - b_i)}{\prod_{1 \leq i \leq n} (a_n + b_i) \prod_{1 \leq j \leq n-1} (a_j + b_n)} \cdot D_{n-1}.$$

递归得到 D_n 的显示表达式. 特别地得到

$$\det A = \frac{\prod_{0 \leq i, j \leq n} (a_i - a_j)^2}{\prod_{0 \leq i, j \leq n} (a_i + a_j + 1)}, \quad I_n = \frac{1}{2m+1} \prod_{0 \leq k \leq n} \left(\frac{a_k - m}{m + a_k + 1} \right)^2.$$

故

$$\ln[(2m+1)I_n] = \sum_{0 \leq k \leq n} 2 \ln \left| \frac{a_k - m}{m + a_k + 1} \right|.$$

但是

$$\ln \frac{|a_k - m|}{m + a_k + 1} = \ln \left(1 - \frac{2m+1}{m + a_k + 1} \right) \leq -\frac{2m+1}{m + a_k + 1} \leq -\frac{m}{a_k},$$

当 $a_k > m$ ($\forall l \geq k^*$). 对 k 求和得到

$$\sum_{0 \leq k \leq n} 2 \ln \left| \frac{a_k - m}{m + a_k + 1} \right| \leq \sum_{0 \leq k \leq k^*} 2 \ln \left| \frac{a_k - m}{m + a_k + 1} \right| - m \sum_{k^* \leq k \leq n} \frac{1}{a_k} \rightarrow -\infty$$

从而 $(2m+1)I_n \rightarrow e^{-\infty} = 0$. \square

§2.3.5 * Ramanujan 恒等式

印度传奇数学家 **Ramanujan** 在 1912 年发现了如下恒等式

$$3 = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 5\sqrt{1 + \cdots}}}}} \quad (2.3.10)$$

但是却未给出详细证明. 本小节我们试着给出上述恒等式的证明 (当然这个证明取自参考文献 1 的附录).

首先我们给出一个“显然的”证明:

$$\begin{aligned} 3 &= \sqrt{9} = \sqrt{1+8} = \sqrt{1+2 \times 4} \\ &= \sqrt{1+2\sqrt{16}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3 \times 5}} \\ &= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{25}}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4 \times 6}}} \\ &= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{36}}}} = \dots \end{aligned}$$

实际上Herschfeld (1935) 指出上述证明不完整, 原因是未证明定义的数列是否收敛. 令

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \sqrt{1+2}, \quad a_3 = \sqrt{1+2\sqrt{1+3}}$$

且

$$a_n = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\dots+(n-2)\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}}}}$$

定义另一个数列如下

$$\begin{aligned} b_1 &= a_n \\ b_2 &= \sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\dots+(n-2)\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}}}} \\ b_3 &= \sqrt{1+4\sqrt{1+\dots+(n-2)\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}}} \\ &\dots \\ b_{n-2} &= \sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}} \\ b_{n-1} &= \sqrt{1+n}. \end{aligned}$$

从而对任意 $1 \leq k \leq n-2$ 得到

$$\begin{aligned} b_k^2 - (k+2)^2 &= [1+(k+1)b_{k+1}] - (k+2)^2 = (k+1)[b_{k+1} - (k+3)] \\ &= (k+1) \frac{b_{k+1}^2 - (k+3)^2}{b_{k+1} + k+3}. \end{aligned}$$

由此推出

$$\begin{aligned} a_n - 3 &= \frac{b_1^2 - 3^2}{b_1 + 3} = 2 \frac{b_2^2 - 4^2}{(b_1 + 3)(b_2 + 4)} = \dots \\ &= (n-1)! \frac{b_{n-1}^2 - (n+1)^2}{(b_1 + 3)(b_2 + 4) \cdots (b_{n-1} + n + 1)} \\ &= \frac{-(n+1)!}{(b_1 + 3)(b_1 + 5) \cdots (b_{n-1} + n + 1)}. \end{aligned}$$

最后得到

$$|a_n - 3| \leq \frac{(n+1)!}{4 \times 5 \times \cdots \times (n+2)} = \frac{6}{n+2} \rightarrow 0.$$

下面我们到 Ramanujan 恒等式做推广.

例2.3.23. 定义数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 如下

$$x_n := \sqrt{a_1 + b_1 \sqrt{a_2 + b_2 \sqrt{a_3 + \cdots + b_{n-1} \sqrt{a_n}}}}, \quad n \geq 1.$$

这里 $a_n, b_n > 0$. 证明

(1) (T. Vijayaraghavan)

$$\{x_n\}_{n \geq 1} \text{ 收敛} \iff \frac{\ln a_n}{2^n} + \sum_{1 \leq k \leq n-1} \frac{\ln b_k}{2^k} < C \quad (\forall n \geq 1).$$

(2) 如果存在数列 $\{\theta_n\}_{n \geq 1}$ ($\theta_n > 0$) 满足

$$\theta_n^2 = a_n + b_n \theta_{n+1} \quad (\forall n \geq 1), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\sqrt{a_n}/\theta_n)}{2^n} = 0,$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \theta_1$.

(3) (Ramanujan) 对 $\forall a \geq 1$ 有

$$a + 1 = \sqrt{1 + a \sqrt{1 + (a+1) \sqrt{1 + (a+2) \sqrt{1 + \cdots}}}}.$$

证: (1) 首先观察到

$$\begin{aligned} x_n &= \sqrt{a_1 + b_1 \sqrt{a_2 + b_2 \sqrt{a_3 + \cdots + b_{n-2} \sqrt{a_{n-1} + b_{n-1} \sqrt{a_n}}}}} \\ &= \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 b_1^2 + b_1^2 b_2 \sqrt{a_3 + \cdots + b_{n-2} \sqrt{a_{n-1} + b_{n-1} \sqrt{a_n}}}}}. \end{aligned}$$

接下去把系数 $b_1^2 b_2$ 收缩到下个根号里面, 继续这个过程, 最后得到

$$x_n = \sqrt{c_1 + \sqrt{c_2 + \sqrt{c_3 + \cdots + \sqrt{c_{n-1} + \sqrt{c_n}}}}} \quad (\geq x_{n-1})$$

这里

$$c_1 = a_1, \quad c_2 = a_2 b_1^2, \quad c_3 = a_3 b_1^2 b_2^2, \quad \cdots, \quad c_n = a_n b_1^{2^{n-1}} b_2^{2^{n-2}} \cdots b_{n-1}^2.$$

假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$. 因为 x_n 递增得到 $x_n \leq c$ 从而 $(c_n)^{1/2^n} \leq c$ 或者

$$\left(a_n \prod_{1 \leq k \leq n-1} b_k^{2^{n-k}} \right)^{\frac{1}{2^n}} \leq c.$$

两边取对数推出

$$\frac{\ln a_n}{2^n} + \sum_{1 \leq k \leq n-1} \frac{\ln b_k}{2^k} \leq C := \ln c.$$

反之假设 $\frac{\ln a_n}{2^n} + \sum_{1 \leq k \leq n-1} \frac{\ln b_k}{2^k} \leq C$ 对任意 $n \geq 1$ 都成立. 得到 $c_n \leq c^{2^n}$, 这里 $c = e^C$. 从而

$$x_n \leq \sqrt{c^2 + \sqrt{c^2 + \cdots + \sqrt{c^2 + \sqrt{c^2}}}}.$$

注意到

$$\sqrt{c^{2^{n-1}} + \sqrt{c^{2^n}}} = \sqrt{c^{2^{n-1}} + c^{2^{n-1}} \sqrt{1}} = c^{2^{n-2}} \sqrt{1 + \sqrt{1}}.$$

最后推出

$$\begin{aligned} x_n &\leq \sqrt{c^2 + \sqrt{c^2 + \cdots + c^{2^{n-2}} + \sqrt{c^{2^{n-1}} + \sqrt{c^{2^n}}}}} \\ &\leq \sqrt{c^2 + \sqrt{c^2 + \cdots + c^{2^{n-2}} + c^{2^{n-2}} \sqrt{1 + \sqrt{1}}}} \\ &\leq \cdots \leq c y_n \end{aligned}$$

这里

$$y_n := \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1}}}}.$$

但是 $y_{n+1} > y_n \geq 1$ 且

$$y_n = \sqrt{1 + y_{n-1}} \leq \sqrt{2y_{n-1}} < \sqrt{2} y_{n-1},$$

得到 $1 \leq y_n < 2$ 从而 $x_n \leq 2c$. 根据单调有界原理推出极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

(2) 因为

$$\theta_n^2 \geq a_n, \quad a_{n-1} + b_{n-1} \theta_n = \theta_{n-1}^2$$

得到

$$\begin{aligned} c_n &\leq \sqrt{a_1 + b_1 \sqrt{a_2 + b_2 \sqrt{a_3 + \cdots + b_{n-2} \sqrt{a_{n-1} + b_{n-1} \theta_n}}}} \\ &\leq \sqrt{a_1 + b_1 \sqrt{a_2 + b_2 \sqrt{a_3 + \cdots + b_{n-2} \theta_{n-1}}}} \\ &\leq \cdots \leq \sqrt{a_1 + b_1 \theta} = \theta_1. \end{aligned}$$

另一方面利用不等式

$$\sqrt{\alpha + \gamma \beta} \leq \sqrt{\gamma} \sqrt{\alpha + \beta}, \quad \forall \alpha, \beta \geq 0, \forall \gamma \geq 1$$

和

$$\frac{\theta_n}{\sqrt{a_n}} \geq 1, \quad \forall n \geq 1,$$

得到

$$\begin{aligned} \sqrt{a_{n-1} + b_{n-1}\theta_n} &= \sqrt{a_{n-1} + b_{n-1}\sqrt{a_n}\frac{\theta_n}{\sqrt{a_n}}} \\ &\leq \sqrt{\frac{\theta_n}{\sqrt{a_n}}}\sqrt{a_{n-1} + b_{n-1}\sqrt{a_n}} \leq \sqrt{\frac{\theta_n}{\sqrt{a_n}}}\sqrt{a_{n-1} + b_{n-1}\theta_n}. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \sqrt{a_{n-2} + b_{n-2}\sqrt{a_{n-1} + b_{n-1}\theta_n}} &\leq \sqrt{a_{n-2} + b_{n-2}\sqrt{\frac{\theta_n}{\sqrt{a_n}}}\sqrt{a_{n-1} + b_{n-1}\theta_n}} \\ &\leq \left(\frac{\theta_n}{\sqrt{a_n}}\right)^{\frac{1}{2^2}} \sqrt{a_{n-2} + b_{n-2}\sqrt{a_{n-1} + b_{n-1}\theta_n}}. \end{aligned}$$

继续下去得到

$$\theta_1 \leq \left(\frac{\theta_n}{\sqrt{a_n}}\right)^{\frac{1}{2^n}} x_n \quad \text{或} \quad \theta_1 \left(\frac{\sqrt{a_n}}{\theta_n}\right)^{\frac{1}{2^n}} \leq x_n \leq \theta_1.$$

条件 $\ln(\sqrt{a_n}/\theta_n)/2^n \rightarrow 0$ 推出 $(\sqrt{a_n}/\theta_n)^{1/2^n} \rightarrow 1$ 和 $x_n \rightarrow \theta_1$.

(3) 取 $a_n \equiv 1, b_n := a + n - 1$, 和 $\theta_n = a + n$. \square

§2.3.6 * Cantor 集

考虑闭区间 $[0, 1]$. 我们在这一小节定义一个不可数的闭集但是“长度”为零.

第一步: 把 $[0, 1]$ 三等分并去掉中间的开区间 $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, 令

$$G_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad P_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

第二步: 把 P_1 中的每个区间再三等分并去掉中间的部分 $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ 和 $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, 令

$$G_2 = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right), \quad P_2 = [0, 1] \setminus G_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

继续这个过程得到两个数列 $\{G_n\}_{n \geq 1}$ 和 $\{P_n\}_{n \geq 1}$. 定义

$$G := \bigcup_{n \geq 1} G_n, \quad P := [0, 1] \setminus G = \bigcap_{n \geq 1} P_n,$$

这里 G_n 是 2^{n-1} 个长度都为 3^{-n} 的不相交的开区间的并. 易证

$$P \cap G = \emptyset, \quad P \cup G = [0, 1], \quad |G_n| = \frac{2^{n-1}}{3^n}.$$

从而

$$|G| = \sum_{n \geq 1} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{2} \frac{2/3}{1-2/3} = 1.$$

称集合 P 为Cantor集. 注意到 P 不可数, 闭的, $|P| = 0$ 但是 $P \neq \emptyset$.

这个和通常的“直观”发生矛盾. 原因是用欧式空间的度量来测量 P 不合适. 之后我们会引入Hausdorff维数 $\dim_{\mathcal{H}}$ (欧式空间 \mathbb{R}^n 的Haudorff维数就是 n) 来描述Cantor集并可以证明 $\dim_{\mathcal{H}}(P) = \ln 2 / \ln 3 \in (0, 1)$. 这样的集合研究属于分形(fractal)范畴. 一个经典的例子是英国海岸线是永远测不准的!

§2.4 参考文献

1. 布鲁斯·C. 伯恩特 (Bruce C. Berndt) 主编: 拉玛努金笔记(第2卷), 哈尔滨工业大学出版社, 2019.
2. Par J. Liouville. *Sur L'irrationalité du nombre $e = 2.718 \dots$* , Journal de Mathématiques, (1840), 192 - 192.
3. Martin Aigner, Gunter M. Ziegler 著 (冯荣权, 宋春伟, 宗传明 译): **Proofs from the book** (数学天书中的证明) (第四版), 高等教育出版社, 2012.
4. Niven, Ivan. *A simple proof that π is irrational*, Bull. Amer. Math. Soc., 53(1947), 509.
5. 徐森林, 薛春华 编著: 数学分析, 清华大学出版社, 2005.
6. 张福保, 薛金美, 潮小李 主编: 数学分析讲义, 科学出版社, 2019.
7. 梅加强 编著: 数学分析, 高等教育出版社, 2015.
8. 邓建平 编: 微积分 I 和 II, 科学出版社, 2019.
9. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis I*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+574 pp. ISBN: 3-540-40386-8
10. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis II*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xvi+681 pp. ISBN: 3-540-40633-6
11. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis I*, Translated from the 1988 German original by Gary Brookfield, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. xiv+426 pp. ISBN: 3-7643-7153-6

12. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis II*, Translated from the 1999 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. xii+400 pp. ISBN: 978-3-7643-7472-3; 3-7643-7472-3
13. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis III*, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. xii+468 pp. ISBN: 978-3-7643-7479-2; 3-7643-7479-2
14. 汪林 著: 数学分析中的问题和反例, 现代数学基础 56, 高等教育出版社, 2015.
15. 裴礼文 编著: 数学分析中的典型问题与方法 (第二版), 高等教育出版社, 2015.
16. 朱尧辰 编著: 数学分析例选通过范例学技巧, 哈尔滨工业大学出版社, 2013.
17. 周民强 编著: 数学分析习题演练 (第一、二、三册), 科学出版社, 2018.
18. 吉米多维奇 著 (李荣涑, 李植 译): 数学分析习题集 (根据 2010 年俄文版翻译), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.

第三章 极限理论 II: 函数极限

念数学, 不能潦草; 笔尖划啊划; 用信任立下誓言我来熬. —《缘分一道桥》改编

§3.1 函数极限

从下面的例子出发: 试着找到函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ 使得 $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ 对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$ 都成立.

从 $f(1) = f(1+0) = f(1)f(0)$ 得到 $f(0) = 1$, 类似地得到 $f(2) = f(1+1) = [f(1)]^2$. 对任意自然数 $n \in \mathbb{N}$ 得到 $f(n) = [f(1)]^n$. 如果 $-n \in \mathbb{N}$, 得到

$$f(n) = \frac{f(0)}{f(-n)} = \frac{1}{f(-n)} = \frac{1}{[f(1)]^{-n}} = [f(1)]^n.$$

从而对任意整数 n 都有

$$f(n) = [f(1)]^n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

如果 $n \in \mathbb{Z}_+$, 得到

$$f(1) = f\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_n\right) = \left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n \implies f\left(\frac{1}{n}\right) = [f(1)]^{\frac{1}{n}}.$$

类似的对 $n \in \mathbb{Z}_-$, 得到 $f(1/n) = [f(1)]^{1/n}$. 从而对任意非零整数 n 都有

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = [f(1)]^{\frac{1}{n}}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

对有理数 $p/q \in \mathbb{Q}$, 其中 $p > 0$, 得到

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\underbrace{\frac{1}{q} + \dots + \frac{1}{q}}_p\right) = \left[f\left(\frac{1}{q}\right)\right]^p = [f(1)]^{\frac{p}{q}}.$$

同样地理由对有理数 $p/q \in \mathbb{Q}$, 其中 $p < 0$, 得到相同的结论. 总之对任意有理数 x 得到

$$f(x) = [f(1)]^x, \quad x \in \mathbb{Q}.$$

现在给定一个实数 $x \in \mathbb{R}$, 已证存在有理数 $a_n \in \mathbb{Q}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$. 这样综合上述结果得到

$$\begin{aligned} f(a_n) &= [f(1)]^{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} [f(1)]^x \\ &\quad \downarrow \text{? } n \rightarrow \infty \\ &f(x) \end{aligned}$$

如果“?”成立则推出

$$f(x) = [f(1)]^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

换句话说, 我们其实证明了

$$\begin{aligned} ? \text{ 成立} &\iff f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) \\ &\iff f \text{ 和 } \lim \text{ 可交换} \\ &\iff f \text{ 连续} \end{aligned}$$

§3.1.1 定义

在给出函数连续定义之前, 我们首先来定义函数在一点的极限.

例3.1.1. (1) 给定函数 $f: (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}$, 定义

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \iff \left(\begin{array}{l} \forall \epsilon > 0, \exists M > a, \forall x > M \\ |f(x) - A| < \epsilon \end{array} \right) \quad (3.1.1)$$

(2) 给定函数 $f: (-\infty, b) \rightarrow \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}$, 定义

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \iff \left(\begin{array}{l} \forall \epsilon > 0, \exists M < b, \forall x < M \\ |f(x) - A| < \epsilon \end{array} \right) \quad (3.1.2)$$

(3) 给定函数 $f: [-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}$, 定义

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \iff \left(\begin{array}{l} \forall \epsilon > 0, \exists M > 0, \forall |x| > M \\ |f(x) - A| < \epsilon \end{array} \right) \quad (3.1.3)$$

根据定义马上得到

定理3.1.2. 我们有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x). \quad (3.1.4)$$

例3.1.3. 求下列函数极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1 + e^x}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}.$$

解: 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = 0$$

得到函数 $e^x/(1 + e^x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时极限不存在. 由于 $|\sin x/x| \leq 1/|x|$ 得到 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x/x = 0$. \square

接下来定义函数在一点的极限.

定义3.1.4. 考虑去心邻域 $U^\circ(a, \rho) := (a - \rho, a + \rho) \setminus \{a\} = (a - \rho, a) \cup (a, a + \rho)$. 给定函数 $f: U^\circ(a, \rho) \rightarrow \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$, 定义

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \iff \left(\begin{array}{l} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 (\delta \leq \rho) \\ |f(x) - A| < \epsilon \\ \text{只要 } 0 < |x - a| < \delta \end{array} \right) \quad (3.1.5)$$

在上述定义中, 不需要规定函数 f 在 a 点有定义. 如果 f 在 a 点有定义且取 $A = f(a)$, 这就是函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 连续的定义.

定义3.1.5. (单侧极限) (1) 给定函数 $f: (a - \rho, a) \rightarrow \mathbb{R}$ (其中 $\rho > 0$), $A \in \mathbb{R}$, 定义左极限

$$f(a-) := \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A \iff \left(\begin{array}{l} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall -\delta < x - a < 0 \\ |f(x) - A| < \epsilon \end{array} \right) \quad (3.1.6)$$

(2) 给定函数 $f: (a, a + \rho) \rightarrow \mathbb{R}$ (其中 $\rho > 0$), $A \in \mathbb{R}$, 定义右极限

$$f(a+) := \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A \iff \left(\begin{array}{l} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < x - a < \delta \\ |f(x) - A| < \epsilon \end{array} \right) \quad (3.1.7)$$

定理3.1.6. 根据定义得到

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \iff f(a+) = A = f(a-). \quad (3.1.8)$$

例3.1.7. 下列函数在 0 点极限不存在:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

对一个函数 $f(0-) = -1$ 和 $f(0+) = 1$. 而对第二个函数 $f(0-) = 0$ 但是 $f(0+)$ 不存在.

§3.1.2 函数极限的性质

在这一小节主要考虑函数在 $x \rightarrow a$ 时的性质, 对其它情形的极限可类似地证明.

定理3.1.8. (1) (唯一性) 若函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处有极限则极限必唯一.

(2) **(局部有界性)** 若函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处有极限则 $f(x)$ 在 a 的某个去心邻域内必有界.

(3) **(局部保序性)** 假设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ 且 $A > B$. 则存在 a 的某个去心邻域 $U^\circ(a, \rho)$ 使得 $f(x) > g(x)$ 对任意 $x \in U^\circ(a, \rho)$ 都成立.

(4) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = |A|$.

(5) (夹逼定理) 若在某个去心邻域 $U^\circ(a, \rho)$ 内成立 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

(6) (四则运算) 假设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 且 α, β 为给定常数. 则得到

- $\lim_{x \rightarrow x_0} [\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha A + \beta B$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = AB$.
- 若 $B \neq 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/g(x) = A/B$.

(7) (复合函数极限) 假设 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$, $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$, 且在 x_0 的某个去心邻域内 $g(x) \neq u_0$, 则复合函数 $f \circ g$ 在 x_0 处有极限且

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = A. \quad (3.1.9)$$

证: 只给出最后一个个性的证明. 给定 $\epsilon > 0$, 根据 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$ 的定义可以找到 $\eta > 0$ 只要 $0 < |u - u_0| < \eta$ 时有 $|f(u) - A| < \epsilon$. 对这个找到的 $\eta > 0$ 存在 $\delta > 0$ 只要 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $0 < |g(x) - u_0| < \eta$. 从而当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f[g(x)] - A| < \epsilon$. \square

在结论 (3.1.9) 中我们已经假设 $g(x) \neq u_0$ 在 x_0 的某个去心邻域内成立. 如果把这个条件去掉则结论 (3.1.9) 不一定成立. 事实上参考文献 [1] 中已经指出: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$, $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$, 则或者 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = A$, 或者 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = f(u_0)$, 或者 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)]$ 不存在.

例3.1.9. 求解

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1, \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{a^x} = 0 \quad (a > 1, k \in \mathbb{N})$$

解: (1) $\frac{1}{x} - 1 < \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leq \frac{1}{x}$ 得到 $1 - x < x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leq 1$. (2) $0 < x^k/a^x \leq (\lfloor x \rfloor + 1)^k/a^{\lfloor x \rfloor + 1}$. 利用 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k/a^n = 0$ 推出原来函数的极限为 0. \square

§3.1.3 两个重要的极限

在例 3.1.3 (2) 中我们已经研究了函数 $\sin x/x$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时候的极限. 接下来很自然地想知道这个函数当 $x \rightarrow 0$ 时地极限.

性质3.1.10. 下面极限成立

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (3.1.10)$$

证: 显然有初等不等式 $\sin x < x < \tan x$ 当 $0 < x < \pi/2$ 成立. 类似地得到

$$|\sin x| < |x| < |\tan x|, \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}.$$

所以 $\cos x < \sin x/x < 1$ 当 $0 < |x| < \pi/2$. 要利用函数极限的夹逼定理, 只有说明 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$. 根据倍角公式得到

$$|\cos x - 1| = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{2}$$

从而得到 $\cos x \rightarrow 1$ 当 $x \rightarrow 0$. \square

注3.1.11. 对函数 $\sin x/x$ 已经证明了

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

考虑函数 $\sin x/x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的积分, 即

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

利用含参变量积分或者复变函数可以证明上述积分等于 $\pi/2$.

性质3.1.12. 下面极限成立

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (3.1.11)$$

证: 对任意 $x \geq 1$ 有不等式

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

最左边项可以写成

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1} / \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)$$

而最右边项可以写成

$$\left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right).$$

利用数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = e$ 推出 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 1/x)^x = e$ 成立. 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 令 $y = -x \rightarrow +\infty$ 得到

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y = \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \frac{y}{y-1} \rightarrow e.$$

利用定理 3.1.6 (关于 $x \rightarrow \infty$ 的版本) 得到 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 1/x)^x = e$. \square

注3.1.13. 公式 (3.1.11) 有下列变形:

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^y = \frac{1}{e}. \quad (3.1.12)$$

公式 (3.1.10) 有下面一个应用: 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n \sin(2\pi n!e)] = 2\pi.$$

回顾极限

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{1}{k!} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}.$$

从而得到

$$n!e = n! \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{1}{k!} n! \sum_{k \geq n+1} \frac{1}{k!}.$$

右边第一项属于 \mathbb{Z} 而把第二项记作 $\epsilon_n \rightarrow 0$. 计算可得

$$\frac{1}{n+1} < \epsilon_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots = \frac{1}{n}$$

故

$$n \sin(2\pi n!e) = n \sin(2\pi \epsilon_n) = \frac{\sin(2\pi \epsilon_n)}{2\pi \epsilon_n} \frac{2\pi \epsilon_n}{\frac{1}{n}} \rightarrow 1 \times 2\pi = 2\pi. \quad \square$$

§3.1.4 Heine 定理

这个定理在数列极限和函数极限之间建立了一座桥梁.

定理3.1.14. (Heine) 给定函数 $f: U^\circ(a, \rho) \rightarrow \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A &\iff \forall \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset U^\circ(a, \rho) \text{ 满足 } a_n \rightarrow a, \text{ 有 } \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = A, \\ &\iff \forall \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset U^\circ(a, \rho) \text{ 满足 } a_n \rightarrow a, \text{ 有 } \{f(a_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ 收敛}. \end{aligned}$$

证: (1) \Leftarrow : 假设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq A$, 则 $\exists \epsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in U^\circ(a, \delta)$ 使得 $|f(x) - A| \geq \epsilon_0$. 分别取 $\delta_1 = \rho, \delta_2 = \rho/2, \dots, \delta_n = \rho/n, \dots$, 得到点列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 满足 $x_n \in U^\circ(a, \rho/n)$ 和 $|f(x_n) - A| \geq \epsilon_0$. 此时 $x_n \rightarrow a$, 但是 $f(x_n) \not\rightarrow A$.

\Rightarrow : 显然.

(2) \Rightarrow : 显然.

\Leftarrow : 只要证明任何收敛数列 $\{f(a_n)\}_{n \geq 1}$ 都有相同的极限. 假设存在数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 和 $\{b_n\}_{n \geq 1}$ 满足 $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow a, f(a_n) \rightarrow A, f(b_n) \rightarrow B$, 但 $A \neq B$. 定义新的数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 如下:

$$x_1 := a_1, x_2 := b_1, x_3 := a_2, x_4 := b_2, \dots, x_{2n-1} := a_n, x_{2n} := b_n, \dots$$

此时 $x_n \rightarrow a$ 但数列 $\{f(x_n)\}_{n \geq 1}$ 发散. 矛盾表明必有 $A = B$. \square

例3.1.15. (1) 证明函数 $\sin \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处无极限. 对数列 $x_n = 1/n\pi$ 和 $y_n = 1/(2n\pi + \pi/2)$ 有

$$\sin \frac{1}{x_n} = 0, \quad \sin \frac{1}{y_n} = 1.$$

故 $\sin 1/x$ 在 $x = 0$ 处极限不存在.

(2) 证明 Dirichlet 函数在任何点 $x \in \mathbb{R}$ 的极限都不存在. Dirichlet 函数定义为

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

对任意 $a \in \mathbb{R}$, $\exists a_n \in \mathbb{Q}$ 满足 $a_n \rightarrow a$. 另一方面 $\exists b_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 满足 $b_n \rightarrow a$. 所以 $D(a_n) = 1 \neq 0 = D(b_n)$.

(3) 拓扑学家的 **sine 曲线** 定义为 $X := \{(x, \sin(1/x)) : x \in (0, 1]\}$. 定义映射

$$f : (0, 1] \rightarrow X \subset \mathbb{R}^2, \quad f(x) := \left(x, \sin \frac{1}{x}\right).$$

从而可以证明 X 是连通的, \bar{X} 是连通的但不是道路连通的.

定理3.1.16. 函数的 Cauchy 收敛准则成立:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \text{ 存在} &\iff \left(\forall \epsilon > 0, \exists M > 0, \forall |x|, |y| > M \right. \\ &\quad \left. |f(x) - f(y)| < \epsilon \right), \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ 存在} &\iff \left(\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < |x - a|, |y - a| < \delta \right. \\ &\quad \left. |f(x) - f(y)| < \epsilon \right). \end{aligned}$$

证: \implies : 显然. \impliedby : 利用数列的 Cauchy 收敛准则得到对任意 $a_n \rightarrow \infty$, 数列 $\{f(a_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ 收敛. 根据 Heine 定理得到极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在. \square

§3.1.5 * Bohr-Mollerup-Artin 定理

称函数 $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$) 是凸的如果不等式

$$F(\lambda x + \mu y) \leq \lambda F(x) + \mu F(y) \quad (3.1.13)$$

对任意 $x, y \in (a, b)$, 任意 $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$ 满足 $\lambda + \mu = 1$, 都成立.

如果函数 F 本身是 2 阶可导的, 则 F 是凸的当且仅当 $F'' > 0$. 比如下列函数

$$-\ln x \quad (0 < x < +\infty), \quad |x| \quad (x \in (-\infty, +\infty)), \quad e^x \quad (x \in (-\infty, +\infty))$$

都是凸函数.

定理3.1.17. (Bohr - Mollerup - Artin) 假设函数 $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 满足条件:

$$(i) f(x+1) = xf(x), \quad (ii) \ln f(x) \text{ 是凸的}, \quad (iii) f(1) = 1.$$

证明函数 f 由下列极限给出

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}.$$

证: (1) 首先假设 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n \geq 2$ $x \in (0, 1]$. 从条件 (i) 和 (iii) 得到

$$f(n) = (n-1)!.$$

令

$$F(x) := \ln f(x).$$

根据条件 (ii) 和分解 $n+x = x(n+1) + (1-x)n$ 得到

$$F(n+x) \leq xF(n+1) + (1-x)F(n).$$

所以

$$\frac{F(n+x) - F(n)}{x} \leq F(n+1) - F(n).$$

另一方面, 利用分解 $n = \frac{x}{1+x}(n-1) + \frac{1}{1+x}(nx)$ 得到

$$F(n) \leq \frac{x}{1+x}F(n-1) + \frac{1}{1+x}F(n+x).$$

所以

$$(1+x)F(n) \leq xF(n-1) + F(n+x) \implies F(n) - F(n-1) \leq \frac{F(n+x) - F(n)}{x}.$$

最后推出

$$\ln(n-1) \leq \frac{\ln[f(x+n)] - \ln[(n-1)!]}{x} \leq \ln n$$

即

$$\ln [(n-1)^x (n-1)!] \leq \ln[f(x+n)] \leq \ln [n^x (n-1)!]$$

或

$$(n-1)^{P^x} (n-1)! \leq f(x+n) = (x+n-1) \cdots (x+1)f(x) \leq n^x (n-1)!.$$

由此得到 $f(x)$ 的估计

$$\frac{(n-1)^x (n-1)!}{x(x+1) \cdots (x+n-1)} \leq f(x) \leq \frac{n^x (n-1)!}{x(x+1) \cdots (x+n-1)}.$$

等价地,

$$\frac{n}{n+x} f(x) \leq \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)} \leq f(x), \quad \forall n \geq 1.$$

因此结论对任意 $x \in (0, 1]$ 成立.

(2) 对一般的 $x > 0, k \in \mathbb{N}, k < x \leq k+1, 0 < x-k \leq 1$.

$$f(x-k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{x-k} n!}{(x-k)(x-k+1) \cdots (x-k+n)}$$

和

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x-1+1) = (x-1)f(x-1) = \cdots \\ &= (x-k)(x-k+1) \cdots (x-1)f(x-k) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x n!}{n^k x(x+1) \cdots (x-k+n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)} \cdot \frac{(x-k+n+1) \cdots (x+n)}{n^k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}. \quad \square \end{aligned}$$

§3.2 函数的阶估计

数列中无穷小和无穷大的概念可以平行推广到函数情形.

§3.2.1 无穷小

定义3.2.1. 给定 $a \in \mathbb{R}$. 称函数 $f(x)$ 为 (当 $x \rightarrow a$ 时的) 无穷小, 并记作 $f(x) = o(1)$ (当 $x \rightarrow a$ 时), 如果 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

在上述定义中, 如果把极限过程 $x \rightarrow a$ 换成 $x \rightarrow a+, x \rightarrow a-, x \rightarrow -\infty, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow \infty$, 我们就得到相应的无穷小之概念.

注3.2.2. (1) 不失一般性, 之后的讨论都围绕极限过程 $x \rightarrow a$ 展开. 其它极限过程可类似地讨论.

(2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \iff f(x) - A = o(1)$ 当 $x \rightarrow a$ 时.

(3) $f(x) = o(1)$ 当 $x \rightarrow a \iff |f(x)| = o(1)$ 当 $x \rightarrow a$ 时.

(4) $f(x) = o(1), g(x) = o(1)$ 当 $x \rightarrow a$ 时 $\implies \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha f(x) + \beta g(x) = o(1)$ 当 $x \rightarrow a$ 时.

(5) $f(x) = o(1)$ 当 $x \rightarrow a$ 时, 且 $g(x)$ 在 $(a-\delta, a+\delta)$ ($\exists \delta > 0$) 内有界 $\implies f(x)g(x) = o(1)$ 当 $x \rightarrow a$ 时.

例3.2.3. (1) $x \rightarrow 0$:

$$\sin x = o(1), \quad \tan x = o(1), \quad a^x - 1 = o(1) \quad (a > 0).$$

$x \rightarrow 0+$:

$$x^\alpha = o(1) \quad (\alpha > 0), \quad 1 - \cos x = o(1).$$

$x \rightarrow +\infty$:

$$\frac{1}{x^\alpha} = o(1) \ (\alpha > 0), \quad a^x = o(1) \ (0 < a < 1).$$

$x \rightarrow \infty$:

$$\frac{1}{x^n} = o(1) \ (n \in \mathbb{Z}_+), \quad \frac{1}{x^{1/3}} = o(1).$$

$x \rightarrow -\infty$:

$$a^x = o(1) \ (a > 1).$$

(2) $x \rightarrow 0$:

$$xe^x + 3 \ln(1+x) = e^{\sin x} \cos x - 1 = o(1).$$

$x \rightarrow \infty$:

$$\frac{x + \sin x}{x^2 + 5x - 2} = \frac{3x}{e^x + \ln x} = \sqrt{1+x} - \sqrt{x} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{\sin x}{x} = o(1).$$

(3) 求常数 A 和 B 满足

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 5} + Ax + B) = 1.$$

解: 根据条件可令

$$\sqrt{x^2 + 2x + 5} + Ax + B = 1 + \alpha(x), \quad \alpha(x) = o(1) \ (\text{当 } x \rightarrow +\infty).$$

则

$$A = \frac{1 + \alpha - B - \sqrt{x^2 + 2x + 5}}{x} = -\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} + \frac{1 - B}{x} + \frac{\alpha}{x}.$$

令 $x \rightarrow +\infty$ 得到 $A = -1$ 从而

$$B = 1 + \alpha + x - \sqrt{x^2 + 2x + 5}.$$

两边再让 $x \rightarrow +\infty$ 推出

$$B = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x - 5}{\sqrt{x^2 + 2x + 5} + x} = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{5}{x}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}} = 0.$$

最后得到 $A = -1$ 和 $B = 0$. \square

定义3.2.4. 假设函数 $u(x), v(x)$ 满足条件 $u(x) = v(x) = o(1)$, 当 $x \rightarrow a$ 时.

(1) 定义

$$u(x) = o(v(x)) \text{ 当 } x \rightarrow a \text{ 时} \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = 0.$$

(2) 定义

$$u(x) = O(v(x)) \text{ 当 } x \rightarrow a \text{ 时} \iff \left| \frac{u(x)}{v(x)} \right| \leq M (\exists M > 0) \text{ 在 } \dot{U}(a, \delta) \text{ 内.}$$

(3) 定义

$$\begin{aligned} u(x) \approx v(x) \text{ 当 } x \rightarrow a \text{ 时} &\iff u(x) = O(v(x)) \text{ 且 } v(x) = O(u(x)) \\ &\text{当 } x \rightarrow a \text{ 时} \\ &\iff 0 < m \leq \left| \frac{u(x)}{v(x)} \right| \leq M \\ &(\exists 0 < m < M) \text{ 在 } \dot{U}(a, \delta) \text{ 内} \end{aligned}$$

(4) 定义

$$u(x) \sim v(x) \text{ 当 } x \rightarrow a \text{ 时} \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = 1.$$

性质3.2.5. (1) $u(x) = v(x) = o(1)$ 当 $x \rightarrow a$ 时, 且 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)}$ 存在 $\implies u(x) = O(v(x))$ 当 $x \rightarrow a$ 时.

(2) $u(x) = v(x) = o(1)$ 当 $x \rightarrow a$ 时, 且 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = c \neq 0 \implies u(x) \approx v(x)$ 当 $x \rightarrow a$ 时.

证: 显然成立. \square .

定义3.2.6. (1) 称函数 $u(x)$ 为 k 阶无穷小(当 $x \rightarrow a$ 时), 如果

$$u(x) \approx (x-a)^k (k > 0).$$

(2) 称 $c(x-a)^k$ 为 $u(x)$ 的主部(当 $x \rightarrow a$ 时), 如果 $c \neq 0$ 且

$$u(x) \sim c(x-a)^k, \quad x \rightarrow a.$$

在证明性质时, 其实我们已经证明了

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1}{2}x^2} = 1. \quad (3.2.1)$$

事实上,

$$\frac{1 - \cos x}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x^2} = \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \rightarrow 1^2 = 1$$

当 $x \rightarrow 0$ 时.

例3.2.7. (1) $x \rightarrow 0$:

$$\sin x \approx (x-0)^1, \quad 1 - \cos x \approx (x-0)^2, \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}(x-0)^2.$$

(2) $x \rightarrow 0+$:

$$\ln x = o(1), \quad x^\alpha (\ln x)^k = o(1) \quad (\alpha > 0, k \in \mathbb{Z}_+).$$

(3) $x \rightarrow 0$:

$$\sin x \sim x \sim \tan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha} \quad (\alpha > 0).$$

证: 先证 $x \sim \ln(1+x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[1 + \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{e} \right] = \ln(1+0) = 0.$$

再证 $e^x - 1 \sim x$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = 1.$$

最后证 $[(1+x)^\alpha - 1]/x \sim \alpha$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} \cdot \frac{\alpha \ln(1+x)}{x} = \alpha. \quad \square$$

性质3.2.8. 假设极限过程都为 $x \rightarrow a$.

(1) $u(x) = O(v(x)) \quad v(x) = O(w(x)) \implies u(x) = O(w(x)).$

(2) $u(x) = O(v(x)) \quad v(x) = o(w(x)) \implies u(x) = o(w(x)).$

(3) $O(u(x)) + O(v(x)) = O(u(x) + v(x)).$

(4) $O(u(x))O(v(x)) = O(u(x)v(x)),$ 特别地 $O(u^k(x)) = O(u(x))^k.$

(5) $o(1)O(u(x)) = o(u(x)).$

(6) $O(1)o(u(x)) = o(u(x)).$

(7) $O(u(x)) + o(u(x)) = O(u(x)).$

(8) $o(u(x)) + o(v(x)) = o(|u(x)| + |v(x)|).$

(9) $o(u(x))o(v(x)) = o(u(x)v(x)),$ 特别地 $o(u^k(x)) = o(u(x))^k.$

(10) $u(x) \sim v(x) \quad v(x) \sim w(x) \implies u(x) \sim w(x).$

(11) $u(x) \sim v(x), w(x) = o(u(x)) \implies u(x) \sim v(x) \pm w(x).$

证: 请诸位作为练习自证. \square

§3.2.2 无穷大

若 $u(x)$ 为无穷小, 则把 $f(x) = 1/u(x)$ 称为无穷大. 下面我们只对极限过程 $x \rightarrow a$ 时展开讨论. 对其余极限情形 $x \rightarrow a+$, $x \rightarrow a-$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow \infty$, 请诸生自行写出定义.

定义3.2.9. 假设函数 $f(x)$ 定义在 $\dot{U}(a, \rho)$ 内, 其中 $\rho > 0$. 定义

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty &\iff \left(\forall C > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \dot{U}(a, \delta) \text{ 有} \right. \\ &\quad \left. f(x) \geq C. \right), \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty &\iff \left(\forall C > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \dot{U}(a, \delta) \text{ 有} \right. \\ &\quad \left. f(x) \leq -C. \right), \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty &\iff \left(\forall C > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \dot{U}(a, \delta) \text{ 有} \right. \\ &\quad \left. |f(x)| \geq C. \right). \end{aligned}$$

类似于定义3.2.4, 我们可引入如下记号:

(1) 若 $u(x) \rightarrow \infty, v(x) \rightarrow \infty$, 定义

$$u(x) = o(v(x)) \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = 0.$$

(2) 若 $u(x) \rightarrow \infty, v(x) \rightarrow \infty$, 定义

$$u(x) = O(v(x)) \iff \left| \frac{u(x)}{v(x)} \right| \leq M \text{ 在 } \dot{U}(a, \delta) \text{ 内.}$$

(3) 若 $u(x) \rightarrow \infty, v(x) \rightarrow \infty$, 定义

$$u(x) \approx v(x) \iff u(x) = O(v(x)) \text{ 且 } v(x) = O(u(x)).$$

(4) 若 $u(x) \rightarrow \infty, v(x) \rightarrow \infty$, 定义

$$u(x) \sim v(x) \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = 1.$$

性质3.2.10. 性质 3.2.8 对无穷大也成立.

§3.2.3 等价替换

我们知道当 $x \rightarrow a$ 时, $\tan x \sim \sin x \sim x$ 从而导致 $\tan x - \sin x \rightarrow 0$. 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\tan x - \sin x) = 0.$$

例3.2.11. 求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}.$$

证: 如果直接把等价关系 $\sin x \sim \tan x \sim x$ 带入就会得到极限为 ∞ . 但是实际上

$$\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{\sin x}{\cos x} \frac{1 - \cos x}{x^3} = \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

一个很自然的问题是为何不能直接把等价的量带入然后再求极限? 原因在于在例3.2.11 中分母是 x^3 从而导致我们要算出分子 $\tan x - \sin x$ 更加准确的估计, 即要算出高阶无穷小. 事实上利用以后会学到的Taylor 展开我们可以得到

$$\sin x \sim x - \frac{1}{3!}x^3, \quad \tan x \sim x + \frac{1}{3}x^3, \quad \tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3, \quad x \rightarrow 0.$$

利用上述估计立刻得到极限就是 $1/2$. \square

定理3.2.12. 假设 $v(x) \sim w(x)$, 当 $x \rightarrow a$ 时, 是等价无穷小或等价无穷大. 则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} u(x)v(x) = A &\iff \lim_{x \rightarrow a} u(x)w(x) = A, \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = A &\iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{w(x)} = A. \end{aligned}$$

证: 利用 $u(x)w(x) = u(x)v(x) \cdot \frac{w(x)}{v(x)}$ $\frac{u(x)}{w(x)} = \frac{u(x)}{v(x)} \cdot \frac{v(x)}{w(x)}$ 马上得证. \square

上述定理告诉我们在乘除运算中, 等价的两个无穷小或无穷大可以互相替换而不影响最后结果. 但是对加减运算则情况很复杂, 原因在于你要找到一个方法使之变成乘除运算从而可以利用定理 3.2.12.

例3.2.13. (1) 求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{\ln(1+2x)}.$$

解: 因为 $\ln(1+2x) \sim 2x$ 当 $x \rightarrow 0$ 时成立, 所以得到

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{\ln(1+2x)} \sim \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{2x} = \frac{(\sqrt{1+x} - 1) - (\sqrt[3]{1+x} - 1)}{2x}.$$

根据平方差公式得到

$$\frac{(1+x)^{1/2} - 1}{x} = \frac{(1+x) - 1}{x[(1+x)^{1/2} + 1]} = \frac{1}{(1+x)^{1/2} + 1} \sim \frac{1}{2}$$

当 $x \rightarrow 0$ 时. 同样利用立方差公式得到

$$\frac{(1+x)^{1/3} - 1}{x} = \frac{1}{(1+x)^{2/3} + (1+x)^{1/3} + 1} \sim \frac{1}{3}$$

当 $x \rightarrow 0$ 时. 因此

$$(1+x)^{1/2} - 1 \sim \frac{1}{2}x, \quad (1+x)^{1/3} - 1 \sim \frac{1}{3}x, \quad x \rightarrow 0.$$

最终极限等于 $(1/2 - 1/3)/2 = 1/12$. \square

(2) 求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2}.$$

解: 仿照 (1) 得到

$$\sqrt{1+2x} - 1 \sim \frac{1}{2} \times 2x = x, \quad x \rightarrow 0.$$

但是 $(\sqrt{1+2x} - 1)/x^2 \rightarrow \infty$. 故考虑分解

$$\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x} = \left[\sqrt{1+2x} - (1+x) \right] - \left[\sqrt[3]{1+3x} - (1+x) \right].$$

分别利用平方差公式和立方差公式得到

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - (1+x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x^2[\sqrt{1+2x} + (1+x)]} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x+\sqrt{1+2x}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - (1+x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x) - (1+x)^3}{x^2[(1+3x)^{2/3} + (1+3x)^{1/3}(1+x) + (1+x)^2]} = \frac{-3}{3} = -1. \end{aligned}$$

最后得到极限等于 $-1/2 + 1 = 1/2$. \square

(3) 实际上对任何 $\alpha > 0$ 有

$$(1+x)^\alpha - \left[\sum_{0 \leq i \leq k-1} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{i!} x^i \right] \sim \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k \quad (3.2.2)$$

当 $x \rightarrow 0$ 时. 由此我们得到如下断言:

断言: 假设 $u(x) - \sum_{0 \leq i \leq k-1} a_i x^i \sim a_k x^k$ 和 $v(x) - \sum_{0 \leq i \leq k-1} b_i x^i \sim b_k x^k$ 当 $x \rightarrow 0$ 时成立, 其中 $a_0, b_0, \dots, a_k, b_k$ 都是常数且 $a_k \neq b_k$. 则

$$u(x) - v(x) \sim (a_k - b_k)x^k, \quad x \rightarrow 0.$$

证: 根据假设条件得到

$$\begin{aligned} \frac{u(x) - v(x)}{(a_k - b_k)x^k} &= \frac{[u(x) - \sum_{0 \leq i \leq k-1} a_i x^i] - [v(x) - \sum_{0 \leq i \leq k-1} b_i x^i]}{(a_k - b_k)x^k} \\ &= \frac{u(x) - \sum_{0 \leq i \leq k-1} a_i x^i}{a_k x^k} \cdot \frac{a_k}{a_k - b_k} - \frac{v(x) - \sum_{0 \leq i \leq k-1} b_i x^i}{b_k x^k} \cdot \frac{b_k}{a_k - b_k} \\ &\sim \frac{a_k}{a_k - b_k} - \frac{b_k}{a_k - b_k} = 1. \end{aligned}$$

即 $u(x) - v(x) \sim (a_k - b_k)x^k$. \square

比如

$$\begin{aligned}(1+x)^{1/2} - \left[1 + \frac{1}{2}x\right] &\sim \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}x^2 = -\frac{1}{8}x^2, \\(1+x)^{1/3} - \left[1 + \frac{1}{3}x\right] &\sim \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2}x^2 = -\frac{1}{9}x^2\end{aligned}$$

故

$$(1+x)^{1/2} - (12+x)^{1/3} \sim \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)x = \frac{1}{6}x.$$

又比如

$$\begin{aligned}(1+2x)^{1/2} - \left[1 + \frac{1}{2}(2x)\right] &\sim \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}(2x)^2 = -\frac{1}{2}x^2, \\(1+3x)^{1/3} - \left[1 + \frac{1}{3}(3x)\right] &\sim \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2}(3x)^2 = -x^2.\end{aligned}$$

故得到

$$(1+2x)^{1/3} - (1+3x)^{1/3} \sim \left(-\frac{1}{2} + 1\right)x^2 = \frac{1}{2}x^2.$$

(4) 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos(\sqrt{x^2+x}-x)$.

解: 令 $u := \sqrt{x^2+x}-x$. 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + \sqrt{x^2+x}} = \frac{1}{2}$$

得到

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos(\sqrt{x^2+x}-x) = \lim_{u \rightarrow \frac{1}{2}} \arccos u = \frac{\pi}{3}. \quad \square$$

(5) 证明

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim x^{1/2}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

证: 令 $u := (x + x^{1/2})/x^2$ 推出

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{x^{1/2}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + \left(\frac{x + x^{1/2}}{x^2}\right)^{1/2}\right]^{1/2} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} (1 + u^{1/2})^{1/2} = 1. \quad \square\end{aligned}$$

(6) 求下列函数当 $x \rightarrow 0$ 时的主部

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \pi - 3 \arccos\left(x + \frac{1}{2}\right), \quad x \rightarrow 0.$$

解: 对第一个函数有

$$\begin{aligned}\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} &= \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\frac{\pi}{3} \\ &= 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{x}{2} \sim \sin\frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}\end{aligned}$$

所以函数 $\sin(x + \pi/3) - \sqrt{3}/2$ 当 $x \rightarrow 0$ 时的主部是 $x/2$. 对第二个函数利用 $\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ 有

$$\begin{aligned}\pi - 3\arccos\left(x + \frac{1}{2}\right) &\sim \sin\left[\pi - 3\arccos\left(x + \frac{1}{2}\right)\right] = \sin\left[3\arccos\left(x + \frac{1}{2}\right)\right] \\ &= 3\sqrt{1 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} - 4\left(\sqrt{1 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}\right)^3 \\ &= \sqrt{1 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} \left\{3 - 4\left[1 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right]\right\} \\ &\sim \frac{\sqrt{3}}{2}(4x + 4x^2) \sim 2\sqrt{3}x, \quad x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

所以函数 $\pi - 3\arccos(x + 1/2)$ 当 $x \rightarrow 0$ 时的主部是 $2\sqrt{3}x$. \square

例3.2.14. 假设函数 $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 满足条件

$$f(2x) = f(x) \quad \text{且} \quad f(x) = o(1), \quad x \rightarrow +\infty.$$

证明 $f \equiv 0$.

证: 任取 $x_0 \in (0, +\infty)$ 得到

$$f(x_0) = f(2x_0) = f(2^2x_0) = \cdots = f(2^n x_0), \quad \forall n.$$

根据 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 和 Heine 定理, 定理 3.1.14 ($x \rightarrow +\infty$ 的版本), 得到

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(2^n x_0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

即对 $\forall x_0 > 0$ 有 $f(x_0) = 0$. \square

例3.2.15. 假设函数 $f(x)$ 满足条件 $f(x) = o(1)$ 且 $f(2x) - f(x) = O(x)$, 当 $x \rightarrow 0$ 时. 则 $f(x) = O(x)$, 当 $x \rightarrow 0$ 时.

证: 根据条件 $f(2x) - f(x) = O(x)$ 得到 $|f(2x) - f(x)| \leq M|x|$, $\exists M > 0$, $\forall x \in \dot{U}(0, \delta)$, $\exists \delta$. 从而得到

$$\begin{aligned}\left|f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)\right| &\leq \frac{M|x|}{2}, \quad \left|f\left(\frac{x}{2}\right) - f\left(\frac{x}{2^2}\right)\right| \leq \frac{M|x|}{2^2} \\ \cdots, \quad \left|f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| &\leq \frac{M|x|}{2^n}.\end{aligned}$$

把这些不等式加起来并利用基本不等式 $|x - y| \leq |x| + |y|$ 得到

$$\left| f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) \right| \leq M|x| \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{2^k} \leq M|x|.$$

利用假设条件 $f(x) = o(1)$ 并令 $n \rightarrow \infty$ 推出 $|f(x)| \leq M|x|$. 即 $f(x) = O(x)$, 当 $x \rightarrow 0$ 时. \square

§3.3 函数的连续和间断

假设函数 $f(x)$ 定义在去心邻域 $\dot{U}(a, r)$ 内. 称 f 当 $x \rightarrow a$ 时的极限为 A , 如果 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta \in (0, r], \forall x \in \dot{U}(a, \delta)$, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$. 如果函数 $f(x)$ 定义在邻域 $U(a, r)$ 内且 $A = f(a)$, 我们就得到函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处连续的定义.

§3.3.1 连续函数

我们那上述的讨论写成如下的定义.

定义3.3.1. 假设函数 $f(x)$ 定义在邻域 $U(a, r)$ 内. 称函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处连续如果

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

即 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta \in (0, r], \forall x \in U(a, \delta)$, 有

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

此时 a 称为函数 $f(x)$ 的连续点.

称函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续如果函数 $f(x)$ 在任意 $x \in (a, b)$ 处连续. 假设函数 $f(x)$ 定义在区间 $[a, a + r)$ 内. 称函数 $f(x)$ 在 a 处右连续如果

$$f(a+) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a).$$

假设函数 $f(x)$ 定义在区间 $(a - r, a]$ 内. 称函数 $f(x)$ 在 a 处左连续如果

$$f(a-) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a).$$

称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 内连续如果 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续, 在 a 处右连续, 且在 a 处左连续.

类似地可以定义函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 或 $[a, b)$ 内连续的概念.

例3.3.2. (1) 函数 $\sin x, \cos x, a^x (a > 0)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

(2) 函数 $f(x)$ 在 a 处连续 \iff 函数 $f(x)$ 在 a 处即时左连续又是右连续.

(3) 函数 $f(x)$ 连续 \implies 函数 $|f(x)|$ 连续. 但是反之不一定成立, 比如考察函数

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & x \in [0, 2], \\ \frac{1}{2}x - 1, & x \in [-2, 0). \end{cases}$$

(4) $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \iff \forall x_n \rightarrow a$ 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ 成立.

例3.3.3. (1)

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

在 0 处连续.

(2)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

在 0 处不连续.

例3.3.4. 考察函数

$$f(x) = \begin{cases} a_n + \sin(\pi x), & 2n \leq x \leq 2n + 1, \\ b_n + \cos(\pi x), & 2n - 1 < x < 2n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z},$$

求 a_n 和 b_n 使得函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

解: 因为函数 $f(x)$ 在 $2n$ 处连续, 所以 $f(2n-) = f(2n) = f(2n+)$ 从而

$$b_n + 1 = a_n.$$

同样根据函数 $f(x)$ 在 $2n - 1$ 处连续得到

$$a_{n-1} = b_n - 1.$$

故推出 $a_n = a_0 + 2n$ 且 $b_n = a_0 + 2n - 1$. \square

例3.3.5. (1) 定义 $(0, 1)$ 上的 Riemann 函数为

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in (0, 1) \text{ 且为无理数,} \\ \frac{1}{q}, & x = p/q \in (0, 1) \cap \mathbb{Q} \text{ 且 } (p, q) = 1. \end{cases}$$

证明函数 $f(x)$ 在任意 $x \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ 处不连续, 但是在任意 $x \in (0, 1) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ 处连续.

证: 令取 $x = p/q \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$. $\exists \epsilon_0 \in (0, 1/q)$, $\forall \delta > 0$, $\exists (0, 1)$ 的无理数 x 满足 $|x - x_0| < \delta$ 但是

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x_0)| = \frac{1}{q} > \epsilon_0.$$

现在假设 $x_0 \in (0, 1) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. $\forall \epsilon > 0$, \exists 有限多个 $q \in \mathbb{N}$ 满足 $1/q \geq \epsilon$. 从而 \exists 有限多个 $p/q \in (0, 1)$ 满足 $1/q \geq \epsilon$. $\exists \delta > 0$ 使得不等式 $|\frac{p}{q} - x_0| \geq \delta$ 对有限多个满足条件 $1/q \geq \epsilon$ 的 $p/q \in (0, 1)$ 都成立. 从而 $\forall x \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ 只要 $|x - x_0| < \delta$ 都有 $1/q < \epsilon$, 这里 $x = p/q$; 此时得到

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x)| = \frac{1}{q} > \epsilon.$$

当 $|x - x_0| < \delta$ 且 $x \in (0, 1) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ 时, 显然有 $|f(x) - f(x_0)| = |f(x)| = 0 < \epsilon$. \square

(2) 定义函数 $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ 如下

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, 1) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \\ \frac{nx}{n+1}, & x = \frac{m}{n} \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}, (m, n) = 1. \end{cases}$$

证明 $f(x)$ 在任意 $x \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ 处不连续, 但是在任意 $x \in (0, 1) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ 处连续.

证: 令 $x_0 = m/n \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$. 则 $f(x_0) = nx_0/(n+1) = m/(n+1)$. 取

$$x_k = \frac{km+1}{kn} \rightarrow \frac{m}{n} = x_0$$

得到

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{kn \frac{km+1}{kn}}{kn+1} = \frac{m}{n} \neq f(x_0).$$

所以函数 $f(x)$ 在 x_0 处不连续.

如果 $x_0 \in (0, 1) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, 就和(1)中证明一样 $\exists \delta_0 > 0$ 使得对 $\forall x \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ 且 $|x - x_0| < \delta_0$ 都有 $1/n < \epsilon$, 这里 $x = m/n$. 取 $\delta := \min(\epsilon, \delta_0) > 0$. $\forall x \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ 且 $|x - x_0| < \delta$ 有 $1/n < \epsilon$, 这里 $x = m/n$. 进一步

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \left| \frac{x}{1 + \frac{1}{n}} - x_0 \right| = \frac{|x - x_0 - \frac{m}{n}|}{1 + \frac{1}{n}} \leq \frac{|x - x_0|}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{\frac{x_0}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \\ &< |x - x_0| + \frac{x_0}{n} < \delta + \epsilon x_0 < \epsilon(1 + x_0). \end{aligned}$$

当 $x \in (0, 1) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta < \epsilon$. 故函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续. \square

例3.3.6. 定义函数

$$f(x) := \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos^n(\pi m!x)) \right], \quad x \in \mathbb{R}.$$

证明

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

因此 $f(x)$ 就是Dirichlet函数, 而且 $f(x)$ 处处不连续.

证: 简便起见对给定 m, n 记

$$f_{m,n}(x) := \cos^n(\pi m!x).$$

如果 $x = p/q \in \mathbb{Q}$, 则 $\forall m > q$, 都有 $f_{m,n}(x) = 1$ 从而 $f(x) = 1$. 如果 $x \notin \mathbb{Q}$, 由于 $|\cos(\pi m!x)| < 1$ 得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{m,n}(x) = 0$ 故 $f(x) = 0$. 函数 $f(x)$ 处处不连续是显然的. \square

注3.3.7. 连续函数满足四则运算法则, 比如两个连续函数的相加和相减都是连续的.

(1) f 在 x_0 处连续, g 在 x_0 处不连续 $\implies f+g$ 在 x_0 处一定不连续, 但是 fg 在 x_0 处可能连续. 反例如下

$$f \equiv 0, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

(2) f 和 g 都在 x_0 处不连续 $\implies f+g$ 在 x_0 处可能连续, 比如

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

fg 在 x_0 处可能连续, 比如

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

(3) f 在 x_0 处不连续 $\implies f^2$ 在 x_0 处可能连续.

(4) f, g 都在 x_0 处连续 $\implies f \wedge g \equiv \min(f, g)$ 和 $f \vee g \equiv \max(f, g)$ 都连续. 这是因为

$$f \wedge g = \frac{f+g-|f-g|}{2}, \quad f \vee g = \frac{f+g+|f-g|}{2}.$$

§3.3.2 函数的间断点

称 a 是函数 $f(x)$ 的间断点, 根据定义如果 $f(x)$ 在 a 处不连续 (此时 $f(a)$ 是有定义的) 或者 $f(x)$ 在 a 处没有定义.

定义3.3.8. 假设 a 是 $f(x)$ 的间断点.

(1) a 是第一类间断点: $f(a-)$ 和 $f(a+)$ 都存在.

(1a) a 是可去间断点如果 $f(a+) = f(a-)$: 要么 $f(a)$ 没有定义但是 $f(a+) = f(a-)$, 此时我们可以延拓定义得到一个连续函数 F :

$$F(x) := \begin{cases} f(x), & x \neq a, \\ f(a+) = f(a-), & x = a; \end{cases}$$

要么 $f(a)$ 有定义但是 $f(a+) = f(a-) \neq f(a)$.

(1b) a 是跳跃间断点如果 $f(a+) \neq f(a-)$: 此时把 $|f(a+) - f(a-)|$ 称为函数 f 在 a 处的跃度.

(2) a 是第二类间断点: $f(a+), f(a-)$ 中至少有一个不存在.

例3.3.9. (1) 0 是如下函数的跳跃间断点:

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

(2) $k \in \mathbb{Z}$ 是函数 $f(x) = [x]$ 的跳跃间断点.

(3) -1 是函数 $f(x) = x/(1+x)^2$ 的第二类间断点.

(4) -1 是函数 $f(x) = (1+x)/(1+x^3)$ 的可去间断点.

(5) 0 和 $k\pi$ 分别是函数 $f(x) = x/\sin x$ 的可去间断点和第二类间断点.

(6) $k \in \mathbb{Z}$ 是函数 $f(x) = x - [x]$ 的跳跃间断点.

(7) 0 和 $1/k$ 分别是函数 $f(x) = 1/x - [1/x]$ 的第二类间断点和跳跃间断点.

(8) 函数 $f(x) = [x] \sin(\pi x)$ 处处连续.

(9) $x \neq k \in \mathbb{Z}$ 是如下函数

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x), & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

的第二类间断点.

注3.3.10. 单调函数 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 的不连续点只能是跳跃间断点.

证: 不是一般性不妨假设函数 $f(x)$ 是递增函数且 $c \in (a, b)$ 是间断点. 对任意 $a < c_1 < c < c_2 < b$, 根据单调性得到

$$f(c_1) \leq f(c) \leq f(c_2).$$

从而 $f(c-) \leq f(c) \leq f(c+)$. 如果 $f(c-) = f(c+)$ 则 $f(x)$ 在 c 处连续, 产生矛盾. 因此 $f(c-) \neq f(c+)$ 实际上 $f(c-) < f(c+)$. \square

定理3.3.11. 单调函数的间断点构成的集合是可数的.

证: 不失一般性不妨假设函数 $f(x)$ 单调且定义在开区间 $I \subset \mathbb{R}$ 内. 如果 $x_1 < x_2$ 是函数 $f(x)$ 的间断点, 根据注3.3.10 得到

$$f(x_1 - 0) \leq f(x_1) \leq f(x_1 + 0) < f(x_2 - 0) \leq f(x_2) \leq f(x_2 + 0).$$

所以

$$I_{x_1} := (f(x_1 - 0), f(x_1 + 0)) \neq \emptyset \implies \exists r_1 \in \mathbb{Q} \cap I_{x_1},$$

$$I_{x_2} := (f(x_2 - 0), f(x_2 + 0)) \neq \emptyset \implies \exists r_2 \in \mathbb{Q} \cap I_{x_2},$$

$$I_{x_1} \cap I_{x_2} = \emptyset \implies r_1 < r_2.$$

令 $X := \{f(x) \text{ 的间断点}\}$ 并定义

$$F: X \longrightarrow \mathbb{Q}, \quad x \longmapsto r_x.$$

所以 F 是单的, 故 $|X| \leq |\mathbb{Q}|$. 因此 X 是可数的. \square

§3.3.3 连续函数的性质

这一小节我们讨论闭区间上连续函数的几个重要性质.

定理3.3.12. (有界性) 如果函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 f 必有界.

证: 否则的话, f 在 $[a, b]$ 上无界. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a, b]$ 满足 $|f(x_n)| \geq n$. 但是数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 有界, $\exists [a, b]$ 内某个收敛子列 $\{x_{n_k}\}_{k \geq 1}$. 记 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c \in [a, b]$. 根据函数 f 的连续性得到 $f(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k})$, 这和 $f(x_n) \rightarrow \infty$ 产生矛盾. \square

注3.3.13. (1) 在定理 3.3.12 中, 我们假设函数 f 要定义在闭区间上, 这是因为如果函数 f 定义在开区间 (a, b) 内则极限 $c = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$ 可能是端点 a 或 b , 但此时 $f(c)$ 不一定有定义.

(2) 函数 f 在 (a, b) 内连续 $\implies f$ 在任意闭区间 $[c, d] \subset (a, b)$ 上有界, 但不一定在 (a, b) 内有界, 比如函数 $f(x) = 1/x, 0 < x < 1$.

定理3.3.14. (Weierstrass 最值定理) 如果函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $\exists \zeta, \eta \in [a, b]$ 满足不等式 $f(\zeta) \leq f(x) \leq f(\eta)$ 对 $\forall x \in [a, b]$ 都成立.

证: 不失一般性不妨只证明 $\exists \eta \in [a, b]$ 使得 $f(x) \leq f(\eta)$ 对任意 $x \in [a, b]$ 都成立. 根据定理 3.3.12 得到 $M := \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ 存在. 假设 $M > f(x)$ 对任意 $x \in [a, b]$ 都成立. 定义

$$F(x) := \frac{1}{M - f(x)} > 0, \quad x \in [a, b].$$

则 F 在 $[a, b]$ 上连续. 再次利用定理 3.3.12 得到 $0 < F(x) \leq K, \forall a \leq x \leq b, \exists K > 0$. 故

$$f(x) \leq M - \frac{1}{K}, \quad \forall x \in [a, b]$$

但这和 M 的定义发生矛盾. 所以 $M = f(\eta)$ 对某个 $\eta \in [a, b]$ 成立. \square

定义3.3.15. 闭区间构成的数列 $\{[a_n, b_n]\}_{n \geq 1}$ 称为闭区间套如果

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] (\forall n \geq 1), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0.$$

定理3.3.16. 如果 $\{[a_n, b_n]\}_{n \geq 1}$ 是闭区间套则 $\exists! \zeta \in \mathbb{R}$ 满足

$$a_n \leq \zeta \leq b_n (\forall n \geq 1), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \zeta = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

证: 参见定理 2.3.11 的证明. \square

注3.3.17. (1) 定理 3.3.16 不一定成立若把闭区间 $[a_n, b_n]$ 换成开区间 (a_n, b_n) , 比如 $\{(0, 1/n)\}_{n \geq 1}$.

(2) 可以证明 Zorn 引理, 定理 2.3.1, 定理 2.3.11, 定理 2.3.15, 定理 3.3.16 互相等价.

现在我们引入记号

$$f \in C(I)$$

这是表明函数 f 在区间 I 上连续.

定理3.3.18. (Bolzano-Cauchy 介值定理) (1) 假设 $f \in C[a, b]$ 且 $f(a)f(b) < 0$ (或 $f(a)f(b) \leq 0$), 则 $\exists \zeta \in (a, b)$ (或 $\exists \zeta \in [a, b]$) 满足 $f(\zeta) = 0$.

(2) 假设 $f \in C[a, b]$, $M_f := \max_{[a, b]} f$, $m_f := \min_{[a, b]} f$, 则 $\forall \mu \in (m_f, M_f)$ 存在 $\zeta \in (a, b)$ 满足 $f(\zeta) = \mu$. 一般地, 假设 $f(a) < \mu < f(b)$, 则存在 $\exists \zeta \in (a, b)$ 满足 $f(\zeta) = \mu$.

证: 不失一般性不妨假设 $f(a) < 0 < f(b)$. 假设 $f(x) \neq 0$ 对任何 $a < x < b$ 都成立. 若 $f((a+b)/2) > 0$, 取 $a_1 = a, b_1 = (a+b)/2$; 若 $f((a+b)/2) < 0$, 取 $a_1 = (a+b)/2, b_1 = b$. 总之在任何情形下均有不等式 $f(a_1) < 0 < f(b_1)$ 成立. $\{[a_n, b_n]\}_{n \geq 1}$,

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], \quad f(a_n) < 0 < f(b_n), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0.$$

根据定理 3.3.16 $\exists \zeta \in [a, b]$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \zeta = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. 因此

$$0 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\zeta) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq 0.$$

(2) 由定理 3.3.14 $\exists \zeta_1, \zeta_2 \in [a, b]$ 满足 $f(\zeta_1) = m_f$ 和 $f(\zeta_2) = M_f$. 不失一般性不妨假设 $\zeta_1 < \zeta_2$. 定义

$$F(x) := f(x) - \mu.$$

则 $f(\zeta_1) = m_f - \mu < 0$ 且 $f(\zeta_2) = M_f - \mu \geq 0$ 成立. 由 (1) $\exists \zeta \in [\zeta_1, \zeta_2]$ 使得 $F(\zeta) = 0$ 成立. 即 $\mu = f(\zeta)$. \square

推论3.3.19. (1) $f \in C[a, b] \implies f([a, b]) = [m_f, M_f]$.

(2) 如果 I 是区间, 则 $f \in C(I) \implies f(I)$ 也是区间.

(3) $f \in C(I) \implies f$ 严格单调当且仅当 f^{-1} 存在.

(4) $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ 连续 $\implies \exists \zeta \in [a, b]$ 满足 $f(\zeta) = \zeta$.

证: (1) $m_f = M_f \implies f$ 为常数 $\implies f([a, b]) = [m_f, M_f]$. 所以假设 $m_f < M_f$. 根据定理 3.3.14 $\exists \zeta, \eta \in [a, b]$ 使得

$$f(\zeta) = m_f, \quad f(\eta) = M_f$$

成立. 由定理 3.3.18, $\forall \mu \in [m_f, M_f] \exists x \in [a, b]$ 满足 $f(x) = \mu \implies [m_f, M_f] \subset f([a, b]) \subset [m_f, M_f]$.

(2) 若 f 为常数, 则 $f(I)$ 为一点故必是区间. 现在假设 f 不是常数. $\forall y_1 < y_2$ 且 $y_1, y_2 \in f(I)$, 我们将证明 $[y_1, y_2] \subset f(I)$. 令 $f(x_1) = y_1 < y_2 = f(x_2)$. 根

据定理 3.3.18, $\forall y \in (y_1, y_2) \exists x \in (x_1, x_2)$ 满足 $f(x) = y \implies [y_1, y_2] \subset f(I) \implies f(I)$ 是区间.

(3) \implies : 显然.

\Leftarrow : 假设函数 f 可逆且 $x_1 < x_2$. 则首先可得到 $f(x_1) \neq f(x_2)$. 不失一般性不妨假设 $f(x_1) < f(x_2)$. 我们将证明 f 在区间 $[x_1, x_2]$ 上严格递增. 否则的话, $\exists x' < x''$ 满足 $x', x'' \in [x_1, x_2]$ 且 $f(x') \geq f(x'')$.

情形 1: $f(x'') < f(x_1)$. 此时 $f(x'') < f(x_1) < f(x_2)$. 根据定理 3.3.18 $\exists \xi \in (x'', x_2)$ 使得 $f(\xi) = f(x_1)$ 成立, 矛盾!

情形 2: $f(x'') > f(x_1)$. 此时 $f(x_1) < f(x'') < f(x')$ $\implies \exists \xi \in (x_1, x')$ 使得 $f(\xi) = f(x'')$ 成立, 矛盾!

(4) 定义 $F(x) := f(x) - x, a \leq x \leq b$. 从 $F(a)F(b) \leq 0, \exists \xi \in [a, b]$ 满足 $F(\xi) = 0$. \square

例 3.3.20. (1) 任意定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇数次多项式至少有一个根.

证: 令此奇数次多项式为

$$P(x) := a_0 x^{2n-1} + a_1 x^{2n-2} + \cdots + a_{2n-2} x + a_{2n-1}, \quad a_0 \neq 0.$$

不失一般性不妨假设 $a_0 > 0$. 根据极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{x^{2n-1}} = a_0 > 0$$

得到 $\exists x_1 < 0 < x_2$ 满足

$$\frac{P(x_1)}{x_1^{2n-1}} > 0, \quad \frac{P(x_2)}{x_2^{2n-1}} > 0.$$

从而 $x_1^{2n-1} < 0 < x_2^{2n-1} \implies P(x_1) < 0 < P(x_2) \implies P(\xi) = 0$ 对某个 $\xi \in (x_1, x_2)$ 成立. \square

(2) $\lim_{x \rightarrow X} f(x) = \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow X} g(x) = \beta \in \mathbb{R} \implies \lim_{x \rightarrow X} [f(x)]^{g(x)} = \alpha^\beta$. 这里 $x \rightarrow X$ 可以是下列极限过程之一: $x \rightarrow a, x \rightarrow a-, x \rightarrow a+, x \rightarrow \infty, x \rightarrow -\infty, x \rightarrow +\infty$.

证: 根据复合函数性质得到

$$\lim_{x \rightarrow X} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow X} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow X} g(x) \ln f(x)} = e^{\beta \ln \alpha} = \alpha^\beta. \quad \square$$

(3) $f \in C[0, 1], f \geq 0, f(0) = f(1) = 0, 0 < a < 1 \implies \exists x_0 \in [0, 1]$ 使得 $f(x_0) = f(x_0 + a)$ 和 $0 \leq x_0 + a \leq 1$ 都成立.

证: 令 $F(x) := f(x) - f(x+a)$. 则 $F \in C[0, 1-a]$ 且 $F(0) = f(0) - f(a) = -f(a) \leq 0, F(1-a) = f(1-a) - f(1) = f(1-a) \geq 0$. 从而 $\exists x_0 \in [0, 1-a]$ 满足 $F(x_0) = 0$. \square

(4) $f \in C[0, 1], f(0) = 0, f(1) = 1 \implies \exists \xi \in [\frac{1}{3}, 1) f(\xi - \frac{1}{3}) = f(\xi) - \frac{1}{3}$.

证: 令 $F(x) = f(x - \frac{1}{3}) - f(x) + \frac{1}{3}$. 则 $F \in C[1/3, 1]$ 且

$$F(1/3) = f(0) - f(1/3) + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - f(1/3),$$

$$F(1) = f(2/3) - f(1) + \frac{1}{3} = f(2/3) - \frac{2}{3},$$

$$F(2/3) = f(1/3) - f(2/3) + \frac{1}{3}.$$

上述三式相加得到

$$F(1/3) + F(2/3) + F(1) = 0.$$

如果 $F(2/3) = 0$, 则 $\xi = 2/3$. 如果 $F(2/3) \neq 0$, 则不妨假设 $F(2/3) > 0$. 此时 $F(1/3) + F(1) < 0$. 如果 $F(1/3) < 0$, 则存在 $\xi \in (1/3, 2/3)$ 使得 $F(\xi) = 0$ 成立; 如果 $F(1/3) = 0$ 则取 $\xi = 1/3$; 如果 $F(1/3) > 0$, 必有 $F(1) < 0$ 从而存在 $\xi \in (1/3, 1)$ 使得 $F(\xi) = 0$ 成立. 无论哪种情形, 都存在 $\xi \in [1/3, 1)$ 使得 $F(\xi) = 0$ 成立. \square

(5) $f \in C(-\infty, +\infty), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \implies \exists x_0 \in (-\infty, +\infty)$ 满足 $f(x_0) = \inf_{(-\infty, +\infty)} f(x)$.

证: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \implies \exists a < 0$ 使得 $f(x) > f(0)$ 对任意 $x < a$ 都成立. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \implies \exists b > 0$ 使得 $f(x) > f(0)$ 对任意 $x > b$ 都成立. 在闭区间 $[a, b]$ 上, $\exists x_0 \in [a, b]$ 使得 $f(x_0) = \min_{[a, b]} f$ 成立. 从而

$$f(x_0) \leq f(0) \leq f(x), \quad \forall x \in (-\infty, +\infty) \setminus [a, b].$$

故 $f(x_0) = \inf_{(-\infty, +\infty)} f$. \square

(6) $f \in C[a, b]$, 且 $\forall x \in [a, b] \exists t \in [a, b]$ 满足 $|f(t)| \leq |f(x)|/2 \implies \exists x_0 \in [a, b]$ 使得 $f(x_0) = 0$ 成立.

证: 否则的话, $\forall x \in [a, b]$ 都有 $|f(x)| > 0$. $f \in C[a, b] \implies |f| \in C[a, b] \implies \exists x_0 \in [a, b] |f(x_0)| = \min_{[a, b]} |f| > 0 \implies \exists t_0 \in [a, b]$ 满足 $|f(t_0)| \leq \frac{1}{2}|f(x_0)| = \frac{1}{2} \min_{[a, b]} |f| \leq \frac{1}{2}|f(t_0)|$. 因此 $|f(t_0)| = 0$, 矛盾! \square

(7) $f \in C[a, b], t, s > 0 \implies \exists \xi \in [a, b]$ 满足

$$tf(a) + sf(b) = (t+s)f(\xi).$$

证: 令 $F(x) := tf(a) + sf(b) - (t+s)f(x)$. 则

$$F(a) = s[f(b) - f(a)], \quad F(b) = t[f(a) - f(b)], \quad F(a)F(b) \leq 0.$$

故 $\exists \xi \in [a, b]$ 满足 $F(\xi) = 0$. \square

(8) $f \in C[0,1], f(0) = f(1) \implies \forall n \geq 1, \exists x_n \in (0,1)$ 满足 $f(x_n) = f(x_n + \frac{1}{n})$.

证: 令 $F(x) := f(x) - f(x + \frac{1}{n})$ 得到

$$F\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k+1}{n}\right), \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

从而

$$\sum_{0 \leq k \leq n-1} F\left(\frac{k}{n}\right) = f(0) - f(1) = 0.$$

如果 $\exists k$ 满足 $F(k/n) = 0$, 取 $x_n = k/n$. 如果 $\forall k$ 都有 $F(k/n) \neq 0 \exists k_1 < k_2$ 满足 $F(k_1/n)F(k_2/n) < 0 \implies \exists x_n \in (k_1/n, k_2/n)$ 满足 $F(x_n) = 0$. \square

(9) $f: [a,b] \rightarrow [a,b], \exists k > 0 |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| (\forall a \leq x, y \leq b) \implies$

(a) f 连续.

(b) $\exists \xi \in [a,b]$ 满足 $f(\xi) = \xi$.

(c) 如果 $0 \leq L < 1, x_{n+1} := f(x_n)$, 其中 $x_0 \in [a,b]$ 给定, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$.

证: (a) 和 (b) 之前都已经证明. 下面证明 (c). 根据条件得到

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq L|x_n - x_{n-1}| \leq \cdots \leq L^n|x_1 - x_0|.$$

故对 $\forall q > p$,

$$|x_q - x_p| \leq \sum_{p \leq k \leq q-1} |x_{k+1} - x_k| \leq \sum_{p \leq k \leq q-1} L^k|x_1 - x_0| \leq |x_1 - x_0| \frac{L^p}{1-L}$$

从而 $\{x_n\}_{n \geq 0}$ 是 Cauchy 数列 $\implies x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在且

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{n-1}) = f(x), \quad |x - \xi| = |f(x) - f(\xi)| \leq L|x - \xi|.$$

但是 $0 \leq L < 1$, 得到 $x = \xi$. \square

(10) $f, g \in C[a,b]$, 且 $\forall n \geq 1, \exists x_n \in [a,b]$ 满足 $g(x_n) = f(x_{n+1}) \implies \exists x_0 \in [a,b] f(x_0) = g(x_0)$.

证: 因为数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 有界, 从而存在 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 的某个收敛子列, 不妨假设这个收敛子列就是数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 本身. 则极限 $x_0 := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 故 $f(x_0) = g(x_0)$. \square

(11) 证明多项式 $x^3 + 2x - 1 = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内只有一个实根 ξ 且 $\xi \in (0,1)$.

证: 令 $f(x) := x^3 + 2x - 1 \in C(-\infty, +\infty)$. 计算得到

$$f(0) = -1 < 0, \quad f(1) = 1 + 2 - 1 = 2 > 0.$$

从而存在 $x_0 \in (0, 1)$ 满足 $f(x_0) = 0$. 但是 $\forall x < y$

$$f(y) - f(x) = (y^3 - x^3) + 2(y - x) = (y - x) \left[\left(y + \frac{1}{2}x \right)^2 + \frac{3}{4}x^2 + 2 \right] > 0$$

推出函数 f 严格单调递增 $\implies \exists! \xi \in (0, 1)$ 满足 $f(\xi) = 0$. \square

(12) $f \in C(-\infty, +\infty)$, 且等式 $f(f(x)) = x$ 对任何 x 成立 $\implies \exists \xi \in (-\infty, +\infty)$ 满足 $f(\xi) = \xi$.

证: 否则的话, $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ 我们有 $f(x) \neq x$. 若 $\exists x_0 \in (-\infty, +\infty)$ 使得 $f(x_0) > x_0$ 成立, 则 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ 必有 $f(x) > x$. 如若不然存在 x_1 满足 $f(x_1) < x_1 \implies \exists \xi$ 使得 $f(\xi) = \xi$ 成立, 矛盾! 类似地, 若 $f(x_0) < x_0$ 对某个 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ 成立, 必有 $f(x) < x$ 对任何 x 成立.

不失一般性不妨假设 $f(x) > x$. 则

$$f(x) < f(f(x)) = x < f(x),$$

矛盾! 从而说明存在 ξ 满足 $f(\xi) = \xi$. \square

性质3.3.21. 假设 $f \in C([a, b])$. 证明

$$m_f(x) := \inf_{a \leq y \leq b} f(y), \quad M_f(x) := \sup_{a \leq y \leq x} f(y)$$

在 $[a, b]$ 上都连续.

证: 不失一般性不妨只证明 m_f 是连续的.

(1) m_f 在 a 处右连续. 观察到 $m_f(a) = f(a)$. $\forall \epsilon > 0$, 由于 f 在 a 处右连续, 所以 $\exists \delta > 0$ 不等式 $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ 对任何 $a \leq x < a + \delta$ 都成立. 因此

$$f(x) > f(a) - \epsilon = m_f(a) - \epsilon.$$

特别地, $\forall a \leq y \leq x < a + \delta$,

$$m_f(a) - \epsilon < f(y) \implies m_f(a) - \epsilon \leq m_f(x) \leq m_f(a).$$

故不等式 $|m_f(x) - m_f(a)| < \epsilon$ 对任何 $a \leq x < a + \delta$ 都成立.

(2) m_f 在 b 处左连续. $f \in C([a, b]) \exists \xi \in [a, b]$ 满足 $f(\xi) = \min_{[a, b]} f = m_f(b)$. 首先假设 $\xi = b$. $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 有

$$|f(x) - f(b)| < \epsilon, \quad b - \delta < x < b,$$

推出

$$f(x) < f(b) + \epsilon = m_f(b) + \epsilon, \quad b - \delta < x < b.$$

所以不等式 $m_f(x) \leq m_f(b) + \epsilon$ 对任何 $b - \delta < x < b$ 都成立 $\Rightarrow |m_f(x) - m_f(b)| < \epsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow b^-} m_f(x) = m_f(b)$.

现在假设 $m_f(b) = f(\xi)$ 对某个 $a \leq \xi \leq b$ 成立 $\Rightarrow \forall x \in (a, b)$, 有

$$m_f(x) = \inf_{[a,x]} f \leq f(\xi) = m_f(b) \geq \inf_{[a,b]} f = m_f(b).$$

所以 $m_f(x) = m_f(b) \Rightarrow m_f$ 在 b 处左连续.

(3) m_f 在 (a, b) 内连续. 证明已经蕴含在 (1) 和 (2) 中. \square

例3.3.22. $f \in C([a, b])$, $x_1, \dots, x_n \in [a, b] \Rightarrow \exists \xi \in [a, b]$ 满足

$$f(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} f(x_k).$$

证: 因为不等式 $m_f \leq f(x_k) \leq M_f$ 对任何 $1 \leq k \leq n$ 都成立 $\Rightarrow m_f \leq \frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} f(x_k) \leq M_f$. 根据定理3.3.18 得到 $\exists \xi$ 使得 $f(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} f(x_k)$ 成立. \square

§3.3.4 一致连续

回顾下函数在一点连续的定义:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \iff \left(\begin{array}{l} \forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(x_0, \epsilon) > 0 \text{ 满足} \\ |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \\ \text{只要 } |x - x_0| < \delta \end{array} \right)$$

我们自然会问:

在定义中可否找到 δ 使得它仅仅依赖于 x_0 本身?

先来考察如下的例子. 令 $f(x) = \sin x$, $x \in (-\infty, +\infty)$. 计算得到

$$|f(x) - f(x_0)| = |\sin x - \sin x_0| = \left| 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right|.$$

只要 $|x - x_0| < \delta = \epsilon$ 充分小 (其实只要小于 $\pi/4$ 即可), 有 $|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| < \epsilon = \delta$. 此时我们只要取 $\delta = \epsilon$.

定义3.3.23. 函数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 称为一致连续的, 如果 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in I$ 满足 $|x - y| < \delta$, 都有

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

成立.

注3.3.24. (1) 一致连续 \implies 连续.

(2) f 在 I 上不是一致连续 $\iff \exists \epsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x_0, y_0 \in I$ 满足 $|x_0 - y_0| < \delta$, 但是 $|f(x_0) - f(y_0)| \geq \epsilon_0$.

(3) 说函数 f 是一致连续的一定要讲明定义域. 比如函数 $f(x) = 1/x$ 在 $(0, +\infty)$ 上不是一致连续 (见例 3.3.25 (2)) 但是在 $[1, 2]$ 上却一致连续.

例3.3.25. (1) 函数 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是一致连续的.

(2) 函数 $f(x) = 1/x$ 在 $(0, +\infty)$ 上不是一致连续的.

证: $\exists \epsilon_0 = 1, \forall \delta > 0, \exists x_0 = \min\{1/2, \delta\}, y_0 = x_0/2$, 满足 $|y_0 - x_0| = x_0/2 < \delta$ 但是 $|f(x_0) - f(y_0)| = 1/x_0 \geq 2 > 1 = \epsilon_0$. \square

(3) 函数 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上不是一致连续的.

证: 取 $x_n = 1/2n\pi$ 和 $y_n = 1/(2n\pi + \pi/2)$, 得到 $|x_n - y_n| = 1/[2n(4n + 1)\pi]$ 但是 $|f(x_n) - f(y_n)| = |0 - 1| = 1$. \square

(4) 给定函数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 和常数 $0 < \alpha \leq 1$. 如果 $\exists M > 0$ 满足如下不等式

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha, \quad \forall x, y \in I,$$

则称函数 f 是 Hölder 连续的并记作 $f \in C^\alpha(I)$. 证明 $f \in C^\alpha(I) \implies f$ 是一致连续的.

证: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = (\epsilon/M)^{1/\alpha} \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$ 对任何 $|x - y| < \delta$ 都成立. \square

定理3.3.26. 假设函数 f, g 在区间 I 上都是一致连续的 \implies

(a) 对任意常数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha f + \beta g$ 在 I 上是一致连续的.

(b) f, g 在 I 上有界 $\implies fg$ 在 I 上是一致连续的.

(c) f 在 I 上有界, 且 $\exists \epsilon_0 > 0$ 满足 $g \geq \epsilon_0$ 对任意 $x \in I$ 都成立 $\implies f/g$ 在 I 上实际一致连续的.

证: 请读者自证. \square

定理3.3.27. (Cantor) $f \in C([a, b]) \implies f$ 在 $[a, b]$ 上是一致连续的.

证: 否则 $\exists \delta_0 > 0, \exists \{x_n\}_{n \geq 1}, \{y_n\}_{n \geq 1} \subset [a, b]$, 满足 $x_n - y_n \rightarrow 0$ 但是 $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0$. 由于 $\{y_n\}_{n \geq 1}$ 有界, 可以找到收敛子列 $\{y_{n_k}\}_{k \geq 1}$ 满足 $y_{n_k} \rightarrow y_0 \in [a, b]$. 取 $x_{n_k} := y_{n_k} + (x_{n_k} - y_{n_k}) \rightarrow y_0 + 0 = y_0$ 得到

$$0 < \epsilon_0 \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \rightarrow |f(y_0) - f(y_0)| = 0.$$

矛盾表明函数 f 在 $[a, b]$ 上是一致连续的. \square

如下定理给出了函数一致连续的其他充要条件.

定理3.3.28. (1) 函数 f 在区间 I 上一致连续 $\Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n \geq 1}, \{y_n\}_{n \geq 1} \subset I$ 只要满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$ 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_n) - f(y_n)] = 0$ 成立.

(2) (**Paine, 1968**) 函数 f 在区间 I 上一致连续 $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \forall x, y \in I, \exists P \in \mathbb{R}$ 满足

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \text{ 只要 } \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} > P (x \neq y).$$

(3) 函数 f 在区间 (a, b) ($-\infty < a < b < +\infty$) 上一致连续 $\Leftrightarrow \forall$ Cauchy 数列 $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset (a, b), \{f(x_n)\}_{n \geq 1}$ 也是 Cauchy 数列.

证: (1) \Rightarrow : $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 有不等式 $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ 成立只要 $|x - y| < \delta$. 对上述 $\epsilon > 0$ 和 $\delta > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N$, 有 $|x_n - y_n| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - f(y_n)| < \epsilon$.

\Leftarrow : 否则的话存在两个数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 和 $\{y_n\}_{n \geq 1}$ 满足 $x_n - y_n \rightarrow 0$, 但是 $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0$.

(2) \Leftarrow : 任给 $\epsilon > 0$, 当 $P \leq 0$ 时, $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ 对任意 $x, y \in I$ 都成立. 当 $P > 0$ 时, 取 $\delta = \epsilon/P$.

\Rightarrow : 否则的话 $\exists \epsilon_0 > 0, \exists x_0, y_0 \in I, \forall P \in \mathbb{R}$, 有

$$|f(x_0) - f(y_0)| \geq \epsilon_0, \left| \frac{f(x_0) - f(y_0)}{x_0 - y_0} \right| > P.$$

记 $\alpha := |f(x_0) - f(y_0)| \geq \epsilon_0$. 存在自然数 $k \geq 2$ 满足 $(k-1)\epsilon_0 \leq \alpha < k\epsilon_0$. 令 $\beta := \alpha/(k-1) \Rightarrow \epsilon_0 \leq \beta < k\epsilon_0/(k-1) \leq 2\epsilon_0$. 不失一般性不妨假设 $x_0 < y_0$ 且 $f(x_0) < f(y_0)$. 从

$$f(x_0) < f(x_0) + \beta < f(x_0) + \alpha \leq f(y_0)$$

得到 $\exists x_1 \in (x_0, y_0)$ 满足 $f(x_1) = f(x_0) + \beta \Rightarrow$

$$f(x_1) < f(x_1) + \beta = f(x_0) + 2\beta \leq f(y_0) + 2\beta - \alpha.$$

当 $2\beta - \alpha \leq 0$ 时 (即 $k \geq 3$), 得到 $f(x_1) < f(x_1) + \beta \leq f(y_0)$. 所以 $\exists x_2 \in (x_1, y_0)$ 满足 $f(x_2) = f(x_1) + \beta$. 一般情形下 $\forall 2 \leq \ell \leq k, \exists x_{\ell-1} \in (x_{\ell-2}, y_0)$ 满足 $f(x_{\ell-1}) = f(x_{\ell-2}) + \beta$. 定义 $x_k := y_0$ 推出

$$\begin{aligned} f(x_k) - f(x_{k-1}) &= f(y_0) - [f(x_{k-2}) + \beta] = f(x_0) + \alpha - f(x_{k-2}) - \beta \\ &= [f(x_0) - f(x_{k-2})] + (\alpha - \beta) = - \sum_{2 \leq \ell \leq k-1} [f(x_{\ell-1}) - f(x_{\ell-2})] + (\alpha - \beta) \\ &= (\alpha - \beta) - \sum_{2 \leq \ell \leq k-1} \beta = \alpha - \beta - (k-2)\beta = \alpha - (k-1)\beta = 0. \end{aligned}$$

做为推论得到

$$f(x_\ell) - f(x_{\ell-1}) = \beta \quad (1 \leq \ell \leq k), \quad x_\ell - x_{\ell-2} \geq \delta \quad (\exists \delta > 0).$$

故

$$\left| \frac{f(x_0) - f(y_0)}{x_0 - y_0} \right| = \frac{|f(x_0) - f(x_k)|}{|x_0 - x_k|} \leq \frac{k\beta}{k\delta} = \frac{\beta}{\delta} < \frac{2\epsilon_0}{\delta} = P.$$

发生矛盾!

(3) \Rightarrow : 假设函数 f 在 (a, b) 上是一致连续且 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 是Cauchy 数列. $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in (a, b)$ 满足 $|x - y| < \delta$, 都有 $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ 成立. 对这个 $\delta > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n > N$, 有不等式 $|x_m - x_n| < \delta$ 成立. 因此有 $|f(x_m) - f(x_n)| < \epsilon \Rightarrow \{f(x_n)\}_{n \geq 1}$ 也是Cauchy 的.

\Leftarrow : 假设函数 f 不是一致连续的. $\exists \epsilon_0 > 0, \exists x'_n, y'_n \in (a, b)$ 满足 $|x'_n - y'_n| < 1/n$, 但是 $|f(x'_n) - f(y'_n)| \geq \epsilon_0$. 由于 (a, b) 是有界的, 存在 $\{x'_n\}_{n \geq 1}$ 的收敛子列 $\{x'_{n_k}\}_{k \geq 1}$; 令 $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x'_{n_k} \Rightarrow x = \lim_{k \rightarrow \infty} y'_{n_k}$. 取

$$x_1 = x'_{n_1}, x_2 = y'_{n_1}, x_3 = x'_{n_2}, x_4 = y'_{n_2}, \dots, x_{2k-1} = x'_{n_k}, x_{2k} = y'_{n_k}, \dots.$$

则得到Cauchy 数列 $\{x_k\}_{k \geq 1}$, 但是 $|f(x_{2k-1}) - f(x_{2k})| \geq \epsilon_0 \Rightarrow \{f(x_k)\}_{k \geq 1}$ 不是Cauchy 数列. \square

定义3.3.29. 假设函数 f 在邻域 $U(x_0, \rho)$ 内有定义, 其中 $\rho > 0$. 定义

$$\omega_f(x_0, r) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in U(x_0, r)\}, \quad 0 < r < \rho. \quad (3.3.1)$$

$\forall r_1 < r_2 \in (0, \rho)$, 有

$$0 < \omega_f(x_0, r_1) \leq \omega_f(x_0, r_2).$$

故可定义

$$\omega_f(x_0) := \lim_{r \rightarrow 0^+} \omega_f(x_0, r). \quad (3.3.2)$$

当函数 f 定义在 $[x_0, x_0 + \rho)$ 或 $(x_0 - \rho, x_0]$ 内时, 也可以类似定义 $\omega_f(x_0)$. 另一方面 $\omega_f(x_0)$ 可以为 $+\infty$. 比如对函数

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$$\omega_f(0) = +\infty.$$

例3.3.30. 考察函数

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

显然有 $\omega_f(0) \leq 2$. 取 $a_n = 1/(2n\pi + \pi/2)$ 和 $b_n = 1/(2n\pi - \pi/2)$ 得到

$$|f(a_n) - f(b_n)| = |1 - (-1)| = 2.$$

因此 $\omega_f(0) = 2$.

定理3.3.31. (1) 函数 f 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \omega_f(x_0) = 0$.

(2) 函数 f 在区间 I 上一致连续 $\Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow 0^+} \omega_f(r) = 0$.

证: (1) \Rightarrow : $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in U(x_0, \delta)$, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon/2.$$

$\forall 0 < r \leq \delta, \forall x, y \in U(x_0, r)$, 得到

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(y) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

因此 $\omega_f(x_0, r) \leq \epsilon \Rightarrow \omega_f(x_0) = 0$.

\Leftarrow : 假设 $\omega_f(x_0) = 0$. $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < r \leq \delta$, 有 $\omega_f(x_0, r) < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$ 对 $\forall x, y \in U(x_0, r)$ 都成立. 特别地 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ 对任何 $x \in U(x_0, \delta)$ 都成立.

(2) 根据定义可得. \square

注3.3.32. (1) 函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续 \Leftrightarrow 函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上一致连续.

(2) 函数 f 在开区间 (a, b) 上一致连续 \Rightarrow 函数 f 在开区间 (a, b) 上连续. 但是反之则不一定成立.

接下来我们给出连续函数在开区间上一致连续的充要条件.

定理3.3.33. 给定连续函数 $f \in C((a, b)) \Rightarrow$ 函数 f 在 (a, b) 上一致连续当且仅当极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 都存在.

证: \Rightarrow : 根据定理 3.1.16.

\Leftarrow : 令 $A := \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 和 $B := \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$. 定义

$$F(x) := \begin{cases} A, & x = a, \\ f(x), & a < x < b, \\ B, & x = b. \end{cases}$$

则 $F \in C[a, b] \Rightarrow F$ 是一致连续的 $\Rightarrow f$ 在 (a, b) 上一致连续. \square

注3.3.34. (1) **连续 + 有界 $\not\Rightarrow$ 一致连续**: 函数 $f(x) = \sin(x^2)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续且有界. $\exists \epsilon_0 = 1/2, \forall \delta > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ 满足 $\frac{1}{\sqrt{n_0}} < \delta, \exists x_1 = \sqrt{2n_0\pi}, x_2 = \sqrt{2n_0\pi + \frac{\pi}{2}}$, 使得

$$0 < x_2 - x_1 = \frac{\pi}{2}(x_2 + x_1)^{-1} \leq \frac{\pi}{2}(2x_1)^{-1} = \frac{\pi}{4}x_1^{-1} < \frac{1}{\sqrt{2n_0\pi}} < \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \delta$$

和

$$|f(x_2) - f(x_1)| = \sin\left[(2n_0 + 1)\frac{\pi}{2}\right] - \sin(2n_0\pi) = 1 > \epsilon_0$$

成立.

(2) 闭区间 $[a, b]$ 上连续 \Rightarrow 闭区间 $[a, b]$ 上一致连续.

(3) f, g 一致连续 $\not\Rightarrow fg$ 一致连续: $f(x) = x, g(x) = \sin x, x \in (-\infty, +\infty)$.

(4) f 一致连续且 f^{-1} 存在 $\not\Rightarrow f^{-1}$ 一致连续: $f(x) = \ln x, x \in [a, +\infty), a > 0$.

(5) $f \in C([a, +\infty)), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A < \infty \Rightarrow$ 函数 f 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续. 一般地, $f \in C(-\infty, +\infty), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = B \Rightarrow$ 函数 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

证: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists M > a, \forall x, y \geq M$, 有 $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ 成立. 因为 $f \in C[a, M+1] \Rightarrow f$ 在 $[a, M+1]$ 上一致连续 $\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \forall x, y \in [a, M+1]$ 满足 $|x - y| < \delta_1$, 有 $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ 成立. 令 $\delta = \min\{1, \delta_1\}$, $\forall x, y > a$ 满足 $|x - y| < \delta \Rightarrow x, y \in [a, M+1]$ 或者 $x, y \in [M, +\infty) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$. \square

很多参考书上都是采用这样的证明, 还特意强调不能用函数 f 在闭区间 $[a, M]$ 上一致连续来证明. 人云亦云, 害人不浅! 其实可以这样去做, 请读者思考 (实在想不出来可参考 [3], 第一册, 例 2.5.10)

(6) 假设函数 f 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续, $\varphi \in C[a, +\infty)$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \varphi(x)] = 0 \Rightarrow \varphi$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续.

证: $\forall \epsilon, \exists M > 0, \forall x > M$, 有 $|f(x) - \varphi(x)| < \epsilon$ 成立. f 一致连续 $\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \forall x, y > a$ 满足 $|x - y| < \delta_1$, 有不等式 $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ 成立 \Rightarrow 对任何 $\forall x, y > M$ 满足 $|x - y| < \delta_1$ 都有

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |f(x) - \varphi(x)| + |f(y) - \varphi(y)| + |f(x) - f(y)| < \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon.$$

在 $[a, M+1]$ 上应用 Cantor 定理 $\Rightarrow \varphi$ 在 $[a, M+1]$ 上一致连续. $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_2 > 0, \forall x, y \in [a, M+1]$ 满足 $|x - y| < \delta_2$, 有 $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \epsilon$ 成立. 取 $\delta = \min\{1, \delta_1, \delta_2\}$, $\forall x, y \geq a$ 满足 $|x - y| < \delta$, 有 $x, y \in [M, +\infty)$ 或 $[a, M+1] \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| < 3\epsilon$. \square

(7) 函数 $f(x) = x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续, 但是其平方 $f^2(x) = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不是一致连续的:

$$\left| (\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2 \right| = 1, \quad |\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

(8) 函数 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续 $\Rightarrow \exists a, b \geq 0$ 使得 $|f(x)| \leq a|x| + b$ 对任何 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都成立.

证: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in (-\infty, +\infty)$ 满足 $|x - y| < \delta$ 都有不等式 $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ 成立. 固定上述 $\epsilon, \delta > 0, \forall x \in (-\infty, +\infty), \exists n \in \mathbb{Z}$ 和 $x_0 \in (-\delta, \delta)$ 使得 $x = n\delta + x_0$ 成立. 故 $\exists M > 0$ 使得 $|f(x)| \leq M$ 对任何 $x \in [-\delta, \delta]$ 都成立. 根据

$$f(x) = \sum_{1 \leq k \leq |n|} \{f(k\delta + x_0) - f[(k-1)\delta + x_0]\} + f(x_0)$$

$$\begin{aligned}
 |f(x)| &\leq \sum_{1 \leq k \leq |n|} |f(k\delta + x_0) - f[(k-1)\delta + x_0]| + |f(x_0)| \leq |n|\epsilon + M \\
 &= \frac{\epsilon}{\delta}|x - x_0| + M \leq \frac{\epsilon}{\delta}|x| + \left(M + \frac{\epsilon}{\delta}|x_0|\right) \leq \frac{\epsilon}{\delta}|x| + (M + \epsilon). \quad \square
 \end{aligned}$$

例3.3.35. 证明函数

$$f(x) = \begin{cases} |x| \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

一致连续. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + (2x + 1)] = 0$ 并结合注3.3.34 (6) 得到结论.

根据注 3.3.34 中的想法, 可以证明如果函数 f 在 $(-\infty, 1]$ 和 $[-1, +\infty)$ 上都是一致连续则函数 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上也是一致连续. 请读者自证.

§3.4 参考文献

1. Ramankutty, P.; Vamanamurthy, M. K. *Limit of the composite of two functions*, Amer. Math. Monthly, **82**(1975), 63 - 64.
2. 谭琳 著: Γ 函数札记, 浙江大学出版社, 1997.
3. 徐森林, 薛春华 编著: 数学分析, 清华大学出版社, 2005.
4. 张福保, 薛金美, 潮小李 主编: 数学分析讲义, 科学出版社, 2019.
5. 梅加强 编著: 数学分析, 高等教育出版社, 2015.
6. 邓建平 编: 微积分 I 和 II, 科学出版社, 2019.
7. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis I*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+574 pp. ISBN: 3-540-40386-8
8. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis II*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xvi+681 pp. ISBN: 3-540-40633-6
9. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis I*, Translated from the 1988 German original by Gary Brookfield, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. xiv+426 pp. ISBN: 3-7643-7153-6

10. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis II*, Translated from the 1999 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. xii+400 pp. ISBN: 978-3-7643-7472-3; 3-7643-7472-3
11. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis III*, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. xii+468 pp. ISBN: 978-3-7643-7479-2; 3-7643-7479-2
12. 汪林 著: 数学分析中的问题和反例, 现代数学基础 56, 高等教育出版社, 2015.
13. 裴礼文 编著: 数学分析中的典型问题与方法 (第二版), 高等教育出版社, 2015.
14. 朱尧辰 编著: 数学分析例选通过范例学技巧, 哈尔滨工业大学出版社, 2013.
15. 周民强 编著: 数学分析习题演练 (第一、二、三册), 科学出版社, 2018.
16. 吉米多维奇 著 (李荣涑, 李植 译): 数学分析习题集 (根据 2010 年俄文版翻译), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.

第四章 导数理论

左边写个微分, 右边写个导数, 不要忘记Taylor, 你的心会痛痛 ——《野狼 disco》改编

§4.1 微分和导数

给定函数 f 和其定义域中的点 a , 一个很自然的问题是当 $x \rightarrow a$ 如何用已知的函数值 $f(a)$ 来 (近似地) 计算未知的函数值 $f(x)$. 比如考察如下的例子:

$$f(x) = x^2.$$

令 $\Delta x := x - a$ 得到

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a + \Delta x) = (a + \Delta x)^2 \\ &= a^2 + 2a\Delta x + (\Delta x)^2 = f(a) + 2a(x - a) + (x - a)^2. \end{aligned}$$

因为

$$\frac{f(x) - f(a) - 2a(x - a)}{x - a} = \frac{(x - a)^2}{x - a} = x - a \rightarrow 0$$

所以当 $x \rightarrow a$ 时得到

$$f(x) = f(a) + 2a(x - a) + o(x - a).$$

§4.1.1 微分

由此我们引入如下定义.

定义4.1.1. 假设函数 f 定义在某个邻域 $U(x_0, r)$ 内. 称 f 在 x_0 处可微 如果存在常数 A (不依赖 x) 使得

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$$

当 $x \rightarrow x_0$ 时成立. 线性函数 $A(x - x_0)$ 称为 f 在 x_0 处的微分.

记号:

(a) $\Delta x := x - x_0$.

(b) $\Delta y \equiv \Delta f := f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

(c) $df(x) := A(x - x_0)$ 或者 $dy \equiv df := A\Delta x$.

例4.1.2. (1) 函数 $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}_+$, 在每点 $x \in (-\infty, +\infty)$ 处都可微且 $dy = nx^{n-1}\Delta x$.

(2) 函数 $f(x) = |x|$ 只在 $x = 0$ 处不可微.

证: (1) $x \in \mathbb{R}$, 从下列计算

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^n - x^n \\ &= nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n = nx^{n-1}\Delta x + o(\Delta x)\end{aligned}$$

得到 $\Delta y = nx^{n-1}\Delta x$.

(2) 若 $x \neq 0$ 则根据 (1) 知道函数 $f(x)$ 在 x 处可微. 若 $x = 0$ 得到

$$\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = |\Delta x|.$$

如果 $\Delta x > 0$, 则 $\Delta y = \Delta x$; 如果 $\Delta x < 0$, 则 $\Delta y = -\Delta x$. 故不存在常数 A 使得 $\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x)$ 成立. \square

注4.1.3. (1) 对函数 $f(x) = x$ 得到

$$dx = dy = \Delta x \implies \text{一般地把微分记作 } dy = A dx \text{ (Leibniz 记号)}$$

(2) 函数 f 在 x_0 处可微 \implies 函数 f 在 x_0 处连续. 但反之则不对, 譬如例4.1.2 (2).

(3) 给定点 $x_1, \cdots, x_n \implies$ 存在函数只在 x_1, \cdots, x_n 处不可微. 比如,

$$f(x) = \sum_{1 \leq k \leq n} |x - x_k|.$$

(4) 存在函数只在 $x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ 处可微但在 $x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ 处不可微. 比如

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{|x - r_n|}{3^n}$$

其中 $\{r_n\} = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$.

(5) (Weierstrass) 存在函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处不可微.

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} b^n \cos(a^n \pi x),$$

这里 $0 < b < 1$, $a > 0$ 为奇数, 且满足 $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

(6) (Carathéodory) 可微的等价定义:

函数 f 在 x_0 可微 $\iff \exists$ 函数 g 在 x_0 处连续且 $f(x) = f(x_0) + g(x)(x - x_0)$.

证: $\implies \exists A$ 满足

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0).$$

由此定义

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \frac{o(x - x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0, \\ A, & x = x_0. \end{cases}$$

因为 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A = g(x_0)$, 函数 g 在 x_0 处连续.

\Leftarrow : 假设 $\exists g$ 使得 g 在 x_0 处连续且 $f(x) = f(x_0) + g(x)(x - x_0)$. 令 $A := g(x_0)$ 得到

$$\frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{x - x_0} = g(x) - g(x_0) \rightarrow 0$$

当 $x \rightarrow x_0$ 时. \square

§4.1.2 导数

假设函数 f 在 x_0 处可微. 则

$$A = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + o(1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} + o(1).$$

令 $x \rightarrow x_0$ 得到

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

定义4.1.4. 假设函数 f 定义在邻域 $U(x_0, r)$ 内. 称 f 在 x_0 处可导若极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0) \quad (4.1.1)$$

存在. 该极限 $f'(x_0)$ 称为 f 在 x_0 处的导数.

定理4.1.5. 函数 f 在 x_0 处可微 \iff 函数 f 在 x_0 处可导.

例4.1.6. (1) 考察函数

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

其中 $n \in \mathbb{N}_+$. 证明 (a) $n \geq 1 \Rightarrow f \in C(-\infty, +\infty)$. (b) $n \geq 2 \Rightarrow f$ 在 $x = 0$ 处可导. (c) $n \geq 3 \Rightarrow f'$ 在 $x = 0$ 处连续.

证: $n \geq 1$ 得到

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) (x^{n-1}) = 0.$$

$n \geq 2$ 得到

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^{n-1} \sin \frac{1}{\Delta x} = 0.$$

$n \geq 3$ 得到

$$f'(x) = nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0 - \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-2} \cos(1/x) = 0. \quad \square$$

(2) 给定区间 I . 如果函数 f 在 I 内处处可导, 记作 $f \in D(I)$. 如果函数 $f \in D(I)$ 的导函数 f' 在 I 内处处连续, 记作 $f \in C^1(I)$. 根据 (1) 得到下列关系

$$C(I) \supseteq D(I) \supseteq C^1(I). \quad (4.1.2)$$

(3) 假设函数 f 在 x_0 处可导 \Rightarrow

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} = f'(x_0).$$

进一步, 对任何 $\alpha \neq \beta$ 有

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha\Delta x) - f(x_0 + \beta\Delta x)}{(\alpha - \beta)\Delta x} = f'(x_0).$$

证: 计算得到

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{2\Delta x} + \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-2\Delta x} \\ &\rightarrow \frac{f'(x_0)}{2} + \frac{f'(x_0)}{2} = f'(x_0). \end{aligned}$$

若 α, β 中有一个为 0, 则结论显然成立. 下面假设 $\alpha, \beta \neq 0$. 和上面计算类似可得到

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + \alpha\Delta x) - f(x_0 + \beta\Delta x)}{(\alpha - \beta)\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \alpha\Delta x) - f(x_0)}{\alpha\Delta x} \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \\ &+ \frac{f(x_0 + \beta\Delta x) - f(x_0)}{\beta\Delta x} \frac{-\beta}{\alpha - \beta} \rightarrow f'(x_0) \frac{\alpha}{\alpha - \beta} + f'(x_0) \frac{-\beta}{\alpha - \beta} = f'(x_0). \quad \square \end{aligned}$$

(4) (3) 的反命题不一定成立, 不如考察函数 $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$.

(5) 如果函数 f 在 x_0 处可导, 且存在数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}, \{b_n\}_{n \geq 1}$ 满足

$$a_n < x_0 < b_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

则

$$f'(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}.$$

证: 计算得到

$$I_n := \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = \frac{b_n - x_0}{b_n - a_n} \frac{f(b_n) - f(x_0)}{b_n - x_0} + \frac{x_0 - a_n}{b_n - a_n} \frac{f(a_n) - f(x_0)}{a_n - x_0}.$$

引入记号

$$\lambda_n := \frac{b_n - x_0}{b_n - a_n}, \quad \mu_n := \frac{x_0 - a_n}{b_n - a_n}, \quad 0 \leq \lambda_n, \mu_n \leq 1, \quad \lambda_n + \mu_n = 1.$$

从而有

$$\begin{aligned} |I_n - f'(x_0)| &= \left| \lambda_n \frac{f(b_n) - f(x_0)}{b_n - x_0} + \mu_n \frac{f(x_n) - f(x_0)}{a_n - x_0} - (\lambda_n + \mu_n) f'(x_0) \right| \\ &\leq \lambda_n \left| \frac{f(b_n) - f(x_0)}{b_n - x_0} - f'(x_0) \right| + \mu_n \left| \frac{f(x_n) - f(x_0)}{a_n - x_0} - f'(x_0) \right| \rightarrow 0. \quad \square \end{aligned}$$

(6) 在 (5) 中条件 “ $a_n < x_0 < b_n$ ” 是必须的. 比如考察函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

例 4.1.6 (1) 已经告诉我们 $f'(0) = 0$. 但是若取 $a_n = 2/[(4n+1)\pi]$ 和 $b_n = 2/4n\pi$, 得到 $0 < a_n < b_n$ 但是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{16n^2\pi^2} \cdot 0 - \frac{4}{(4n+1)^2\pi^2} \cdot 1}{\frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{4n} - \frac{1}{4n+1} \right)} = -\frac{2}{\pi} \neq 0 = f'(0).$$

(7) 如果 $f'(0)$ 存在, 且存在数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}, \{y_n\}_{n \geq 1}$ 满足条件

$$0 < x_n < y_n, \quad y_n \rightarrow 0, \quad \frac{y_n}{y_n - x_n}$$

则

$$f'(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}.$$

证: 和 (5) 证明几乎一样. \square

(8) 证明 Riemann 函数

$$R(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in (0, 1) \cap \mathbb{Q} \ ((p, q) = 1). \end{cases}$$

在 $x \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q}$ 连续但不可导.

证: 连续性之前已证明. 下证第二个论断. $\forall x_0 \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q}, \exists \{h_n\}_{n \geq 1} \rightarrow 0$ 使得 $x_0 + h_n \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q}$ 成立. 比如, 若记 $x_0 = 0.a_1a_2 \cdots a_n \cdots$, 则可取 $h_n = 0.a_1a_2 \cdots a_n - x_0$. 令 N 为最小正整数满足 $a_N \neq 0$.

$$f(x_0 + h_n) = f(0.a_1 \cdots a_n) \geq \frac{1}{10^n} \quad (n \geq N), \quad |h_n| \leq \frac{1}{10^n}$$

$$\left| \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} \right| = \left| \frac{f(x_0 + h_n)}{h_n} \right| \geq 1. \quad \square$$

(9) $f \in D([a, +\infty))$, $f(a) = 0$, 且 $f'(x) \geq -f(x)$ ($x \in [a, +\infty)$) $\Rightarrow f(x) \geq 0$ 对任何 $x \in [a, +\infty)$ 成立.

证: 否则存在 $x_0 > a$ 满足 $f(x_0) < 0$. 根据闭区间上连续函数必有最小值, 得到

$$f(t) = \min_{[a, x_0]} f, \quad \exists t \in [a, x_0].$$

因为 $f(a) = 0$, 必有 $a < t \leq x_0$ 且 $f(t) < 0$. 因为 $f'(t) > 0$, $\exists h > 0$ 使得不等式 $0 < [f(t-h) - f(t)] / -h$ 成立, 即 $f(t-h) < f(t)$, 这是不可能的! \square

(10) 根据行列式定义及第二节中的Leibniz 法则得到

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{in}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{1 \leq i \leq n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{i1}(x) & f'_{i2}(x) & \cdots & f'_{in}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

§4.1.3 线性逼近

考虑曲线 $y = f(x)$ 和其上的点 $P = (x_0, y_0)$. 任取曲线上点 $Q = (x, y)$, 得到直线 PQ 方程

$$y - y_0 = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0).$$

当 $Q \rightarrow P$ 沿着曲线得到 P 处的切线方程

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \quad (4.1.3)$$

此时过 P 的法线方程为

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad \text{若 } f'(x_0) \neq 0, \quad (4.1.4)$$

或者 $x = x_0$, 若 $f'(x_0) = 0$.

§4.1.4 单侧导数

因为导数 $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] / (x - x_0)$ 是函数极限的一种特殊情况, 所以可以引入单侧导数之概念.

定义4.1.7. 假设函数 f 定义在区间 $[x_0, x_0 + r)$ 内. 函数 f 在 x_0 处的右导数定义为

$$f'_+(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (4.1.5)$$

类似地对定义在区间 $(x_0 - r, x_0]$ 内的函数 f 可以定义其在 x_0 处的左导数:

$$f'_-(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (4.1.6)$$

例4.1.8. (1) 对函数 $f(x) = |x|$ 求 $f'_+(0)$ 和 $f'_-(0)$.

解: 因为

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x} = 1, \\ f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x} = -1, \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 在 $x_0 = 0$ 处不存在导数. \square

(2) 对函数 $f(x) = |\ln|x||, x \neq 0$, 求 $f'_+(1)$ 和 $f'_-(1)$.

解: 根据 $f(1) = |\ln 1| = 0$, 得到

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|\ln x|}{x - 1} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\ln(1 + \Delta x)|}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \left| \ln \left[(1 + \Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}} \right] \right| = \ln e = 1. \end{aligned}$$

类似地得到 $f'_-(1) = -1$. \square

注4.1.9. (1) 函数 f 在 x_0 处可导 $\Leftrightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ 存在.

(2) 函数 f 在 x_0 处可导 \nRightarrow 其绝对值 $|f|$ 在 x_0 处连续.

(3) 可以定义函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 甚至一般区间 I 上的可导性. 对内部点 $x_0 \in I$, $f'(x_0)$ 是通常意义下的导数, 对端点 $x_0 \in I$, $f'(x_0)$ 定义为左导数或右导数.

(4) 假设 $f \in D((a, b))$.

(a) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty \nRightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \infty$. 比如

$$f(x) := \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

(b) $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \infty \nRightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$. 比如

$$f(x) = x^{1/3}, \quad 0 < x < 1.$$

(5) 假设 $f \in D((a, +\infty))$.

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在 $\nRightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在. 比如

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}, \quad x > 0.$$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在 $\nRightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在. 比如

$$f(x) = \cos(\ln x), \quad x > 0.$$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$. 这个需要微分中值定理来证明.

证: 令 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$. $\exists x_0 > a, \forall x > x_0$, 有 $|f'(x)| \geq |A|/2$. 根据微分中值定理 $\exists \xi \in (x_0, x)$

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = |f'(\xi)| \geq \frac{|A|}{2}.$$

由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$. 因此 $A = 0$. \square

例4.1.10. 假设 $f \in C((-\infty, +\infty))$, 且对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 有

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h} = 0.$$

证明右侧导数 $f'_+(x)$ 存在且 f 为常值函数.

证: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < h < \delta$, 有

$$\left| \frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h} \right| < \epsilon.$$

对一般的 $k \in \mathbb{N}$ 得到

$$\left| \frac{f(x+2^{-k}h) - f(x+2^{-k-1}h)}{2^{-k-1}h} \right| < \epsilon.$$

因为函数 f 连续, 故得到

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq k \leq n} \left[f\left(x + \frac{h}{2^k}\right) - f\left(x + \frac{h}{2^{k+1}}\right) \right] \\ &= \sum_{k \geq 0} \left[f\left(x + \frac{h}{2^k}\right) - f\left(x + \frac{h}{2^{k+1}}\right) \right]. \end{aligned}$$

从而

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \sum_{k \geq 0} \frac{h\epsilon}{2^{k+1}} = h\epsilon.$$

这表明右侧导数 $f'_+(x)$ 存在且 $f'_+(x) = 0$. 接下来证明函数的导数均为 0.

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < h < \delta$,

$$|f(x+h) - f(x)| < h\epsilon.$$

$\forall a < b, \exists n_0 \in \mathbb{N} (b-a)/n_0 < \delta$

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &\leq \left| f(b) - f\left(a + \frac{b-a}{n_0}\right) \right| + \left| f\left(a + \frac{b-a}{n_0}\right) - f\left(a + 2\frac{b-a}{n_0}\right) \right| \\ &\quad + \cdots + \left| f\left(a + (n_0-1)\frac{b-a}{n_0}\right) - f(b) \right| \leq \left(\frac{b-a}{n_0}\epsilon\right)n_0 = (b-a)\epsilon. \end{aligned}$$

由于 ϵ 的任意性得到 $f(b) = f(a)$. \square

例4.1.11. 若 $|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0|^a$, 其中 $a > 1$ 和 $L > 0$, 证明 $f'(x_0) = 0$.

证: 根据条件得到

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - 0 \right| \leq L|x - x_0|^{a-1}.$$

当 $x \rightarrow x_0$ 时, 由于 $a > 1$, 得到 $f'(x_0) = 0$. \square

§4.2 求导法则

以下基本初等函数的导数容易求得:

(1) (常值函数)' = 0.

(2) $(x^n)' = nx^{n-1}$, 其中 $n \in \mathbb{N}_+$, $x \in \mathbb{R}$.

(3) $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, 其中 $x \in \mathbb{R}$. 事实上

$$\frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = 2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \rightarrow \cos x,$$

$$\frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = -2 \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \rightarrow -\sin x$$

当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时.

(4) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, 其中 $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$. 特别地, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$. 事实上

$$\frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} = \frac{1}{x} \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right] \rightarrow \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}$$

当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时. 根据 $\log_a x = \ln x / \ln a$ 可得到一般对数函数的导数.

(5) $(a^x)' = a^x \ln a$, 其中 $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. 特别地 $(e^x)' = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. 事实上根据

$$\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \frac{e^{\ln a \Delta x} - 1}{\Delta x} \rightarrow \ln a, \quad \Delta x \rightarrow 0,$$

得到

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

(6) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, 其中 $a \in \mathbb{R}$, $x > 0$. 事实上

$$(x^\alpha)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = x^{\alpha-1} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1 + \frac{\Delta x}{x})^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = x^{\alpha-1} \alpha.$$

§4.2.1 算术运算

最基本的算术运算是导数的四则运算.

性质4.2.1. (1) $f, g \in D(I)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g \in D(I)$ 且

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'. \quad (4.2.1)$$

(2) $f, g \in D(I) \Rightarrow fg \in D(I)$ 且

$$(fg)' = f'g + fg'. \quad (4.2.2)$$

(3) $f, g \in D(I), g \neq 0$ 在 I 内 $\Rightarrow f/g \in D(I)$ 且

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2}. \quad (4.2.3)$$

证: (1) 根据定义

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[\alpha f(x + \Delta x) + \beta g(x + \Delta x)] - [\alpha f(x) + \beta g(x)]}{\Delta x} \\ &= \alpha \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \beta \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \alpha f'(x) + \beta g'(x). \end{aligned}$$

(2) 根据定义

$$\begin{aligned} (fg)'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[f(x + \Delta x) \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x) \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] \\ &= f(x)g'(x) + g(x)f'(x). \end{aligned}$$

(3) 根据定义

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x)f(x + \Delta x) - f(x)g(x + \Delta x)}{g(x)g(x + \Delta x)\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{g(x)(f(x + \Delta x) - f(x)) - f(x)(g(x + \Delta x) - g(x))}{g(x)g(x + \Delta x)\Delta x} \right] \\ &= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}. \quad \square \end{aligned}$$

注4.2.2. (1) 一般地对任意可导函数 f_1, \dots, f_n 和常数 c_1, \dots, c_n , 有

$$\left(\sum_{1 \leq k \leq n} c_k f_k\right)' = \sum_{1 \leq k \leq n} c_k f_k'$$

和

$$\left(\prod_{1 \leq k \leq n} f_k\right)' = \sum_{1 \leq k \leq n} f_1 \cdots f_{k-1} f'_k f_{k+1} \cdots f_n = \left(\prod_{1 \leq k \leq n} f_k\right) \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{f'_i}{f_i}.$$

(2) 微分的四则运算可根据相应导数的四则运算得到

$$d(\alpha f + \beta g) = \alpha df + \beta dg, \quad d(fg) = fdg + gdf, \quad d(f/g) = \frac{gdf - fdg}{g^2}.$$

(3) 给定区间 I 定义映射

$$\mathbf{L}: \mathcal{X} = \{I \text{ 上的可导函数}\} \longrightarrow \mathcal{Y} = \{I \text{ 上的函数}\}, \quad f \longmapsto f'.$$

根据导数的四则运算得到

$$\mathbf{L}(fg) = f\mathbf{L}(g) + g\mathbf{L}(f), \quad \mathbf{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathbf{L}(f) + \beta\mathbf{L}(g).$$

满足上述两个条件的映射 \mathbf{L} 称为导子. 仅通过这两个条件有

$$\mathbf{L}(1) = \mathbf{L}(1 \cdot 1) = 2\mathbf{L}(1) \implies \mathbf{L}(1) = 0$$

从而对任何常数 c 得到 $\mathbf{L}(c) = \mathbf{L}(c \cdot 1) = c\mathbf{L}(1) = 0$.

导子是一种 1 阶线性微分算子, 可推广到所谓微分流形上. 至于流形上高阶线性微分算子甚至高阶微分算子的引入需要向量丛的概念, 这在之后的章节中会给出详细定义.

§4.2.2 反函数的求导

函数 $y = f(x) = x^2, x > 0$, 的反函数为 $x = f^{-1}(y) = g(y) = y^{1/2}, y > 0$. 把变量 y 换成变量 x (按照一般函数的写法) 得到 $g'(x) = 1/2x^{1/2}$.

定理4.2.3. 假设 $f \in D((a, b))$, 严格单调, 且 $f'(x_0) \neq 0$, 其中 $x_0 \in (a, b)$. 则其反函数 $x = g(y) = f^{-1}(y)$ 在 (α, β) 内可导且

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad (4.2.4)$$

这里 $y_0 = f(x_0), \alpha = \min\{f(a+), f(b-)\}$ 且 $\beta = \max\{f(a+), f(b-)\}$.

证: 不妨假设函数 f 严格单调递增. 根据函数 f 的连续性得到 $f^{-1} \in C((\alpha, \beta))$ 且也是严格单调递增. 从

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \neq 0 \iff \Delta x = f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)$$

推出 $\Delta y \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta x \rightarrow 0$. 故得到

$$\begin{aligned} g'(y_0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad \square \end{aligned}$$

例4.2.4. (1) 求 $(\arcsin x)', (\arccos x)', (\arctan x)'$, 和 $(\operatorname{arccot} x)'$.

解: $f(x) = \sin x, f'(x) = \cos x$.

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\cos x_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x_0}}, \quad -\frac{\pi}{2} < x_0 < \frac{\pi}{2}.$$

故

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad |x| < 1. \quad (4.2.5)$$

类似地,

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1), \quad (4.2.6)$$

和

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}. \quad (4.2.7)$$

(2) 求 $(\cot x)'$ 和 $(\csc x)'$.

解: 根据定义得到

$$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = -\csc^2 x, \quad (\csc x)' = \left(\frac{1}{\sin x} \right)' = -\cot x \csc x. \quad (4.2.8)$$

注4.2.5. (1) 假设函数 f 在 x_0 处可微, 且函数 g 在 x_0 处可微. 则 fg 在 x_0 处可微.

(2) 假设函数 f 在 x_0 处可微, 但函数 g 在 x_0 处不可微. 则 fg 可能在 x_0 处可微也可能不可微. 比如, 取 $f(x) = x, g(x) = |x|, x_0 = 0$, 得到 fg 在 $x_0 = 0$ 可微; 取 $f(x) = x, g(x) = \operatorname{sgn}(x), x_0 = 0$, 得到 fg 在 x_0 处不可微.

(3) 假设函数 f 在 x_0 处不可微, 且函数 g 在 x_0 处也不可微. 则 fg 可能在 x_0 处可微也可能不可微. 比如, 取 $f(x) = g(x) = |x|, x_0 = 0$, 得到 fg 在 $x_0 = 0$ 可微; 取 $f(x) = g(x) = |x|^{1/2}, x_0 = 0$, 得到 fg 在 x_0 处不可微.

§4.2.3 链式法则

链式法则告诉我们如何求复合函数 $f(g(x))$ 的导数.

定理4.2.6. (链式法则) 假设函数 $u = g(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导且函数 $y = f(u)$ 在 $u = u_0 := g(x_0)$ 处可导. 则复合函数 $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ 在 $x = x_0$ 处可导且

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0). \quad (4.2.9)$$

证: 根据定义得到

$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g(x_0 + \Delta x)) - f(g(x_0))}{\Delta x}$$

其中

$$g(x_0 + \Delta x) = g(x_0) + g'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

和

$$f(g(x_0 + \Delta x)) = f(g(x_0)) + f'(u_0)\Delta u + o(\Delta u)$$

这里 $\Delta u = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$. 从而得到

$$\begin{aligned} f(g(x_0 + \Delta x)) - f(g(x_0)) &= f'(g(x_0))\Delta u + o(\Delta u) \\ &= f'(g(x_0))[g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)] + o(\Delta u) \end{aligned}$$

$$= f'(g(x_0))[g'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)] + o(g'(x_0)\Delta x + o(\Delta x))$$

$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f'(g(x_0))(g'(x_0) + o(1)) + o(1)] = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

这是因为 $o(\Delta x)/\Delta x \rightarrow 0$ 且 $o(o(\Delta x))/\Delta x \rightarrow 0$, 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时. \square

注4.2.7. (1) 微分的链式法则可类似得到:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}, \quad d(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)dx. \quad (4.2.10)$$

(2) 三个函数构成的复合函数之导数为

$$(f(g(h(x))))' = f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x).$$

(3) 一阶微分的不变性.

$$\text{函数 } y = f(u) \text{ 可导} \implies dy = df(u) = f'(u)du$$

当 $u = g(x)$ 可导时, $du = g'(x)dx$ 从而

$$d[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)dx = f'(g(x))du = f'(u)du.$$

无论 u 是自变量还是关于 x 的函数, 微分形式 $dy = f'(u)du$ 保持不变.

(4) 假设 $u, v \in D(I)$, $u > 0$. 求 $f(x) = [u(x)]^{v(x)}$. 事实上若令

$$f(x) = e^{v(x)\ln u(x)}$$

得到

$$\begin{aligned} df'(x) &= e^{v(x)\ln u(x)} \left[v'(x)\ln u(x) + \frac{v(x)u'(x)}{u(x)} \right] \\ &= [u(x)]^{v(x)} \left[v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)} \right]. \end{aligned}$$

(5) 双曲函数定义为

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}. \quad (4.2.11)$$

计算得到

$$(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x, \quad (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}, \quad (\coth x)' = \frac{-1}{\sinh^2 x}. \quad (4.2.12)$$

(6) 对数导数. 假设 $f \in D(I)$ 且 $f \neq 0$, 则

$$f'(x) = f(x) \frac{d}{dx} \ln |f(x)|. \quad (4.2.13)$$

若引入算子

$$D := \frac{d}{dx} \ln$$

得到

$$D|f| = \frac{f'}{f}.$$

(7) 求 $(x^{x^x})'$ $x > 0$.

解: 令 $y = x^{x^x}$ 得到 $\ln y = x^x \ln x$ 和 $\ln \ln y = x \ln x + \ln \ln x$. 两边求导得

$$\frac{1}{\ln y} \frac{y'}{y} = \ln x + 1 + \frac{1}{x \ln x}$$

所以

$$y' = x^x x^{x^x} \left[\ln x + (\ln x)^2 + \frac{1}{x} \right]. \quad \square$$

§4.2.4 隐函数的求导

A: 假设可导函数 $y = f(x)$ 满足方程 $F(x, y) = 0$. 此时两边求导得到

$$0 = F_x(x_0, y_0) + F_y(x_0, y_0)y'$$

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}, \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0. \quad (4.2.14)$$

其中 $F_x(x_0, y_0)$ 是表示在 $F(x, y)$ 中先把 y 看成常数, 然后对 x 求导, 再把 (x_0, y_0) 带入所得到的函数值. 类似的可定义 $F_y(x_0, y_0)$. 在多元微分学中, 我们会详细阐述.

B: 参数方程 $x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha < t < \beta$, 其中 φ, ψ 可导且 $\varphi' \neq 0$. 如果反函数 $\varphi^{-1}(x)$ 存在, 则

$$y'(x_0) = (\psi \circ \varphi^{-1})'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}, \quad \varphi^{-1}(x_0) = t_0. \quad (4.2.15)$$

例4.2.8. (1) 已知 $y^3 + 3y = x$ 求 $y'(x)$.

解: 设 $x = f(y) := y^3 + 3y$ 得到 $f'(y) = 3y^2 + 3 > 0$ 故

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{3y^2 + 3}.$$

或者应用 (4.2.14) 得到 $(3y^2 + 3)y' = 1$. \square

(2) 已知 $y - \epsilon \sin y = x, 0 \leq \epsilon < 1$, 求 $y'(x)$.

解答: $y' = \frac{1}{1 - \epsilon \cos y}$. \square

(3) 已知 $x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}}, y = \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}}$ 求 $y'(x)$.

解:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[6]{\frac{(1-\sqrt{t})^4}{t(1-\sqrt[3]{t})^3}}, \quad t > 0, t \neq 1. \quad \square$$

(4) 已知 $x = e^{2t} \cos^2 t, y = e^{2t} \sin^2 t$ 求 $y'(x)$.

解:

$$\frac{dy}{dx} = \tan t \tan \left(t + \frac{\pi}{4} \right), \quad t \neq \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}), \quad t \neq n\pi + \frac{\pi}{2} (n \in \mathbb{N}). \quad \square$$

练习4.2.9. (1) 已知 $y^2 = 2px$ 求 $y'(x)$.(2) 已知 $x^y = y^x$ 求 $y'(x)$.(3) 已知 $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0, x < 2y - 1$ 求 $y'(x)$.

§4.3 高阶导数

如果函数 f 的导数 $f' = df/dx$ 任然可以求导, 则得到所谓的高阶导数.

定义4.3.1. 假设函数 $f \in D(U(x_0, r))$, 且导函数 f' 在 x_0 处也可导, 则称函数 f 在 x_0 处二阶可导, 并把

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) = f''(x_0) := (f')'(x_0)$$

称为 f 在 x_0 处的二阶导数. 一般地, 假设函数 f 在 $U(x_0, r)$ 内 n 阶可导, 且 $f^{(n)}$ 在 x_0 处也可导, 则称函数 f 在 x_0 处 $n+1$ 阶可导, 并记作

$$f^{(n+1)}(x_0) := (f^{(n)})'(x_0).$$

一般地我们把前三阶导数记作 f', f'', f''' , 而把之后的导数记为 $f^{(4)}, f^{(5)}, \dots$. 为把自变量 x 也写出来, 那么高阶导数可写成

$$\frac{d^k f}{dx^k} = f^{(k)}.$$

§4.3.1 记号

给定区间 I 可定义函数 f 在 I 内的高阶导数. 引入记号

$$f \in D^k(I) \iff f^{(i)} \in D(I), \quad \forall 1 \leq i \leq k, \quad (4.3.1)$$

$$f \in C^k(I) \iff f \in D^k(I) \text{ 且 } f^{(n)} \in C(I). \quad (4.3.2)$$

注意到

$$D(I) = D^1(I) \text{ 但是 } C(I) \neq C^1(I). \quad (4.3.3)$$

因为可导函数必连续, 故得到

$$C(I) \supseteq D(I) = D^1(I) \supseteq C^1(I) \supseteq D^2(I) \supseteq C^2(I) \supseteq D^3(I) \supseteq \dots \quad (4.3.4)$$

例4.3.2. (1) $(e^x)^{(n)} = e^x, n \in \mathbb{N}_+$.

(2) $(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n, a > 0, n \in \mathbb{N}_+$.

(3) $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$ 和 $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2}), n \in \mathbb{N}_+$.

(4) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}, x > 0$. 特别地

$$(x^m)^{(n)} = \begin{cases} m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}, & m \geq n, \\ 0, & m < n. \end{cases}$$

(5) $(1/x)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.

(6) $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}$.

定义4.3.3. 定义

$$D^\infty(I) := \bigcap_{n \geq 1} D^n(I), \quad C^\infty(I) := \bigcap_{n \geq 1} C^n(I). \quad (4.3.5)$$

注意到 $D^\infty(I) = C^\infty(I)$. 称函数 $f \in C^\infty(I)$ 为 I 上的光滑函数.

例4.3.4. (1) 求 $f''(x)$, 其中

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

计算得到

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 \sin \frac{1}{x} - x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

和

$$f''(x) = \begin{cases} 12x^2 \sin \frac{1}{x} - 6x \cos \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

但是 $f'''(0)$ 不存在.

(2) 求 $f^{(n)}(x)$, 其中

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

低阶导数直接计算得到

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} - \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

一般可得到

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_{2n} \left(\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

这里多项式 P_{2n} 的次数为 $\deg P_{2n} = 2n$. 下面证明 $f^{(n)}(0)$ 对任意正整数 n 都存在且为 0. 实际上根据归纳假设得到

$$\begin{aligned} f_+^{(n+1)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} P_{2n} \left(\frac{1}{x} \right) \right] e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t P_{2n}(t)}{e^t} = 0. \end{aligned}$$

左侧导数是显然: $f_-^{(n+1)}(0) = 0$.

(3) 函数 $y = a \cos x + b \sin x$ 满足微分方程 $y'' + y = 0$.

(4) 函数 $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ 满足微分方程 $y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1 \lambda_2 y = 0$. 这里 $c_1, c_2, \lambda_1, \lambda_2$ 都是常数.

(5) 函数

$$y = e^{x/\sqrt{2}} \left(c_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + c_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + e^{-x/\sqrt{2}} \left(c_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + c_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right)$$

满足微分方程 $y^{(4)} + y = 0$.

例4.3.5. (1) 考虑集合

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) := \left\{ A := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : \det A = 1, a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}.$$

对任意 $A, B \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, 可证明 $AB \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, 从而 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ 是群, 称为二阶特殊线性群. 定义映射

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (A, x) \longmapsto A \cdot x := \frac{ax + b}{cx + d}.$$

固定 $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ 考虑函数

$$f(x) := \mathbf{L}(A, x) = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

计算得到

$$f'(x) = \frac{\det A}{(cx + d)^2} = \frac{1}{(cx + d)^2}.$$

和

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} c^{n-1} n!}{(cx + d)^{n+1}}.$$

(2) 上述映射可推广到复平面. 定义

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}, \quad (A, z) \longmapsto A \cdot z := \frac{az + b}{cz + d}.$$

这里 $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$. 作为练习可证明

$$(AB) \cdot z = A \cdot (B \cdot z), \quad A, B \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}), z \in \mathbb{H}.$$

定义

$$j(A, z) := cz + d, \quad A := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

可以证明

$$j(AB, z) = j(A, B \cdot z)j(B, z), \quad \operatorname{Im}(A \cdot z) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|j(A, z)|^2}.$$

如果 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$ 满足 $A \cdot z = z$ 对某个 $z \in \mathbb{H}$ 成立, 则必有 $|a + d| < 2$.

§4.3.2 算术运算

对高阶导数来说最重要的性质就是 Leibniz 法则.

定理4.3.6. 若函数 f, g 都是 n 阶可导, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, 则 $c_1f + c_2g$ 也 n 阶可导且

$$(c_1f + c_2g)^{(n)} = c_1f^{(n)} + c_2g^{(n)}. \quad (4.3.6)$$

如果函数 f_1, \dots, f_n 都是 n 阶可导, $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, 则

$$\left(\sum_{1 \leq i \leq m} c_i f_i \right)^{(n)} = \sum_{1 \leq i \leq m} c_i f_i^{(n)}. \quad (4.3.7)$$

定理4.3.7. (Leibniz) 如果函数 f, g 都 n 阶可导, 则 fg 也 n 阶可导且

$$(fg)^{(n)} = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}. \quad (4.3.8)$$

证: 假设 (4.3.8) 对 n 成立. 则对 $n+1$ 得到

$$\begin{aligned} (fg)^{(n+1)} &= (f'g + fg')^{(n)} = (f'g)^{(n)} + (fg')^{(n)} \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} f^{(n-k+1)} g^{(k)} + \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k+1)} \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)} + \sum_{1 \leq k \leq n+1} \binom{n}{k-1} f^{(n+1-k)} g^{(k)} \\ &= gf^{(n+1)} + fg^{(n+1)} + \sum_{1 \leq k \leq n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] f^{(n+1-k)} g^{(k)}. \end{aligned}$$

中括号中的二项式系数之和为 $(n+1)!/k!(n+1-k)!$. \square

注4.3.8. (1) 复合函数. $y = f(u), u = g(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$. 但是

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \right) = \frac{d^2y}{du^2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{dy}{du} \frac{d^2u}{dx^2}.$$

(2) 隐函数. $F(x, y) = 0 \Rightarrow y' = -F_x(x, y)/F_y(x, y)$. 但是从

$$0 = F_{xx}(x, y) + F_{xy}(x, y)y' + F_{yx}(x, y)y' + F_{yy}(x, y)(y')^2$$

得到

$$y'' = -\frac{1}{F_y^3} [F_{xx}F_y^2 - F_xF_y(F_{xy} + F_{yx}) + F_{yy}F_x^2].$$

(3) 反函数. $y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y) = g(y)$. 根据恒等式 $y = f(g(y))$ 得到 $1 = f'(g(y))g'(y)$ 以及

$$0 = f''(g(y))(g'(y))^2 + f'(g(y))g''(y)$$

故

$$g''(y) = -\frac{f''(g(y))(g'(y))^2}{f'(g(y))} = -\frac{f''(g(y))}{[f'(g(y))]^2} = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

(4) $x = \varphi(t), y = \psi(t) \Rightarrow dy/dx = \psi'(t)/\varphi'(t)$. 因此

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

例4.3.9. (1) 求 $y^{(n)}(0)$, 这里 $y(x) = \arcsin x$.

解: 因为前面 2 个低阶导数分别为 $y' = (1-x^2)^{-1/2}$ 和 $y'' = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} = xy'/(1-x^2)$, 故得到

$$(x^2 - 1)y'' + xy' = 0.$$

对上述微分方程再求 n 阶导数得到

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{0 \leq k \leq n-2} \binom{n-2}{k} (x^2-1)^{(k)} y^{(n-k)} + \sum_{0 \leq k \leq n-2} \binom{n-2}{k} x^{(k)} y^{(n-1-k)} \\ &= (x^2-1)y^{(n)} + 2x \binom{n-2}{1} y^{(n-1)} + 2 \binom{n-2}{2} y^{(n-2)} + xy^{(n-1)} + \binom{n-2}{1} y^{(n-2)} \end{aligned}$$

从而 $y^{(n)}(0) = (n-2)^2 y^{(n-2)}(0)$.

$$y^{(n)}(0) = \begin{cases} [(n-2)!!]^2, & n = 2k+1, k \in \mathbb{N}_+, \\ 1, & n = 1, \\ 0, & n = 2k, k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad \square$$

(2) 定义

$$T_m(x) := \frac{1}{2^{m-1}} \cos(m \arccos x), \quad m \in \mathbb{N}.$$

易证

$$(1-x^2)T_m''(x) - xT_m'(x) + m^2T_m(x) = 0.$$

(3) 定义

$$P_m(x) := \frac{1}{2^m m!} [(x^2-1)^m]^{(m)}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

易证

$$0 = (1 - x^2)P_m''(x) - 2xP_m'(x) + m(m+1)P_m(x).$$

(4) 定义

$$L_m(x) := e^x(x^m e^{-x})^{(m)}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

易证

$$x \cdot L_m''(x) + (1-x)L_m'(x) + mL_m(x) = 0.$$

(5) 定义

$$H_m(x) := (-1)^m e^{x^2} (e^{-x^2})^{(m)}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

易证

$$H_m''(x) - 2xH_m'(x) + 2mH_m(x) = 0.$$

(6) 引入记号

$$\mathbf{D} := \frac{d}{dx}, \quad f(\mathbf{D}) := \sum_{0 \leq k \leq n} p_k(x) \mathbf{D}^k$$

这里 p_k 都是连续的. 证明 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ 有

$$f(\mathbf{D}) [e^{\lambda x} u(x)] = e^{\lambda x} f(\mathbf{D} + \lambda) u(x).$$

证: 对每个 k 有

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^k [e^{\lambda x} u(x)] &= [e^{\lambda x} u(x)]^{(k)} = \sum_{0 \leq i \leq k} \binom{k}{i} \lambda^i e^{\lambda x} u^{(k-i)}(x) \\ &= \sum_{0 \leq i \leq k} \binom{k}{i} \lambda^i \mathbf{D}^{k-i} u(x) = (\mathbf{D} + \lambda)^k u(x). \quad \square \end{aligned}$$

(7) 假设函数 $y = y(x)$ 满足条件

$$\sum_{0 \leq k \leq n} a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} = 0.$$

如果 $x = e^t$, 则

$$0 = \sum_{0 \leq k \leq n} a_k \mathbf{D}(\mathbf{D} - 1) \cdots (\mathbf{D} - k + 1)y$$

其中 $\mathbf{D} = d/dt$.

证: 引入 $\delta := d/dx$ 得到 $\mathbf{D}y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = x\delta y$. 即

$$\delta = e^{-t} \mathbf{D} \quad \text{或} \quad \mathbf{D} = e^t \delta.$$

进一步

$$\begin{aligned} \delta^2 y &= e^{-t} \mathbf{D} [e^{-t} \mathbf{D} y] = e^{-t} [-e^{-t} \mathbf{D} y + e^{-t} \mathbf{D}^2 y] \\ &= -e^{-2t} \mathbf{D} y + e^{-2t} \mathbf{D}^2 y = e^{-2t} \mathbf{D}(\mathbf{D} - 1)y. \end{aligned}$$

断言

$$\delta^{(k)}y = e^{-kt}\mathbf{D}(\mathbf{D}-1)\cdots(\mathbf{D}-k+1)y.$$

事实上, 根据归纳假设得到

$$\begin{aligned}\delta^{(k+1)}y &= \delta(\delta^{(k)}y) = e^{-t}\mathbf{D}\left[e^{-kt}\mathbf{D}(\mathbf{D}-1)\cdots(\mathbf{D}-k+2)y\right] \\ &= e^{-t}\left[-ke^{-kt}\mathbf{D}(\mathbf{D}-1)\cdots(\mathbf{D}-k+1)y + e^{-kt}\mathbf{D}^2(\mathbf{D}-1)\cdots(\mathbf{D}-k+1)y\right] \\ &= e^{-(k+1)t}\mathbf{D}(\mathbf{D}-1)\cdots(\mathbf{D}-k+1)(\mathbf{D}-k)y. \quad \square\end{aligned}$$

§4.4 极值定理

考察函数 $f(x) = x^2$, $x \in [-1, 1]$. 易知函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处达到最小. 另一方面根据 $f'(x) = 2x$, 得到 $f'(0) = 0$. 这个例子告诉我们最值点和导数为零的点似乎有某种关系. 本节就来探讨这个问题.

§4.4.1 极值

定义4.4.1. 假设函数 f 定义在 (a, b) 内且 $x_0 \in (a, b)$.

(1) 称 x_0 是 f 的极大值点或局部最大值点, 如果 $\exists U(x_0, \delta) \subset (a, b)$ 满足

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in U(x_0, \delta).$$

此时函数值 $f(x_0)$ 称为极大值或局部最大值.

(2) 称 x_0 是 f 的极小值点或局部最小值点, 如果 $\exists U(x_0, \delta) \subset (a, b)$ 满足

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in U(x_0, \delta).$$

此时函数值 $f(x_0)$ 称为极小值或局部最小值.

(3) 称 $x_0 \in (a, b)$ 是极值点或局部最值点如果 x_0 是极大值点或极小值点. 相应的函数值称为极值或局部最值.

注4.4.2. (1) 根据定义 4.4.1, 任何极值点一定在区间内部.

(2) 如果函数 f 的定义域是一般的区间 I , 此时 I 可以是 (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$ 中的一种. 那么 I 中的极值点可如下定义:

$$x_0 \in I \text{ 是极值点} \iff \begin{aligned} &\exists \delta > 0 \text{ 满足 } f(x) \leq f(x_0) \text{ (或 } f(x) \geq f(x_0)) \\ &\forall x \in U_I(x_0, \delta) := U(x_0, \delta) \cap I \end{aligned}$$

按照这种定义极值点可以取到端点.

为了方便起见我们总是按照定义 4.4.1 来阐述极值点和极值的含义.

(3) 显然极值点不一定是最值点. 但是如果最值点在定义域内部, 则必是极值点.

§4.4.2 Fermat 引理

这个引理告诉我们如果极值点是可微点那么此点处的导数必为零.

定理4.4.3. (Fermat) 若 x_0 是函数 f 的极值点且 f 在 x_0 处可导, 则 $f'(x_0) = 0$.

证: 不妨假设 x_0 是 f 的极小值点. 则 $\exists \delta > 0$ 使得 $U(x_0, \delta) \subset (a, b)$ 且满足不等式 $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in U(x_0, \delta)$. 根据定义得到

$$x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \quad x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

因为函数 f 在 x_0 处可导, $f'_+(x_0) = f'(x_0) = f'_-(x_0)$, 从而 $0 \leq f'_-(x_0) = f'_+(x_0) \leq 0$. 由此得到 $f'_+(x_0) = 0$. \square

注4.4.4. (1) 称 x_0 是函数 f 的驻点或临界点如果 $f'(x_0) = 0$.

(2) 根据定理4.4.3 得到

$$\begin{array}{c} x_0 \text{ 是极值点} \\ \downarrow f'(x_0) \text{ 存在} \\ x_0 \text{ 是驻点} \end{array}$$

上述条件“ $f'(x_0)$ 存在”不能去掉. 比如函数 $f(x) = |x|$ 在 $x_0 = 0$ 处有极小值, 但是 0 显然不是驻点因为函数在 0 处不可导.

反之, 驻点不一定是极值点. 比如 $f(x) = x^3, x_0 = 0$.

§4.4.3 Darboux 定理

回顾闭区间上连续函数的介值定理:

$$f \in C([a, b]) \text{ 且 } f(a)f(b) < 0 \implies \exists \xi \in (a, b) \text{ 满足 } f(\xi) = 0.$$

如果 $f \in C^1([a, b])$, 则得到

$$f \in C^1([a, b]) \text{ 且 } f'(a)f'(b) < 0 \implies \exists \xi \in (a, b) \text{ 满足 } f'(\xi) = 0.$$

但是 Darboux 定理告诉我们把条件 $f \in C^1([a, b])$ 减弱为 $f \in D([a, b])$ 则结论仍旧成立.

定理4.4.5. (Darboux) 假设 $f \in D((a, b))$ 且 $f'(x_1)f'(x_2) < 0$, 其中 $x_1, x_2 \in (a, b) \implies f'(\xi) = 0$, 这里 ξ 介于 x_1 和 x_2 之间.

证: 不妨假设 $x_1 < x_2, f'(x_1) < 0$, 且 $f'(x_2) > 0$ (否则的话考察函数 $-f$). $\exists (a, b)$ 内的两个开区间 $U(x_1, \delta_1)$ 和 $U(x_2, \delta_2)$ 使得下列不等式成立:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < 0, \forall x \in U(x_1, \delta_1) \text{ 且 } \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} > 0, \forall x \in U(x_2, \delta_2).$$

存在 $x'_1 > x_1, x'_2 < x_2$, 且 $x'_1 < x'_2$ 使得 $f(x'_1) < f(x_1)$ 和 $f(x'_2) < f(x_2)$ 都成立. 由于 $f \in C([x_1, x_2])$, $\exists \xi \in [x_1, x_2]$ 满足 $f(\xi) = \min_{[x_1, x_2]} f$. 根据 x'_1 和 x'_2 的取法, 必有 $\xi \in (x_1, x_2)$ 成立. 利用定理 4.4.3 推出 $f'(\xi) = 0$. \square

注4.4.6. (1) $f \in D((a, b))$, $x_1, x_2 \in (a, b)$, μ 介于 $f'(x_1)$ 和 $f'(x_2)$ 之间 $\Rightarrow \exists \zeta$ 介于 x_1 和 x_2 之间满足 $f'(\zeta) = \mu$.

证: 应用定理 4.4.5 到函数 $F(x) := f(x) - \mu x$. \square

(2) 在定理 4.4.5 中不需要 f' 连续.

根据定理 4.4.3 知道 x_0 要么是端点, 要么是内点但不可导, 要么是内点且为驻点. 所以求函数在某个区间上的最值就要把这三种情况考虑进去.

例4.4.7. (1) 求函数 $f(x) = x^3 - x + 1$, $-1 \leq x \leq 1$, 的最值.

解: 根据 $f'(x) = 0$ 得到驻点为 $\pm 1/\sqrt{3}$. 计算可得

$$f(-1) = 1, \quad f(-1/\sqrt{3}) = 1 + \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad f(1/\sqrt{3}) = 1 - \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad f(1) = 1.$$

故 $\max_{[-1,1]} f = 1 + \frac{2}{3\sqrt{3}} = f(-\frac{1}{\sqrt{3}})$, $\min_{[-1,1]} f = 1 - \frac{2}{3\sqrt{3}} = f(\frac{1}{\sqrt{3}})$. \square

(2) 求函数 $f(x) = x^3 - x^2 + 1$, $-1 \leq x \leq 2$, 的最值.

解: 根据 $f'(x) = 0$ 得到驻点为 0 和 2/3. 计算可得

$$f(-1) = -1, \quad f(0) = 1, \quad f(2/3) = 1 - \frac{23}{27}, \quad f(2) = 5.$$

故 $\max_{[-1,2]} f = 5 = f(2)$, $\min_{[-1,2]} f = -1 = f(-1)$. \square

(3) $f \in D([0, +\infty))$, $0 \leq f(x) \leq \frac{x}{1+x^2} \Rightarrow \exists \zeta \in (0, +\infty)$ 满足 $f'(\zeta) = (1 - \zeta^2)/(1 + \zeta^2)^2$.

证: 注意到 $(1 - \zeta^2)/(1 + \zeta^2)^2 = (\zeta/(1 + \zeta^2))'$, 故定义函数 $F(x) := \frac{x}{1+x^2} - f(x)$. 因为 $F(0) = F(+\infty) = 0$, $F \geq 0$, 若函数 F 不恒为零则 F 的最大值点必在 $(0, +\infty)$ 内取到. \square

§4.5 微分中值定理

本节证明三个微分中值定理.

§4.5.1 Rolle 定理

首先给出导函数有零点的充分条件.

定理4.5.1. (Rolle, 1691) $f \in C([a, b]) \cap D((a, b))$ 且 $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists \zeta \in (a, b)$ 满足 $f'(\zeta) = 0$.

证: 因为函数 f 在 $[a, b]$ 上连续, 存在 $\zeta, \eta \in [a, b]$ 满足

$$m_f := \min_{[a,b]} f = f(\zeta) \leq f(x) \leq f(\eta) = M_f := \max_{[a,b]} f, \quad \forall x \in [a, b].$$

若 $M_f = m_f$, 则函数 f 是常值函数, 从而对任何 $\zeta \in (a, b)$ 都有 $f'(\zeta) = 0$.

若 $M_f > m_f$, 那么 ζ 和 η 中至少有一个不等于区间的端点, 这是因为 $f(a) = f(b)$. 不妨假设 $a < \zeta < b$. 根据定理 4.4.3 得到 $f'(\zeta) = 0$. \square

注4.5.2. (1) 定理 4.5.1 中三个条件缺一不可. 令

$A: f \in C([a, b]), B: f \in D((a, b)), C: f(a) = f(b), D: f'(\xi) = 0 \exists \xi \in (a, b).$

则

$$\begin{aligned} A+B &\not\Rightarrow D, (f(x) = x, 0 \leq x \leq 1) \\ A+C &\not\Rightarrow D, (f(x) = |1-2x|, 0 \leq x \leq 1), \\ B+C &\not\Rightarrow D, \left(f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases} \right). \end{aligned}$$

(2) 函数 f 在“闭区间 $[a, b]$ 上连续”这个条件不能减弱为在“开区间 (a, b) 内连续”. 比如

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ -1, & x = 0 \text{ 或 } 1. \end{cases}$$

(3) 反之, 在 (1) 中,

$$\begin{aligned} D &\not\Rightarrow A \left(f(x) = \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & x = 0 \text{ 或 } 1. \end{cases} \right) \\ D &\not\Rightarrow B \left(f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases} \right) \\ D &\not\Rightarrow C (f(x) = -x(x-1), 0 < x \leq 1). \end{aligned}$$

(4) $f \in D^2([a, b])$ 且 $f(a) = f(b) = 0 \Rightarrow \forall x \in (a, b) \exists \xi_x \in (a, b)$ 满足

$$f(x) = \frac{f''(\xi_x)}{2}(x-a)(x-b).$$

证: 只要证明存在 $\xi_x \in (a, b)$ 满足

$$f''(\xi_x) = \frac{2f(x)}{(x-a)(x-b)}.$$

固定 $x \in (a, b)$ 并定义 $\lambda := 2f(x)/(x-a)(x-b)$. 考察函数

$$F(u) := f(u) - \frac{\lambda}{2}(u-a)(u-b).$$

计算得到 $F(a) = F(b) = F(x) = 0$. 利用定理 4.5.1 两次推出 $\exists \xi_1 \in (a, x)$ 和 $\xi_2 \in (x, b)$ 使得 $F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$ 成立. 再次利用定理 4.5.1 得到 $\exists \xi_x \in (\xi_1, \xi_2)$ 满足 $F''(\xi_x) = 0$. \square

(5) $f \in D^3([a, b])$ 且 $f(a) = f'(a) = f(b) = 0 \Rightarrow \forall x \in (a, b) \exists \xi_x \in (a, b)$ 满足

$$f(x) = \frac{f'''(\xi_x)}{3!}(x-a)^2(x-b).$$

证: 固定 $x \in (a, b)$ 并定义函数

$$F(u) := f(u) - \frac{\lambda}{3!}(u-a)^2(u-b), \quad \lambda := \frac{3!f(x)}{(x-a)^2(x-b)}.$$

因为 $F(a) = F(x) = F(b) = 0$, 利用定理 4.5.1 得到存在 $\exists a < \xi_1 < x < \xi_2 < b$ 使得 $0 = F'(\xi_1) = F'(\xi_2)$ 成立. 但是

$$F'(u) = f'(u) - \frac{\lambda}{3!} [2(u-a)(u-b) + (u-a)^2], \quad F'(a) = 0,$$

再次利用定理 4.5.1 得到存在 $\exists a < \xi_3 < \xi_1 < \xi_4 < \xi_2$ 满足 $F''(\xi_3) = F''(\xi_4) = 0$. 故 $\exists \xi_x \in (\xi_3, \xi_4) \subset (a, b)$ 使得 $F'''(\xi_x) = 0$ 成立. 根据

$$F''(u) = f''(u) - \frac{\lambda}{3!} [2(u-b) + (u-a) + 2(u-a)], \quad F'''(u) = f'''(u) - \lambda$$

得到结论成立. \square

(6) $f \in C([a, b]) \cap D^2((a, b)) \Rightarrow \forall c \in (a, b) \exists \xi_c \in (a, b)$ 满足

$$f''(\xi_c) = \frac{2f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{2f(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{2f(c)}{(c-a)(c-b)}.$$

证: 引入记号

$$\lambda_1 := \frac{2f(a)}{(a-b)(a-c)}, \quad \lambda_2 := \frac{2f(b)}{(b-c)(b-a)}, \quad \lambda_3 := \frac{2f(c)}{(c-a)(c-b)}.$$

定义函数

$$F(x) := f(x) - \frac{\lambda_1}{2}(x-b)(x-c) - \frac{\lambda_2}{2}(x-c)(x-a) - \frac{\lambda_3}{2}(x-a)(x-b).$$

则 $F(a) = F(b) = F(c) = 0$, 从而 $\exists a < \xi_1 < c < \xi_2 < b$ 使得 $F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$ 成立. 故存在 $\exists \xi_c \in (\xi_1, \xi_2)$ 满足 $F''(\xi_c) = 0$. 根据

$$F''(x) = f''(x) - \sum_{1 \leq i \leq 3} \lambda_i,$$

得到 $f''(\xi_c) = \sum_{1 \leq i \leq 3} \lambda_i$. \square

§4.5.2 Lagrange 定理

Rolle 定理, 定理 4.5.1, 中需要条件 $f(a) = f(b)$. 如果 $f(a) \neq f(b)$, 即两点 $(a, f(a))$ 和 $(b, f(b))$ 不等高, 可以把坐标轴旋转一个角度使得在新的坐标下该两点等高.

定理 4.5.3. (Lagrange) $f \in C([a, b]) \cap D((a, b)) \Rightarrow \exists \xi \in (a, b)$ 满足

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (4.5.1)$$

证: 连接两点 $(a, f(a))$ 和 $(b, f(b))$ 的直线方程为

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

因此旋转坐标使得新的 x 轴和这个直线平行从而在新的坐标下上述两点是等高的. 定义

$$F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

则 $F \in C([a, b]) \cap D((a, b))$ 且 $F(a) = F(b) = 0$. 根据定理 4.5.1 知 $F'(\xi) = 0$ 对某个 $\xi \in (a, b)$ 成立. \square

注4.5.4. (1) 根据定理 4.5.3 得到

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), \quad \exists a < \xi < b.$$

如果把 ξ 写成如下形式

$$\xi = (1 - \theta)a + \theta b = a + \theta(b - a), \quad \exists 0 < \theta < 1$$

则得到

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a))(b - a).$$

一般地对 $\forall a \leq x, x_0 \leq b \exists \theta \in (0, 1)$ 使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0) \quad (4.5.2)$$

成立. 当 $x - x_0 = \Delta x$ 足够小时得到

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta\Delta x)\Delta x \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \quad (4.5.3)$$

(2) 引入记号

$$A: \quad f \in C([a, b]),$$

$$B: \quad f \in D((a, b)),$$

$$C: \quad f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad \exists a < \xi < b.$$

则

$$A \Rightarrow C \quad (\text{显然}),$$

$$B \Rightarrow C \quad \left(f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases} \right).$$

定理4.5.5. $f \in C((a, b)) \Rightarrow f$ 是常值函数当且仅当在 (a, b) 内 $f' \equiv 0$.

证: 假设 $f' \equiv 0, \forall x \in (a, b)$, 根据定理 4.5.3 得到

$$0 = f'(\xi) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad \exists a < \xi < x.$$

故 $f(x) = f(a)$. 反之是显然成立的. \square

定理 4.5.6. $f \in C([a, b]) \cap D((a, b)) \Rightarrow f$ 在 $[a, b]$ 上为常值函数当且仅当在 (a, b) 内 $f' \equiv 0$.

证: 假设在 (a, b) 内 $f' \equiv 0$. 根据定理 4.5.5 得到在 (a, b) 内 $f \equiv c$, 其中 c 是一个常数. 根据连续性得到在 $[a, b]$ 上 $f \equiv c$. 反之是显然成立的. \square

例 4.5.7. (1) 证明不等式

$$1 - \frac{a}{b} < \ln \frac{a}{b} < \frac{b}{a} - 1, \quad \forall 0 < a < b. \quad (4.5.4)$$

证: 令 $x = a/b \in (0, 1)$ 并考虑函数 $f(x) = \ln x$. 由 $f'(x) = 1/x$ 得到

$$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} = f'(\xi) = \frac{1}{\xi} \in (b^{-1}, a^{-1}).$$

这立即得到 4.5.4. \square

(2) 证明

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (4.5.5)$$

证: 考虑函数 $f(x) := \arcsin x + \arccos x$. 由 $f'(x) = (1 - x^2)^{-1/2} - (1 - x^2)^{-1/2} = 0$ 得到 $f(x) = f(0) = \pi/2$. \square

(3) 证明

$$x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(1 + x) < x, \quad \forall x > 0. \quad (4.5.6)$$

证: 定义函数 $f(x) = x - \ln(1 + x)$. 根据导数 $f'(x) = x/(1 + x) > 0$ 及微分中值定理得到 $f(x) - f(0) > 0$, 即 $f(x) > 0$. 另一端不等式考虑函数 $g(x) = \ln(1 + x) - x + \frac{1}{2}x^2$. \square

(4) 证明

$$|e^x - \cos x| \leq \sqrt{2}xe^x, \quad \forall x \geq 0. \quad (4.5.7)$$

证: 定义函数

$$f(x) := e^x - \cos x - \sqrt{2}xe^x, \quad \forall x \geq 0.$$

计算可得

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x + \sin x - \sqrt{2}(e^x + xe^x) = [1 - \sqrt{2}(1 + x)]e^x + \sin x, \\ f''(x) &= -\sqrt{2}e^x + [1 - \sqrt{2}(1 + x)]e^x - \cos x \\ &= [1 - \sqrt{2}(2 + x)]e^x - \cos x \leq [1 - \sqrt{2}(2 + 0)]e^0 + 1 < 0. \end{aligned}$$

故 $f'(x) < f'(0) = 1 - \sqrt{2} < 0$ 推出 $f(x) \leq f(0) = 0$. 另一个不等式可类似得到. \square

(5) 计算

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 [\ln \arctan(x+1) - \ln \arctan x].$$

解: 根据微分中值定理得到

$$x^2 [\ln \arctan(x+1) - \ln \arctan x] = x^2 \frac{1}{1 + \zeta_x^2} \frac{1}{\arctan \zeta_x} \rightarrow 1 \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi},$$

这里 $x < \zeta_x < x+1$. \square

§4.5.3 Cauchy 定理

可以把结论 4.5.1 改写成如下形式

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad g(x) := x.$$

一般形式就是如下的定理.

定理 4.5.8. (Cauchy) $f, g \in C([a, b]) \cap D((a, b))$ 且 $g'(x) \neq 0 (\forall a < t < b) \Rightarrow \exists \xi \in (a, b)$ 满足

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \quad (4.5.8)$$

证: 注意到

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \iff f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = 0, \quad \lambda := \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

考察函数

$$F(x) := f(x) - f(a) - \lambda[g(x) - g(a)].$$

则 $F \in C([a, b]) \cap D((a, b))$ 且 $F(a) = F(b) = 0$. 根据定理 4.5.1 知 $\exists a < \xi < b$ 满足 $0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \lambda g'(\xi)$. \square

例 4.5.9. (1) $f \in C([a, b]) \cap D((a, b))$ 且 $0 < a < b \Rightarrow \exists \xi \in (a, b)$ 满足

$$f(b) - f(a) = \xi f'(\xi) \ln \frac{b}{a}.$$

证: 取函数 $g(x) = \ln x$. \square

(2) $f \in D([a, b])$ 且 $0 < a < b \Rightarrow \exists \xi \in (a, b)$ 满足

$$2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi).$$

证: 取函数 $g(x) = x^2$. \square

(3) $f \in D([a, b])$ 且 $0 < a < b \Rightarrow \exists \xi \in (a, b)$ 满足

$$\frac{1}{a-b} \left| \begin{array}{cc} a & b \\ f(a) & f(b) \end{array} \right| = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

证: 注意到

$$\frac{1}{a-b} \begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = \frac{af(b) - bf(a)}{a-b} = \frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}.$$

取函数 $F(x) = f(x)/x$ 和 $G(x) = 1/x$. \square

(4) $f \in C([a, b]) \cap D((a, b))$ 且 $0 < a < b \Rightarrow \exists \xi, \eta \in (a, b)$ 满足

$$f'(\eta) = (b^2 + ab + a^2 + 2) \frac{f'(\xi)}{3\xi^2 + 2}.$$

证: η 的选取是显然的: $\exists \eta \in (a, b)$ 满足

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\eta).$$

这样只要证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{b^3 - a^3 + 2(b - a)} = \frac{f'(\xi)}{3\xi^3 + 2}$$

成立, 也即证明

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b^3 - a^3 + 2(b - a)} (3\xi^2 + 2) = \frac{f(b) - f(a)}{b^3 - a^3 + 2(b - a)} (\xi^3 + 2\xi)'.$$

定义函数

$$F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b^3 - a^3 + 2(b - a)} (x^3 - a^3 + 2(x - a)).$$

则 $F \in C([a, b]) \cap D((a, b))$ 且 $F(a) = F(b) = 0$. 从而 $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $F'(\xi) = 0$ 成立. \square

(5) $f \in C([a, b]) \cap D((a, b))$ 且 $0 < a < b \Rightarrow \exists \xi, \eta \in (a, b)$ 满足

$$f'(\xi) = \frac{a+b}{2\eta} f'(\eta).$$

证: 首先 $\exists \xi \in (a, b)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

成立. 其次定义函数

$$F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} (x^2 - a^2).$$

则 $F \in C([a, b]) \cap D((a, b))$ 且 $F(a) = F(b) = 0$. 从而 $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $F'(\xi) = 0$ 成立. \square

(6) $f \in D([a, b])$ $f'(a) = f'(b) = 0 \Rightarrow \exists \xi \in (a, b)$

$$f(\xi) - f(a) = f'(\xi)(\xi - a).$$

证: 注意到

$$f(\xi) - f(a) = f'(\xi)(\xi - a) \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}.$$

定义函数

$$F(x) := \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, & a < x \leq b, \\ f'(a), & x = a. \end{cases}$$

则 $F \in C([a, b]) \cap D((a, b))$. $\forall x \in (a, b)$ 计算得到

$$F'(x) = \frac{f'(x)}{x - a} - \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2}$$

且

$$F'(b) = -\frac{f(b) - f(a)}{(b - a)^2}, \quad F(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad F(a) = 0.$$

情形 1: $f(a) = f(b)$. 此时 $F(b) = 0 = F(a)$. 则 $\exists \xi \in (a, b)$ 满足 $F'(\xi) = 0$.

情形 2: $f(a) \neq f(b)$. 不失一般性不妨假设 $f(a) > f(b)$ 从而得到 $F'(b) > 0$ 和 $F(b) < 0$. 故 $\exists \xi_1 \in (a, b)$ 满足 $F(\xi_1) < F(b) < 0 = F(a)$. 利用连续函数介质性定理得到 $\exists \xi_2 \in (a, \xi_1)$ 使得 $F(\xi_2) = F(b)$ 成立. $\exists \xi \in (\xi_2, b)$ 满足 $F'(\xi) = 0$. \square

(7) 假设 f 不是线性函数且 $f \in C([a, b]) \cap D((a, b)) \Rightarrow \exists \xi \in (a, b)$ 满足

$$|f'(\xi)| > \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|.$$

证: 定义函数

$$F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad x \in [a, b].$$

因为函数 F 不是线性的, 故存在 $\exists c \in (a, b)$ 满足 $F(c) \neq 0$. 不妨假设 $F(c) > 0$. 则 $\exists \xi_1 \in (a, c)$ 和 $\xi_2 \in (c, b)$ 使得

$$F'(\xi_1) = \frac{F(c) - F(a)}{c - a} = \frac{F(c)}{c - a} > 0, \quad F'(\xi_2) = \frac{F(b) - F(c)}{b - c} = \frac{-F(c)}{b - c} < 0$$

成立, 也即

$$f'(\xi_1) > \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad f'(\xi_2) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

当 $f(b) \geq f(a)$ 时取 $\xi = \xi_1$ 得到

$$|f'(\xi_1)| = f'(\xi_1) > \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0.$$

否则的话取 $\xi = \xi_2$. \square

(8) $f \in D^2([a, b])$ 且 $f'(a) = f'(b) = 0 \Rightarrow \exists c \in (a, b)$ 满足

$$|f''(c)| \geq \frac{4}{(b - a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

证: $\forall x_0 \in [a, b]$ 可以证明

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(\xi_x) \quad (4.5.9)$$

这里 ξ 是介于 x 和 x_0 之间. 事实上定义函数

$$F(x) := f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0), \quad G(x) := (x - x_0)^2.$$

根据微分中值定理得到

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{f'(\xi_1) - f'(x_0)}{2(\xi_1 - x_0)} \frac{f''(\xi_2)}{2},$$

其中 $x_0 < x_2 < \xi_1 < x$. 特别地取 $x_0 = a$ 和 $x = (a + b)/2$ 得到

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(\xi_1), \quad \exists \xi_1 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right).$$

类似地 $\exists (a+b)/2 < \xi_2 < b$ 满足

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(\xi_2).$$

从而得到

$$f(b) - f(a) = \frac{(b-a)^2}{8} [f''(\xi_1) - f''(\xi_2)]$$

或

$$\frac{4}{(b-a)^2} [f(b) - f(a)] = \frac{f''(\xi_1) - f''(\xi_2)}{2}.$$

两边取绝对值得到

$$\frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)| \leq \frac{|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|}{2}.$$

若 $|f''(\xi_1)| \leq |f''(\xi_2)|$, 则取 $\xi = \xi_2$, 否则的话取 $\xi = \xi_1$. \square

(9) $f \in D^2((-\infty, +\infty))$ 且 $M_k := \sup_{(-\infty, +\infty)} |f^{(k)}| < +\infty$ ($k = 0, 1, 2$) $\Rightarrow M_1^2 \leq 2M_0M_2$.

证: 利用 (4.5.9) 得到

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi_1)}{2}h^2, \\ f(x-h) &= f(x) - f'(x)h + \frac{f''(\xi_2)}{2}h^2, \end{aligned}$$

其中 $x-h < \xi_2 < x < \xi_1 < x+h$. 两式相加得到

$$2f'(x)h = [f(x+h) - f(x-h)] - \frac{h^2}{2} [f''(\xi_1) - f''(\xi_2)]$$

从而不等式 $2h|f'(x)| \leq 2M_0 + h^2M_2$ 对任何 $h \in \mathbb{R}$ 都成立. 根据二次多项式的判别式得到 $4M_1^2 - 4M_0M_2 \leq 0$. \square

§4.6 L'Hospital 法则

假设函数 f, g 定义在 $U(a, r)$ 内且均在 a 处可导. 如果 $f(a) = g(a) = 0$ 且 $g'(a) \neq 0$ 则得到

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

§4.6.1 $\frac{0}{0}$ 型

定理4.6.1. (L'Hospital, 1696) 假设 $f, g \in D((a, b))$, $g' \neq 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0 \implies$ 如果极限

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \quad (\text{存在或} \infty)$$

则

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (4.6.1)$$

证: 延拓定义函数

$$F(x) := \begin{cases} 0, & x = a, \\ f(x), & a < x < b, \end{cases} \quad G(x) := \begin{cases} 0, & x = a, \\ g(x), & a < x < b. \end{cases}$$

则 $F, G \in C([a, b]) \cap D((a, b))$. 从而对 $\forall x \in (a, b) \exists \xi \in (a, x)$ 使得

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} \implies \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \rightarrow A$$

成立. \square

例4.6.2. (1) 证明

$$f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$$

对在 a 处二阶可导的函数 f 都成立.

证: 根据定义

$$f''(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}$$

可知 $f \in D(U(a, r))$. 利用定理 4.6.1 两次计算得到

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a-h)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{2h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a-h) - f'(a)}{-2h} = \frac{f''(a) + f''(a)}{2} = f''(a). \quad \square \end{aligned}$$

(2) 已知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x) - xf(x)}{x^3} = 0$$

求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 - f(x)}{x^2}.$$

证: 利用定理 4.6.1 两次计算得到

$$\begin{aligned} \frac{6 - f(x)}{x^2} &= \frac{5x - xf(x)}{x^3} = \frac{\sin(6x) - xf(x)}{x^3} + \frac{6x - \sin(6x)}{x^3} \\ &\rightarrow 0 + \frac{6 - 6\cos(6x)}{3x^2} \rightarrow \frac{12\sin(6x)}{2x} \rightarrow 36\cos(6x) \rightarrow 36. \quad \square \end{aligned}$$

§4.6.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型

定理 4.6.3. 假设 $f, g \in D((a, b))$, 在 (a, b) 内 $g' \neq 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \infty \implies$
若

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \quad (\text{存在或 } \infty)$$

则

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A. \quad (4.6.2)$$

证: (1) $A < \infty$. 对 $\forall x, x_0 > a$ 只要 $x \neq x_0$ 有

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x)} + \frac{f(x_0)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \frac{g(x) - g(x_0)}{g(x)} + \frac{f(x_0)}{g(x)} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \left[1 - \frac{g(x_0)}{g(x)} \right] + \frac{f(x_0)}{g(x)} \end{aligned}$$

成立. 从而

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| &= \left| \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - A \right] \left[1 - \frac{g(x_0)}{g(x)} \right] + \frac{f(x_0) - Ag(x_0)}{g(x)} \right| \\ &\leq \left| 1 - \frac{g(x_0)}{g(x)} \right| \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - A \right| + \left| \frac{f(x_0) - Ag(x_0)}{g(x)} \right|. \end{aligned}$$

因为 $\lim_{x \rightarrow a+} f'(x)/g'(x) = A$ 故 $\forall \epsilon > 0 \exists \delta_1 < b - a$ 使得

$$\left| \frac{f'(zx)}{g'(x)} - A \right| < \epsilon \quad \forall x \in (a, a + \delta_1)$$

成立. 令 $x_0 := a + \delta_1$. $\forall x \in (a, x_0) \exists \xi \in (x, x_0)$ 满足

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

则

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - A \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A \right| < \epsilon.$$

根据假设条件 $\lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \infty$ 得到对上述 $\epsilon > 0 \exists \delta < \delta_1$ 使得

$$\left| 1 - \frac{g(x_0)}{g(x)} \right| < \epsilon, \quad \left| \frac{f(x_0) - Ag(x_0)}{g(x)} \right| < \epsilon$$

成立. 因此 $\forall a < x < a + \delta$ 得到

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \epsilon + 2\epsilon = 3\epsilon.$$

(2) $A = \infty$. 基本想法是证明此时 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ 从而可以利用 (1) 中的结论. 因为

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty,$$

故 $\exists \delta_1 > 0$ 使得不等式 $|f'(x)/g'(x)| \geq 1$ 成立, $\forall a < x < a + \delta_1$. 对 $\forall a < x < y < a + \delta_1$ 得到

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \right| \geq 1, \quad \exists \xi \in (x, y).$$

从而

$$|f(x) - f(y)| \geq |g(x) - g(y)| \geq |g(x)| - |g(y)|.$$

但是 $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \infty$ 推出 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$. 利用 (1) 得到

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty. \quad \square$$

例4.6.4. (1) $\forall \alpha > 0, \forall k \in \mathbb{N}_+ \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{(\ln x)^k} = +\infty$.

证: 定理 4.6.3 利用 k 次得到

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^k}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k(\ln x)^{k-1}}{\alpha x^\alpha} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k!}{\alpha^k x^\alpha} = 0. \quad \square$$

(2) $f \in D([a, +\infty))$, f 有界, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

证: 利用定理 4.6.3 得到

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = A.$$

但是 f 有界故 $f(x)/x \rightarrow 0$. 从而 $A = 0$. \square

(3) $f \in D([a, +\infty))$, f 有界, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \not\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

解: 考察函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

对 $\forall x > 0$, 计算得到

$$f'(x) = \frac{2x^2 \cos(x^2) - \sin(x^2)}{x^2} = 2 \cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2}$$

从而极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ 不存在. 注意到 $f'_+(0) = 1$. \square

§4.6.3 其它型

主要有以下三种类型.

(A) “ $0 \cdot \infty$ ”型. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ 且 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \implies$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}. \quad (4.6.3)$$

(B) “ $\infty - \infty$ ”型. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \implies$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}. \quad (4.6.4)$$

(C) “ $0^0, \infty^0, 1^\infty$ ”型.

$$\left. \begin{array}{l} 0^0 \text{ 型} \\ \infty^0 \text{ 型} \\ 1^\infty \text{ 型} \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)} \left\{ \begin{array}{l} 0 \cdot \infty \text{ 型} \\ 0 \cdot \infty \text{ 型} \\ \infty \cdot 0 \text{ 型} \end{array} \right. \quad (4.6.5)$$

例4.6.5. (1) 计算

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (x - \pi) \cot x = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - \pi}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{\sec^2 x} = 1.$$

(2) 计算

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = 0. \end{aligned}$$

(3) 计算

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{e}{(1+x)^{1/x}} \right]^{1/x} &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \ln \frac{e}{(1+x)^{1/x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{1}{x} \ln(1+x)}{x}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2(1+x)}} = e^{1/2}. \end{aligned}$$

(4) 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1.$$

(5) $f \in D((0, \infty))$, $a > 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [af(x) + f'(x)] = L \implies$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{L}{a}.$$

证: 计算得到

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{ax} f(x)}{e^{ax}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{ax} f(x))'}{ae^{ax}} = \frac{L}{a}. \quad \square$$

(6) $f \in D^2((0, +\infty))$ 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + f'(x) + f''(x)] = L \implies$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L.$$

证: 注意到 (5) 的结论所以引入两个参数

$$f + f' + f'' = \beta[(\alpha f + f') + (\alpha f + f')'].$$

得到 $\alpha + \beta = 1 = \alpha\beta$. 利用 (5) 两次得到

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\alpha(x) + f'(x)] = \frac{L}{\beta}$$

和 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L/\alpha\beta = L$. \square

(7) 假设函数 f 在 a 处 n 阶可导 \implies

$$f^{(n)}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{h^n} \sum_{0 \leq k \leq n} \left[(-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(a + kh) \right] \right\}.$$

证: 计算得到

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{h^n} \sum_{0 \leq k \leq n} \left[(-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(a + kh) \right] \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{nh^{n-1}} \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f'(a + kh) k \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{n(n-1)h^{n-2}} \sum_{2 \leq k \leq n} (-1)^{n-k} k^2 \binom{n}{k} f''(a + kh) \\ &= \dots = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) = f^{(n)}(a). \quad \square \end{aligned}$$

§4.7 Taylor 公式

观察到

$$f \text{ 在 } x_0 \text{ 处可导} \implies f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0),$$

$$f \text{ 在 } x_0 \text{ 处二阶可导} \implies f(x) = f(x_0) + \sum_{1 \leq k \leq 2} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^2).$$

定义4.7.1. 假设函数 f 在 x_0 处 n 阶可导, 则 $f \in D^{n-1}((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$ 对某个 $\delta > 0$ 成立. f 在 x_0 处的 n 阶 Taylor 多项式定义为

$$P_n(x) \equiv P_n(x; x_0, f) := f(x_0) + \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k. \quad (4.7.1)$$

§4.7.1 Peano 型余项

定理4.7.2. (Peano 型余项) 假设函数 f 在 x_0 处 n 阶可导 $\implies \exists \delta > 0$ 使得

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \quad (4.7.2)$$

成立, 这里

$$r_n(x) = o((x - x_0)^n) \quad (4.7.3)$$

$x \rightarrow x_0$.

证: n 次利用定理 4.6.1 得到

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!} (x - x_0)^{k-1}}{n(x - x_0)^{n-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - \sum_{0 \leq k \leq n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}{n(x - x_0)^{n-1}} = \dots \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(m)}(x) - \sum_{0 \leq k \leq n-m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}{n(n-1) \cdots (n-m+1)(x - x_0)^{n-m}} \quad (0 \leq m \leq n) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x - x_0)}{n!(x - x_0)} \\ &= \frac{1}{n!} [f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)] = 0. \quad \square \end{aligned}$$

§4.7.2 Lagrange 型余项

假设 $f \in C^1([x_0 - \delta, x_0 + \delta]) \cap D^2((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$ 则得到 $f' \in C([x_0 - \delta, x_0 + \delta]) \cap D((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$. 故

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) =: r_1(x) = o(x - x_0), \quad x \rightarrow x_0,$$

其中 $r_1(x_0) = 0$ 且 $r_1 \in C([x_0 - \delta, x_0 + \delta]) \cap D((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$. 利用微分中值定理得到

$$\frac{r_1(x) - r_1(x_0)}{(x - x_0)^2 - 0} = \frac{r_1'(\xi)}{2(\xi - x_0)} = \frac{f'(\xi) - f'(x_0)}{2(\xi - x_0)}, \quad \exists \xi \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

从而

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\eta)}{2}(x - x_0)^2, \quad \exists \eta \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

定理4.7.3. (Lagrange 型余项) $f \in C^n([x_0, x_0 + \delta]) \cap D^{n+1}((x_0, x_0 + \delta)) \implies \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 有

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x), \quad (4.7.4)$$

这里

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad \exists \xi \in (x_0, x_0 + \delta). \quad (4.7.5)$$

证: 引入函数

$$G(t) := f(x) - \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k, \quad H(t) \in D((x_0, x_0 + \delta)) \text{ 且 } H(x) = 0.$$

因为 $G \in C([x_0, x_0 + \delta]) \cap D((x_0, x_0 + \delta))$, $\exists \xi \in (x_0, x_0 + \delta)$ 满足

$$\frac{G(x_0)}{H(x_0)} = \frac{G(x) - G(x_0)}{H(x) - H(x_0)} = \frac{G'(\xi)}{H'(\xi)} = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!H'(\xi)}(x - \xi)^n.$$

即

$$G(x_0) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!H'(\xi)}(x - \xi)^n H(x_0). \quad (4.7.6)$$

如果取函数 $G(t) = (x - t)^{n+1}$ 得到 (4.7.5). \square

注4.7.4. (1) 根据定理 4.7.2, f 在 x_0 处 n 阶可导 $\Rightarrow r_n(x) = o((x - x_0)^n)$. 根据定理 4.7.3, $f \in C^n([x_0, x_0 + \delta]) \cap D^{n+1}((x_0, x_0 + \delta)) \Rightarrow r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^n$; 如果进一步 $f^{(n+1)}$ 有界则 $r_n(x) = o((x - x_0)^n)$.

(2) 若 $f \in C([a, b])$ 则存在 $[a, b]$ 上的多项式数列 $\{P_n(x)\}_{n \geq 1}$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b] \quad (4.7.7)$$

成立

证: 不妨假设 $[a, b] = [0, 1]$. 定义多项式

$$P_n(x) := \sum_{0 \leq k \leq n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

计算得到

$$\begin{aligned} |f(x) - P_n(x)| &= \left| \sum_{0 \leq k \leq n} f(x) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - P_n(x) \right| \\ &\leq \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k}. \end{aligned}$$

由于 $f \in C([a, b])$, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in (x - \delta, x + \delta) \cap [0, 1]$ 有

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

因此

$$\begin{aligned} |f(x) - P_n(x)| &\leq \sum_{|x - k/n| < \delta} \binom{n}{k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} \\ &+ 2M_f \sum_{|x - k/n| \geq \delta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \epsilon + \frac{2M_f}{\delta} \sum_{|nx - k| \geq n\delta} \delta \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \epsilon + \frac{2M_f}{\delta} \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(nx-k)^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \epsilon + \frac{2M_f}{\delta n^2} nx(1-x) = \epsilon + \frac{2M_f}{\delta n} x(1-x). \end{aligned}$$

这里 $M_f := \max_{[0,1]} |f|$. 令 $n \rightarrow +\infty$ 得到 $P_n(x) \rightarrow f(x)$. 作为练习请计算最后那个求和. \square

§4.7.3 Cauchy 型余项

如果在 4.7.6 中取 $H(t) = x - t$, 则得到

定理4.7.5. (Cauchy 型余项) $f \in C^n([x_0, x_0 + \delta]) \cap D^{n+1}((x_0, x_0 + \delta)) \implies \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x), \quad (4.7.8)$$

这里

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x - \xi)^n (x - x_0). \quad (4.7.9)$$

注4.7.6. (Maclaurin 公式) 该公式形式上可写成

$$f(x) = f(0) + \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x), \quad (4.7.10)$$

(1) f 在 0 处 n 阶可导 $\implies r_n(x) = o(x^n)$.

(2) $f \in C^n([0, \delta]) \cap D^{n+1}((0, \delta)) \implies r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$ 或 $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} x(x - \xi)^n$. 此时若记作 $\xi = \theta x$, 其中 $\theta \in (0, 1)$, 得到

$$f(x) = f(0) + \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad (4.7.11)$$

或者

$$f(x) = f(0) + \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)(1-\theta)^n}{n!} x^{n+1}. \quad (4.7.12)$$

例4.7.7. (1) 指数函数 e^x :

$$e^x = 1 + \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad (4.7.13)$$

或

$$e^x = 1 + \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}(1-\theta)^n}{n!} x^{n+1}. \quad (4.7.14)$$

(2) 对数函数 $\ln(1+x)$ ($x > -1$):

$$\ln(1+x) = \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} x^{n+1}, \quad (4.7.15)$$

或

$$\ln(1+x) = \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \frac{(-1)^n (1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} x^{n+1}. \quad (4.7.16)$$

(3) 三角函数 $\sin x$:

$$\sin x = \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \begin{cases} o(x^{2n+2}), \\ \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \sin(\theta x + \frac{2n+3}{2}\pi), \\ \frac{x^{2n+3}}{(2n+1)!} (1-\theta)^{2n+1} \sin(\theta x + \frac{2n+3}{2}\pi). \end{cases} \quad (4.7.17)$$

(4) 三角函数 $\cos x$:

$$\cos x = \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \begin{cases} o(x^{2n+1}), \\ \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos(\theta x), \\ \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{(2n)!} (1-\theta)^{2n} \cos(\theta x). \end{cases} \quad (4.7.18)$$

(5) 函数 $(1+x)^\alpha$:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{\alpha}{k} x^k + \begin{cases} o(x^n), \\ \binom{\alpha}{n+1} (1+\theta x)^{\alpha-(n+1)} x^{n+1}, \\ \binom{\alpha}{n+1} (n+1) (1-\theta)^n (1+\theta x)^{\alpha-(n+1)} x^{n+1}. \end{cases} \quad (4.7.19)$$

这里 $\binom{\alpha}{k} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)/k!$.

在例 3.2.13 (3) 中我们断言 (但当时没有给出证明)

$$(1+x)^\alpha - \sum_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\alpha(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k \sim \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

当 $x \rightarrow 0$ 时. 事实上

$$\frac{(1+x)^\alpha - \sum_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k}{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n} = 1 + \frac{o(x^n)}{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n} = 1 + o(1)$$

当 $x \rightarrow 0$ 时. 特别的

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}}, \quad x > -1. \quad (4.7.20)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{0 \leq k \leq n} x^k + \frac{x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+2}}, \quad 0 < x < 1. \quad (4.7.21)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{(-1)^{k-1}(2k-3)!!}{(2k)!!} x^k + \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+\frac{1}{2}}}. \quad (4.7.22)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k + \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+\frac{3}{2}}}. \quad (4.7.23)$$

定理4.7.8. (唯一性) 假设函数 f 在 x_0 处 n 阶可导且在 x_0 附近有

$$f(x) = a_0 + \sum_{1 \leq k \leq n} a_k (x-x_0)^k + R_n(x)$$

这里 $R_n(x) = o((x-x_0)^n) \implies$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

证: 根据假设条件有

$$a_0 + \sum_{1 \leq k \leq n} a_k (x-x_0)^k + R_n(x) = f(x_0) + \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n).$$

令 $x \rightarrow x_0$ 得到 $a_0 = f(x_0)$ 且

$$\sum_{1 \leq k \leq n} \left[a_k - \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \right] (x-x_0)^k = o((x-x_0)^k) - R_n(x).$$

特别地

$$\left[a_1 - \frac{f'(x_0)}{1!} \right] + \sum_{2 \leq k \leq n} \left[a_k - \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \right] (x-x_0)^{k-1} = o((x-x_0)^{n-1}).$$

令 $x \rightarrow x_0$ 得到 $a_1 = f'(x_0)$. 同样过程可得到 $a_k = f^{(k)}(x_0)/k!$. \square

推论4.7.9. 假设函数 f 在 x_0 处 $(n+1)$ 阶可导 \implies

$$P'_{n+1}(x; x_0, f) = P_n(x; x_0, f'), \quad (4.7.24)$$

即, 函数 f 在 x_0 处的 $n+1$ 阶 Taylor 多项式等于 f' 在 x_0 处的 n 阶 Taylor 多项式.

证: 根据定义得到

$$f(x) = P_{n+1}(x) + o((x-x_0)^{n+1}), \quad f'(x) = Q_n(x) + o((x-x_0)^n),$$

这里 $P_{n+1}(x) = P_{n+1}(x; x_0, f)$ 和 $Q_n(x) := P_n(x; x_0, f')$. 然而

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= \sum_{0 \leq k \leq n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \\ Q_n(x) &= \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(f')^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!} (x - x_0)^{k-1} = P'_{n+1}(x). \quad \square \end{aligned}$$

例4.7.10. (1) 已知 $f(x) = \tan x$ 求 $P_5(x; 0, f)$.

解: 根据定义可令

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)} = \sum_{0 \leq k \leq 5} a_k x^k + o(x^5)$$

故有等式

$$\begin{aligned} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) &= a_0 + a_1 x + \left(a_2 - \frac{a_0}{2}\right) x^2 + \left(a_3 - \frac{a_1}{2}\right) x^3 \\ &+ \left(a_4 - \frac{a_2}{2} + \frac{a_0}{24}\right) x^4 + \left(a_5 - \frac{a_3}{2} + \frac{a_1}{24}\right) x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

由定理 4.7.8 比较两边系数得到 $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = 0, a_5 = \frac{2}{15}$. 所以

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5). \quad (4.7.25)$$

实际上可以证明 (等学过级数理论后)

$$\tan x = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{2^{2k}(2^{2k} - 1)}{(2k)!} B_k x^{2k-1} + o(x^{2n-1}), \quad (4.7.26)$$

这里 B_k 是第 k 个 Bernoulli 数 (定义见下个例题). \square

(2) 已知 $f(x) = x/(e^x - 1)$ 求 $P_4(x; 0, f)$.

解: 根据 (4.7.13) 得到

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + o(x^4).$$

一般可以得到

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{1}{2}x + \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{(-1)^{k-1} B_k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n}), \quad (4.7.27)$$

这里 B_k 就是所谓的第 k 个 Bernoulli 数, 比如

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{5}{66}, \quad \dots, \quad B_k \in \mathbb{Q}.$$

回顾Riemann ζ 函数定义为

$$\zeta(z) := \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^z} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k^z}, \quad \operatorname{Re}(z) > 1. \quad (4.7.28)$$

一个经典结果是

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_n \in \mathbf{Q}, \quad (4.7.29)$$

即所有 $\zeta(2n)$ 是有理数, 我们猜测 $\zeta(2n+1)$ 是无理数 (对前面几个已经证明了). \square

(3) $f \in D^2([0,1])$, $|f(0)| \leq 1$, $|f(1)| \leq 1$, $|f''(x)| \leq 2 (\forall x \in [0,1]) \implies |f'(x)| \leq 3, \forall x \in [0,1]$.

证: 给定 $x \in (0,1)$ 根据Taylor 公式得到

$$\begin{aligned} f(1) &= f(x) + f'(x)(1-x) + \frac{f''(\xi)}{2}(1-x)^2, \quad \exists \xi \in (x,1), \\ f(0) &= f(x) + f'(x)(0-x) + \frac{f''(\eta)}{2}(0-x)^2, \quad \exists \eta \in (0,x). \end{aligned}$$

$$f(1) - f(0) = f'(x) + \frac{f''(\xi)}{2}(1-x)^2 - \frac{f''(\eta)}{2}x^2$$

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \left| f(1) - f(0) - \frac{f''(\xi)}{2}(1-x)^2 + \frac{f''(\eta)}{2}x^2 \right| \\ &\leq |f(1)| + |f(0)| + |1-x|^2 + |x|^2 \\ &\leq 2 + x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 3 \leq 3. \end{aligned}$$

如果 $x=0$ 或 $x=1$, 同样的不等式也成立. \square

(4) 假设 $f \in C^{n+1}((a-\delta, a+\delta))$, $-\delta < h < \delta$, $f^{(n+1)}(a) \neq 0$, 且

$$f(a+h) = \sum_{0 \leq k \leq n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \frac{f^{(n)}(a + \theta_h h)}{n!} h^n, \quad 0 < \theta_h < 1.$$

证明

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta_h = \frac{1}{n+1}.$$

证: 根据Taylor 展开得到

$$f(a+h) = \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} h^{n+1} + o(h^{n+1}).$$

由定理 4.7.8 得到

$$\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta_h h) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + o(h^{n+1}).$$

故

$$f^{(n)}(a + \theta_h h) = f^{(n)}(a) + \frac{h}{n+1} f^{(n+1)}(a) + o(h).$$

两边同除以 h 推出

$$\begin{array}{ccc} \frac{f^{(n)}(a+\theta_h h) - f^{(n)}(a)}{h} & \xlongequal{\quad} & \frac{f^{(n+1)}(a)}{n+1} + o(1) \\ \downarrow h \rightarrow 0 & & \downarrow h \rightarrow 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \theta_h \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(a+\theta_h h) - f^{(n)}(a)}{\theta_h h} & \xlongequal{\quad} & \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(a) \end{array}$$

因此得到 $\lim_{h \rightarrow 0} \theta_h = 1/(n+1)$. \square

$$(5) f \in D^2([a, b]), f(a) = f(b) = 0, |f''(x)| \leq 8 (\forall x \in [a, b]) \implies$$

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq (b-a)^2.$$

证: 根据 Taylor 公式得到 $\exists \xi, \eta \in (a, b)$ 满足

$$f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f'\left(\frac{a+b}{2}\right)}{1!} \left(\frac{a-b}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{2!} \left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

$$f(b) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f'\left(\frac{a+b}{2}\right)}{1!} \left(\frac{b-a}{2}\right) + \frac{f''(\eta)}{2!} \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

化简得到

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\xi) + f''(\eta)}{4} \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

由条件 $|f''| \leq 8$ 得到

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \left| \frac{f''(\xi) + f''(\eta)}{4} \right| \leq \frac{(b-a)^2}{4} \times \frac{8+8}{4} = (b-a)^2. \quad \square$$

§4.7.4 Taylor 级数

目前为止 Taylor 公式中会有余项 $r_n(x)$, 即

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x).$$

一个很自然的问题是什么时候余项消失. 但是根据余项定义, 要使余项消失首要的前提是函数本身的高阶导数都存在. 那么问题可如下陈述. 如果 $f \in C^\infty((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$, 则对任意 $n \in \mathbb{N}_+$, 存在 f 在 x_0 处的 n 阶 Taylor 多项式 $P_n(x)$

$$P_n(x) \equiv P_n(x; x_0, f) = \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

什么时候如下极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x) \quad ???$$

存在.

定义4.7.11. 假设对每个 $n \in \mathbb{N}_+$ 函数 f 在 x_0 处是 n 阶可导的, 则其在 x_0 处的 Taylor 级数定义为

$$P_f(x) \equiv P_\infty(x; x_0, f) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x; x_0, f). \quad (4.7.30)$$

称函数 f 在 x_0 处实解析如果存在 x_0 的邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 使得对任何 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$ 都存在且满足

$$f(x) = P_f(x). \quad (4.7.31)$$

称函数 f 在区间 I 内实解析, 记作 $f \in C^\omega(I)$, 如果 f 在 I 中的每个点处都是实解析.

注4.7.12. (1) 函数 f 在 x_0 处实解析 \Rightarrow 函数 f 在 x_0 处光滑 (即 f 的各阶导数都存在).

(2) 函数 f 在 x_0 处光滑 $\not\Rightarrow$ 函数 f 在 x_0 处实解析. 比如考察如下例子

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

根据例4.3.4 (2) 得到

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} Q_{2n} \left(\frac{1}{x} \right) e^{-1/x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

单数

$$P_f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0$$

对任何 x 靠近 0 都成立, 这是不可能的.

(3) 利用级数理论可以证明

$$\sin x = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos x = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!},$$

$$e^x = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}, \quad \ln(1+x) = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k},$$

$$\tan x = \sum_{k \geq 1} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)B_k}{(2k)!} x^{2k-1}, \quad |x| < \frac{\pi}{2}.$$

(4) **(Bernstein)** $f \in D^\infty([a, b])$ 且 $f^{(k)}(x) \geq 0$ ($\forall x \in [a, b]$) $\Rightarrow \forall x, x_0 \in (a, b)$ 满足 $|x - x_0| < b - x_0$, 有

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

定理4.7.13. 假设函数 $f \in D^\infty((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$ 且 $|f^{(n)}(x)| \leq M^n$ ($\exists M > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \forall n \in \mathbb{N}_+$) \Rightarrow 得到

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

证: 根据Taylor 公式得到

$$\left| f(x) - \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{M^{n+1} \delta^{n+1}}{(n+1)!}.$$

当 $n \rightarrow \infty$ 得到结论成立. \square

例4.7.14. 求函数

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}, \quad -\pi < x < \pi$$

的Taylor 级数.

解: 因为 $f^{(n)}(x) \geq 0$ 根据定理 4.7.13 得到

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} = \sum_{k \geq 0} \frac{\zeta(2k+2)}{\pi^{2k+2}} (4k+2)x^{2k}$$

这里

$$f^{(2k)}(0) = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{(2k+1)!}{(n\pi)^{2k+2}} = 2(2k+1)! \frac{\zeta(2k+2)}{\pi^{2k+2}}.$$

$f^{(2k+1)} = 0$. \square

例4.7.15. (1) 回顾Bernoulli 数的定义

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n \geq 0} \frac{b_n}{n!} x^n = 1 - \frac{1}{2}x + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} B_n}{(2n)!} x^{2n}, \quad (4.7.32)$$

这里 $b_0 = 1, b_1 = -\frac{1}{2}, b_{2n+1} = 0$ ($n \geq 1$), 和 $b_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{0 \leq i \leq n-1} \binom{n+1}{i} b_i$.

(2) 类似地可以定义Euler 数

$$\frac{2e^x}{e^{2x} + 1} = \sum_{n \geq 0} \frac{e_n}{n!} x^n = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{E_n}{(2n)!} x^{2n}, \quad (4.7.33)$$

其中 $e_{2n+1} = 0$ ($n \geq 1$) 和 $e_{2n} = -\sum_{0 \leq i \leq n-1} \binom{2n}{2i} e_{2i}$.

§4.8 微分学的应用

这节主要是利用微分中值定理来研究函数的性质.

§4.8.1 单调函数和一阶导数

定理4.8.1. $f \in C([a, b]) \cap D((a, b)) \Rightarrow$ 在 (a, b) 内有

$$(1) f' > 0 \Rightarrow f \text{ 严格递增} \Rightarrow f' \geq 0.$$

$$(2) f' \geq 0 \Rightarrow f \text{ 递增} \Rightarrow f' \geq 0.$$

$$(3) f' \equiv 0 \Rightarrow f \text{ 为常数} \Rightarrow f' \equiv 0.$$

$$(4) f' \leq 0 \Rightarrow f \text{ 递减} \Rightarrow f' \leq 0.$$

$$(5) f' < 0 \Rightarrow f \text{ 严格递减} \Rightarrow f' \leq 0.$$

证: (1) $\forall x_1 < x_2, \exists \xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$, 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f'(\xi)}{1} > 0 \implies f \text{ 严格递增}.$$

假设函数 f 严格递增. $\forall x, x_0 \in (a, b)$, 只要 $x \neq x_0$ 有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

即得到 $f'(x_0) \geq 0$.

(2) 此时 $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$. 余下证明和 (1) 一样.

同理可证 (3), (4) 和 (5). \square

注4.8.2. (1) 函数 f 严格递增 $\nRightarrow f' \geq 0$. 比如考虑函数 $f(x) = x^3, x_0 = 0$.

(2) $f \in C([0, +\infty)) \cap D((0, +\infty)), f(0) = 0, f(x) \geq 0$, 且 $f(x) \geq f'(x)$ ($x > 0$) \Rightarrow 在 $[0, +\infty)$ 上 $f \equiv 0$

证: 定义函数 $F(x) := e^{-x}f(x)$. 则得到 $F'(x) = [f'(x) - f(x)]e^{-x} \leq 0$, 从而 $F(x) \leq F(0) = 0$. 因此 $F \equiv 0$ 即 $f \equiv 0$. \square

(3) $f \in D([1, +\infty)), f'(x) \geq 0$, 且 $f(1) = 1 \Rightarrow$

$$F(x) := \frac{f(x)}{1+f(x)} \text{ 递增}, \quad G(x) := \frac{f(x)}{[1+f(x)]^2} \text{ 递减}.$$

证: 计算可得

$$F' = \frac{f'}{(1+f)^2} \geq 0, \quad G' = \frac{f'(1-f^2)}{(1+f)^4} \leq 0$$

这是因为 $f(x) \geq f(1) = 1$. \square

§4.8.2 凸函数和一阶、二阶导数

在 §3.1.5 已经引入了凸函数的概念, 在此我们重新给出定义.

定义4.8.3. 假设函数 f 定义在闭区间 $[a, b]$ 上. 称函数 f 在 $[a, b]$ 上是凸的如果不等式

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \quad (4.8.1)$$

对任意 $x_1, x_2 \in [a, b]$ 和任意 $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1$ 满足 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ 都成立. 如果不等式 (4.8.1) 是严格不等式 (对 $x_1 \neq x_2$), 则称函数 f 在 $[a, b]$ 上是严格凸的. 若函数 $-f$ 是凸的 (或严格凸的) 则称函数 f 是凹的 (或严格凹的).

注4.8.4. (1) 下面命题等价: 其中 $x_1 < x < x_2$,

函数 f 在 $[a, b]$ 上是凸的

⇔ ♣

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) = f(x_2) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_2 - x)$$

⇔ ♠

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

证: ♠ ⇓. 根据假设得到

$$f(x)(x_2 - x_1) \leq [f(x_2) - f(x_1)](x - x_1) + (x_2 - x_1)f(x_1)$$

从而

$$x_2[f(x) - f(x_1)] \leq [f(x_2) - f(x_1)](x - x_1) + x_1[f(x) - f(x_1)].$$

即

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

用另一个等式可推出第二个不等式.

♠ ⇑. 显然成立.

♣. 任意 $x_1 \leq x \leq x_2$ 都可以写成 $x = tx_1 + (1-t)x_2$ ($0 \leq t \leq 1$). 从而得到

$$\begin{aligned} f(tx_1 + (1-t)x_2) &\leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(tx_1(1-t)x_2 - x_1) + f(x_1) \\ &= (1-t)[f(x_2) - f(x_1)] + f(x_1) = tf(x_1) + (1-t)f(x_2). \quad \square \end{aligned}$$

(2) 函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上是凸的 $\Rightarrow \forall [c, d] \subset [a, b]$ 满足 $a < c < d < b$, 函数 f 在 $[c, d]$ 上是 Lipschitz 的. 特别地, 函数 f 在开区间 (a, b) 内是连续的.

证: $\forall c \leq x < y \leq d$, 有

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(d) - f(y)}{d - y} \leq \frac{f(b) - f(d)}{b - d}.$$

故

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|, \quad M := \max \left\{ \left| \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \right|, \left| \frac{f(b) - f(d)}{b - d} \right| \right\}. \quad \square$$

(3) 函数 f 在 $[a, b]$ 上是凸的 $\Rightarrow f \in C([a, b])$. 比如函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & x = 0, \\ 2, & x = 1. \end{cases}$$

(4) 函数 f 定义在 $[a, b]$ 上 \Rightarrow

$$f \text{ 是凸的} \iff f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \quad \forall x_1, x_2 \in [a, b]. \quad (4.8.2)$$

证: \Rightarrow : 取 $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$.

\Leftarrow : 令

$$L(x) := f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

首先证明在闭区间 $[a, b]$ 上有不等式 $f \leq L$ 成立. 定义函数 $g(x) := f(x) - L(x)$, 则 $g \in C([a, b])$. 从而根据闭区间上连续函数的最值性得到 $M_g := \max_{[a, b]} g$ 存在且 $M_g = g(x_0)$ 对某个 $x_0 \in [a, b]$ 成立. 如果 $x_0 = a$ 或 b 则 $M_g = 0$. 如果 $x_0 \in (a, b)$, 则 $x_0 \in (a, (a+b)/2]$ 或 $[(a+b)/2, b)$, 不妨假设 $a < x_0 \leq (a+b)/2$. 定义

$$x_0^* := 2x_0 - a \in (a, b).$$

从而得到 $M = g(x_0) = g((a+x_0^*)/2) \leq [g(a) + g(x_0^*)]/2 \leq M/2$, 所以 $M = 0$. \square

(5) 函数 f 在 $[a, b]$ 上是凸的且 $\max_{[a, b]} f = f(\xi)$ 对某个 $\xi \in (a, b)$ 成立 $\Rightarrow f \equiv f(\xi)$.

证: 因为 $\xi \in (a, b)$, $\exists \lambda \in (0, 1)$ 使得 $\xi = \lambda x + (1 - \lambda)y$ 成立. 根据凸性得到

$$\begin{aligned} f(\xi) &= f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \\ &\leq \lambda M_f + (1 - \lambda)M_f = M_f = f(\xi) \end{aligned}$$

由于 $\lambda \in (0, 1)$ 必有 $f(x) = f(y) = f(\xi)$ 即 $f \equiv f(\xi)$. \square

(6) 函数 f 在 $[a, b]$ 上是凸的且 $x \in (a, b) \Rightarrow$ 单侧导数 $f'_-(x)$ 和 $f'_+(x)$ 都存在且 $f'_-(x) \leq f'_+(x)$.

证: $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ 满足 $x_1 < x < x_2$ 推出

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

令

$$g(y) := \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}, \quad y < x.$$

对任何 $a < y_1 < y_2 < x$ 得到

$$g(y_1) = \frac{f(x) - f(y_1)}{x - y_1} \leq \frac{f(x) - f(y_2)}{x - y_2} = g(y_2).$$

即函数 g 关于 y 单调递增, 从而左导数 $f'_-(x)$ 存在. 类似的函数

$$h(y) := \frac{f(y) - f(x)}{y - x}, \quad x < y$$

关于 y 单调递减, 从而右导数 $f'_+(x)$ 存在. 不等式 $f'_-(x) \leq f'_+(x)$ 显然成立. \square

(7) 凸的 \Rightarrow 可导的. 比如函数 $f(x) = |x|$.

(8) 假设函数 f 在 (a, b) 内是凸的. 可以证明集合

$$\{x \in (a, b) : f \text{ 在 } x \text{ 处不可导的}\}$$

是可数的.

定理4.8.5. 假设函数 $f \in C([a, b]) \cap D((a, b)) \Rightarrow$

$$f \text{ 在 } [a, b] \text{ 上是凸的} \iff f' \text{ 在 } (a, b) \text{ 上递增.} \quad (4.8.3)$$

证: \Rightarrow : $\forall a < x_1 < x_2 < b, \forall 0 < \lambda < 1$, 令 $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$. 由于 f 是凸的得到

$$f(x) - f(x_1) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) - f(x_1) = (1 - \lambda)[f(x_2) - f(x_1)].$$

同样可得

$$f(x) - f(x_2) \leq -\lambda[f(x_2) - f(x_1)].$$

即

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

两边求极限得到

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2). \quad (4.8.4)$$

\Leftarrow : $\exists \eta_1 \in (x_1, x)$ 和 $\exists \eta_2 \in (x, x_2)$ 满足

$$f(x_1) - f(x) = f'(\eta_1)(x_1 - x), \quad f(x_2) - f(x) = f'(\eta_2)(x_2 - x).$$

所以

$$\begin{aligned} f(x) - [\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)] &= \lambda f'(\eta_1)(x-x_1) + (1-\lambda)f'(\eta_2)(x-x_2) \\ &\leq \lambda f'(\eta_1)(1-\lambda)(x_2-x_1) + (1-\lambda)f'(\eta_2)\lambda(x_1-x_2) \\ &= \lambda(1-\lambda)(x_2-x_1)[f'(\eta_1) - f'(\eta_2)] \leq 0. \quad \square \end{aligned}$$

注4.8.6. (1) $f \in C([a, b]) \cap D((a, b))$ 且 f' 在 (a, b) 内严格递增 $\Rightarrow f$ 在 $[a, b]$ 上严格凸的. 但是反之则不成立. 比如考察函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ -1, & x = 0, \\ 2, & x = 1. \end{cases}$$

(2) $f \in C([a, b]) \cap D((a, b)) \Rightarrow$

$$f \text{ 在 } [a, b] \text{ 上是凸的} \iff \begin{pmatrix} \forall a < x_1, x_2 < b \text{ 有不等式成立} \\ f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) \end{pmatrix} \quad (4.8.5)$$

证: \Rightarrow : 对 $\forall x < x_1 < y$ 根据不等式 (4.8.4) 得到

$$f'(x) \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leq f'(x_1) \leq \frac{f(y) - f(x_1)}{y - x_1} \leq f'(y).$$

\Leftarrow : 对 $\forall x_1 < x < x_2$ 有不等式

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq f'(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

利用下面的初等不等式

$$\frac{m}{k} \leq \frac{k+n}{k+l} \leq \frac{n}{l}, \quad \forall k, l > 0, \quad \frac{m}{k} \leq \frac{n}{l},$$

得到

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

根据注4.8.4 (1) 知道 f 是凸的. \square

综合以上结果得到

定理4.8.7. 假设函数 $f \in C([a, b]) \cap D^2((a, b)) \Rightarrow$

- (1) 函数 f 在 $[a, b]$ 上是凸的 \Leftrightarrow 在 (a, b) 内 $f'' \geq 0$
- (2) 在 (a, b) 内 $f'' > 0 \Rightarrow$ 函数 f 在 $[a, b]$ 上是严格凸的.

注4.8.8. (1) **Jensen 不等式:** 函数 f 在 $[a, b]$ 上是凸的 $\Rightarrow \forall x_1, \dots, x_n \in [a, b]$, $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ 满足 $\sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i = 1$, 有

$$f\left(\sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i f(x_i). \quad (4.8.6)$$

(2) 函数 $\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 内是凸的.

(3) **Young 不等式:** 实数 $a, b \geq 0$, 实数 $p, q > 0$ 且满足 $1/p + 1/q = 1 \Rightarrow$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}. \quad (4.8.7)$$

(4) **Hölder 不等式:** 实数 $a_i, b_i > 0$ ($1 \leq i \leq n$), 实数 $p, q > 0$ 且满足 $1/p + 1/q = 1 \Rightarrow$

$$\sum_{1 \leq i \leq n} a_i b_i \leq \left(\sum_{1 \leq i \leq n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{1 \leq i \leq n} b_i^q\right)^{1/q}. \quad (4.8.8)$$

定义4.8.9. 假设函数 f 定义在开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内. 称 x_0 是函数 f 的拐点. 如果函数 f 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内是凸的但在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内是凹的, 或者在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内是凹的但在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内是凸的.

例4.8.10. (1) $f(x) = x^3$.

(2) $f(x) = x^{1/3}$.

(3) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $f'(x) = -2x/(1+x^2)^2$, $f''(x) = 2(3x^2 - 1)/(1+x^2)^3$.

(4) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, $f'(x) = 2(1-x^2)/(1+x^2)^2$, $f''(x) = 4x(x^2-3)/(1+x^2)^3$.

定理4.8.11. 给定函数 $f \in C((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \Rightarrow$

(1) 假设函数 $f \in D((x_0 - \delta, x_0)) \cap D((x_0, x_0 + \delta))$. 如果 f' 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内递增但在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内递减, 或 f' 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内递减但在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内递增, 则 x_0 是拐点.

(2) 假设函数 $f \in D^2((x_0 - \delta, x_0)) \cap D^2((x_0, x_0 + \delta))$. 如果在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内 $f'' \geq 0$ 但在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内 $f'' \leq 0$, 或在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内 $f'' \leq 0$ 但在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内 $f'' \geq 0$, 则 x_0 是拐点.

(3) 假设函数 $f \in D^2((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$. 如果 x_0 是拐点, 则 $f''(x_0) = 0$.

证: (1) 和 (2) 显然成立. 对 (3), 不妨假设函数 f 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内是凸的而在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内是凹的. 则 f' 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内是单调递增而在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内单调递减. 从而 x_0 是函数 f 的极值点, 故根据 Fermat 引理得到 $f''(x_0) = 0$. \square

注4.8.12. (1) x_0 是拐点 $\nRightarrow f''(x_0) = 0$. 比如 $f(x) = x^{1/3}$.

(2) $f''(x_0) = 0 \nRightarrow x_0$ 是拐点. 比如 $f(x) = x^4$.

§4.8.3 极值和一阶、二阶导数

定理4.8.13. (必要条件) 假设函数 f 定义在开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内, x_0 是极值点 \Rightarrow 函数 f 要么在 x_0 处不可导, 要么 $f'(x_0) = 0$.

例4.8.14. (1) $f(x) = x^3, x_0 = 0$.

$$(2) f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 2x, & x < 0. \end{cases}$$

定理4.8.15. (1) 假设函数 $f \in C((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \cap D(\dot{U}(x_0, \delta))$.

(1.1) 在 $\dot{U}(x_0, \delta)$ 内 $f'(x)(x - x_0) \leq 0 \Rightarrow x_0$ 是极大值点.

(1.2) 在 $\dot{U}(x_0, \delta)$ 内 $f'(x)(x - x_0) \geq 0 \Rightarrow x_0$ 是极小值点.

(1.3) 在 $\dot{U}(x_0, \delta)$ 内 $f'(x) > 0$ (或 < 0) $\Rightarrow x_0$ 不是极值点.

(2) 假设函数 f 在 x_0 处 2 阶可导且 $f'(x_0) = 0$.

(2.1) $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ 是极大指点.

(2.2) $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ 是极小指点.

(2.3) $f''(x_0) = 0 \Rightarrow$ 无法判断.

证: 由 Taylor 公式得到

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

即

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2} = \frac{1}{2}f''(x_0) + o(1), \quad x \rightarrow x_0.$$

如果 $f''(x_0) < 0, \exists \delta > 0$ 满足

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2} < 0, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

所以 $f(x) < f(x_0)$ 对任何 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 都成立, 故 x_0 是极大值点. 同理可证当 $f''(x_0) > 0$ 时, x_0 是极小值点. 但是当 $f''(x_0) = 0$, 上述方法无法判断 x_0 是否是极值点. \square

推论4.8.16. 假设函数 f 在 x_0 处 n 阶可导, $f^{(k)}(x_0) = 0$ ($1 \leq k \leq n - 1$), 但 $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

(1) 如果 n 是偶数 $\Rightarrow x_0$ 是极值点. 进一步如果 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 或 $f^{(n)}(x_0) < 0$, 则 x_0 是极大指点 (或极小指点).

(2) 如果 n 是奇数 $\Rightarrow x_0$ 不是极值点.

证: 根据 Taylor 公式得到

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

即

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0) + o(1), \quad x \rightarrow x_0.$$

此时结论显而易见. \square

注4.8.17. (1) 已知函数 $f \in C([a, b])$ 求 $M_f = \max_{[a, b]} f = f(\zeta)$ 和 $m_f = \min_{[a, b]} f = f(\eta)$. 如果 $\zeta, \eta \in (a, b)$, 则 ζ, η 都是内点从而 $f'(\zeta) = f'(\eta) = 0$, 假设 f 在 ζ, η 处可导. 否则的话 ζ, η 都是 $[a, b]$ 的端点. 因此

$$M_f/m_f := \max / \min \{f(\text{端点}), f(\text{驻点}), f(\text{不可导点})\}.$$

(2) 求函数 $f(x) = x - 2 \sin x$ 在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 上的最值.

解: 根据 $f'(x) = 1 - 2 \cos x$ 计算得到驻点为 $\pi/3, 5\pi/3$. 结合端点处的值得到

$$M_f = f(5\pi/3) = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3}, \quad m_f = f(\pi/3) = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}. \quad \square$$

(3) 假设函数 $f \in C(I)$, 这里 $I = (a, b), [a, b), (a, b)$ 或 $[a, b]$, 或者甚至是 $(a, +\infty), (-\infty, b], (-\infty, +\infty) \Rightarrow M_f$ 或 m_f 可能不存在.

(4) 求函数 $f(x) = xe^{-x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的最值.

解: 根据 $f'(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$ 计算得到驻点为 $\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2$. 函数 f 在 $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ 内单调递增而在 $(-\infty, -\sqrt{2}/2) \cup (\sqrt{2}/2, +\infty)$ 内单调递减. 结合端点处的值得到

$$\sup_{\mathbb{R}} f = \max_{\mathbb{R}} f = f(\sqrt{2}/2) = \frac{1}{\sqrt{2}e}, \quad \inf_{\mathbb{R}} f = \min_{\mathbb{R}} f = f(-\sqrt{2}/2) = \frac{-1}{\sqrt{2}e}. \quad \square$$

(5) 假设函数 $f \in C(I)$ 且 $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ 是 I 内唯一的极值点 $\Rightarrow x_0$ 是 I 的最值点.

证: 不妨假设 x_0 是函数 f 的唯一极大值点. $\forall x \in I$ 且 $x \neq x_0$, 考虑闭区间 $[x, x_0]$ 和 $[x_0, x]$. 为了方便期间不妨进一步假设 $x < x_0$, 从而只要考虑闭区间 $[x, x_0]$ 即可. 根据闭区间上连续函数的最值性得到存在 $\zeta \in [x, x_0]$ 满足 $f(\zeta) = \max_{[x, x_0]} f$. 如果 $\zeta \neq x_0$, 则得到另一个极大值, 这就和已知假设矛盾从而 $\zeta = x_0$. 根据 x 的任意性知道 $\forall x \in \overset{\circ}{I}$ 有 $f(x) \leq f(x_0)$ 成立. 根据函数的连续性可知 $f(x) \leq f(x_0)$ 对 $\forall x \in I$ 都成立. \square

(6) 给定函数 $y = f(x), \alpha < x < \beta$, 其中 $f \in C((\alpha, \beta))$. 考察其图像

$$S = \{(x, f(x)) : \alpha < x < \beta\}.$$

称直线 $L: y = ax + b$ 是曲线 S 的渐近线如果

$$\lim_{(x, f(x)) \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0. \quad (4.8.9)$$

这里 “ $(x, f(x)) \rightarrow \infty$ ” 表示 $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} [x^2 + |f(x)|^2] = +\infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow \beta^-} [x^2 + |f(x)|^2] = +\infty$.

(1) α 有限: $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} [x^2 + |f(x)|^2] = +\infty$ 推出 $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = \infty$. 此时直线 $L: x = \alpha$ 称为垂直渐近线.

(2) β 有限: $\lim_{x \rightarrow \beta^-} [x^2 + |f(x)|^2] = +\infty$ 推出 $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = \infty$. 此时直线 $L: x = \beta$ 也称为垂直渐近线.

(3) $\alpha = -\infty \beta = +\infty$: 此时得到

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax]. \quad (4.8.10)$$

当 $a = 0$ 时, 称直线 $L: y = b$ 为水平渐近线; 当 $a \neq 0$ 时, 称直线 $L: y = ax + b$ 为一般渐近线或斜渐近线.

综上所述, 最多有两条水平渐近线或斜渐近线, 但是可以有許多条垂直渐近线.

例4.8.18. 求函数 $f(x) = x^3 / (x+3)(x-1)$ 的渐近线. 显然垂直渐近线为 $x = -3$ 或 $x = 1$. 根据

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 + 3x}{(x+3)(x-1)} = -2$$

得到斜渐近线为 $y = x - 2$.

§4.8.4 函数画图

§4.8.5 Newton 方法

§4.9 参考文献

1. Diamond, Fred; Shurman, Jerry. *A first course in modular forms*, Graduate Texts in Mathematics 228, Springer-Verlag, New York, 2005. xvi+436 pp. ISBN: 0-387-23229-x
2. 徐森林, 薛春华 编著: 数学分析, 清华大学出版社, 2005.
3. 张福保, 薛金美, 潮小李 主编: 数学分析讲义, 科学出版社, 2019.
4. 梅加强 编著: 数学分析, 高等教育出版社, 2015.
5. 邓建平 编: 微积分 I 和 II, 科学出版社, 2019.

6. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis I*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+574 pp. ISBN: 3-540-40386-8
7. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis II*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xvi+681 pp. ISBN: 3-540-40633-6
8. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis I*, Translated from the 1988 German original by Gary Brookfield, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. xiv+426 pp. ISBN: 3-7643-7153-6
9. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis II*, Translated from the 1999 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. xii+400 pp. ISBN: 978-3-7643-7472-3; 3-7643-7472-3
10. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis III*, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. xii+468 pp. ISBN: 978-3-7643-7479-2; 3-7643-7479-2
11. 汪林 著: 数学分析中的问题和反例, 现代数学基础 56, 高等教育出版社, 2015.
12. 裴礼文 编著: 数学分析中的典型问题与方法 (第二版), 高等教育出版社, 2015.
13. 朱尧辰 编著: 数学分析例选通过范例学技巧, 哈尔滨工业大学出版社, 2013.
14. 周民强 编著: 数学分析习题演练 (第一、二、三册), 科学出版社, 2018.
15. 吉米多维奇 著 (李荣涑, 李植 译): 数学分析习题集 (根据 2010 年俄文版翻译), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.

第五章 积分理论

格物, 致知之事也; 诚意, 力行之事也. 物者何? 即所谓本末之物也. 身、心、意、知、家、国、天下皆物也, 天地万物皆物也, 日用常行之事皆物也. 格者, 即物而穷其理也. — 曾国藩家书·《致诸弟》道光二十二年十月二十六日

§5.1 不定积分

回顾下导数的定义:

$$\mathbf{L}: D((a, b)) \rightarrow \{(a, b) \text{ 上的函数}\}, f \mapsto f,$$

且满足 Leibniz 法则

$$\mathbf{L}(fg) = f\mathbf{L}(g) + g\mathbf{L}(f), \quad \mathbf{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathbf{L}(f) + \beta\mathbf{L}(g).$$

一个很自然的问题是 \mathbf{L} 的反函数是什么? 首席看两个例子:

$$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = x^n, \quad \left(\frac{1}{n+1}x^{n+1} + 3\right)' = x^n.$$

因此若反函数 \mathbf{L}^{-1} 存在, 则必不唯一!

§5.1.1 原函数和不定积分

定义5.1.1. 称 F 是定义在区间 I 上的函数 f 的原函数如果 $F \in D(I)$ 且

$$F'(x) = f(x), \quad x \in I.$$

注5.1.2. (1) 给定函数 f , 改变定义域 I 会给出不同的原函数:

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad x \in \mathbb{R}, \quad \left(\arctan \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+x^2} \quad x \neq 0.$$

(2) 原函数不是唯一的.

性质5.1.3. 如果函数 F_1 和 F_2 是定义在区间 I 上的函数 f 的原函数, 则 $F_1(x) - F_2(x)$ 是常数, 对任何 $x \in I$ 都成立.

证: 令 $G := F_1 - F_2$, 则在 I 上成立 $G' \equiv 0$. 根据定理4.5.5 得到 $G = c$. \square

定义5.1.4. 给定区间 I 上的函数 f , 定义

$$\int f(x) dx = \{\text{定义在 } I \text{ 上的所有 } f \text{ 的原函数}\}.$$

如果 F 是原函数则根据性质5.1.3 得到

$$\int f(x) dx = \{F + C : C \in \mathbb{R}\}.$$

为了方便起见一般记作

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \quad (5.1.1)$$

根据定义得到

$$\left(\int f(x) dx\right)' = f(x), \quad \int F'(x) dx = F(x) + C. \quad (5.1.2)$$

§5.1.2 基本不定积分表 I

基本初等函数的原函数如下

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} dx &\equiv \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \\ \int 0 dx &= C, \quad \int 1 dx = x + C, \\ \int x^\alpha dx &= \frac{1}{1+\alpha} x^{1+\alpha} + C \quad (\alpha \neq -1), \\ \int \frac{1}{1+x^2} dx &\equiv \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C, \\ \int \frac{1}{1-x^2} dx &\equiv \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C, \\ \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx &\equiv \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(1 + \sqrt{1+x^2}) + C, \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &\equiv \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \\ \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1), \quad \int e^x dx = e^x + C, \\ \int \sin x dx &= -\cos x + C, \quad \int \cos x dx = \sin x + C, \\ \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &\equiv \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx \equiv \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C, \\ \int \sinh x dx &= \cosh x + C, \quad \int \cosh x dx = \sinh x + C, \\ \int \frac{1}{\sinh^2 x} dx &\equiv \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C, \\ \int \frac{1}{\cosh^2 x} dx &\equiv \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C. \end{aligned}$$

§5.2 不定积分的基本性质

不定积分最重要的基本性质是分部积分法, 这个给出计算复杂不定积分的一个非常有效的方法和技巧.

§5.2.1 线性性质

定理5.2.1. 如果

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad \int g(x) dx = G(x) + C,$$

则

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx = [\alpha F(x) + \beta G(x)] + C.$$

推论5.2.2. 如果

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

则对 $\forall a \neq 0$ 和 $\forall b$, 有

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C. \quad (5.2.1)$$

证: 令 $t := ax + b$, 得到

$$\frac{d}{dx} F(ax + b) = \frac{d}{dt} F(t) \cdot \frac{dt}{dx} = F'(t) \cdot a = af(ax + b). \quad \square$$

例5.2.3. (1) 对 $\forall a$ 和 $k \in \mathbb{N}_+$,

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \begin{cases} \ln|x-a| + C, \\ \frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C, & k > 1. \end{cases}$$

(2) 对 $\forall m \neq 0$,

$$\int \sin(mx) dx = -\frac{1}{m} \cos(mx) + C, \quad \int \cos(mx) dx = \frac{1}{m} \sin(mx) + C,$$

(3) 对 $\forall a > 0$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C,$$

(4) 对 $\forall c \neq 0$,

$$\int \frac{ax + b}{cx + d} dx = \int \left(\frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \frac{1}{cx + d} \right) dx = \frac{a}{c} x + \frac{bc - ad}{c^2} \ln|cx + d| + C,$$

(5) 对 $\forall a$,

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C,$$

对 $a \neq b$,

$$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x+b}{x+a} \right| + C,$$

(6) 考察不定积分

$$\int \frac{dx}{A = ax^2 + 2bx + c}.$$

情形 1: $b^2 - ac > 0$. 此时可写成 $ax^2 + 2bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$, 其中 $\alpha \neq \beta$, 从而

$$\int \frac{dx}{ax^2 + 2bx + c} = \frac{1}{2\sqrt{b^2 - ac}} \ln \left| \frac{ax + b - \sqrt{b^2 - ac}}{ax + b + \sqrt{b^2 - ac}} \right| + C.$$

情形 2: $b^2 - ac = 0$. 此时可写成 $ax^2 + 2bx + c = a(x - \alpha)^2$, 其中 $\alpha = -b/a$, 从而

$$\int \frac{dx}{ax^2 + 2bx + c} = \int \frac{dx}{a(x - \alpha)^2} = -\frac{1}{a} \frac{1}{x - \alpha} + C = \frac{-1}{ax + b} + C.$$

情形 3: $b^2 - ac < 0$. 此时可写成 $ax^2 + 2bx + c = a[(x + b/a)^2 + (ac - b^2)/a^2]$, 从而

$$\int \frac{dx}{ax^2 + 2bx + c} = \frac{1}{\sqrt{ac - b^2}} \arctan \frac{ax + b}{\sqrt{ac - b^2}} + C.$$

(7) 利用三角恒等式

$$\cos^2(mx) = \frac{1 + \cos(2mx)}{2}, \quad \sin^2(mx) = \frac{1 - \cos(2mx)}{2},$$

得到对 $\forall m \neq 0$

$$\int \cos^2(mx) dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4m} \sin(2mx) + C,$$

$$\int \sin^2(mx) dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4m} \sin(2mx) + C.$$

(8) 利用三角恒等式

$$\sin(mx) \cos(nx) = \frac{\sin[(m+n)x] + \sin[(m-n)x]}{2},$$

$$\cos(mx) \cos(nx) = \frac{\cos[(m+n)x] + \cos[(m-n)x]}{2},$$

$$\sin(mx) \sin(nx) = \frac{\cos[(m+n)x] - \cos[(m-n)x]}{2},$$

得到对 $\forall m+n \neq 0$ 和 $m-n \neq 0$

$$\int \sin(mx) \cos(nx) dx = -\frac{1}{2(m+n)} \cos[(m+n)x] - \frac{1}{2(m-n)} \cos[(m-n)x],$$

$$\int \cos(mx) \cos(nx) dx = \frac{1}{2(m+n)} \sin[(m+n)x] + \frac{1}{2(m-n)} \sin[(m-n)x],$$

$$\int \sin(mx) \sin(nx) dx = \frac{1}{2(m+n)} \sin[(m+n)x] - \frac{1}{2(m-n)} \sin[(m-n)x].$$

(9) 利用三角恒等式

$$\sin(2nx) = \sum_{1 \leq k \leq n} [\sin(2kx) - \sin((2k-2)x)] = 2 \sin x \sum_{1 \leq k \leq n} \cos[(2k-1)x]$$

得到

$$\int \frac{\sin(2nx)}{\sin x} dx = 2 \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\sin[(2k-1)x]}{2k-1} + C.$$

类似地利用三角恒等式

$$\begin{aligned} \sin[(2n+1)x] &= \sum_{1 \leq k \leq n} [\sin((2k+1)x) - \sin((2k-1)x)] + \sin x \\ &= \sin x + 2 \sin x \sum_{1 \leq k \leq n} \cos(2kx) \end{aligned}$$

有

$$\int \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x} dx = x + 2 \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\sin(2kx)}{2k} + C.$$

§5.2.2 变量替换

基本想法是考虑变量替换 $x = \varphi(t)$ 得到

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

上述公式告诉我们两件事:

(1) 如果给定的不定积分可以写成如下形式

$$\int d(\varphi(t)) \varphi'(t) dt,$$

则根据上述公式得到

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

如果此时原函数 $F(x)$ 可以求出来.

(2) 反之, 如果给定不定积分

$$\int f(x) dx,$$

考察某种变量替换 $x = \varphi(t)$ 使得

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

容易求出原函数.

例5.2.4. (1) 我们有

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x (\sin x)' dx = \frac{1}{4} \sin^4 x + C.$$

(2) 作变量替换 $x = t^6$ 得到

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} &= \int \frac{6t^5 dt}{t^3(1+t^2)} = 6 \int \frac{t^2 dt}{1+t^2} \\ &= 6(t - \arctan t) + C = 6(\sqrt[6]{x} - \arctan \sqrt[6]{x}) + C. \end{aligned}$$

(3) 我们有

$$\begin{aligned} \int g(x^2) x dx &= \frac{1}{2} \int g(x^2) d(x^2), \\ \int g(\ln x) \frac{dx}{x} &= \int g(\ln x) d \ln x, \\ \int g(\sin x) \cos x dx &= \int g(\sin x) d \sin x, \\ \int g(\cos x) \sin x dx &= - \int g(\cos x) d \cos x, \\ \int g(\tan x) \frac{dx}{\cos^2 x} &= \int g(\tan x) d \tan x, \\ \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx &= \ln |g(x)| + C. \end{aligned}$$

(4) 其它变量替换:

- $x = a \sin t, a \sin^2 t, a \cos t, a \cos^2 t, \alpha \sin^2 t + \beta \cos^2 t,$
- $x = a \sinh t, a \sinh^2 t, a \cosh t, a \cosh^2 t, \alpha \sinh^2 t + \beta \cosh^2 t,$
- $x = a \tan t, a \tanh t,$
- (万能公式) 利用 $t = \tan \frac{x}{2}$ 得到 $dt = (1 + \tan^2 \frac{x}{2}) d\frac{x}{2}$ 且

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}, \quad \sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}, \quad \tan x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}.$$

把上述变量替换应用到如下例子:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} \quad (\alpha < x < \beta), \quad \left(\text{答案: } 2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}} + C \right)$$

考虑 $x = \alpha \cos^2 t + \beta \sin^2 t, 0 < t < \pi/2.$

$$\int \frac{dx}{\sin x}, \quad \left(\text{答案: } \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C \right),$$

考虑 $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$.

$$\int \frac{dx}{\cos x}, \quad (\text{答案: } \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C).$$

考虑变量替换 $x = t + \frac{\pi}{2}$.

$$\int \frac{dx}{1 + \epsilon \cos x} \quad (0 < \epsilon < 1), \quad \left(\text{答案: } \frac{2}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \arctan \left(\frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}} \right) + C \right),$$

考虑变量替换 $t = \tan \frac{x}{2}$.

§5.2.3 分部积分及基本不定积分表 II

根据 Leibniz 法则得到

$$(uv)' = u'v + uv'$$

从而

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (5.2.2)$$

例5.2.5. (1) 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x d \ln x = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C,$$

(2) 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int x \frac{dx}{1+x^2} = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C,$$

(3) 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C,$$

(4) 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$\begin{aligned} \int \sin(\ln x) dx &= x \sin(\ln x) - \int x \cdot \cos(\ln x) \frac{dx}{x} = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx \\ &= x \sin(\ln x) - \left[x \cos(\ln x) + \int x \cdot \sin(\ln x) \frac{dx}{x} \right] \end{aligned}$$

从而

$$\int \sin(\ln x) dx = \frac{x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]}{2} + C,$$

(5) 利用分部积分 (5.2.2) 和 (4) 得到

$$\int \cos(\ln x) dx = \frac{x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]}{2} + C,$$

(6) 计算不定积分

$$I_n = \int x^n \ln x dx, \quad n \neq -1.$$

解: 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n+1} \int \ln x d(x^{n+1}) = \frac{1}{n+1} \left(x^{n+1} \ln x - \int x^n dx \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \left(x^{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} x^{n+1} \right) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + C. \quad \square \end{aligned}$$

(7) 计算不定积分

$$I_{n,m} := \int x^n \ln^m x dx, \quad n \neq -1 \text{ 且 } m \in \mathbb{N}_+.$$

解: 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$\begin{aligned} I_{n,m} &= \frac{1}{n+1} \int \ln^m x d(x^{n+1}) \\ &= \frac{1}{n+1} \left(x^{n+1} \ln^m x - \int x^{n+1} \cdot m \ln^{m-1} x \cdot \frac{1}{x} dx \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \left(x^{n+1} \ln^m x - m \int x^n \ln^{m-1} x dx \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \left(x^{n+1} \ln^m x - m I_{n,m-1} \right) = \frac{x^{n+1} \ln^m x}{n+1} - \frac{m}{n+1} I_{n,m-1}. \quad \square \end{aligned}$$

比如

$$\begin{aligned} I_{n,2} &= \frac{x^{n+1} \ln^2 x}{n+1} - \frac{2}{n+1} I_{n,1} = \frac{x^{n+1} \ln^2 x}{n+1} - \frac{2}{n+1} I_n \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \left[\ln^2 x - \frac{2}{n+1} \ln x + \frac{2}{(n+1)^2} \right] + C. \end{aligned}$$

(8) 计算不定积分

$$I := \int P(x) e^{ax} dx, \quad a \neq 0, \quad \deg P = n.$$

解: 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{P(x)}{a} d e^{ax} = \frac{P(x) e^{ax}}{a} - \int \frac{P'(x)}{a} e^{ax} dx = \frac{P(x)}{a} e^{ax} - \int \frac{P'(x)}{a^2} d e^{ax} \\ &= \left[\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} \right] e^{ax} + \int \frac{P''(x)}{a^2} e^{ax} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{0 \leq k \leq n-1} \frac{P^{(k)}(x)}{a^{k+1}} e^{ax} + \int (-1)^n \frac{P^{(n)}(x)}{a^n} e^{ax} dx \\
= &\sum_{0 \leq k \leq n-1} \frac{(-1)^k P^{(k)}(x)}{a^{k+1}} e^{ax} + \frac{(-1)^n P^{(n)}(x)}{a^{n+1}} e^{ax} + C = \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(-1)^k P^{(k)}(x)}{a^{k+1}} + C. \quad \square
\end{aligned}$$

(9) 计算不定积分

$$I_P := \int P(x) \sin(bx) dx, \quad J_P := \int P(x) \cos(bx) dx, \quad \det P = n.$$

解: 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$\begin{aligned}
I_P &= \int \frac{-P(x)}{b} d \cos(bx) = -\frac{P(x)}{b} \cos(bx) + \int \frac{P'(x)}{b} \cos(bx) dx \\
&= -\frac{P(x)}{b} \cos(bx) + \int \frac{P'(x)}{b^2} d \sin(bx) \\
&= -\frac{P(x)}{b} \cos(bx) + \frac{P'(x)}{b^2} \sin(bx) - \int \frac{P''(x)}{b^2} \sin(bx) dx.
\end{aligned}$$

即

$$I_P = -\frac{P(x)}{b} \cos(bx) + J_{P'/b}, \quad J_P = \frac{P(x)}{b} \sin(bx) - I_{P'/b}. \quad \square$$

(10) 计算不定积分

$$I_n := \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}, \quad a \neq 0.$$

解: 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} - \int x \frac{-n(x^2 + a^2)^{n-1} \cdot 2x}{(x^2 + a^2)^{2n}} dx \\
&= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1},
\end{aligned}$$

从而得到

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2na^2} I_n + \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^n}, \quad I_1 = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C. \quad \square$$

(11) 计算不定积分

$$I_n := \int \tan^n x dx, \quad n \geq 1.$$

解: 利用分部积分 (5.2.2) 得到 ($n \geq 2$)

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \tan^{n-2} x \tan^2 x dx = \int \tan^{n-2} x \sin^2 x d \tan x \\
&= \tan^{n-1} x \sin^2 x - \int \tan x \left[(n-2) \tan^{n-3} x \tan^2 x + \tan^2 x \cdot 2 \sin x \cos x \right] dx
\end{aligned}$$

$$= \tan^{n-1} x \sin^2 x - (n-2)I_n - 2 \int \tan^n x \cos^2 x dx$$

故

$$\begin{aligned} (n-1)I_n &= \tan^{n-1} x(1 - \cos^2 x) + \int \tan^{n-1} x d(\cos^2 x) \\ &= \tan^{n-1} x(1 - \cos^2 x) + \tan^{n-1} x \cos^2 x - (n-1) \int \cos^2 x \tan^{n-2} x \frac{dx}{\cos^2 x} \\ &= \tan^{n-1} x - (n-1)I_{n-2}. \end{aligned}$$

因此得到递推公式

$$I_n = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

观察到

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C, \\ I_2 &= \int \tan^2 x dx = \int \sin^2 x d \tan x = \sin^2 x \tan x - \int 2 \tan x \sin x \cos x dx \\ &= \sin^2 x \tan x - 2 \int \tan^2 x d \tan x = \sin^2 x \tan x - \frac{2}{3} \tan^3 x + C. \end{aligned}$$

所以最后得到

$$\begin{aligned} I_{2n} &= (-1)^{n-1} I_2 + \sum_{2 \leq k \leq n} \frac{(-1)^{n-k}}{2k-1} \tan^{2k-1} x, \\ I_{2n+1} &= (-1)^n I_1 + \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{(-1)^{n-k}}{2k} \tan^{2k} x. \quad \square \end{aligned}$$

(12) 计算不定积分

$$I_{m,n} := \int \cos^m x \sin^n x dx, \quad m, n \neq 0.$$

解: 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \int -\cos^m x \sin^{n-1} x d \cos x = \int -\frac{1}{m+1} \sin^{n-1} x d(\cos^{m+1} x) \\ &= -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \cos^m x (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x dx \\ &= \frac{n-1}{m+1} (I_{m,n-2}, I_{m,n}) - \frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+1}. \end{aligned}$$

故

$$I_{m,n} = \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2} - \frac{\cos^{m+1} x \sin^{n-1} x}{m+n}.$$

类似地可得到

$$I_{m,n} = \int \cos^{m-1} x \sin^n x d \sin x = \int \cos^{m-1} x d \left(\frac{1}{n+1} \sin^{n+1} x \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \sin^n x (1 - \cos^2 x) \cos^{m-2} x dx \\
&= \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} (I_{m-2, x} - I_{m, n})
\end{aligned}$$

故

$$I_{m, n} = \frac{m-1}{m+n} I_{m-2, n} + \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{m+n}. \quad \square$$

(13) 计算不定积分

$$I_n := \int e^x \sin^n x dx, \quad J_n := \int e^x \cos^n x dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

解: 显然成立

$$I_0 = J_0 = e^x + C$$

和

$$I_1 = \int e^x \sin x dx = - \int e^x d \cos x = - \cos x e^x + J_1,$$

$$J_1 = \int e^x \cos x dx = \int e^x d \sin x = \sin x e^x - I_1.$$

所以

$$I_1 = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C, \quad J_1 = \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2} + C.$$

对 $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
I_n &= \int e^x \sin^n x dx = \int -e^x \sin^{n-1} x d \cos x \\
&= -e^x \sin^{n-1} x \cos x + \int \cos x e^x [\sin^{n-1} x + (n-1) \sin^{n-2} x \cos x] dx \\
&= -e^x \sin^{n-1} x \cos x + \int e^x \sin^{n-1} x d \sin x + (n-1) \int e^x \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx \\
&= -e^x \sin^{n-1} x \cos x + \frac{1}{n} \int e^x d(\sin^n x) + (n-1)(I_{n-2} - I_n)
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} - \frac{e^x}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{1}{n^2} \left(e^x \sin^n x - \int \sin^n x e^x dx \right) \\
&= \frac{n-1}{n} I_{n-2} + \frac{e^x}{n^2} (\sin^n x - n \sin^{n-1} x \cos x) - \frac{1}{n^2} I_n.
\end{aligned}$$

化简得到

$$I_n = \frac{n(n-1)}{1+n^2} I_{n-2} - \frac{e^x}{1+n^2} (\sin^n x - n \sin^{n-1} x \cos x).$$

请补齐 J_n 的计算. \square

(14) 若 $y := ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ 且 $b^2 - 4ac > 0$, 计算不定积分

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{y'}{2} + \sqrt{ay} \right| + C, & a > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-y'}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C, & a < 0. \end{cases}$$

解: 实际上如果 $a > 0$ 得到

$$\sqrt{y} = \sqrt{a} \sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}} = \sqrt{a} \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}}.$$

所以

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{y'}{2a} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{a}} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{y'}{2} + \sqrt{ay} \right| + C/$$

如果 $a < 0$ 得到

$$\sqrt{y} = \sqrt{-a} \sqrt{-x^2 - \frac{b}{a}x - \frac{c}{a}} = \sqrt{-a} \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} - \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}$$

故

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{\frac{y'}{2a}}{\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}} + C = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{y'}{-\sqrt{b^2 - 4ac}} + C. \quad \square$$

(15) 计算不定积分

$$I = \int \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x + \frac{1}{x}} dx.$$

解: 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$I = \int e^{x + \frac{1}{x}} dx + \int x d\left(e^{x + \frac{1}{x}}\right) = x e^{x + \frac{1}{x}} + C. \quad \square$$

§5.2.4 有理函数的原函数

考察不定积分

$$\int R(x) dx, \quad \text{其中 } R(x) := \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad (5.2.3)$$

这里 $P(x), Q(x)$ 是多项式. 根据代数学基本定理可知

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = p(x) + \sum_{1 \leq j \leq \ell} \sum_{1 \leq k \leq k_j} \frac{a_{jk}}{(x - x_j)^k} + \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{1 \leq k \leq m_j} \frac{b_{jk}x + c_{jk}}{(x^2 + p_jx + q_j)^k}, \quad (5.2.4)$$

其中

$$\begin{aligned} p(x) &: \quad \text{多项式,} \\ a_{jk}, b_{jk}, c_{jk} &: \quad \text{唯一确定的实数,} \\ Q(x) &: \quad = \prod_{1 \leq j \leq \ell} (x - x_j)^{k_j} \prod_{1 \leq j \leq n} (x^2 + p_jx + q_j)^{m_j} \quad (p_j^2 - 4q_j < 0). \end{aligned}$$

所以计算不定积分 (5.2.3) 分成下面三种情况.

情形 1:

$$\int p(x) dx.$$

如果 $p(x) = \sum_{0 \leq i \leq N} \alpha_i x^i$ 得到

$$\int p(x) dx = \sum_{0 \leq i \leq N} \frac{\alpha_i}{i+1} x^{i+1} + C. \quad (5.2.5)$$

情形 2:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

根据基本不定积分表,

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \begin{cases} \ln|x-a| + C, & k=1, \\ \frac{1}{1-k}(x-a)^{1-k}, & k \neq 1. \end{cases} \quad (5.2.6)$$

情形 3:

$$\int \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^k}, \quad p^2-4q < 0.$$

根据恒等式

$$x^2+px+q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\right)^2$$

和

$$\frac{bx+c}{(x^2+px+q)^k} = \frac{b\left(x + \frac{p}{2}\right) + \left(c - \frac{bp}{2}\right)}{\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\right)^2\right]^k}$$

得到

$$\begin{aligned} \int \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^k} dx &= \frac{b}{2} \int \frac{d\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}{\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\right)^2\right]^k} \\ &+ \left(c - \frac{bp}{2}\right) \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\right)^2\right]^k}. \end{aligned}$$

所以只要如下两个不定积分

$$I_k := \int \frac{du^2}{(u^2+a^2)^k}, \quad J_k := \int \frac{du}{(u^2+a^2)^k}.$$

然而第一个积分显然

$$I_k = \begin{cases} \ln|u^2+a^2| + C, & k=1, \\ \frac{1}{1-k}(u^2+a^2)^{1-k}, & k \neq 1. \end{cases}$$

并且第二个积分由例 5.2.5 (10) 给出, 即

$$J_k = \frac{2k-1}{2ka^2} J_{k-1} + \frac{1}{2ka^2} \frac{u}{(u^2+a^2)^k}, \quad J_1 = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C.$$

例 5.2.6. 计算不定积分

$$\int R(x) dx, \quad \text{其中 } R(x) = \frac{x^7 - 2x^6 + 4x^5 - 5x^4 + 4x^3 - 5x^2 - x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}.$$

解: 观察到

$$\begin{aligned} R(x) &= x + \frac{x^5 - x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} \\ &= x + \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+1}. \end{aligned}$$

故得到 $(A, B, C, D, E, F) = (-1, 1, 1, 1, 0, 1)$ 且

$$\int R(x) dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x-1} + \frac{x}{2(x^2+2)^2} + \ln|x-1| + \frac{3}{2} \tan^{-1} x + C. \quad \square$$

例 5.2.7. (1) 计算不定积分

$$I_n := \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}, \quad a \neq 0.$$

解: 根据

$$4a(ax^2+bx+c) = (2ax+b)^2 + (4ac-b^2) =: t^2 + \Delta$$

得到

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{(4a)^n}{2a} \int \frac{dt}{(t^2+\Delta)^n} = 2^{2n-1} a^{n-1} \int \frac{dt}{(t^2+\Delta)^n} \\ &= \begin{cases} \frac{2n-3}{n-1} \frac{2a}{\Delta} I_{n-1} + \frac{1}{(n-1)\Delta} \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}, & \Delta \neq 0, \\ \frac{1}{a^n(1-2n)} \left(x + \frac{b}{2a}\right)^{1-2n} + C, & \Delta = 0. \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

(2) 计算不定积分

$$I_{m,n} := \int \frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}, \quad m, n \in \mathbb{N}_+.$$

解: 如果 $a = b$, 则

$$I_{m,n} = \int \frac{dx}{(x+a)^{m+n}} = \frac{1}{1-m-n} (x+a)^{1-m-n} + C.$$

如果 $a \neq b$, 令 $t = \frac{x+a}{x+b}$ 则

$$I_{m,n} = \frac{1}{(b-a)^{m+n-1}} \int \frac{(1-t)^{m+n-2}}{t^m} dt. \quad \square$$

(3) 计算不定积分

$$\int \frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}} dx, \quad \det P_n = n.$$

解: 根据 Taylor 公式

$$P_n(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

得到

$$\begin{aligned} \int \frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}} dx &= \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \int (x-a)^{k-n-1} dx \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n-1} \frac{-P^{(k)}(a)}{k!(n-k)(x-a)^{n-k}} + \frac{P^{(n)}(a)}{n!} \ln|x-a| + C. \quad \square \end{aligned}$$

(4) 计算不定积分

$$I_n = \int \frac{dx}{1+x^{2n}}, \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

解: 根据代数学基本定理得到 $1+x^{2n} = \prod_{1 \leq k \leq 2n} (x-a_k)$ 其中 $a_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi + \sqrt{-1} \sin \frac{2k-1}{2n} \pi$. 所以

$$\frac{1}{1+x^{2n}} = -\frac{1}{2n} \sum_{1 \leq k \leq 2n} \frac{a_k}{x-a_k} = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1 - (\cos \frac{2k-1}{2n} \pi)x}{x^2 - 2x \cos \frac{2k-1}{2n} \pi + 1}.$$

故

$$\begin{aligned} I_n &= -\frac{1}{2n} \sum_{1 \leq k \leq n} \left(\cos \frac{2k-1}{2n} \pi \int \frac{2x - 2 \cos \frac{2k-1}{2n} \pi}{x^2 - 2x \cos \frac{2k-1}{2n} \pi + 1} dx \right) \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} \left[\sin^2 \frac{2k-1}{2n} \pi \int \frac{dx}{\left(x - \cos \frac{2k-1}{2n} \pi\right)^2 + \sin^2 \frac{2k-1}{2n} \pi} \right] \\ &= -\frac{1}{2n} \sum_{1 \leq k \leq n} \left[\cos \frac{2k-1}{2n} \pi \cdot \ln \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k-1}{2n} \pi + 1 \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} \left(\sin \frac{2k-1}{2n} \pi \cdot \tan^{-1} \frac{x - \cos \frac{2k-1}{2n} \pi}{\sin \frac{2k-1}{2n} \pi} \right) + C. \quad \square \end{aligned}$$

我们已经使用了代数学基本定理, 即任何非常数的 n 次多项式 $P(z)$ 由如下分解

$$P(z) = A \prod_{1 \leq k \leq n} (z - \alpha_k), \quad A \in \mathbb{R}, \alpha_k \in \mathbb{C}. \quad (5.2.7)$$

等价地, 任何非常数多项式 $P(z)$ 在 \mathbb{C} 上至少有一个根 α . 否则的话 $P(z)$ 在 \mathbb{C} 上没有根. 因此函数

$$f(z) := \frac{1}{P(z)}$$

是全纯的. 当 $|z| \rightarrow +\infty$, $|P(z)| \rightarrow +\infty$ 和 $|f(z)| \rightarrow 0$. 所以全纯函数 $f(z)$ 在 \mathbb{C} 上有界. 由 Liouville 定理得到 $f(z) \equiv C$, 对任意 $z \in \mathbb{C}$ 都成立.

§5.2.5 形如 $\int R(\sin x, \cos x)dx$ 的原函数

令

$$R(u, v) := \frac{P(u, v)}{Q(u, v)}, \quad \text{其中 } P, Q \text{ 是关于 } u, v \text{ 的多项式.} \quad (5.2.8)$$

考察如下不定积分

$$\int R(\sin x, \cos x) dx. \quad (5.2.9)$$

利用变量替换

$$t := \tan \frac{x}{2}$$

得到

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt. \quad (5.2.10)$$

如果函数 $R(u, v)$ 满足一定的函数结构, 可以利用其它简单的变量替换.**(1)** $R(-u, v) = R(u, v)$. 此时 $R(u, v) = R_1(u^2, v)$ 且

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R_1(1 - \cos^2 x, \cos x) dx = \int \frac{-R_1(1 - t^2, t) dt}{\sqrt{1 - t^2}}. \quad (5.2.11)$$

(2) $R(u, -v) = -R(u, v)$. 此时 $R(u, v) = R_2(u, v^2)$ 且

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R_2(\sin x, 1 - \sin^2 x) dx = \int \frac{R_2(t, 1 - t^2) dt}{\sqrt{1 - t^2}}. \quad (5.2.12)$$

(3) $R(-u, v) = -R(u, v)$. 此时 $R(u, v) = uR_1^*(u^2, v)$ 且

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int \sin x R_1^*(\sin^2 x, \cos x) dx = \int -R_1^*(1 - t^2, t) dt. \quad (5.2.13)$$

(4) $R(u, -v) = -R(u, v)$. 此时 $R(u, v) = vR_2^*(u^2, v)$ 且

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int \cos x R_2^*(\sin x, \cos^2 x) dx = \int R_2^*(t, 1 - t^2) dt. \quad (5.2.14)$$

(5) $R(-u, -v) = R(u, v)$. 此时 $R(u, v) = R((u/v)v, v) = R^*(u/v, v)$ 从而

$$R^*(u/v, -v) = R^*((-u/v), -v) = R(-u, -v) = R^*(u/v, v).$$

所以得到 $R(u, v) = R^*(u/v, v) = R_3(u/v, v^2)$ 且

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R_3(\tan^2 x, \cos^2 x) dx = \int R_3\left(t, \frac{1}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2}. \quad (5.2.15)$$

(6) 一般情形. 对任意 $R(u, v)$ 可写成

$$R(u, v) = \frac{R(u, v) - R(-u, v)}{2} + \frac{R(-u, v) - R(-u, -v)}{2} + \frac{R(-u, -v) + R(u, v)}{2}.$$

即可以写成 (4), (5), (6) 的组合.

(7) $R(u, v) = R^*(u^2, v^2)$. 此时只要作变量替换 $t = \sin x$ 便得到

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R^*(t^2, 1-t^2) \frac{dt}{\sqrt{2-t^2}}. \quad (5.2.16)$$

作为一个典型例子考虑

$$\int \sin^\nu x \cos^\mu x dx, \quad \mu, \nu \in \mathbb{Q} \text{ 且 } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

作变量替换 $z = \sin x$ 得到

$$\sin^\nu x \cos^\mu x dx = \frac{1}{2} \sin^{\nu-1} x (1 - \sin^2 x)^{\frac{\mu-1}{2}} 2 \sin x d \sin x = \frac{1}{2} (1-z)^{\frac{\mu-1}{2}} z^{\frac{\nu-1}{2}} dz.$$

例5.2.8. (1) 计算不定积分

$$I_n := \int \frac{dx}{\sin^n x}, \quad J_n := \int \frac{dx}{\cos^n x}.$$

解: 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{\sin x dx}{\sin^{n+1} x} = - \int \frac{d \cos x}{\sin^{n+1} x} \\ &= - \frac{\cos x}{\sin^{n+1} x} + \int \cos x [-(n+1) \sin^{-n-2} x \cdot \cos x] dx \\ &= - \frac{\cos x}{\sin^{n+1} x} - (n+1) \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^{n+2} x} dx = - \frac{\cos x}{\sin^{n+1} x} - (n+1)(I_{n+2} - I_n) \end{aligned}$$

从而

$$I_n = - \frac{\cos x}{(n-1) \sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}.$$

类似地得到

$$J_n = \frac{\sin x}{(n-1) \cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} J_{n-2}. \quad \square$$

(2) 计算不定积分

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x}, \quad (a > 0 \text{ 且 } |b| < |a|).$$

解: 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a} \int \frac{dx}{1 + \epsilon \cos x} \quad (\epsilon := b/a \in (-1, 1)) \\ &= \frac{2}{a} \int \frac{d \tan \frac{x}{2}}{(1+\epsilon) + (1-\epsilon) \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2}{a(1-\epsilon)} \int \frac{dt}{t^2 + \left(\sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}\right)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2} \right) + C. \quad \square$$

(3) 计算不定积分

$$\int P(x)e^{ax} dx, \quad \int P(x) \sin bx dx, \quad \int P(x) \cos(bx) dx$$

可归结到计算如下两个不定积分 (其中 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$)

$$I_n := \int x^n e^{ax} \sin bx dx, \quad J_n := \int x^n e^{ax} \cos bx dx.$$

利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$\begin{aligned} I_n &= -\frac{1}{b} \int x^n e^{ax} d \cos bx \\ &= -\frac{1}{b} \left[x^n e^{ax} \cos bx - \int \cos bx (nx^{n-1} e^{ax} + ax^n e^{ax}) dx \right] \\ &= -\frac{1}{b} x^n e^{ax} \cos bx + \frac{n}{b} J_{n-1} + \frac{a}{b} J_n \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{1}{b} \int x^n e^{ax} d \sin bx \\ &= \frac{1}{b} \left[x^n e^{ax} \sin bx - \int \sin bx (nx^{n-1} e^{ax} + ax^n e^{ax}) dx \right] \\ &= \frac{1}{b} x^n e^{ax} \sin bx - \frac{n}{b} I_{n-1} - \frac{a}{b} I_n. \end{aligned}$$

所以推出

$$I_n = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \left[(a+n)x^{n-1} \sin bx - bx^n \cos bx \right] - \frac{2na}{a^2 + b^2} I_{n-1} - \frac{n(n-1)}{a^2 + b^2} I_{n-2}.$$

请补充完整 J_n 的表达式.

§5.2.6 形如 $\int R(x, y(x)) dx$ 的原函数

(I) $y(x) = \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}$, 其中 $m \in \mathbb{N}_+$ 且 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. 此时令

$$t := \omega(t) = \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \right)^{\frac{1}{m}}, \quad t^m = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \quad x = \varphi(t) = \frac{\delta t^m - \beta}{\alpha - \gamma t^m}.$$

则

$$\int R(x, y(x)) dx = \int R(\varphi(t), t) \varphi'(t) dt. \quad (5.2.17)$$

(II) $R(x, y) = x^m (a + bx^n)^p$, 这里 $m, n, p \in \mathbb{Q}$ 且 $a, b \in \mathbb{R}$. 如果 $p \in \mathbb{Z}$, 得到

$$R(x, y(x)) = x^{\frac{m_1}{m_2}} \left(a + bx^{\frac{n_1}{n_2}} \right)^p$$

其中 $p = p_1/p_2, m = m_1/m_2, n = n_1/n_2$. 令

$$\lambda := [m_2, n_2], \quad t := x^{\frac{1}{\lambda}},$$

得到

$$\int R(x, y(x)) dx = \int t^{\frac{\lambda}{m_2} m_1} \left(a + b t^{\frac{\lambda}{n_2} n_1} \right)^p \lambda t^{\lambda-1} dt = \int R^*(t) dt. \quad (5.2.18)$$

如果 $p \notin \mathbb{Z}$, 令 $z = x^n$ 得到

$$R(x, y(x)) dx = \frac{1}{n} (a + bz)^p z^q dz, \quad q := \frac{m+1}{n} - 1.$$

从而

$$\int R(x, y(x)) dx = \frac{1}{n} \int (a + bz)^p z^q dz. \quad (5.2.19)$$

如果 $q \in \mathbb{Z}$ 则令

$$t := \sqrt[v]{a + bz}, \quad p := \frac{p_1}{v},$$

上述不定积分可化简为

$$\int R(x, y(x)) dx = \int \frac{t^{\nu p}}{n} \left(\frac{t^{\nu} - a}{b} \right)^q \frac{\nu t^{\nu-1}}{b} dt = \int R^*(t) dt. \quad (5.2.20)$$

如果 $q \notin \mathbb{Z}$, 把 (5.2.19) 写成

$$\int R(x, y(x)) dx = \frac{1}{n} \int \left(\frac{a + bz}{z} \right)^p z^{p+q} dz.$$

如果 $p+q \in \mathbb{Z}$ 令

$$t = \sqrt[v]{\frac{a + bz}{z}}, \quad p = \frac{p_1}{v}$$

得到

$$\int R(x, y(x)) dx = \frac{1}{n} \int t^{\nu p} z^{p+q} dz = \int R^*(t, z) dz. \quad (5.2.21)$$

下面结论 **Newton** 最早知道, 但是由 **Chebeshev** 给出了严格证明.

不定积分

$$\int R(x, y(x)) dx$$

可以用初等函数表示, 如果 $p, q, p+q$ 中有一个是整数, 或者 $p, \frac{m+1}{n}, \frac{m+1}{n} + p$ 中有一个是整数.

例5.2.9. (1) 计算不定积分

$$J_{p,q} := \int (a + bz)^p z^q dz.$$

解: 因为

$$((a + bz)^p z^q)' = p(a + bz)^{p-1} b z^q + q(a + bz)^p z^{q-1}$$

和

$$(a+bz)^{p+1}z^q = (a+bz)(a+bz)^p z^q,$$

得到

$$\begin{aligned} J_{p+1,q} &= aJ_{p,q} + bJ_{p,q+1}, \\ (a+bz)^{p+1}z^{q+1} &= (p+1)bJ_{p,q+1} + (q+1)J_{p+1,q}. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} J_{p,q} &= -\frac{(a+bz)^{p+2}z^{q+1}}{a(p+1)} + \frac{p+q+2}{a(p+1)}J_{p+1,q} \quad (p \neq -1) \\ &= \frac{(a+bz)^{p+2}z^{q+1}}{a(q+1)} - b\frac{p+q+2}{a(q+1)}J_{p,q+1} \quad (q \neq -1) \\ &= \frac{(a+bz)^p z^{p+1}}{p+q+1} + \frac{ap}{p+q+1}J_{p-1,q} \quad (p+q+1 \neq 0) \\ &= \frac{(a+bz)^{p+1}z^q}{b(p+q+1)} - \frac{aq}{b(p+q+1)}J_{p,q-1} \quad (p+q \neq -1). \quad \square \end{aligned}$$

(2) 计算不定积分

$$H_m := \int \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

解: 如果 m 是奇数, 则 $\frac{m+1}{2} \in \mathbb{Z}$; 如果 m 是偶数, 则 $\frac{m+1}{2} + q = \frac{m+1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{m}{2} \in \mathbb{Z}$. 所以任意 m 上述不定积分可用初等函数表示. 若 $m \geq 2$,

$$\begin{aligned} H_m &= \frac{1}{2} \int (1-z)^{-1/2} z^{\frac{m-1}{2}} dz = \frac{1}{2} J_{-\frac{1}{2}, \frac{m-1}{2}} \\ &= -\frac{1}{m} x^{m-1} \sqrt{1-x^2} + \frac{m-1}{m} H_{m-2}. \end{aligned}$$

这里

$$H_1 = -\sqrt{1-x^2} + C, \quad H_0 = \arcsin x + C.$$

如果 $m < -1$, 可记 $m = -\mu$ 其中 $\mu > 1$, 从而

$$H_m = \frac{1}{2} J_{-\frac{1}{2}, \frac{m-1}{2}} = -\frac{x^{-(\mu-1)} \sqrt{1-x^2}}{\mu-1} + \frac{\mu-2}{\mu-1} H_{-(\mu-2)}.$$

这里

$$H_{-1} = \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} \right| + C, \quad H_{-2} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C. \quad \square$$

(III) $R(x, y(x)) = R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$, 其中 $a, b, c \in \mathbb{R}$. 此时一般的变量替换, 即 Euler 替换:

情形 1: $a > 0$. 此时考虑

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{ax} \quad (5.2.22)$$

从而得到 $bx + c = t^2 - 2\sqrt{at}x$ 且

$$x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{at} + b}, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{at^2 + bt + c\sqrt{a}}}{2\sqrt{at} + b}.$$

最后得到

$$\begin{aligned} & \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx \\ &= \int R\left(\frac{t^2 - c}{2\sqrt{at} + b}, \frac{\sqrt{at^2 + bt + c\sqrt{a}}}{2\sqrt{at} + b}\right) 2 \frac{\sqrt{at^2 + bt + c\sqrt{a}}}{(2\sqrt{at} + b)^2} dt = \int R^*(t) dt. \end{aligned}$$

情形 2: $c > 0$. 此时考虑

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c} \quad (5.2.23)$$

从而得到 $ax + b = xt^2 + 2\sqrt{c}t$ 且

$$x = \frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{ct^2 - bt + \sqrt{ca}}}{a - t^2}.$$

最后得到

$$\begin{aligned} & \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx \\ &= \int R\left(\frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}, \frac{\sqrt{ct^2 - bt + \sqrt{ca}}}{a - t^2}\right) 2 \frac{\sqrt{ct^2 - bt + \sqrt{ca}}}{(a - t^2)^2} dt = \int R^*(t) dt. \end{aligned}$$

观察到

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{x^2 \left(\frac{c}{x^2} + \frac{b}{x} + a\right)}$$

且

$$R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) = R\left(x, x\sqrt{\frac{c}{x^2} + \frac{b}{x} + a}\right) = R^*(z, \sqrt{cz^2 + bz + a}),$$

其中 $z = 1/x$, 所以情形 1 和情形 2 等价.

情形 3: $ax^2 + bx + c = a(x - \lambda)(x - \mu)$, 其中 $\lambda \neq \mu$ 且 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. 此时考虑

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \lambda), \quad t = \sqrt{a \frac{x - \mu}{x - \lambda}}, \quad dx = \frac{2a(\mu - \lambda)t}{(t^2 - a^2)^2} dt. \quad (5.2.24)$$

一般地不定积分

$$I := \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

可以归结到如下三个不定积分

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx, \\ I_2 &:= \int \frac{dx}{(x - \alpha)^k \sqrt{ax^2 + bx + c}}, \\ I_3 &:= \int \frac{(Ax + B)dx}{(x^2 + px + q)^m \sqrt{ax^2 + bx + c}}. \end{aligned}$$

例5.2.10. 计算不定积分

$$I := \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

解: 作变量替换 $\sqrt{x^2 - x + 1} = t - x$ 得到

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2t^2 - 2t + 2}{t(2t - 1)^2} dt = \int \left[\frac{2}{t} - \frac{3}{2t - 1} + \frac{3}{(2t - 1)^2} \right] dt \\ &= -\frac{3}{2} \frac{1}{2t - 1} + 2 \ln |t| - \frac{3}{2} \ln |2t - 1| + C \\ &= -\frac{3}{2} \frac{1}{2x + 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1} + 2 \ln |x + \sqrt{x^2 - x + 1}| \\ &\quad - \frac{3}{2} \ln |2x + 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1| + C. \quad \square \end{aligned}$$

对不定积分 I_1 只要考虑

$$V_m := \int \frac{x^m}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \int \frac{x^m}{\sqrt{Y}} dx, \quad Y := ax^2 + bx + c. \quad (5.2.25)$$

由于

$$\begin{aligned} (x^{m-1}\sqrt{Y})' &= (m-1)x^{m-2}\sqrt{Y} + \frac{x^{m-1}Y'}{2\sqrt{Y}} \\ &= \frac{2(m-1)x^{m-2}(ax^2 + bx + c) + x^{m-1}(2ax + b)}{2\sqrt{Y}} \\ &= ma \frac{x^m}{\sqrt{Y}} + \left(m - \frac{1}{2}\right) b \frac{x^{m-1}}{\sqrt{Y}} + (m-1)c \frac{x^{m-2}}{\sqrt{Y}}. \end{aligned}$$

所以得到

$$x^{m-1}\sqrt{Y} = maV_m + \left(m - \frac{1}{2}\right) bV_{m-1} + (m-1)cV_{m-2}$$

且

$$V_1 = \frac{1}{a}\sqrt{Y} - \frac{b}{2a}V_0, \quad V_2 = \frac{2a-3b}{4a^2}\sqrt{Y} + \frac{b^2-4ac}{8a^2}V_0.$$

所以

$$V_m = p_{m-1}(x)\sqrt{Y} + \lambda_m V_0, \quad (5.2.26)$$

其中 $\deg p_{m-1} = m - 1$ 且 $\lambda_m \in \mathbb{R}$. 最后一点是如何计算

$$V_0 := \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

显然这个不定积分可归结到

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$$

对不定积分 I_2 作变量替换 $x - \alpha = 1/t$ 得到

$$\int \frac{dx}{(x - \alpha)^k \sqrt{Y}} = \int \frac{t^{k-1} dt}{\sqrt{(a\alpha^2 + b\alpha + c)t^2 + (2a\alpha + b)t + a}}. \quad (5.2.27)$$

这就转化成不定积分 I_1 .

对不定积分 I_3 分两种情形考虑. 情形 1: $a(x^2 + px + c) = ax^2 + bx + c$. 此时

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \frac{a^m (Ax + B)}{(ax^2 + bx + c)^{\frac{2m+1}{2}}} dx = \int \frac{Mx + N}{(ax^2 + bx + c)^{\frac{2m+1}{2}}} dx \\ &= \frac{M}{2a} \int \frac{(2ax + b)dx}{(ax^2 + bx + c)^{\frac{2m+1}{2}}} + \left(N - \frac{Mb}{2a} \right) \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{\frac{2m+1}{2}}} \\ &= \frac{M}{2a} \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^{m-\frac{1}{2}}} \frac{1}{-m + \frac{1}{2}} + \left(N - \frac{Mb}{2a} \right) \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{\frac{2m+1}{2}}}. \end{aligned}$$

所以就归结到求不定积分

$$J := \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{m+\frac{1}{2}}} = \int \frac{dx}{Y^{m+\frac{1}{2}}}. \quad (5.2.28)$$

考虑 Abel 变换:

$$t := (\sqrt{Y})' = \frac{Y'}{2\sqrt{Y}} = \frac{ax + \frac{b}{2}}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad Y = \frac{4ac - b^2}{4(a - t^2)}. \quad (5.2.29)$$

因此得到

$$J = \left(\frac{4}{4ac - b^2} \right)^m \int (a - t^2)^{m-1} dt. \quad (5.2.30)$$

情形 2: 一般得有 $ax^2 + bx + c = a(x^2 + p'x + q')$, 这里 $x^2 + p'x + q' \neq x^2 + px + q$. 此时想法是把线性项去掉. 当 $p \neq p'$ 时考虑变量替换

$$x = \frac{\mu t + \nu}{t + 1}.$$

得到

$$x^2 + px + q = \frac{(\mu^2 + p\mu + q)t^2 + [2\mu\nu + (\mu + \nu) + 2q]t + (\nu^2 + p\nu + q)}{(t + 1)^2}.$$

对 $x^2 + p'x + q'$ 也有类似的表达式, 只要把上述等式中 p, q' 换成 p', q' 即可. 令线性项为零就得到 μ, ν 所要满足的条件

$$2\mu\nu + p(\mu + \nu) + 2q = 0 = 2\mu\nu + p'(\mu + \nu) + 2q'.$$

由此得到

$$\mu + \nu = -2\frac{q - q'}{p - p'}, \quad \mu = \frac{p'q - pq'}{p - p'}$$

而且 μ, ν 是

$$(p - p')u^2 + 2(q - q')u + (p'q - pq') = 0$$

得两个实根. 根据二项式判别法知道

$$\mu \neq \nu \iff (q - q')^2 - (p - p')(p'q - pq') > 0.$$

利用如上选择的 μ, ν 计算得到, 其中 $\deg P = 2m - 1$ 且 $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^m \sqrt{ax^2 + bx + c}} dx &= \int \frac{P(t) dt}{(t^2 + \lambda)^m \sqrt{\alpha t^2 + \beta}} \\ &= \sum_i \int \frac{A_i t + B_i}{(t^2 + \lambda)^{k_i} \sqrt{\alpha t^2 + \beta}} dt \quad (1 \leq k_i \leq m). \end{aligned}$$

对每个不定积分有

$$\int \frac{At + B}{(t^2 + \lambda)^k \sqrt{\alpha t^2 + \beta}} dt = \frac{A}{\alpha} \int \frac{\alpha t dt}{(t^2 + \lambda)^k \sqrt{\alpha t^2 + \beta}} + B \int \frac{dt}{(t^2 + \lambda)^k \sqrt{\alpha t^2 + \beta}}$$

其中对第一个不定积分作变量替换 $u = \sqrt{\alpha t^2 + \beta}$ 和对第二个不定积分作变量替换 $u = \alpha t / \sqrt{\alpha t^2 + \beta}$ 得到

$$\int \frac{At + B}{(t^2 + \lambda)^k \sqrt{\alpha t^2 + \beta}} dt = \int \frac{A\alpha^{k-1} du}{(u^2 + \alpha\lambda - \beta)^k} + \int \frac{B\alpha^k (\alpha - u^2)^{k-1} du}{[(\beta - \alpha\lambda)u^2 + \lambda\alpha^2]^k}.$$

即可以归结到有理函数的不定积分.

当 $p = p'$ 时, 作变量替换 $x = t - \frac{p}{2}$ 得到

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^m \sqrt{a(x^2 + px + q')}} dx = \int \frac{Ax + (B - \frac{Ap}{2})}{(t^2 + q - \frac{p^2}{4})^m \sqrt{at^2 + a(q' - \frac{p^2}{4})}} dt.$$

§5.2.7 * 椭圆积分

椭圆积分最早起源于计算椭圆的周长. **Abel** 把它推广到现在称为的 **Abel** 积分:

$$\int R(x, y) dx, \quad P(x, y) = 0 \tag{5.2.31}$$

其中 $R(x, y)$ 是关于 x, y 的有理函数, 多项式 $P(x, y)$ 满足条件 $P \in \mathbb{Z}[x, y]$ 且 $\deg P \geq 2$. **Abel** 和 **Liouville** 证明了

一般情况下 (5.2.31) 不能同初等函数来表示.

Abel 积分的特殊情形就是椭圆积分

$$\int R\left(x, \sqrt{P(x)}\right) dx, \quad \deg P = 3 \text{ 或 } 4. \quad (5.2.32)$$

如果 $\deg P = 2$ 前面已经讨论过. 多项式次数 ≥ 5 时相应的不定积分称为超椭圆积分

$$\int R\left(x, \sqrt{P(x)}\right) dx, \quad \deg P \geq 5. \quad (5.2.33)$$

对 (5.2.32) 只要考虑 $\deg P = 4$ 的情形:

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}\right) dx. \quad (5.2.34)$$

根据代数学基本定理

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x^2 + px + q)(x^2 + p'x + q'). \quad (5.2.35)$$

情形 1: $p = p'$. 此时

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a \left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} \right] \left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q' - \frac{p^2}{4} \right]. \quad (5.2.36)$$

令

$$x = t - \frac{p}{2} \quad t = x + \frac{p}{2}, \quad (5.2.37)$$

得到

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a \left(t^2 + q - \frac{p^2}{4} \right) \left(t^2 + q' - \frac{p^2}{4} \right)$$

且

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}\right) dx = \int R^*\left(t, \sqrt{a(t^2 + \alpha)(t^2 + \beta)}\right) dt. \quad (5.2.38)$$

情形 2: $p \neq p'$. 此时令

$$x = \frac{\mu t + \nu}{t + 1} \quad \text{或} \quad t = \frac{x - \nu}{\mu - x} \quad (5.2.39)$$

得到

$$x^2 + px + q = \frac{(\mu^2 + p\mu + q)t^2 + [2\mu\nu + p(\mu + \nu) + 2q]t + (\nu^2 + p\nu + q)}{(t + 1)^2}.$$

选择 μ, ν 使得

$$2\mu\nu + p(\mu + \nu) + 2q = 0 = 2\mu\nu + p'(\mu + \nu) + 2q'.$$

进一步有

$$\mu \neq \nu \text{ 且为实的} \iff (q - q')^2 - (p - p')(p'q - pq') > 0.$$

从而得到

$$\begin{aligned} & \int R\left(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}\right) dx \\ &= \int R\left(\frac{\mu t + \nu}{t + 1}, \frac{\sqrt{(M + Nt^2)(M' + N't^2)}}{(t + 1)^2}\right) \frac{\mu - \nu}{(t + 1)^2} dt \\ &= \int \tilde{R}\left(t, \sqrt{A(1 + mt^2)(1 + m't^2)}\right) dt. \end{aligned}$$

令

$$Y := A(1 + mt^2)(1 + m't^2), \quad y := \sqrt{Y}.$$

得到

$$\tilde{R}(t, y) = \frac{P_1(t) + P_2(t)y}{P_3(t) + P_4(t)y} = \tilde{R}_1(t) + \tilde{R}_2(t)y = \tilde{R}_1(t) + \frac{y^2 \tilde{R}_2(t)}{y}.$$

这样就归结到求以下不定积分

$$\int \frac{R^*(t)}{\sqrt{A(1 + mt^2)(1 + m't^2)}} dt. \quad (5.2.40)$$

考虑分解

$$R^*(t) = \frac{R^*(t) + R^*(-t)}{2} + \frac{R^*(t) - R^*(-t)}{2} := R_1^*(t) + R_2^*(t),$$

这里显然成立 $R_1^*(-t) = R_1^*(t)$ 和 $R_2^*(-t) = -R_2^*(t)$. 所以

$$R_1^*(t) = R_1(t^2), \quad R_2^*(t) = tR_2(t^2).$$

因此进一步归结到如下两个不定积分

$$\int \frac{R_1(t^2)dt}{\sqrt{A(1 + mt^2)(1 + m't^2)}} + \int \frac{R_2(t^2)t dt}{\sqrt{A(1 + mt^2)(1 + m't^2)}} \quad (5.2.41)$$

或者, 对第二个不定积分作变量替换 $t^2 = u$ 后, 归结到如下积分

$$\int \frac{R_3(t^2)dt}{\sqrt{A(1 + mt^2)(1 + m't^2)}}, \quad y := \sqrt{A(1 + mt^2)(1 + m't^2)}, \quad (5.2.42)$$

其中不妨假设 $A = \pm 1$ 和 $t > 0$.

(1) 首先我们证明 (5.2.42) 可化简为标准形式

$$\int \frac{R(z^2) dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} \quad (5.2.43)$$

这里 k 是分数且 $0 < k < 1$.

情形 1: $A = +1, m = -h^2, m' = -h^2$ ($h > h' > 0$). 此时 $t < 1/h$ 或 $t > 1/h'$. 令

$$ht = z \quad \left(0 < t < 1 \text{ 或 } z > \frac{h}{h'} \right).$$

则得到

$$\frac{dt}{y} = \frac{dz}{h\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{h'^2}{h^2}z^2\right)}}, \quad \int \frac{R_3(t^2)dt}{\sqrt{y}} = \int \frac{R(z^2)dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

情形 2: $A = +1, m = -h^2, m' = h^2$ ($h, h' > 0$). 此时 $t < 1/h$. 令

$$ht = \sqrt{1-z^2} \quad (0 < z \leq 1).$$

则得到

$$\frac{dt}{y} = \frac{-1}{\sqrt{h^2+h'^2}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{h'^2}{h^2+h'^2}z^2\right)}}.$$

情形 3: $A = +1, m = h^2, m' = h^2$ ($h > h' > 0$). 此时令

$$ht = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \quad (0 \leq z < 1), \quad z = \frac{ht}{\sqrt{1+h^2t^2}}.$$

则得到

$$\frac{dt}{y} = \frac{dz}{h\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{h^2-h'^2}{h^2}z^2\right)}}.$$

情形 4: $A = -1, m = -h^2, m' = h^2$ ($h, h' > 0$). 此时 $t > 1/h$. 令

$$ht = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (0 < z < 1).$$

则得到

$$\frac{dt}{y} = \frac{dz}{\sqrt{h^2+h'^2}\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{h^2}{h^2+h'^2}z^2\right)}}.$$

情形 5: $A = -1, m = -h^2, m' = -h^2$ ($h > h' > 0$). 此时 $1/h < t < 1/h'$. 令

$$h't = \sqrt{1-\frac{h^2-h'^2}{h^2}z^2} \quad (0 < z < 1).$$

则得到

$$\frac{dt}{y} = \frac{-dz}{h\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{h^2-h'^2}{h^2}z^2\right)}}.$$

(2) 第一类、第二类、第三类椭圆积分. 根据上面讨论可知

$$\int \frac{R(z^2)dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = I_n \text{ 和 } H_n \text{ 的线性组合} \quad (5.2.44)$$

这里 $n \in \mathbb{N}$ 和 $m \in \mathbb{N}_+$, 且

$$I_n := \int \frac{z^{2n} dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$H_m := \int \frac{dz}{(z^2-a)^m \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad m \in \mathbb{N}_+, a \in \mathbb{C}.$$

因为

$$\begin{aligned} & \left[z^{2n-3} \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)} \right]' \\ &= (2n-3)z^{2n-4} \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)} + z^{2n-3} \frac{2k^2z^3 - (k^2+1)z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \\ &= \frac{(2n-1)k^2z^{2n} - (2n-2)(k^2+1)z^{2n-2} + (2n-3)z^{2n-4}}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \end{aligned}$$

所以得到递推关系

$$(2n-1)k^2I_n - (2n-2)(k^2+1)I_{n-1} + (2n-3)I_{n-2} = z^{2n-3} \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)} \quad (5.2.45)$$

等价地

$$I_n = \alpha I_0 + \beta_n I_1 + q_{2n-3}(z) \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}, \quad (5.2.46)$$

其中 $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$, $\det q_{2n-3} = 2n-3$, 且

$$I_0 := \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad \text{第一类椭圆积分}, \quad (5.2.47)$$

$$I_1 := \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad \text{第二类椭圆积分}. \quad (5.2.48)$$

对 $z(z^2-a)^{-m+1} \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$ 微分得到

$$\begin{aligned} & (2m-2) \left[-a + (k^2+1)a^2 - k^2a^3 \right] H_m - (2m-3) \left[1 - 2a(k^2+1) + 3k^2a^2 \right] H_{m-1} \\ & + (2m-4) \left[(k^2+1) - 3k^2a \right] H_{m-2} - (2m-5)k^2 H_{m-3} \\ & = \frac{z}{(z^2-a)^{m-1}} \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}. \end{aligned}$$

最终得到结论: H_m 唯一被

$$H_1 := \int \frac{dz}{(z^2-a) \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

$$\sim \int \frac{dz}{(1+hz^2) \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad \text{第三类椭圆积分},$$

$$H_0 := I_0,$$

$$H_{-1} := \int \frac{(z^2-a)dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = I_1 - aI_0$$

所决定, 即

所有的椭圆积分被 I_0, I_1, H_1 所唯一确定.

(3) **Legendre 型椭圆积分.** 对上述三类椭圆积分作变量替换 $z = \sin \varphi$ 得到

$$I_0 = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} := F(k, \varphi), \quad (5.2.49)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{k^2} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{1}{k^2} \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \\ &= \frac{E(k, \varphi) - E(k, \varphi)}{k^2}, \end{aligned} \quad (5.2.50)$$

这里

$$E(k, \varphi) := \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi. \quad (5.2.51)$$

对第三类椭圆积分有

$$H_1 = \int \frac{d\varphi}{(1 + h \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (5.2.52)$$

例5.2.11. (1) 非初等函数:

$$\mathbf{Ei}(x) := \int \frac{e^x}{x} dx, \quad \mathbf{li}(x) := \int \frac{dx}{\ln x},$$

$$\mathbf{Si}(x) := \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \mathbf{Ci}(x) := \int \frac{\cos x}{x} dx,$$

$$\mathbf{Shi}(x) := \int \frac{\sinh x}{x} dx, \quad \mathbf{Chi}(x) := \int \frac{\cosh x}{x} dx,$$

$$\mathbf{S}(x) := \int \sin(x^2) dx, \quad \mathbf{C}(x) = \int \cos(x^2) dx, \quad \mathbf{Fresnel 积分},$$

$$\Phi(x) := \int e^{-x^2} dx, \quad \mathbf{Euler-Poisson 积分}.$$

(2) 计算积分

$$I_n := \int_0^1 \frac{t^n dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \pi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

实际上

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2n} \theta \cdot 2 \sin \theta \cos \theta d\theta}{\sin \theta \cos \theta} = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \theta d\theta.$$

利用分部积分计算得到

$$I_n = -2 \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} \theta d \cos \theta = 2 \int_0^{\pi/2} \cos \theta (2n-1) \sin^{2n-2} \theta \cos \theta d\theta$$

$$= 2(2n-1) \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2\theta) \sin^{2n-2}\theta d\theta = (2n-1)(I_{n-1} - I_n)$$

故

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} I_0 = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \pi.$$

接下来计算

$$F(\lambda) := \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-\lambda t)}}.$$

根据Taylor 公式得到

$$(1-\lambda t)^{-1/2} = \sum_{n \geq 0} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \lambda^n t^n$$

从而推出

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_0^1 \left[\sum_{n \geq 0} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \lambda^n \frac{t^n dt}{\sqrt{t(1-t)}} \right] \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \lambda^n I_n = \sum_{n \geq 0} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \pi \lambda^n \end{aligned}$$

最后一个级数就是所谓的超几何级数. 上述计算过程的第二个等式, 即求积分和求级数可以相互交换需要确认是否成立 (这个在含参变量积分中会给出详细说明). 把 $F(\lambda)$ 重新写成

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \pi \sum_{n \geq 0} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \left(\frac{1}{2} + 2 \right) \cdots \left(\frac{1}{2} + n - 1 \right) \right]^2 \frac{\lambda^n}{(n!)^2} \\ &= \pi \sum_{n \geq 0} \frac{\binom{1/2}{n} \binom{1/2}{n}}{n!} \frac{\lambda^n}{n!}. \end{aligned} \quad (5.2.53)$$

§5.2.8 * 超几何级数

在这一小节我们来简单介绍下超几何级数的定义和性质, 当然假定知道反常积分的定义.

定义5.2.12. Γ 函数定义为

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} t^{-z} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (5.2.54)$$

之后的章节中我们会证明如下关于 $\Gamma(z)$ 的性质:

- (1) $\Gamma(x) \in C^1((0, +\infty))$, $\Gamma(1+n) = n!$, $\Gamma'(1) = \gamma$.
- (2) $\operatorname{Re}(z) > 0 \implies \Gamma(1+z) = z\Gamma(z)$.
- (3) $\Gamma(z)$ 可以解析延拓到 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^-$ 且

$$\lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

(4) $\forall z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}$,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

(5) $\forall z \in \mathbf{C} \setminus \{0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, -2, \dots\}$,

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}2^{1-2z}\Gamma(2z).$$

(6) $(2n-1)!! = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}}\Gamma(n+1/2)$ 故

$$\frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(1/2)} = \binom{1/2}{n}.$$

定义5.2.13. Gauss 引入了如下的超几何级数

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, x) &:= 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)\beta(\beta+1) \cdots (\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+n-1)} \frac{x^n}{n!} \\ &= 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\binom{\alpha}{n} \binom{\beta}{n}}{\binom{\gamma}{n}} \frac{x^n}{n!}. \end{aligned} \quad (5.2.55)$$

注意到函数 F 满足微分方程

$$x(x-1)y'' - [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' + \alpha\beta y = 0. \quad (5.2.56)$$

定义5.2.14. 令

$$(a)_k := \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}, \quad a, k \in \mathbf{C} \quad (5.2.57)$$

并定义(广义)超几何级数如下

$${}_pF_q \left[\begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_p \\ \beta_1, \dots, \beta_q \end{matrix} \middle| x \right] := \sum_{n \geq 0} \frac{(\alpha_1)_n \cdots (\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n \cdots (\beta_q)_n} \frac{x^n}{n!}. \quad (5.2.58)$$

其中

$$p, q \in \mathbf{Z}_{\geq 0}, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q \in \mathbf{C}.$$

当 $p = q + 1$ 时可以证明 ${}_pF_q$ 对任意 α_i, β_j 都收敛, 如果 $|x| < 1$. 并且 ${}_qF_q$ 可解析延拓到 $\mathbf{C} \setminus [1, +\infty)$. 如果 $x = 1$ 此时级数当 $\operatorname{Re}(\alpha_1 + \cdots + \alpha_{q+1}) < \operatorname{Re}(\beta_1 + \cdots + \beta_q)$ 时收敛; 如果 $x = -1$ 此时级数当 $\operatorname{Re}(\alpha_1 + \cdots + \alpha_{q+1}) < \operatorname{Re}(\beta_1 + \cdots + \beta_q) + 1$ 时收敛.

定义5.2.15. 定义 Ψ 函数如下

$$\Psi(z) := -\gamma - \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n \geq 1} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{z+n} \right]. \quad (5.2.59)$$

可以证明如下结论:

$$\begin{aligned}\Psi(z+1) - \Psi(z) &= \frac{1}{z}, \quad \Psi(1-z) - \Psi(z) = \pi \cot(\pi z), \\ \Psi'(z) &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(z+n)^2}, \quad \Psi(z) = \frac{1}{2} \left[\Psi\left(\frac{z}{2}\right) + \Psi\left(\frac{z+1}{2}\right) \right] + \ln 2, \\ \Psi(z) &= \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z),\end{aligned}\tag{5.2.60}$$

Ψ 仅有实根; Ψ 在区间 $(0, +\infty)$ 和每个区间 $(-n-1, -n)$ ($n \in \mathbb{N}$); 仅在区间 $(1, 2)$ 内存在唯一的实根; 在每个区间 $(-n-1, -n)$ 内存在根; $\lim_{x \rightarrow \infty} [\Psi(x) - \ln x] = 0$.

例5.2.16. 定义函数

$$z := {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix} \middle| x \right] = {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| 1 \middle| x \right),\tag{5.2.61}$$

$$y := \pi \frac{{}_2F_1 \left[\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix} \middle| 1-x \right]}{{}_2F_1 \left[\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix} \middle| x \right]} = \pi \frac{{}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| 1 \middle| 1-x \right)}{{}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| 1 \middle| x \right)}.\tag{5.2.62}$$

第一类完备椭圆积分定义为

$$K \equiv K(x) := \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-x \sin^2 \varphi}} = \frac{\pi}{2} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| 1 \middle| x \right) = \frac{\pi}{2} z,\tag{5.2.63}$$

而第二类完备椭圆积分定义为

$$E \equiv E(x) := \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-x \sin^2 \varphi} d\varphi = \pi x(1-x)z' + \frac{\pi z(1-x)}{2}.\tag{5.2.64}$$

其实可以证明

$$K = \frac{\pi}{2} \sum_{n \geq 0} \left[\binom{1/2}{n} \right]^2 \frac{x^n}{(n!)^2}.\tag{5.2.65}$$

例5.2.17. (1) $\operatorname{Re}(2x+n+2) > 0 \implies$

$$\sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n+k} \right) \frac{(-1)^k (-x)_k}{(x+n+1)_k} = \Psi(x+n+1) - \Psi(n+1).$$

(2) $\operatorname{Re}(2x+2y+n+2) > 0 \implies$

$${}_4F_3 \left[\begin{matrix} \frac{n}{2} + 1, n, -x, -y \\ \frac{n}{2}, x+n+1, y+n+1 \end{matrix} \middle| -1 \right] = \frac{\Gamma(x+n+1)\Gamma(y+n+1)}{\Gamma(x+y+n+1)\Gamma(n+1)}.$$

(3) 取 $n = -x = -y = \frac{1}{2}$ 得到

$$\frac{2}{\pi} = 1 - 5 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 9 \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^3 - \cdots = \sum_{n \geq 0} (-1)^n (4n+1) \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^3. \quad (5.2.66)$$

(4) **Ramanujan:**

$$\mu := \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma^2(3/4)} = 1.180340599016096, \quad (5.2.67)$$

$$\nu := \frac{\Gamma^2(3/4)}{\pi^{3/2}} = 0.269676300594190, \quad (5.2.68)$$

$$\begin{aligned} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix} \middle| \frac{1}{2} + \frac{x}{1+x^2} \right] &= \mu \sqrt{1+x^2} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{matrix} \middle| x^4 \right] \\ &\quad + x(1+x^2)^{3/2} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} \end{matrix} \middle| x^4 \right]. \end{aligned} \quad (5.2.69)$$

§5.3 定积分

本节我们引入 Riemann 积分, 其几何意义是函数所围的区域的面积.

§5.3.1 Riemann 积分的定义

积分通俗地讲就是曲线所围区域的面积.

定义 5.3.1. (1) 闭区间 $[a, b]$ 的划分 T 是该区间内的一组有限个点 x_0, x_1, \dots, x_n 满足

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

区间 $[x_{i-1}, x_i], 1 \leq i \leq n$, 统称为 T 的区间. 记

$$\Delta x_i := x_i - x_{i-1}, \quad \|T\| := \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$$

其中把 $\|T\|$ 称为 T 的模.

(2) 闭区间 $[a, b]$ 上的带点划分 (T, ξ) 是由划分 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 和点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], 1 \leq i \leq n$ 所组成. 这里 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

(3) 假设函数 f 定义在闭区间 $[a, b]$ 上且 (T, ξ) 是 $[a, b]$ 上的带点划分, 则有限和

$$\sigma(f; T, \xi) := \sum_{1 \leq i \leq n} f(\xi_i) \Delta x_i \quad (5.3.1)$$

称为函数 f 相对于 $[a, b]$ 上的带点划分 (T, ξ) 的 Riemann 和.

(4) 实数 I 称为闭区间 $[a, b]$ 上函数 f 的 Riemann 积分如果

$$I = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sigma(f; T, \xi) = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{1 \leq i \leq n} f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (5.3.2)$$

也就是说

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall [a, b] \text{ 上的带点划分 } (T, \xi) \text{ 只要 } \|T\| < \delta \text{ 有} \quad (5.3.3)$$

$$\text{不等式 } \left| \sum_{1 \leq i \leq n} f(\xi_i) \Delta x_i - I \right| < \epsilon \text{ 成立.}$$

Riemann 积分通常记作

$$I = \int_a^b f(x) dx, \quad (5.3.4)$$

这里 a 和 b 分别是积分下限和积分上限, x 是积分变量, $f(x)$ 是被积函数. 此时函数 f 称为 $[a, b]$ 上 Riemann 可积的.

(5) 引入 Riemann 可积空间如下

$$R([a, b]) := \{ [a, b] \text{ 上所有 Riemann 可积的函数} \}. \quad (5.3.5)$$

之后我们将会证明包含关系: $C([a, b]) \subsetneq R([a, b])$, 到此为止三个重要的函数空间 $C([a, b])$, $D([a, b])$, $R([a, b])$, 它们之间的关系如下:

$$D([a, b]) \subsetneq C([a, b]) \subsetneq R([a, b]). \quad (5.3.6)$$

注5.3.2. (1) Riemann 积分和积分变量无关, 即

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy = \int_a^b f(t) dt.$$

(2) 为了方便期间引入记号

$$\int_a^a f(x) dx = 0, \quad \int_b^a f(x) dx := - \int_a^b f(x) dx \quad (a < b).$$

例5.3.3. (1) 证明

$$\int_0^1 c dx = c.$$

证: 令函数 $f(x) = c, x \in [0, 1]$. 对任何带点划分 (T, ξ) 都有

$$\sigma(f; T, \xi) = \sum_{1 \leq i \leq n} f(\xi_i) \Delta x_i = c \sum_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i = c(1 - 0) = c. \quad \square$$

(2) 证明

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}, \quad \int_a^b \frac{dx}{x^2} = -\frac{b-a}{ab} \quad (0 < a < b).$$

证: 对任何 $[a, b]$ 上的带点划分 (T, ξ) 有

$$\sigma(f; T, \xi) = \sum_{1 \leq i \leq n} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

$f(x) = x$: 此时

$$\sigma(f; T, \xi) = \sum_{1 \leq i \leq n} \xi_i \Delta x_i.$$

为了便于计算首先选取特殊点 $\tilde{\xi}_i$ 如下

$$\tilde{\xi}_i := \frac{x_{i-1} + x_i}{2}.$$

从而得到

$$\sigma(f; T, \tilde{\xi}) = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{x_{i-1} + x_i}{2} (x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq n} (x_i^2 - x_{i-1}^2) = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

对一般的 ξ 利用

$$\sigma(f; T, \xi) - \sigma(f; T, \tilde{\xi}) = \sum_{1 \leq i \leq n} (\xi_i - \tilde{\xi}_i) \Delta x_i$$

得到

$$|\sigma(f; T, \xi) - \sigma(f; T, \tilde{\xi})| \leq \|T\| \sum_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i = \|T\| (b - a)$$

即可得到相应的积分值

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sigma(f; T, \tilde{\xi}) = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

$f(x) = \frac{1}{x^2}$: 此时

$$\sigma(f; T, \xi) = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\Delta x_i}{\xi_i^2}.$$

为了便于计算首先选取特殊点 $\tilde{\xi}_i$ 如下

$$\tilde{\xi}_i := \sqrt{x_{i-1} x_i}.$$

从而得到

$$\sigma(f; T, \tilde{\xi}) = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i - x_{i-1}}{2} (x_{i-1} x_i) = \sum_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i} \right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

对一般的 ξ 得到

$$\begin{aligned} |\sigma(f; T, \xi) - \sigma(f; T, \tilde{\xi})| &= \left| \sum_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{\xi_i^2} - \frac{1}{\tilde{\xi}_i^2} \right) \Delta x_i \right| \leq \sum_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{\tilde{\xi}_i^2 - \xi_i^2}{\xi_i^2 \tilde{\xi}_i^2} \Delta x_i \right| \\ &\leq \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{|\tilde{\xi}_i^2 - \xi_i^2| \Delta x_i}{a^4} \leq \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{2b}{a^4} |\xi_i - \tilde{\xi}_i| \Delta x_i \leq \frac{2b}{a^4} (b - a) \|T\|. \end{aligned}$$

从而得到相应的积分值

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sigma(f; T, \tilde{\xi}) = \frac{b - a}{ab}. \quad \square$$

(3) 计算积分

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx, \quad a > 0.$$

证: 这个积分是半径为 a 的圆盘位于第一象限内的面积, 所以

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4} \pi a^2 = \frac{\pi a^2}{4}. \quad \square.$$

(4) 计算积分

$$\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)} dx, \quad a < b.$$

证: 利用恒等式得到

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)} dx &= \int_a^b \sqrt{-x^2 - ab + (a+b)x} dx \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \frac{\pi(b-a)^2}{8} \end{aligned}$$

这是因为积分是以 $((a+b)/2, 0)$ 为中心半径为 $(b-a)/2$ 的圆盘位于第一象限内的面积. \square

(5) 根据对称性得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0.$$

(6) Dirichlet 函数 $D(x) \notin R([0, 1])$.

证: 对 $[0, 1]$ 上的任何带点划分 (T, ξ) 有

$$\sigma(D; T, \xi) = \sum_{1 \leq i \leq n} D(\xi_i) \Delta x_i.$$

如果所有 $\xi_i \in \mathbf{Q}$, 则 $D(\xi_i) = 1$ 从而

$$\sigma(D; T, \xi) = \sum_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i = 1 - 0 = 1.$$

如果所有 $\xi_i \notin \mathbf{Q}$, 则 $D(\xi_i) = 0$ 从而

$$\sigma(D; T, \xi) = \sum_{1 \leq i \leq n} 0 = 0.$$

因此 $D(x) \notin R([0, 1])$. \square

§5.3.2 可积的必要条件

首先我们证明闭区间上的可积函数必有界.

定理5.3.4. $f \in R([a, b]) \Rightarrow f$ 在 $[a, b]$ 上有界.

证: 根据假设条件 $f \in R([a, b])$, 得到 $\exists I \in \mathbf{R}, \exists \delta > 0, \forall$ 带点划分 (T, ξ) 都有不等式

$$\left| \sum_{1 \leq i \leq n} f(\xi_i) \Delta x_i - I \right| < 1$$

成立. 如果函数 f 在 $[a, b]$ 上无界, $\exists i_0$ 使得函数 f 在 $[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ 上必无界. 从而 $\exists \xi_{i_0} \in [x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ 使得不等式

$$|f(\xi_{i_0})\Delta x_{i_0}| > 1 + |I| + \left| \sum_{1 \leq i \neq i_0 \leq n} f(\xi_i)\Delta x_i \right|$$

成立. 但是由下面计算

$$\begin{aligned} & 1 + |I| + \left| \sum_{1 \leq i \neq i_0 \leq n} f(\xi_i)\Delta x_i \right| < |f(\xi_{i_0})\Delta x_{i_0}| \\ = & \left| \left[\sum_{1 \leq i \leq n} f(\xi_i)\Delta x_i - I \right] - \sum_{1 \leq i \neq i_0 \neq n} f(\xi_i)\Delta x_i + I \right| \leq 1 + |I| + \left| \sum_{1 \leq i \neq i_0 \leq n} f(\xi_i)\Delta x_i \right| \end{aligned}$$

却推出矛盾! \square

注5.3.5. 函数 f 在 $[a, b]$ 上有界 $\not\Rightarrow f \in R([a, b])$. 反例就是例5.3.3 中的Dirichlet 函数 $f(x) = D(x)$.

§5.3.3 可积的充分条件

给定 $[a, b]$ 上的划分 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. 回忆下记号 $\Delta_i := [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$, $1 \leq i \leq n$.

- (1) 称 $[a, b]$ 上的划分 \tilde{T} 是 T 的**加细** 如果它可以由 T 添加一些新的分点而得到.
- (2) 假设 \tilde{T} 是 T 的加细. 根据定义在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 内有若干个新增加的分点 $x_{i,j}$ ($0 \leq j \leq n_i$):

$$x_{i-1} = x_{i,0} < x_{i,1} < \cdots < x_{i,n_i} = x_i$$

并记 $\Delta_{i,j} := [x_{i,j-1}, x_{i,j}]$ 和 $\Delta x_{i,j} := x_{i,j} - x_{i,j-1}$. 观察到

$$\sum_{0 \leq j \leq n_i} \Delta x_{i,j} = \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

- (3) 给定 $[a, b]$ 上两个划分 T' 和 T'' , 存在 $[a, b]$ 上的划分 \tilde{T} 使得它分别是 T' 和 T'' 的加细,

$$\tilde{T} = T' \cup T'',$$

即取划分 T' 和 T'' 的所有点 (注意: 有可能 T' 和 T'' 部分分点是重合的).

- (4) 定义函数 f 在 Δ_i 上的**振幅**如下:

$$\omega(f; \Delta_i) := \sup_{x', x'' \in \Delta_i} |f(x') - f(x'')|. \quad (5.3.7)$$

定理5.3.6. 如果函数 f 在 $[a, b]$ 上有界且满足下列条件

$$\left(\begin{array}{l} \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall [a, b] \text{ 上的划分 } T \text{ 只要满足 } \|T\| < \delta \text{ 有不等式} \\ \sum_{1 \leq i \leq n} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i < \epsilon \end{array} \right),$$

则 $f \in R([a, b])$.

证: 根据Cauchy 判别法则得到

$$\lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{1 \leq i \leq n} f(\xi_i) \Delta x_i \text{ 存在} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \|T'\| < \delta \text{ 和 } \|T''\| < \delta \text{ 有} \\ |\sigma(f; T', \xi') - \sigma(f; T'', \xi'')| < \epsilon \end{array} \right).$$

(1) 设 T 是 $[a, b]$ 的划分且 \tilde{T} 是 T 的加细, 则得到

$$\begin{aligned} |\sigma(f; \tilde{T}, \tilde{\xi}) - \sigma(f; T, \xi)| &= \left| \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n_i} f(\xi_{i,j}) \Delta x_{i,j} - \sum_{1 \leq i \leq n} f(\xi_i) \Delta x_i \right| \\ &= \left| \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n_i} [f(\xi_{i,j}) - f(\xi_i)] \Delta x_{i,j} \right| \leq \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n_i} |f(\xi_{i,j}) - f(\xi_i)| \Delta x_{i,j} \\ &\leq \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n_i} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_{i,j} = \sum_{1 \leq i \leq n} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i, \end{aligned}$$

这里 $\xi_{i,j} \in \Delta_{i,j}$ 和 $\xi_i \in \Delta_i$.

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ 使得不等式

$$|\sigma(f; \tilde{T}, \tilde{\xi}) - \sigma(f; T, \xi)| < \frac{\epsilon}{2}$$

对 $[a, b]$ 上的任意带点划分 (T, ξ) 和 (T, ξ) 的任意带点加细 $(\tilde{T}, \tilde{\xi})$ 都成立.

(2) 对任意 $[a, b]$ 上的带点划分 (T', ξ') 和 (T'', ξ'') 只要满足条件 $\|T'\| < \delta$ 和 $\|T''\| < \delta$ 根据 (1) 就有

$$|\sigma(f; \tilde{T}, \tilde{\xi}) - \sigma(f; T', \xi')| < \frac{\epsilon}{2}, \quad |\sigma(f; \tilde{T}, \tilde{\xi}) - \sigma(f; T'', \xi'')| < \frac{\epsilon}{2},$$

其中 $\tilde{T} = T' \cup T''$. 所以

$$|\sigma(f; T', \xi') - \sigma(f; T'', \xi'')| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \quad \square$$

推论5.3.7. $C([a, b]) \subsetneq R([a, b])$.

证: 给定连续函数 $f \in C([a, b])$. 则根据Cantor 定理知道函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上一致连续. $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ 使得不等式

$$\omega(f; \Delta) < \frac{\epsilon}{b-a}$$

对任何满足条件 $|\Delta| < \delta$ 的闭子区间 $\Delta \subset [a, b]$ 都成立. 从而对任意划分 T 只要 $\|T\| < \delta$ 就有

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i < \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\epsilon}{b-a} \Delta x_i = \frac{\epsilon}{b-a} (b-a) = \epsilon. \quad \square$$

推论5.3.8. 如果有界函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上除了有限个点外是连续的, 则 $f \in R([a, b])$.

证: 根据有界性得到 $\omega(f; [a, b]) \leq C < +\infty$. 假设函数 f 有 k 个不连续点 $y_1, \dots, y_k \in [a, b]$. 下面我们将证明

$$\left(\begin{array}{l} \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall [a, b] \text{ 的划分 } T \text{ 只要 } \|T\| < \delta \text{ 有} \\ \sum_{1 \leq i \leq n} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i < \epsilon \end{array} \right).$$

上述断言结合定理5.3.6 是可以保证 $f \in R([a, b])$.

对任意给定 $\epsilon > 0$ 取 $\delta_1 := \epsilon/8Ck$. 对函数 f 的每个不连续点 y_j 构造其 δ_1 -领域, 即 $U(y_j, \delta_1) := (y_j - \delta_1, y_j + \delta_1) \cap [a, b]$. 不失一般性不妨假设

$$a < y_1 < \dots < y_k < b$$

且 ϵ 足够小使得 $(y_j - \delta_1, y_j + \delta_1) = U(y_j, \delta_1)$ 且互不相交. 则

$$[a, b] \setminus \bigcup_{1 \leq j \leq k} U(y_j, \delta_1)$$

是 $k+1$ 个互不相交的闭区间 B_1, \dots, B_{k+1} 的并; 在每个这样的闭区间上函数 f 是连续的从而是一致连续的. $\exists \delta_2 > 0$ 使得不等式

$$\omega(f; \Delta) < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

对任何满足条件 $|\Delta| < \delta_2$ 且包含在某个闭区间 $B_j, 1 \leq j \leq k+1$, 的闭子区间 Δ 都成立.

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. 对 $[a, b]$ 上满足条件 $\|T\| < \delta$ 的任何划分 T 都有

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq n} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i &= \sum_{\Delta_i \cap U_j = \emptyset, \forall j} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i + \sum_{\Delta_i \cap U_j \neq \emptyset, \exists j} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i \\ &< \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum_{\Delta_i \cap U_j = \emptyset, \forall j} \Delta x_i + C \sum_{\Delta_i \cap U_j \neq \emptyset, \exists j} \Delta x_i \\ &< \frac{\epsilon}{2(b-a)} (b-a) + C(\delta + 2\delta_1 + \delta)k < \frac{\epsilon}{2} + 4kC \frac{\epsilon}{8kC} = \epsilon. \quad \square \end{aligned}$$

推论5.3.9. 闭区间 $[a, b]$ 上的单调函数 f 一定是可积的.

证: 不失一般性不妨假设 $f(b) \neq f(a)$. 如果函数 f 单调则 $\omega(f; [a, b]) = |f(b) - f(a)| > 0$. $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \epsilon/|f(b) - f(a)| > 0, \forall [a, b]$ 上满足条件 $\|T\| < \delta$ 的任何划分 T 都有

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq n} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i &< \delta \sum_{1 \leq i \leq n} \omega(f; \Delta_i) = \delta \sum_{1 \leq i \leq n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &= \delta |f(b) - f(a)| = \epsilon. \quad \square \end{aligned}$$

注5.3.10. 闭区间上的单调函数可能会有可数多个不连续点. 比如考察函数

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2^{n-1}}, & 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \leq x < 1 - \frac{1}{2^n}, n \geq 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

定义5.3.11. 假设函数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是定义在闭区间 $[a, b]$ 上的有界函数. 记

$$M \equiv M_f := \sup_{[a,b]} f, \quad m \equiv m_f := \inf_{[a,b]} f. \quad (5.3.8)$$

对 $[a, b]$ 上的任意划分 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 引入记号

$$M_i := \sup_{\Delta_i} f, \quad m_i := \inf_{\Delta_i} f, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (5.3.9)$$

这里 $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$.

(1) 函数 f 相对于划分 T 的下 Darboux 和定义为

$$\underline{S}(f; T) := \sum_{1 \leq i \leq n} m_i \Delta x_i. \quad (5.3.10)$$

(2) 函数 f 相对于划分 T 的上 Darboux 和定义为

$$\bar{S}(f; T) := \sum_{1 \leq i \leq n} M_i \Delta x_i. \quad (5.3.11)$$

(3) 观察到如下不等式

$$m(b-a) \leq \underline{S}(f; T) \leq \sigma(f; T, \xi) \leq \bar{S}(f; T) \leq M(b-a). \quad (5.3.12)$$

(4) 断言:

$$\underline{S}(f; T) = \inf_{\xi} \sigma(f; T, \xi), \quad \bar{S}(f; T) = \sup_{\xi} \sigma(f; T, \xi). \quad (5.3.13)$$

证: 根据 (5.3.12) 得到

$$\underline{S}(f; T) \leq \inf_{\xi} \sigma(f; T, \xi), \quad \bar{S}(f; T) \geq \sup_{\xi} \sigma(f; T, \xi).$$

给定 $\epsilon > 0$. $\forall i \in \{1, \dots, n\} \exists \xi_i \in \Delta_i$ 满足

$$M_i < f(\xi_i) + \frac{\epsilon}{b-a}.$$

因此

$$\sum_{1 \leq i \leq n} M_i \Delta x_i < \sum_{1 \leq i \leq n} \left[f(\xi_i) + \frac{\epsilon}{b-a} \right] \Delta x_i = \sum_{1 \leq i \leq n} f(\xi_i) \Delta x_i + \epsilon.$$

即 $\underline{S}(f; T) = \sup_{\xi} \sigma(f; T, \xi)$. \square

(5) 断言: $\forall [a, b]$ 上的划分 T_1 和 T_2 有

$$\underline{S}(f; T_1) \leq \bar{S}(f; T_2). \quad (5.3.14)$$

证: 令 $T := T_1 \cup T_2$. 则 T 是 T_1 和 T_2 的加细. 根据下面要证明的断言(6)得到

$$\underline{S}(f; T_1) \leq \underline{S}(f; T) \leq \bar{S}(f; T) \leq \bar{S}(f; T_2). \quad \square$$

(6) 假设划分 \tilde{T} 是 $[a, b]$ 上的划分 T 的加细, 并记 $\Delta_{i_1}, \dots, \Delta_{i_k}$ 是划分 T 的区间使得它们包含属于划分 \tilde{T} 而不属于划分 T 的点. 则

$$0 \leq \bar{S}(f; T) - \bar{S}(f; \tilde{T}) \leq \omega(f; [a, b]) \sum_{1 \leq j \leq k} \Delta x_{i_j}, \quad (5.3.15)$$

$$0 \leq \underline{S}(f; \tilde{T}) - \underline{S}(f; T) \leq \omega(f; [a, b]) \sum_{1 \leq j \leq k} \Delta x_{i_j}. \quad (5.3.16)$$

证:

$$\bar{S}(f; T) - \bar{S}(f; \tilde{T}) = \sum_{1 \leq j \leq k} \left(M_{i_j} \Delta x_{i_j} - \sum_{1 \leq \ell \leq L_{i_j}} M_{i_j}^{(\ell)} |\Delta_{i_j}^{(\ell)}| \right)$$

这里 $\sum_{1 \leq \ell \leq L_{i_j}} \Delta_{i_j}^{(\ell)} = \Delta_{i_j}$ 是根据 Δ_{i_j} 内 \tilde{T} 的点进行划分而得到的, 而 $M_{i_j}^{(\ell)}$ 是相应区间 $\Delta_{i_j}^{(\ell)}$ 上的上确界. 因此得到

$$\bar{S}(f; T) - \bar{S}(f; \tilde{T}) = \sum_{1 \leq j \leq k} \sum_{1 \leq \ell \leq L_{i_j}} [M_{i_j} - M_{i_j}^{(\ell)}] |\Delta_{i_j}^{(\ell)}| \geq 0.$$

另一方面, 有

$$\bar{S}(f; T) - \bar{S}(f; \tilde{T}) \leq \sum_{1 \leq j \leq k} \sum_{1 \leq \ell \leq L_{i_j}} \omega(f; [a, b]) |\Delta_{i_j}^{(\ell)}| \leq \omega(f; [a, b]) \sum_{1 \leq j \leq k} \Delta x_{i_j}.$$

同理可证第二个不等式. \square

(7) 函数 f 的下 Darboux 积分和上 Darboux 积分分别定义为

$$\underline{I} := \sup_T \underline{S}(f; T), \quad \bar{I} := \inf_T \bar{S}(f; T). \quad (5.3.17)$$

实际上, 在给出定义之前首先要证明 \sup 和 \inf 都存在. 引入偏序关系 \leq 如下:

$$T_1 \leq T_2 \Leftrightarrow T_2 \text{ 是 } T_1 \text{ 的加细.}$$

则根据(6)得到

$$T_1 \leq T_2 \Rightarrow \underline{S}(f; T_1) \leq \underline{S}(f; T_2), \quad \bar{S}(f; T_2) \leq \bar{S}(f; T_1).$$

从(5)和Zorn引理得到 $\underline{S}(f; T)$ 相对于偏序 \leq 是递增有上界而 $\bar{S}(f; T)$ 相对于偏序 \leq 是递减有下界, 从而 \underline{I} 和 \bar{I} 都存在且满足 $\underline{I} \leq \bar{I}$.

(8) (Darboux 定理)

$$\underline{I} = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \underline{S}(f; T), \quad \bar{I} = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \bar{S}(f; T). \quad (5.3.18)$$

证: $\forall \epsilon > 0 \exists$ 划分 T_1 满足 $\bar{S}(f; T_1) < \bar{I} + \frac{\epsilon}{2}$. \forall 划分 $T, \tilde{T} := T \cup T_1$ 是 T 的加细. 在 (6) 中的记号得到

$$\bar{S}(f; T) - (M - m)k\|T\| \leq \bar{S}(f; \tilde{T}) \leq \bar{S}(f; T_1).$$

当 $\|T\| < \delta := \epsilon / [2(M - m + 1)k]$ (这里 k 依赖于 T_1) 时, 我们得到

$$\begin{aligned} \bar{I} &\leq \bar{S}(f; T) \leq \bar{S}(f; T_1) + (M - m)k\|T\| \\ &< \bar{S}(f; T_1) + \frac{M - m}{2(M - m + 1)}\epsilon < \bar{S}(f; T_1) + \frac{\epsilon}{2} < \bar{I} + \epsilon. \end{aligned}$$

因此 $\lim_{\|T\| \rightarrow 0} \bar{S}(f; T) = \bar{I}$. \square

(9) 有界函数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $[a, b]$ 上可积 $\Leftrightarrow \underline{I}$ 和 \bar{I} 都存在且 $\underline{I} = \bar{I}$. 此时有

$$\underline{I} = \bar{I} = I = \int_a^b f(x) dx.$$

证: $\Rightarrow: f \in R([a, b])$ 推出 $\lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sigma(f; T, \xi) = I$. 根据

$$\underline{S}(f; T) \leq \sigma(f; T, \xi) \leq \bar{S}(f; T)$$

和 (8) 得到不等式 $\underline{I} \leq I \leq \bar{I}$. 另一方面 $\forall \epsilon > 0$, 由 (4), $\exists T_1, T_2$ 使得

$$\sigma(f; T_1, \xi) \leq \underline{S}(f; T_1) + \epsilon, \quad \bar{S}(f; T_2) \leq \sigma(f; T_2, \xi) + \epsilon$$

成立. 根据 (5) 得到

$$\sigma(f; T_1, \xi) \leq \underline{S}(f; T_1) + \epsilon \leq \bar{S}(f; T_2) + \epsilon \leq \sigma(f; T_2, \xi) + 3\epsilon.$$

从而得到 $I \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq I$.

\Leftarrow : 反之从 $\underline{S}(f; T) \leq \sigma(f; T, \xi) \leq \bar{S}(f; T)$ 得到 $\underline{I} = I = \bar{I}$. \square

(10) $f \in R([a, b]) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists$ 划分 T 满足 $\bar{S}(f; T) - \underline{S}(f; T) < \epsilon$.

证: $f \in R([a, b]) \Leftrightarrow \underline{I} = \bar{I}$. \square

(11) $f \in R([a, b]) \Leftrightarrow \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{1 \leq i \leq n} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i = 0$.

证: \Leftarrow : 定理 5.3.6.

\Rightarrow : 因为 $\omega(f; \Delta_i) = M_i - m_i$ 所以

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i = \bar{S}(f; T) - \underline{S}(f; T).$$

根据 (9) 或 (10), 若 $f \in R([a, b])$, 则 $\lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{1 \leq i \leq n} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i = 0$. \square

定理5.3.12. ($R([a, b])$ 是向量空间) $f, g \in R([a, b]) \Rightarrow$

- (1) $f + g \in R([a, b])$.
- (2) $\alpha f \in R([a, b]), \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
- (3) $|f| \in R([a, b])$.
- (4) $f|_{[c, d]} \in R([c, d]), \forall [c, d] \subseteq [a, b]$.
- (5) $fg \in R([a, b])$.

证: (1) 根据定义

$$\begin{aligned} \int_a^b (f+g)(x) dx &= \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{1 \leq i \leq n} (f+g)(\xi_i) \Delta x_i \\ &= \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{1 \leq i \leq n} [f(\xi_i) + g(\xi_i)] \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

(2) 根据定义

$$\begin{aligned} \int_a^b (\alpha f)(x) dx &= \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{1 \leq i \leq n} (\alpha f)(\xi_i) \Delta x_i \\ &= \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha f(\xi_i) \Delta x_i = \alpha \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

(3) 根据定义

$$\int_a^b |f|(x) dx = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{1 \leq i \leq n} |f|(\xi_i) \Delta x_i.$$

由于

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \omega(|f|; \Delta_i) \Delta x_i \leq \sum_{1 \leq i \leq n} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i,$$

利用定理 5.3.6 得到 $|f| \in R([a, b])$.

(4) 因为 $[c, d]$ 上任何划分 \hat{T} 都可以延拓成 $[a, b]$ 上的划分 T , 所以 $\|T\| \leq \|\hat{T}\|$. 从而得到

$$\sum_{\hat{T}} \omega(f|_{[c, d]}; \Delta_i) \Delta x_i \leq \sum_T \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i$$

其中左边是对 \hat{T} 的区间求和, 而右边是对 T 的区间求和. 因此 $f \in R([a, b])$ 推出 $f|_{[c, d]} \in R([c, d])$.

(5) 对任何 $f, g \in R([a, b])$ 有

$$fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2].$$

根据 (1) 和 (2) 只要证明

$$f \in R([a, b]) \Rightarrow f^2 \in R([a, b]).$$

因为 $f \in R([a, b])$, 所以 $|f| \leq C$ 从而得到

$$|f^2(x_1) - f^2(x_2)| = |[f(x_1) + f(x_2)][f(x_1) - f(x_2)]| \leq 2C|f(x_1) - f(x_2)|$$

和

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \omega(f^2; \Delta_i) \Delta x_i \leq 2C \sum_{1 \leq i \leq n} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i$$

因此 $f^2 \in R([a, b])$. \square

§5.3.4 * Lebesgue 判别法则: 可积的充要条件

定义5.3.13. 集合 $E \subset \mathbb{R}$ 称为测度为零的或零测集(在Lebesgue意义下) 如果 $\forall \epsilon > 0 \exists$ 可数个开区间 $(I_k)_{k \geq 1}$ 使得

$$E \subseteq \bigcup_{k \geq 1} I_k \quad \text{和} \quad \sum_{k \geq 1} |I_k| < \epsilon$$

成立.

注5.3.14. (a) 单点集和有限集都是零测集.

(b) 有限个或可数多个零测集的并也是零测集.

(c) 零测集的子集自身也是零测集.

证: (a) $\forall x \in \mathbb{R}$, 取 $I_k = (x - \epsilon/2^k, x + \epsilon/2^k)$ 得到 $\sum_{k \geq 1} |I_k| = 2\epsilon$.

(b) 假设 $E = \cup_{n \geq 1} E_n$, 其中 E_n 是零测集. $\forall \epsilon > 0 \exists (I_{n,k})_{k \geq 1}$ 满足

$$E_n \subseteq \bigcup_{k \geq 1} I_{n,k} \quad \sum_{k \geq 1} |I_{n,k}| \leq \frac{\epsilon}{2^n}.$$

因此

$$E \subseteq \bigcup_{n,k \geq 1} I_{n,k} \quad \sum_{n,k \geq 1} |I_{n,k}| = \sum_{n \geq 1} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon.$$

(c) 显然. \square

(d) \mathbb{Q} 是零测集.

定义5.3.15. 如果性质/条件/结论对集合 X 中的点, 可能除了一个零测集外, 都成立, 称该性质/条件/结论在 X 上几乎处处成立或对 X 的几乎每个点都成立.

定理5.3.16. (Lebesgue) $f \in R([a, b]) \Leftrightarrow f$ 在 $[a, b]$ 上有界且几乎处处连续.

例5.3.17. (1) 对 $[0, 1]$ 上的Riemann 函数

$$R(x) := \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} ((p, q) = 1), \\ 1, & x = 0, 1, \\ 0, & x \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

有 $R \in R([0, 1])$ 和

$$\int_0^1 R(x) dx = 0.$$

证: $\{R \text{ 的不连续点}\} = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. 根据定理 5.3.16, 得到 R 是可积的. 进一步

$$\int_0^1 R(x) dx = \sup_T \underline{S}(R; T) = \sup_T \left(\sum_{1 \leq i \leq n} \inf_{\xi_i} R(\xi_i) \Delta x_i \right) = \sup_T \sum_{1 \leq i \leq n} 0 \Delta x_i = 0.$$

(2) $f \in C([a, b])$, $\varphi \in R([\alpha, \beta])$, $a \leq \varphi(t) \leq b$, $\forall t \in [\alpha, \beta] \Rightarrow f \circ \varphi \in R([\alpha, \beta])$.

证: 因为 f 有界所以 $f \circ \varphi$ 也有界. 令

$$\begin{aligned} D_\varphi &:= \{t \in [\alpha, \beta] : \varphi \text{ 不连续}\}, \\ D_{f \circ \varphi} &:= \{t \in [\alpha, \beta] : f \circ \varphi \text{ 不连续}\}. \end{aligned}$$

因为 φ 在 t 连续得到 $f \circ \varphi$ 在 t 连续, 从而 $D_{f \circ \varphi} \subseteq D_\varphi$. 根据注 5.3.14, $D_{f \circ \varphi}$ 是零测集. \square

(3) $f \in R([a, b])$, $\varphi \in R([\alpha, \beta])$, $a \leq \varphi(t) \leq b$, $\forall t \in [\alpha, \beta] \not\Rightarrow f \circ \varphi \in R([\alpha, \beta])$.

反例: $f(x) = \text{sgn}(x)$, $\varphi(t) = R(t)$, $0 \leq t \leq 1$.

$$f \circ \varphi(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & t \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases} = D(t)|_{[0, 1]}. \quad \square$$

(4) $f \in R([a, b])$, $\varphi \in C([\alpha, \beta])$, $a \leq \varphi(t) \leq b$, $\forall t \in [\alpha, \beta] \not\Rightarrow f \circ \varphi \in R([\alpha, \beta])$.

反例: 记 C 为Cantor 集, 则 $[0, 1] \setminus C = \cup_{n \geq 1} (a_n, b_n)$. 考察函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x \leq 1, \end{cases} \quad \varphi(t) = \begin{cases} 0, & t \in C, \\ \frac{b_n - a_n}{2} - |t - \frac{b_n + a_n}{2}|, & a_n < t < b_n. \end{cases}$$

则

$$f \circ \varphi(t) = \begin{cases} 0, & t \in C, \\ 1, & t \in [0, 1] \setminus C. \end{cases} \quad \square$$

定理5.3.18. (充要条件) 假设函数 f 在 $[a, b]$ 上有界, 则下面断言等价:

(1) $f \in R([a, b])$,

(2) $\underline{I} = \bar{I}$,

(3) $\forall \epsilon > 0 \exists [a, b]$ 上的划分 T 满足

$$\bar{S}(f; T) - \underline{S}(f; T) < \epsilon,$$

(4) $\lim_{\|T\| \rightarrow 0} [\bar{S}(f; T) - \underline{S}(f; T)] = 0$,

(5) $\exists [a, b]$ 上的一组划分 $(T_m)_{m \geq 1}$ 满足

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [\bar{S}(f; T_m) - \underline{S}(f; T_m)] = 0,$$

(6) f 在 $[a, b]$ 上几乎处处连续,

(7) $\forall \epsilon > 0 \forall \eta > 0 \exists [a, b]$ 上的划分 T 满足

$$\sum_{\omega(f; \Delta_i) \geq \epsilon} \Delta x_i < \eta,$$

(8) **(du Bois-Reymond)** $\forall \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \forall E \subset [a, b]$ 满足条件 $\omega(f; E) \geq \epsilon$, $\exists I_1, \dots, I_n$ 使得 $E \subset \cup_{1 \leq k \leq n} I_k$ 和 $\sum_{1 \leq k \leq n} |I_k| < \delta$ 成立.

证: 只需证明 (1) \Leftrightarrow (7). 由于 (1) \Leftrightarrow (3), 所以只要验证 (3) \Leftrightarrow (7).

(3) \Rightarrow (7): $\forall \epsilon > 0 \forall \eta > 0 \exists [a, b]$ 上的划分 T 满足

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i < \epsilon \eta.$$

因此

$$\epsilon \sum_{\omega(f; \Delta_i) \geq \epsilon} \Delta x_i \leq \sum_{\omega(f; \Delta_i) \geq \epsilon} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i < \sum_{1 \leq i \leq n} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i < \epsilon \eta.$$

即

$$\sum_{\omega(f; \Delta_i) \geq \epsilon} \Delta x_i < \eta$$

成立.

(7) \Rightarrow (3): $\forall \epsilon > 0$, 取 $\epsilon' = \epsilon/2(b-a) > 0$ 和 $\eta' = \epsilon/2(M-m+1) > 0$. $\exists [a, b]$ 上的划分 T 满足

$$\sum_{\omega(f; \Delta_i) \geq \epsilon'} \Delta x_i < \eta'.$$

从而

$$\begin{aligned} \bar{S}(f; T) - \underline{S}(f; T) &= \sum_{1 \leq i \leq n} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i \\ &= \sum_{\omega(f; \Delta_i) \geq \epsilon'} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i + \sum_{\omega(f; \Delta_i) < \epsilon'} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i \\ &\leq (M-m)\eta' + (b-a)\epsilon' < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \quad \square \end{aligned}$$

例5.3.19. (1) 假设 $f \in R([0,1])$ 且

$$\int_0^1 f(x) dx = I > 0.$$

证明 \exists 闭子区间 $[\alpha, \beta] \subseteq [0,1]$ 使得对任何点 $x \in [\alpha, \beta]$ 都有 $f(x) > \frac{1}{2}I$.

证: 否则的话, 对任何闭子区间 $[\alpha, \beta] \subseteq [0,1]$ 存在点 $\zeta \in [\alpha, \beta]$ 使得 $f(\zeta) \leq \frac{1}{2}I$ 成立. 则

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{1 \leq i \leq n} f(\zeta_i) \Delta x_i \leq \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{2} I \Delta x_i = \frac{1}{2} I. \quad \square$$

(2) 假设 $f \in R([0,1])$ $f \geq 0$, 且

$$\int_0^1 f(x) dx = 0.$$

证明 $\forall \epsilon > 0 \exists [\alpha, \beta] \subseteq [0,1]$ 使得对任何点 $x \in [\alpha, \beta]$ 都有 $f(x) < \epsilon$.

证: 否则的话, $\exists \epsilon_0 > 0 \forall [\alpha, \beta] \subseteq [0,1] \exists \zeta \in [\alpha, \beta]$ 满足 $f(\zeta) \geq \epsilon_0$. 则得到

$$0 = \int_0^1 f(x) dx = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{1 \leq i \leq n} f(\zeta_i) \Delta x_i \geq \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{1 \leq i \leq n} \epsilon_0 \Delta x_i = \epsilon_0 > 0. \quad \square$$

(3) $f \in R([a, b])$ 且 $|f| \geq C > 0 \Rightarrow \frac{1}{f} \in R([a, b])$.

§5.4 定积分的基本性质

这节主要来证明积分中值定理和微积分基本定理, 最后一个定理的直接推论就是众所周知的 **Newton-Leibniz 公式**. 另一方面, **Newton-Leibniz 公式** 可以看成高维版本的 **Stokes 公式** 的一维表现. 具体细节要在微分流形课上给出.

§5.4.1 基本性质

定理5.4.1. (被积函数线性) $f, g \in R([a, b]), \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g \in R([a, b])$ 且

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx. \quad (5.4.1)$$

定理5.4.2. (积分区间可加性) $f \in R([a, b]),$ 任意 $c \in [a, b] \Rightarrow f|_{[a,c]} \in R([a, c]),$ $f|_{[c,b]} \in R([c, b]),$ 且

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (5.4.2)$$

证: 结论 $f|_{[a,c]} \in R([a,c])$ 和 $f|_{[c,b]} \in R([c,b])$ 已证明. 令 $M = \sup_{[a,b]} f$ 和 $m = \inf_{[a,b]} f$. $\forall \epsilon > 0 \exists \delta_k > 0 \forall$ 划分 T_k 满足 $\|T_k\| < \delta_k, 1 \leq k \leq 2$, 有

$$\left| \sum_{T_k} f(\xi_i) \Delta x_i - I_k \right| < \epsilon,$$

这里

$$I_1 = \int_a^c f(x) dx, \quad I_2 = \int_c^b f(x) dx.$$

给定 $[a,b]$ 上任意划分 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 且满足条件 $\|T\| < \delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \epsilon/(M-m)\}$. 如果 $c = x_i$, 则 $T = T_1 \cup T_2$, 这里

$$T_1: a = x_0 < \cdots < x_i = c, \quad T_2: c = x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b.$$

因此

$$\sum_T f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{T_1} f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{T_2} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

如果 $c \in (x_{i-1}, x_i)$, 则

$$\sum_T f(\xi_j) \Delta x_j = \sum_{j < i} f(\xi_j) \Delta x_j + \sum_{j > i} f(\xi_j) \Delta x_j + f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

不失一般性不妨假设 $x_{i-1} < \xi_i \leq c < x_i$. 此时

$$\begin{aligned} \sum_T f(\xi_j) \Delta x_j &= \sum_{j < i} f(\xi_j) \Delta x_j + f(\xi_i)(c - x_{i-1}) + \sum_{j > i} f(\xi_j) \Delta x_j + f(c)(x_i - c) \\ &\quad + [f(\xi_i) - f(c)](x_i - c) \\ &:= \sum_{T_1} f(\xi_j) \Delta x_j + \sum_{T_2} f(\xi_j) \Delta x_j + [f(\xi_i) - f(c)](x_i - c). \end{aligned}$$

综上所述, 我们总有

$$\left| \sum_T f(\xi_i) \Delta x_i - (I_1 + I_2) \right| \leq 2\epsilon + (M - m)\|T\| < 3\epsilon. \quad \square$$

定理5.4.3. (单调性) $f, g \in R([a,b])$ 且在 $[a,b]$ 上满足不等式 $f \leq g \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx. \quad (5.4.3)$$

特别地

$$0 \leq g \in R([a,b]) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0. \quad (5.4.4)$$

证: 根据假设条件得到

$$\sum_{1 \leq i \leq n} f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{1 \leq i \leq n} g(\xi_i) \Delta x_i. \quad \square$$

定理5.4.4. $f \in R([a, b]) \Rightarrow |f| \in R([a, b])$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (5.4.5)$$

证: 根据基本初等不等式得到

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \omega(|f|; \Delta_i) \Delta x_i \leq \sum_{1 \leq i \leq n} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i.$$

故 $|f| \in R([a, b])$. 进一步

$$\left| \sum_{1 \leq i \leq n} f(\xi_i) \Delta x_i \right| \leq \sum_{1 \leq i \leq n} |f(\xi_i)| \Delta x_i. \quad \square$$

§5.4.2 积分中值定理

和微分中值定理对应的是积分中值定理.

定理5.4.5. (积分第一中值定理) 假设 $f \in R([a, b])$, $m = \inf_{[a, b]} f$, $M = \sup_{[a, b]} f$
 $\Rightarrow \exists \mu \in [m, M]$

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a). \quad (5.4.6)$$

特别地

$$f \in C([a, b]) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a), \quad \exists \xi \in [a, b]. \quad (5.4.7)$$

证: 根据题意得到

$$m \leq f \leq M \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a),$$

所以

$$m \leq \mu := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

如果 $f \in C([a, b])$, 则 $f \in R([a, b])$ 且根据连续函数的介值定理 $\exists \xi \in [a, b]$ 满足 $\mu = f(\xi)$. \square

定理5.4.6. (广义积分第一中值定理) 假设 $f, g \in R([a, b])$, $m = \inf_{[a, b]} f$, $M = \sup_{[a, b]} f$, 在 $[a, b]$ 上恒有 $g \geq 0$ 或者恒有 $g \leq 0 \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx, \quad \exists \mu \in [m, M]. \quad (5.4.8)$$

特别地如果 $f \in C([a, b])$ 则

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx, \quad \exists \xi \in [a, b]. \quad (5.4.9)$$

证: 不失一般性不妨假设在 $[a, b]$ 上恒有 $g \geq 0$. 如果 $\int_a^b g(x)dx \neq 0$, 从不等式

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

得到

$$m \leq \mu := \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M.$$

如果 $\int_a^b g(x)dx = 0$, 则显然有 $\int_a^b f(x)dx = 0$. \square

给定两组有限数列 a_1, \dots, a_n 和 b_1, \dots, b_n 引入如下的 **Abel 变换**:

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq n} a_i b_i &= \sum_{1 \leq i \leq n} (A_i - A_{i-1}) b_i = \sum_{1 \leq i \leq n} A_i b_i - \sum_{0 \leq i \leq n-1} A_i b_{i+1} \\ &= A_n b_n - A_0 b_1 + \sum_{1 \leq i \leq n-1} A_i (b_i - b_{i+1}) = \sum_{1 \leq i \leq n-1} A_i (b_i - b_{i+1}) + A_n b_n, \end{aligned}$$

这里 $A_k := \sum_{1 \leq i \leq k} a_i$ 且 $A_0 := 0$. 当

$m \leq A_k \leq M$ ($1 \leq k \leq n$), $b_i \geq 0$ ($1 \leq i \leq n$) 且 $b_i \geq b_{i+1}$ ($1 \leq i \leq n-1$),

此时必有不等式

$$mb_1 \leq \sum_{1 \leq i \leq n} a_i b_i \leq Mb_1. \quad (5.4.10)$$

引理5.4.7. $f \in R([a, b]) \Rightarrow \forall x \in [a, b]$, 有

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt \in C([a, b]). \quad (5.4.11)$$

证: 首先得到 $|f| \in R([a, b])$. $\forall x \in [a, b]$, 有 $f|_{[a, x]} \in R([a, x])$. $\forall x, x+h \in [a, b]$ 得到

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_x^{x+h} f(t)dt \right| \leq \left| \int_x^{x+h} |f(t)|dt \right| \leq M|h|,$$

这里 $M = \sup_{[a, b]} |f|$. 故函数 F 连续. \square

定理5.4.8. (积分第二中值定理) 假设 $f, g \in R([a, b])$ 且 $g \geq 0$.

(1) g 单调递减 $\Rightarrow \exists \xi \in [a, b]$ 满足

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^\xi f(x)dx. \quad (5.4.12)$$

(2) g 单调递增 $\Rightarrow \exists \eta \in [a, b]$ 满足

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b) \int_\eta^b f(x)dx. \quad (5.4.13)$$

证: (1) 任取 $[a, b]$ 的划分 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. 根据定理5.4.2 得到

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx &= \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)dx \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx + \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [g(x) - g(x_{i-1})]f(x)dx. \end{aligned}$$

由于 $f \in R([a, b])$ 则存在某个正常数 C 满足 $\sup_{[a, b]} |f| \leq C$ 从而得到

$$\begin{aligned} \left| \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [g(x) - g(x_{i-1})]f(x)dx \right| &\leq \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x) - g(x_{i-1})||f(x)|dx \\ &\leq C \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x) - g(x_{i-1})|dx \leq C \sum_{1 \leq i \leq n} \omega(g; \Delta_i) \Delta x_i. \end{aligned}$$

但是 $g \in R([a, b])$ 所以必有

$$\lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{1 \leq i \leq n} \omega(g; \Delta_i) \Delta x_i = 0,$$

从而导致

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{1 \leq i \leq n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx.$$

引入函数

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt.$$

根据引理 5.4.7, 可知 $F \in C([a, b])$ 且 $F(a) = 0$. 定义

$$m_F := \min_{[a, b]} F \quad M_F := \max_{[a, b]} F.$$

利用 Abel 变换得到

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx &= \sum_{1 \leq i \leq n} g(x_{i-1}) [F(x_i) - F(x_{i-1})] \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n-1} A_i (b_i - b_{i+1}) + A_n b_n \end{aligned}$$

这里

$$a_i := F(x_i) - F(x_{i-1}), \quad b_i := g(x_{i-1}) \geq 0, \quad A_k := \sum_{1 \leq i \leq k} a_i = F(x_k).$$

故得到

$$m_F g(a) \leq \sum_{1 \leq i \leq n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \leq M_F g(a)$$

和

$$m_F g(a) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M_F g(a).$$

如果 $g(a) = 0$, 则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

如果 $g(a) > 0$, 则

$$m_F \leq \frac{1}{g(a)} \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M_F.$$

根据 F 的连续性, $\exists \zeta \in [a, b]$ 满足

$$\frac{1}{g(a)} \int_a^b f(x)g(x)dx = F(\zeta) = \int_a^\zeta f(x)dx.$$

(2) 若 $g \geq 0$ 且递增, 和 (1) 类似地, 可得到

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx &= \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)f(x)dx \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} g(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx + \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [g(x) - g(x_i)]f(x)dx. \end{aligned}$$

则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{1 \leq i \leq n} g(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx.$$

令

$$\tilde{F}(x) := \int_x^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt - F(x).$$

从而 $\tilde{F} \in C([a, b])$ 且 $\tilde{F}(b) = 0$. 定义

$$m_{\tilde{F}} := \min_{[a, b]} \tilde{F}, \quad M_{\tilde{F}} := \max_{[a, b]} \tilde{F}.$$

得到

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq n} g(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx &= \sum_{1 \leq i \leq n} g(x_i) [\tilde{F}(x_{i-1}) - \tilde{F}(x_i)] \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n-1} A_i [b_{i+1} - b_i] + A_0 b_1 \end{aligned}$$

其中

$$a_i := \tilde{F}(x_{i-1}) - \tilde{F}(x_i), \quad b_i := g(x_i) \geq 0, \quad A_k := \sum_{k+1 \leq i \leq n} a_i - \tilde{F}(x_k).$$

因此

$$m_{\tilde{F}} b_n \leq \sum_{1 \leq i \leq n} g(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \leq M_{\tilde{F}} b_n$$

和

$$m_{\tilde{F}} g(b) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M_{\tilde{F}} g(b).$$

如果 $g(b) = 0$, 则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

如果 $g(b) > 0$, 则

$$m_{\bar{F}} \leq \frac{1}{g(b)} \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M_{\bar{F}}.$$

从而 $\exists \eta \in [a, b]$ 满足

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b) \int_{\eta}^b f(x)dx. \quad \square$$

定理5.4.9. (广义积分第二中值定理) $f, g \in R([a, b])$ 且 g 在 $[a, b]$ 上单调

$\Rightarrow \exists \xi \in [a, b]$ 满足

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x)dx + g(b) \int_{\xi}^b f(x)dx. \quad (5.4.14)$$

证: (1) 假设 g 在 $[a, b]$ 上递增. 令 $G(x) := g(b) - g(x)$. 则在 $[a, b]$ 上 $G \geq 0$, 递减且可积. 根据定理 5.4.8, $\exists \xi \in [a, b]$ 满足

$$\int_a^b G(x)f(x)dx = G(a) \int_a^{\xi} f(x)dx.$$

另一方面

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)G(x)dx &= g(b) \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx, \\ G(a) \int_a^{\xi} f(x)dx &= g(b) \int_a^{\xi} f(x)dx - g(a) \int_a^{\xi} f(x)dx, \end{aligned}$$

从而得到 (5.4.14).

(2) 如果 g 在 $[a, b]$ 上递减, 考虑函数 $\tilde{G}(x) := g(x) - g(b)$. \square

例5.4.10. (1) 任意 $\beta \geq 0$ 和 $b > a > 0$ 证明

$$\left| \int_a^b e^{-\beta x} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \frac{2}{a}.$$

证: 根据定理 5.4.8 得到

$$\int_a^b e^{-\beta x} \frac{\sin x}{x} dx = \int_a^b \frac{e^{-\beta x}}{x} \sin x dx = \frac{e^{-a\beta}}{a} \int_a^{\xi} \sin x dx.$$

因此

$$\left| \int_a^b e^{-\beta x} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \frac{2}{ae^{\beta a}} \leq \frac{2}{a}. \quad \square$$

(2) $f \in R([a, b]) \Rightarrow \exists \xi \in [a, b]$ 满足

$$\int_a^{\xi} f(x)dx = \int_{\xi}^b f(x)dx.$$

证: 定义函数

$$g(x) := \begin{cases} -1, & x = a, \\ 0, & a < x < b, \\ 1, & x = b. \end{cases}$$

因为 g 的不连续点集是 $\{a, b\}$ 且 g 单调递增, 所以 $g \in R([a, b])$. 根据定理 5.4.9, $\exists \xi \in [a, b]$ 满足

$$0 = \int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x)dx + g(b) \int_{\xi}^b f(x)dx. \quad \square$$

(3) 假设 $f \in C([a, b])$ 且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b xf(x)dx = 0.$$

证明存在 $x_1, x_2 \in (a, b)$ 使得 $f(x_1) = f(x_2) = 0$ 成立.

证: 因为函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的积分为 0, 故存在 $x_0 \in (a, b)$ 使得 $f(x_0) = 0$ 成立. 否则的话, 在整个区间上 $f > 0$ 或者 $f < 0$. 利用函数的连续性得到 $f \geq \min_{[a, b]} f > 0$ 或者 $f \leq \max_{[a, b]} f < 0$ 从而 $[a, b]$ 上 $f(x)$ 的积分 < 0 或者 > 0 , 矛盾. 假设 $f(x)$ 只有一个零点 $x_0 \in (a, b)$. 根据函数连续性和积分为零, 不妨假设 $f(x)$ 在区间 $[a, x_0]$ 上非负而在 $[x_0, b]$ 上非正. 根据前面所证必有

$$\int_a^{x_0} f(x)dx = - \int_{x_0}^b f(x)dx \neq 0.$$

根据定理 5.4.6 得到

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b xf(x)dx = \int_a^{x_0} xf(x)dx + \int_{x_0}^b xf(x)dx \\ &= \xi_1 \int_a^{x_0} f(x)dx + \xi_2 \int_{x_0}^b f(x)dx \quad (\exists a \leq \xi_1 \leq x_0 \leq \xi_2 \leq b) \\ &= (\xi_1 - \xi_2) \int_a^{x_0} f(x)dx \neq 0. \end{aligned}$$

这是因为 $\xi_1 \neq x_0$ 且 $\xi_2 \neq x_0$. 因为函数 $(x_0 - x)f(x)$, $x \in [a, x_0]$, 是非负且不恒为零, 所以

$$0 < \int_a^{x_0} (x_0 - x)f(x)dx = x_0 \int_a^{x_0} f(x)dx - \int_a^{x_0} xf(x)dx.$$

所以 $\xi_1 \neq x_0$. 同理可证 $\xi_2 \neq x_0$. \square

(4) 若 $a > 0$ 且 $f \in C^1([0, a]) \Rightarrow$

$$|f(0)| \leq \frac{1}{a} \int_0^a |f(x)|dx + \int_0^a |f'(x)|dx.$$

证: 根据定理 5.4.5 得到

$$\int_0^a f(x)dx = f(\zeta)a \quad (\exists 0 \leq \zeta \leq a), \quad f(\zeta) - f(0) = \int_0^{\zeta} f'(x)dx.$$

因此

$$\begin{aligned} |f(0)| &\leq |f(\zeta)| + \int_0^\zeta |f'(x)|dx \leq \left| \frac{1}{a} \int_0^a f(x)dx \right| + \int_0^a |f'(x)|dx \\ &\leq \frac{1}{a} \int_0^a |f(x)|dx + \int_0^a |f'(x)|dx. \quad \square \end{aligned}$$

(5) 假设 $f \in D([0, 1])$ 且

$$f(1) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx.$$

证明

$$f'(\zeta) = -\frac{f(\zeta)}{\zeta}, \quad \exists \zeta \in (0, 1).$$

证: $\exists \eta \in [0, \frac{1}{2}]$ 满足

$$f(1) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx = 2\eta f(\eta) \frac{1}{2} = \eta f(\eta).$$

定义函数

$$F(x) := xf(x), \quad \eta \leq x \leq 1.$$

因为 $F \in C([\eta, 1]) \cap D((\eta, 1))$ 且 $F(\eta) = F(1)$, 则存在 $\zeta \in (\eta, 1) \subseteq (0, 1)$ 满足 $0 = F'(\zeta) = \zeta f'(\zeta) + f(\zeta)$. \square

(6) (Jacobson, 1982) $f \in C([a, x]) \Rightarrow \exists c_x \in (a, x)$ 满足

$$\int_a^x f(t)dt = f(c_x)(x-a).$$

进一步, 如果 f 在 a 处可导且 $f'(a) \neq 0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{c_x - a}{x - a} = \frac{1}{2}.$$

证: 根据定理 5.4.5 得到 c_x 的存在性. 定义

$$I := \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{(x-a)^2} \left[\int_a^x f(t)dt - xf(a) + af(a) \right].$$

首先利用 L'Hospital 法则得到

$$I = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{2(x-a)} = \frac{1}{2}f'(a).$$

另一方面

$$I = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(c_x)(x-a) - f(a)(x-a)}{(x-a)^2} = f'(a) \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{c_x - a}{x - a}.$$

由于 $f'(a) \neq 0$, 结论得证. \square

(7) $f \in D^2([a, b]) \Rightarrow \exists \zeta \in (a, b)$ 满足

$$f''(\zeta) = \frac{25}{(b-a)^3} \int_a^b \left[f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] dx.$$

证: 利用Taylor公式展开得到

$$f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\eta_x)}{2} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2.$$

两边积分得到

$$\int_a^b \left[f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] dx = \frac{1}{2} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\eta_x) dx.$$

根据定理 5.4.4 可知存在 $\zeta \in (a, b)$ 满足

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\zeta_x) dx = f''(\eta) \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx.$$

故

$$\int_a^b \left[f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] dx = \frac{1}{2} f''(\eta) \frac{2}{3} \left(\frac{b-a}{2}\right)^3 = \frac{f''(\zeta)}{24} (b-a)^3. \quad \square$$

(8) 假设 $f \in C([0, 1])$ 且在 $[a, b]$ 上 $f > 0 \Rightarrow \forall n \geq 1 \exists \zeta_n$ 满足

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^{\zeta_n} f(x) dx + \int_{1-\zeta_n}^1 f(x) dx, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n \zeta_n &= \frac{1}{f(0) + f(1)} \int_0^1 f(x) dx. \end{aligned}$$

证: 令

$$F(x) := \int_0^x f(t) dt + \int_{1-x}^1 f(t) dt \in C([0, 1]).$$

注意到

$$F(0) = 0, \quad F(1) = 2 \int_0^1 f(t) dt.$$

因为

$$F(0) = 0 < \frac{1}{n} \int_0^1 f(t) dt < 2 \int_0^1 f(t) dt = F(1),$$

根据连续函数的介值性可知存在 $\zeta_n \in (0, 1)$ 满足

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \int_0^1 f(t) dt &= F(\zeta_n) = \int_0^{\zeta_n} f(t) dt + \int_{1-\zeta_n}^1 f(t) dt \\ &= f(\eta'_n) \zeta_n + \zeta_n f(\eta''_n) \end{aligned}$$

这里 $0 \leq \eta' \leq \zeta_n \leq 1 - \zeta_n \leq \eta'' \leq 1$. 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \zeta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{f(\eta'_n) + f(\eta''_n)} \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{f(0) + f(1)} \int_0^1 f(t) dt$$

这是因为 $\xi_n \rightarrow 0$. \square

(9) 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+3} x \sin \frac{1}{x} dx = 3.$$

证: $\exists \xi_n \in [n, n+3]$ 满足

$$\int_n^{n+3} x \sin \frac{1}{x} dx = 3\xi_n \sin \frac{1}{\xi_n}.$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+3} x \sin \frac{1}{x} dx = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{\xi_n}}{\frac{1}{\xi_n}} = 3. \quad \square$$

(10) 假设 $f \in C([0, 1])$ 且

$$\int_0^x f(t) dt \geq f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1].$$

证明 $f \equiv 0$.

证: 定义函数

$$F(x) := \int_0^x f(t) dt.$$

则可知 $F(0) = 0, F \geq 0$ 且 $F \in D([0, 1])$. 从不等式

$$F'(x) = f(x) \leq \int_0^x f(t) dt = F(x)$$

得到

$$\frac{d}{dx} (e^{-x} F(x)) = e^{-x} (-F(x) + F'(x)) \leq 0.$$

故 $e^{-x} F(x) \leq 0$, 即 $F(x) \leq 0$ 所以 $F \equiv 0$. 再次利用不等式得到 $f \equiv 0$. \square

例5.4.11. (1) (Cauchy-Schwarz 不等式) $f, g \in R([a, b]) \Rightarrow$

$$\left[\int_a^b f(x)g(x) dx \right]^2 \leq \left[\int_a^b f^2(x) dx \right] \left[\int_a^b g^2(x) dx \right]. \quad (5.4.15)$$

证: $\forall [a, b]$ 的划分 T 得到

$$\begin{aligned} \left(\sum_{1 \leq i \leq n} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i \right)^2 &= \left(\sum_{1 \leq i \leq n} f(\xi_i)\sqrt{\Delta x_i} \cdot g(\xi_i)\sqrt{\Delta x_i} \right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{1 \leq i \leq n} f^2(\xi_i)\Delta x_i \right) \left(\sum_{1 \leq i \leq n} g^2(\xi_i)\Delta x_i \right). \end{aligned}$$

令 $\|T\| \rightarrow 0$ 得到不等式. \square

(2) $f \in R([a, b]) \Rightarrow$

$$\left[\int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx.$$

(3) $f \in R([a, b])$ 且 $f \geq m > 0 \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq (b-a)^2.$$

(4) **(Minkowski 不等式)** $f, g \in R([a, b]) \Rightarrow$

$$\left[\int_a^b (f(x) + g(x))^2 dx \right]^{1/2} \leq \left[\int_a^b f^2(x) dx \right]^{1/2} + \left[\int_a^b g^2(x) dx \right]^{1/2}. \quad (5.4.16)$$

证: 利用 (5.4.15). \square

(5) **(Hölder 不等式)** $f, g \in R([a, b]), p, q > 1$, 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow$

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q}. \quad (5.4.17)$$

(6) **(Minkowski 不等式)** $f, g \in R([a, b])$ 且 $p \geq 1 \Rightarrow$

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{1/p}. \quad (5.4.18)$$

如果 $0 < p < 1$ 则不等式反号.

(7) **(Jensen 不等式)** 假设函数 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续且凸的, 且 $\varphi \in C((-\infty, +\infty)) \Rightarrow$

$$f\left(\frac{1}{c} \int_0^c \varphi(t) dt\right) \leq \frac{1}{c} \int_0^c f(\varphi(t)) dt. \quad (5.4.19)$$

证: $\forall [0, c]$ 上的划分 T 得到

$$f\left(\frac{1}{c} \sum_{1 \leq i \leq n} \varphi(\xi_i) \Delta x_i\right) \leq \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\Delta x_i}{c} f(\varphi(\xi_i)).$$

令 $\|T\| \rightarrow 0$ 得到不等式. \square

(8) **(Hadamard 不等式)** $f \in C([a, b])$ 且在 $[a, b]$ 上是凸的 $\Rightarrow \forall a \leq x_1 < x_2 \leq b$,

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \quad (5.4.20)$$

证: 令 $t := x_1 + \lambda(x_2 - x_1), 0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow$

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt = \int_0^1 F(\lambda) d\lambda, \quad F(\lambda) := f[x_1 + \lambda(x_2 - x_1)].$$

$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ 和 $0 \leq a_1, a_2 \leq 1$ 且满足 $a_1 + a_2 = 1 \Rightarrow$

$$F(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2) = f[x_1 + (a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)(x_2 - x_1)]$$

$$= f(a_1(x_1 + \lambda_1(x_2 - x_1)) + a_2(x_1 + \lambda_2(x_2 - x_1))) \leq a_1F(\lambda_1) + a_2F(\lambda_2).$$

故 F 也是凸的. 因此根据(7) 得到

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) = F\left(\int_0^1 \lambda d\lambda\right) \leq \int_0^1 F(\lambda) d\lambda = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt.$$

另一方面

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \leq \int_0^1 [(1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)] d\lambda = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \quad \square$$

§5.4.3 微积分基本定理

首先回顾下面定义.

定义5.4.12. $f \in R([a, b]) \Rightarrow \forall x \in [a, b], f|_{[a, x]} \in R([a, x])$. 定义

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b]. \quad (5.4.21)$$

称为函数 f 的变上限积分. 根据引理 5.4.7 可知 F 在 $[a, b]$ 上连续.

定理5.4.13. (微积分基本定理) $f \in R([a, b])$ 且 f 在 $x_0 \in [a, b]$ 处连续 $\Rightarrow F$ 在 x_0 处可导且

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

证: 如果 $f \in C([a, b])$ 则利用积分第一中值定理得到

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt = f(\xi) \Delta x.$$

但是现在 f 只假设在 x_0 处连续, 上述方法不能用. $\forall \epsilon > 0$, 根据函数 f 在 x_0 处连续, $\exists \delta > 0$ 使得 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ 对任意 $|x - x_0| < \delta$ 和 $x \in [a, b]$ 都成立. 故

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} \left[\int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right] - f(x_0) \right| \\ &= \left| \frac{1}{x - x_0} \left[\int_{x_0}^x f(t) dt - \int_{x_0}^x f(x_0) dt \right] \right| < \frac{\epsilon}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x dt \right| = \epsilon. \quad \square \end{aligned}$$

推论5.4.14. $f \in C([a, b]) \Rightarrow F'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$. 即

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x). \quad (5.4.22)$$

推论5.4.15. $f \in C([a, b]), \alpha, \beta \in D([c, d]),$ 且 $a \leq \alpha(x), \beta(x) \leq b \Rightarrow$

$$\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt \right)' = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x). \quad (5.4.23)$$

证: 这是因为

$$\begin{aligned} \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt \right)' &= \left(\int_a^{\beta(x)} f(t) dt \right)' - \left(\int_a^{\alpha(x)} f(t) dt \right)' \\ &= \frac{d}{dx} [F(\beta(x)) - F(\alpha(x))] = F'(\beta(x))\beta'(x) - F'(\alpha(x))\alpha'(x) \\ &= f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x). \quad \square \end{aligned}$$

例5.4.16. (1) 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} \int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt.$$

解:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{3x^2} \left(\int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt \right)' = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \cdot \sin x}{3x^2} = \frac{2}{3}.$$

(2) 寻找 $a, b > 0$ 使得下列极限存在

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \frac{t^2 dt}{\sqrt{a+t}} = 1.$$

解: 积分第一中值定理告诉我们

$$\int_0^x \frac{t^2 dt}{\sqrt{a+t}} = \frac{\xi^2}{\sqrt{a+\xi}} x, \quad \xi \in [0, x].$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{t^2 dt}{\sqrt{a+t}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x^2 \sqrt{a+x}} = \frac{1}{3\sqrt{a}} > 0.$$

另一方面

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right) = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^4).$$

从而得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \frac{t^2 dt}{\sqrt{a+t}} &= \frac{x^3}{bx - \sin x} \cdot \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{t^2 dt}{\sqrt{a+t}} \\ &= \frac{x^2}{b - \frac{\sin x}{x}} \cdot \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{t^2 dt}{\sqrt{a+t}}. \end{aligned}$$

所以必须有

$$b - 1 = 0 \quad \text{且} \quad \frac{6}{3\sqrt{a}} = 1 \quad \Rightarrow \quad (a, b) = (4, 1). \quad \square$$

(3) $f \in R([a, b])$ 且在 $[a, b]$ 上 $f > 0 \Rightarrow \exists \xi \in (a, b)$ 满足

$$\int_a^{\xi} f(x) dx = \int_{\xi}^b f(x) dx = \frac{1}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

证: 定义

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt - \int_x^b f(t) dt \in C([a, b]).$$

则

$$F(a) = - \int_a^b f(t) dt < 0, \quad F(b) = \int_a^b f(t) dt > 0.$$

$\exists \xi \in (a, b)$ 满足

$$0 = F(\xi) = \int_a^\xi f(x) dx - \int_\xi^b f(x) dx = \frac{1}{2} \int_a^b f(x) dx. \quad \square$$

(4) $f \in C([0, 1]) \Rightarrow \exists \xi \in (0, 1)$ 满足

$$\xi f(\xi) = \int_\xi^1 f(x) dx.$$

证: 定义

$$F(x) := x \int_x^1 f(t) dt, \quad x \in [0, 1].$$

则

$$F(0) = 0 = F(1) \Rightarrow 0 = F'(\xi) = \int_\xi^1 f(x) dx - \xi f(\xi). \quad \square$$

(5) $f \in C([a, b])$ 且 $0 = \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \exists \xi \in (a, b)$ 满足

$$\int_a^\xi f(x) dx = f(\xi).$$

证: 定义

$$F(x) := e^{-x} \int_a^x f(t) dt.$$

则

$$F(a) = 0 = F(b) \Rightarrow 0 = F'(\xi) = e^{-\xi} \left[f(\xi) - \int_a^\xi f(t) dt \right]. \quad \square$$

(6) $f \in C([a, b]), a > 0$ 且 $0 = \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \exists \xi \in (a, b)$ 满足

$$\xi f(\xi) = \int_a^\xi f(x) dx.$$

证: 定义

$$F(x) := \frac{1}{x} \int_a^x f(t) dt \in C([a, b]) \cap D((a, b)).$$

则

$$F(a) = 0 = F(b) \Rightarrow 0 = F'(\xi) = \frac{1}{\xi^2} \left[\xi f(\xi) - \int_a^\xi f(t) dt \right]. \quad \square$$

(7) $f \in C([a, b]), g \in C([a, b]) \Rightarrow \exists \xi \in (a, b)$ 满足

$$g(\xi) \int_a^\xi f(x) dx = f(\xi) \int_\xi^b g(x) dx.$$

证: 定义

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt \cdot \int_x^b g(t) dt.$$

则

$$F(a) = 0 = F(b) \Rightarrow 0 = F'(\xi) \quad (\exists \xi \in [a, b]).$$

但是

$$F'(x) = f(x) \int_x^b g(t) dt + \int_a^x f(t) dt (-g(x)). \quad \square$$

(8) $f, g \in C([a, b])$ 且在 $[a, b]$ 上 $f, g > 0 \Rightarrow \exists \xi \in (a, b)$ 满足

$$\frac{f(\xi)}{\int_a^\xi f(x) dx} - \frac{g(\xi)}{\int_\xi^b g(x) dx} = 1.$$

证: 这等价于证明

$$0 = f(\xi) \int_\xi^b g(x) dx - g(\xi) \int_a^\xi f(x) dx - \int_a^\xi f(x) dx \int_\xi^b g(x) dx.$$

定义

$$F(x) := e^{-x} \int_a^x f(t) dt \int_x^b g(t) dt.$$

则

$$F(a) = 0 = F(b) \Rightarrow 0 = F'(\xi). \quad \square$$

(9) $f\varphi, g\varphi \in C([a, b])$ 且在 (a, b) 内 $\varphi \neq 0 \Rightarrow \exists \xi \in (a, b)$ 满足

$$g(\xi) \int_a^b f(x)\varphi(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\varphi(x) dx.$$

证: 定义

$$F(x) := \left[\int_a^b f(t)\varphi(t) dt \right] \int_a^x g(t)\varphi(t) dt - \left[\int_a^b g(t)\varphi(t) dt \right] \int_a^x f(t)\varphi(t) dt.$$

则

$$F(a) = 0 = F(b) \Rightarrow \exists \xi \in (a, b) \text{ 满足 } 0 = F'(\xi). \quad \square$$

(10) 一般求极限和求积分不能相交换:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \neq \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx, \quad f_n \in R([a, b]).$$

反例: 考察函数

$$f_n(x) := \begin{cases} n, & 0 < x \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & x = 0, \\ 0, & \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \quad \int_0^1 f_n(x) dx = 1. \quad \square$$

(11) $f \in C([-1, 1])$, f 在 $x = 0$ 处可导, $f(0) = 0$, 且 $f'(0) \neq 0 \Rightarrow$ 求

$$I := \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x (x^2 - t^2) f(t) dt}{\int_0^x t f(x^2 - t^2) dt}.$$

证: 做变量替换 $u := x^2 - t^2$ 或 $x = \sqrt{u + t^2}$ 得到

$$\int_0^x t f(x^2 - t^2) dt = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} f(u) du.$$

所以

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x (x^2 - t^2) f(t) dt}{\frac{1}{2} \int_0^{x^2} f(t) dt} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x 2x f(t) dt}{x f(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{f(x^2)} \int_0^x f(t) dt \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2} \cdot \frac{1}{\frac{f(x^2) - f(0)}{x^2}} = \frac{1}{f'(0)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \int_0^x f(t) dt}{x^2} \\ &= \frac{1}{f'(0)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{f'(0)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f'(0)}{f'(0)} = 1. \quad \square \end{aligned}$$

(12) $f \geq 0$, $f \in C([0, 1])$ 且

$$f^2(x) \leq 1 + 2 \int_0^x f(t) dt.$$

证明

$$f(x) \leq 1 + x.$$

证: 令

$$G(x) := \int_0^x f(t) dt.$$

则

$$[G'(x)]^2 = f^2(x) \leq 1 + 2G(x) \Rightarrow 0 \leq \frac{G'(x)}{\sqrt{1 + 2G(x)}} \leq 1.$$

两边积分得到

$$0 \leq \int_0^x \frac{2dG(t)}{\sqrt{1 + 2G(t)}} \leq 2x \Rightarrow \sqrt{1 + 2G(x)} - 1 \leq 2x.$$

即 $f(x) \leq 1 + x$. \square

(13) $f \in C([0, 1]) \cap D((0, 1))$, $f(0) = f(\frac{1}{4}) = 0$, 且

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(y) dy = \frac{1}{2} f(1).$$

证明 $\exists \xi \in (0, 1)$ 满足 $f''(\xi) = 0$.

证: 首先 $\exists \xi_1 \in (0, \frac{1}{4})$ $f'(\xi_1) = 0$. 根据积分第一中值定理 $\exists \xi_2 \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ 满足 $f(\xi_2) = f(1)$; 从而 $\exists \xi_3 \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ 满足 $f'(\xi_3) = 0$. 故 $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0, 1)$ 满足 $f''(\xi) = 0$. \square

§5.4.4 Newton-Leibniz 公式

下面定理的第一部分就是经典的Newton-Leibniz 公式.

定理5.4.17. (1) $f \in C([a, b])$, F 是 f 在 $[a, b]$ 上的原函数 \Rightarrow

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a). \quad (5.4.24)$$

(2) $f \in C([a, b] \setminus \{x_1, \dots, x_k\})$, F 是 f 在 $[a, b] \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$ 上的原函数且 $F \in C([a, b]) \Rightarrow (5.4.24)$ 任然成立.

证: (1) 令

$$\tilde{F}(x) := \int_a^x f(t) dt.$$

则

$$F'(x) = f(x) = \tilde{F}'(x) \Rightarrow F(x) = \tilde{F}(x) + C.$$

从而

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \tilde{F}(b) - \tilde{F}(a) = F(b) - C - (F(a) - C) \\ &= F(b) - C - F(a) + C = F(b) - F(a). \end{aligned}$$

(2) 不妨假设 $x_1 < \dots < x_k$ 并延拓成划分 $T: a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_n = b$. 我们可进一步假设 $\|T\|$ 足够小, 否则的话在把区间细分直到新的划分的模足够小. $\exists \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ 满足

$$f(\xi_i) = F'(\xi_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

使得

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(\xi_i) \Delta x_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

故

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{1 \leq i \leq n} f(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{1 \leq i \leq n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] = F(b) - F(a). \quad \square$$

注5.4.18. 在定理 5.4.17 (2) 中, 条件 $F \in C([a, b])$ 是必须的. 反例如下

$$f(x) = 0, \quad F(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

则 $F'(x) = f(x), \forall x \neq 0$, 且 $f \in C([-1, 1]) \Rightarrow$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 0 \neq F(1) - F(-1) = 1 - 0 = 1. \quad \square$$

例5.4.19. (1) 证明

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \pi \delta_{m,n}$$

且

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

证: 利用三角函数积化和差公式:

$$\begin{aligned} \cos mx \cos nx &= \frac{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x}{2}, \\ \sin mx \sin nx &= \frac{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x}{2}, \\ \sin mx \cos nx &= \frac{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

(2) 计算

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}, \quad p > -1.$$

解: Stolz定理推出

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^p}{(p+1)n^p + \frac{(p+1)p}{2}n^{p-1} + \cdots} = \frac{1}{p+1}.$$

如果利用Newton-Leibniz公式得到

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{i}{n}\right)^p = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}. \quad \square$$

(3) $f \in C^1([a, b])$ 且 $f(a) = 0 \Rightarrow$

$$\max_{[a,b]} f^2 \leq (b-a) \int_a^b [f'(x)]^2 dx, \quad \int_a^b f^2(x) dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b [f'(x)]^2 dx.$$

证: 利用Newton-Leibniz公式得到

$$\begin{aligned} f^2(x) &= [f(x) - f(a)]^2 = \left[\int_a^x f'(t) dt \right]^2 \\ &\leq \left[\int_a^x (f'(x))^2 dx \right] \left(\int_a^x dt \right) = (x-a) \int_a^x [f'(t)]^2 dt. \end{aligned}$$

特别地,

$$\max_{[a,b]} f^2 \leq (b-a) \int_a^b [f'(x)]^2 dx$$

和

$$\int_a^b f^2(x) dx \leq \left[\int_a^b (x-a) dx \right] \int_a^b [f'(t)]^2 dt. \quad \square$$

(4) $f \in C^1([0, 1])$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1 \Rightarrow$

$$\int_0^1 |f(x) - f'(x)| dx \geq \frac{1}{e}.$$

证:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x) - f'(x)| dx &\geq \int_0^1 e^{-x} [f'(x) - f(x)] dx \\ &= \int_0^1 [e^{-x} f(x)]' dx = e^{-1} f(1) - e^0 f(0) = \frac{1}{e}. \quad \square \end{aligned}$$

(5) $f \in C^1([0, 1])$, $f(0) = 0$, 且在 $[0, 1]$ 上 $0 \leq f' \leq 1 \Rightarrow$

$$\int_0^1 f^3(x) dx \leq \left[\int_0^1 f(x) dx \right]^2.$$

证: 定义

$$F(t) := \left[\int_0^t f(x) dx \right]^2 - \int_0^t f^3(x) dx.$$

则 $F(0) = 0$ 且

$$F'(t) = 2f(t) \int_0^t f(x) dx - f^3(t) = f(t)G(t)$$

这里

$$G(t) := 2 \int_0^t f(x) dx - f^2(t).$$

因为

$$G(0) = 0, \quad G'(t) = 2f(t) - 2f(t)f'(t) = 2f(t)[1 - f'(t)] \geq 0$$

所以 $G(t) \geq G(0) = 0$. 因此 $F(t) \geq F(0) = 0$ 从而得到结论. \square

(6) 证明

$$\ln(1+n) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n. \quad (5.4.25)$$

证: 显然有如下严格不等式(为什么? 请思考)

$$\frac{1}{k+1} < \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}$$

故

$$\sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k} < 1 + \sum_{2 \leq k \leq n} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t} = 1 + \int_1^n \frac{dt}{t} = 1 + \ln n. \quad \square$$

(7) $f \in C^2([0, 1])$, $f(0) = f(1) = 0$, 且在 $(0, 1)$ 内 f 不为 $0 \Rightarrow$

$$\int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx \geq 4.$$

证: 不失一般性不妨假设在 $(0, 1)$ 内 $f > 0$. 从而

$$\int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx = \int_0^1 \frac{|f''(x)|}{f(x)} dx.$$

$\exists c \in (0, 1)$ 满足 $f(c) = \max_{[0,1]} f > 0$. 故得到

$$\frac{f(c)}{c} = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = f'(a), \quad -\frac{f(c)}{1-c} = \frac{f(1) - f(c)}{1-c} = f'(b)$$

对某个 $a \in (0, c)$ 和某个 $b \in (c, 1)$ 都成立. 所以

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx &\geq \frac{1}{f(c)} \int_0^2 |f''(x)| dx \geq \frac{1}{f(c)} \left| \int_a^b f''(x) dx \right| \\ &= \frac{|f'(b) - f'(a)|}{f(c)} = \left| \frac{-1}{1-c} - \frac{1}{c} \right| = \frac{1}{c(1-c)} \geq 4. \quad \square \end{aligned}$$

(8) 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx.$$

解: 因为

$$\int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = \sin \xi_n \int_n^{n+p} \frac{dx}{x} = \sin \xi_n \cdot \ln \frac{n+p}{n}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = 0. \quad \square$$

(9) $f \in D([a, b])$ 且 $f' \in R([a, b]) \Rightarrow$

$$\max_{[a,b]} |f| \leq \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| + \int_a^b |f'(x)| dx.$$

证: $\forall x, y \in [a, b] \Rightarrow$

$$f(y) = f(x) + \int_x^y f'(t) dt.$$

两边对 x 积分得到, $\exists \xi \in [x, y]$,

$$(b-a)f(y) = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b \left[\int_x^y f'(t) dt \right] dx.$$

利用积分第一中值定理得到

$$(b-a)f(y) \leq \int_a^b f(x) dx + (b-a) \int_{\xi}^y f'(t) dt$$

即得到所求的不等式. \square

§5.4.5 分部积分法

不定积分中的分部积分法可以平行地挪到定积分中来.

定理5.4.20. $u, v \in C^1([a, b]) \Rightarrow$

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx. \quad (5.4.26)$$

等价地

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (5.4.27)$$

证: 因为

$$\int_a^b [u(x)v'(x) + u'(x)v(x)]dx = \int_a^b [u(x)v(x)]'dx. \quad \square$$

定理5.4.21. (带积分型余项的 Taylor 公式) $f \in C^{n+1}([x_0, x_0 + \delta]) \Rightarrow \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x) \quad (5.4.28)$$

这里

$$P_n(x) \equiv P_n(x; f, x_0) := f(x_0) + \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$$

且

$$r_n(x) := \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt. \quad (5.4.29)$$

证: 首先来看 $n = 1$ 情形然后做到一般情形:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \int_{x_0}^x f'(t) dt = - \int_{x_0}^x f'(t)(x-t)' dt \\ &= f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^x (x-t)f''(t) dt \\ &= f'(x_0)(x-x_0) - \frac{1}{2} \int_{x_0}^x f''(t) \left((x-t)^2 \right)' dt \\ &= f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 - \frac{1}{3!} \int_{x_0}^x f'''(t) \left((x-t)^3 \right)' dt = \dots \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt. \quad \square \end{aligned}$$

因为 $f^{(n+1)}$ 连续, 故得到Lagrange 型余项

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \int_{x_0}^x (x-t)^n dt = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) (x-x_0)^{n+1}.$$

同理得到Cauchy 型余项

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) (x-\xi)^n \int_{x_0}^x dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-\xi)^n (x-x_0).$$

例5.4.22. (1) 计算定积分

$$I_n := \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx, \quad J_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx.$$

解: 首先注意到

$$I_0 = J_0 = 1, \quad I_1 = J_1 = \frac{\pi}{2}.$$

$\forall n \geq 2$

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x d \sin x = \int_0^{\pi/2} (n-1) \cos^{n-2} x \sin^2 x dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

得到

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

所以

$$I_n = \begin{cases} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \frac{\pi}{2}, & n = 2m, \\ \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & n = 2m+1. \end{cases} \quad (5.4.30)$$

类似地可证明

$$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$$

所以 J_n 的通项公式也由 (5.4.30) 所给出.

(2)(Wallis 公式) 考察定积分

$$J_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x \sin x dx.$$

利用不等式

$$J_{2n+1} \leq J_{2n} \leq J_{2n-1}$$

得到

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

即

$$\frac{2n}{2n+1} \frac{\pi}{2} \leq \frac{[(2n)!!]^2}{(2n+1)[(2n-1)!!]^2} \leq \frac{\pi}{2}.$$

最后得到

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(2n)!!]^2}{(2n+1)[(2n-1)!!]^2}. \quad (5.4.31)$$

(3) (Stirling 公式) $\forall n$ 有

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi} \quad (5.4.32)$$

实际上

$$\sqrt{2n\pi} n^n e^{-n} < n! \leq \sqrt{2n\pi} n^n e^{-n} \left(1 + \frac{1}{4n}\right). \quad (5.4.33)$$

进一步得到

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n + \frac{\theta_n}{12n}} \quad (\exists \theta_n \in (0, 1)) \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3}}. \quad (5.4.34)$$

对 $n = 10$ 比较如下:

$$10! = 3628800, \quad \left(\frac{10}{e}\right)^{10} \sqrt{20\pi} = 3598695.6,$$

$$\sqrt{20\pi} 10^{10} e^{-10 + \frac{1}{120}} = 3628810.032, \quad \sqrt{20\pi} \left(\frac{10}{e}\right)^{10} e^{\frac{1}{120} - \frac{1}{360000}} = 3628799.9714.$$

证: 考察积分

$$A_n := \int_1^n \ln x dx = x \ln x \Big|_1^n - n = n \ln n - n + 1.$$

因为

$$\ln n! = \sum_{2 \leq k \leq n} \ln k > A_n > \ln[(n-1)!] = \sum_{2 \leq k \leq n-1} \ln k$$

得到

$$n! > n^n e^{-n+1} > (n-1)! \Rightarrow e \left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < ne \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

另一方面, 利用梯形面积近似代替得到

$$A_n \approx \sum_{1 \leq k \leq n-1} \frac{\ln k + \ln(k+1)}{2} =: B_n = \sum_{1 \leq k \leq n-1} \ln k + \frac{1}{2} \ln n.$$

定义

$$a_n := A_n - B_n, \quad B_n = A_n \left(1 - \frac{a_n}{A_n}\right) \quad (n \geq 1).$$

注意到

$$a_{k+1} - a_k = (A_{k+1} - A_k) - (B_{k+1} - B_k) > 0$$

且

$$a_n = \sum_{1 \leq k \leq n-1} (a_{k+1} - a_k) + a_1 \Rightarrow \{a_n\}_{n \geq 1} \text{ 递增}.$$

但是

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &< \frac{\ln(k + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2k+1} + \ln(k + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2k+1}}{2} - \frac{\ln k + \ln(k+1)}{2} \\ &= \ln\left(k + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln k - \frac{1}{2} \ln(k+1) = \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{2k}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{2k+1}\right). \end{aligned}$$

故得到

$$a_{k+1} - a_k < \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{2k}\right) - \frac{1}{2} \ln\left[1 + \frac{1}{2(k+1)}\right]$$

和

$$a_n < \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{2n} \right) < \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ 存在且 } a - a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n \leq k \leq m} (a_{k+1} - a_k) < \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{12n} \right).$$

由 $A_n - B_n = a_n$ 得到

$$\ln n! = (1 - a_n) + \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln n - n \Rightarrow n! = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{1-a_n}.$$

令

$$b_n := e^{1-a_n} \Rightarrow n! = b_n e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}.$$

因为 $a_n \uparrow a, b_n \downarrow e^{1-a} =: b$. 从而得到

$$1 < \frac{b_n}{b} = e^{a-a_n} < e^{\frac{1}{2} \ln(1+\frac{1}{2n})} = \sqrt{1 + \frac{1}{2n}} < 1 + \frac{1}{4n}.$$

所以得到

$$b n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} < n! < b n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \left(1 + \frac{1}{4n} \right).$$

最后估计 b . Wallis 公式 (5.4.31) 推出

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n!]^2 2^{2n}}{(2n)! \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}} \frac{(b_n e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}})^2}{b_{2n} e^{-2n} (2n)^{2n+\frac{1}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n^2}{b_{2n} \sqrt{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

所以 $b = \sqrt{2\pi}$. \square

(4) $\pi \notin \mathbb{Q}$.

证: 假设 $\pi = a/b$ 是有理数 ($a, b \in \mathbb{N}$ 且 $(a, b) = 1$) 考虑函数

$$f(x) := \frac{1}{n!} x^n (a - bx)^n, \quad g(x) := \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k f^{(2k)}(x).$$

则得到

$$g''(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k f^{(2k+2)}(x) = \sum_{1 \leq k \leq n+1} (-1)^{k+1} f^{(2k)}(x)$$

和 $g''(x) + g(x) = f(x)$ 和

$$[g'(x) \sin x - g(x) \cos x]' = [g''(x) + g(x)] \sin x = f(x) \sin x.$$

故

$$\int_0^\pi f(x) \sin x dx = g(\pi) + g(0).$$

但是

$$f(\pi - x) = f\left(\frac{a}{b} - x\right) = \frac{1}{n!} \left(\frac{a}{b} - x\right)^n [a - (a - bx)]^n = f(x)$$

得到

$$f^{(2k)}(\pi - x) = f^{(2k)}(x), \quad f(\pi) = f(0), \quad f^{(2k)}(\pi) = f^{(2k)}(0)$$

和

$$g(\pi) = g(0) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \int_0^\pi f(x) \sin x dx \in \mathbb{Z}.$$

根据 $0 < \sin x \leq 1$ ($0 < x \leq \pi$), 推出

$$0 < f(x) \sin x < \frac{\pi^n a^n}{4^n n!}, \quad 0 < \int_0^\pi f(x) \sin x dx < \frac{\pi^n a^n}{4^n n!} \rightarrow 0$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时. \square

(5) $\pi^2 \notin \mathbb{Q}$.

证: $\forall n \in \mathbb{N}$, 定义

$$I_n := \frac{1}{n!} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos t dt.$$

则

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n+1} d \sin t \\ &= -\frac{1}{(n+1)!} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t \cdot (n+1) \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n (-2t) dt \\ &= \frac{2}{n!} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t \sin t \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n dt = \frac{-2}{n!} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n d \cos t \\ &= \frac{2}{n!} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \left[\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n - 2nt^2 \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} \right] dt \\ &= \frac{2}{n!} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} \cos t \left[\frac{\pi^2}{4} - (2n+1)t^2 \right] dt \end{aligned}$$

所以得到

$$I_{n+1} = 2(2n+1)I_n - \pi^2 I_{n-1} \Rightarrow I_n P_n(\pi^2)$$

这里 P_n 是次数不超过 n 的整系数多项式. 注意到

$$I_0 = 2, \quad I_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right) \cos t dt = 4.$$

假设 $\pi^2 = p/q$ 则得到

$$\mathbb{N} \ni q^n P_n\left(\frac{p}{q}\right) = q^n I_n \rightarrow 0,$$

矛盾! □

(6) 令

$$I_n := e^{n/4} n^{-\frac{n+1}{2}} (1 \times 2^2 \times 3^3 \times \cdots \times n^n)^{1/n}.$$

证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 1.$$

证: 取对数得到

$$\begin{aligned} \ln I_n &= \frac{n}{4} + \frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} k \ln k - \frac{n+1}{2} \ln n \\ &= n \left(\frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{k}{n} \ln \frac{k}{n} - \int_0^1 x \ln x dx \right) \\ &= n \sum_{1 \leq k \leq n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(\frac{k}{n} \ln \frac{k}{n} - x \ln x \right) dx - n \int_0^{\frac{1}{n}} x \ln x dx \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(\frac{k}{n} - x \right) [1 + \ln \theta_n(x)] dx - n \int_0^{\frac{1}{n}} x \ln x dx \quad \left(\frac{k}{n} \leq \theta_n(x) \leq x \right). \end{aligned}$$

考虑

$$1 + \ln \xi_k = \min_{[k/n, (k+1)/n]} (1 + \ln x), \quad 1 + \ln \eta_k = \max_{[k/n, (k+1)/n]} (1 + \ln x).$$

所以

$$\begin{aligned} (1 + \ln \xi_k) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(\frac{k}{n} - x \right) dx &\geq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(\frac{k}{n} - x \right) [1 + \ln \theta_k(x)] dx \\ &\geq (1 + \ln \eta_k) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(\frac{k}{n} - x \right) dx \end{aligned}$$

和

$$-\frac{1}{2} \sum_{2 \leq k \leq n} \frac{1}{n} (1 + \ln \eta_k) \leq \ln I_n + n \int_0^{\frac{1}{n}} x \ln x dx \leq -\frac{1}{2} \sum_{2 \leq k \leq n} \frac{1}{n} (1 + \ln \xi_k).$$

因此得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\ln I_n + n \int_0^{\frac{1}{n}} x \ln x dx \right] = -\frac{1}{2} \int_0^1 (1 + \ln x) dx.$$

根据

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1 + \ln x) dx &= 1 - \int_0^1 dx = 0, \\ \int_0^{\frac{1}{n}} x \ln x dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{n}} \ln x dx^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\ln n}{n^2} - \int_0^{\frac{1}{n}} x dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\ln n}{n^2} - \frac{1}{2n^2} \right), \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln I_n = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2n} \right) = 0, \quad I_n \rightarrow 1. \quad \square$$

§5.4.6 变量替换法

定理5.4.23. (1) 假设函数 $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ 连续可导, $(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = (a, b) \Rightarrow \forall f \in C([a, b]), f(\varphi(t))\varphi'(t) \in C([\alpha, \beta])$ 且

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt. \quad (5.4.35)$$

(2) 假设函数 $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ 连续可导且严格单调, $(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = (a, b)$ 或 $(b, a) \Rightarrow \forall f \in R([a, b]), f(\varphi(t))\varphi'(t) \in R([\alpha, \beta])$ 且

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt. \quad (5.4.36)$$

证: (1) $\exists F$ 满足 $F'(x) = f(x)$. 因此

$$[F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Newton-Leibniz 公式告诉我们

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt &= F(\varphi(t)) \Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\ &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

(2) 不失一般性不妨假设 $\varphi' > 0$. $\forall \epsilon > 0 \exists \delta_1 > 0$ 有

$$|\varphi'(t') - \varphi'(t'')| < \frac{\epsilon}{3M+1}, \quad \forall t', t'' \in [\alpha, \beta] \text{ 且 } |t' - t''| < \delta_1,$$

这里 $M := \sup_{[a,b]} |f|$. 根据 $f \in R([a, b])$ 得到 $\exists \delta_2 > 0 \forall [a, b]$ 上的划分 T 只要 $\|T\| < \delta_2$ 就有

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i < \frac{\epsilon}{3}$$

和

$$\left| \sum_{1 \leq i \leq n} f(\xi_i) \Delta x_i - \int_a^b f(x) dx \right| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall x_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

对 $\forall [a, b]$ 上的划分 $W: \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ 和 $\forall \tilde{\tau}_i \in [t_{i-1}, t_i]$, 令 $x_i := \varphi(t_i)$, 则 $\exists \tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ 满足

$$x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\tau)(t_i - t_{i-1}) > 0$$

(这里用到了假设条件 $\varphi' > 0$). 取

$$\delta := \min \left\{ \delta_1, \frac{\delta_2}{1+K} \right\}, \quad K := \max_{[\alpha, \beta]} |\varphi'|.$$

则当 $\|W\| < \delta$ 时得到

$$\|T\| \leq K\|W\| \leq K \frac{\delta_2}{1+K} < \delta_2$$

和

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{1 \leq i \leq n} f(\varphi(\tilde{\tau}_i)) \varphi'(\tilde{\tau}_i) \Delta t_i - \int_a^b f(x) dx \right| \\ & \leq \sum_{1 \leq i \leq n} |f(\varphi(\tilde{\tau}_i))| |\varphi'(\tilde{\tau}_i) - \varphi'(\tau_i)| \Delta t_i + \sum_{1 \leq i \leq n} |f(\varphi(\tilde{\tau}_i)) - f(\varphi(\tau_i))| \varphi'(\tau_i) \Delta t_i \\ & \quad + \left| \sum_{1 \leq i \leq n} f(\varphi(\tau_i)) \varphi'(\tau_i) \Delta t_i - \int_a^b f(x) dx \right| \\ & < M \frac{\epsilon}{1+3M} + \sum_{1 \leq i \leq n} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i + \frac{\epsilon}{3} < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \quad \square \end{aligned}$$

例5.4.24. (1) $\forall m, n \in \mathbb{N}$, 计算

$$I_{m,n} = \int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin^n x dx.$$

解:

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \frac{1}{n+1} \int_0^{\pi/2} \cos^{m-1} x d \sin^{n+1} x \\ &= \frac{1}{n+1} \left[\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (m-1) \cos^{m-2} x (-\sin^{n+2} x) dx \right] \\ &= \frac{m-1}{n+1} \int_0^{\pi/2} \cos^{m-2} x \sin^n x (1 - \cos^2 x) dx = \frac{m-1}{n+1} (I_{m-2,n} - I_{m,n}). \end{aligned}$$

因此

$$I_{m,n} = \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}.$$

所以最后得到

$$I_{m,n} = \begin{cases} \frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!} \frac{\pi}{2}, & m, n \text{ 都是偶数,} \\ \frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}, & m, n \text{ 至少有一个是奇数.} \end{cases}$$

(2) $f \in R([-a, a]) \Rightarrow$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & f \text{ 是偶的,} \\ 0, & f \text{ 是奇的.} \end{cases}$$

(3) $f \in R([0, T]), T$ 是周期 $\Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

证:

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f(x) dx &= \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx \\ &= -\int_0^a f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_0^a f(x+T) dx = \int_0^T f(x) dx. \quad \square \end{aligned}$$

(4) $f \in C((-\infty, +\infty))$ 且 T 是 f 的周期 \Rightarrow

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

证: $\forall x > T, \exists n \in \mathbb{N}$ 满足 $(n-1)T < x \leq nT \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) dt &= \int_0^{(n-1)T} f(t) dt + \int_{(n-1)T}^x f(t) dt \\ &= (n-1) \int_0^T f(t) dt + \int_0^{x-(n-1)T} f(t) dt. \end{aligned}$$

如果 $\int_0^T f(t) dt \geq 0$ 则

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \leq \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt + \frac{1}{x} \int_0^{x-(n-1)T} f(t) dt$$

且

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \geq \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt + \frac{1}{x} \int_0^{x-(n-1)T} f(t) dt.$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \int_0^{x-(n-1)T} f(t) dt - \frac{1}{nT} \int_0^T f(t) dt &\leq \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt - \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \\ &\leq \frac{1}{x} \int_0^{x-(n-1)T} f(t) dt. \end{aligned}$$

令

$$m := \min_{[0, T]} f, \quad M := \max_{[0, T]} f.$$

则

$$m[x - (n-1)T] \leq \int_0^{x-(n-1)T} f(t) dt = f(\xi)[x - (n-1)T] \leq M[x - (n-1)T]$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^{x-(n-1)T} f(t) dt = 0. \quad \square$$

§5.5 反常积分

反常积分是定积分的自然推广, 最常见的是两类, 即无穷积分和瑕积分. 当然实际应用中还有 Cauchy 主值积分.

§5.5.1 反常积分 I

本小节引入无穷积分和瑕积分的概念.

定义5.5.1. 假设函数 $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 满足对 $\forall A > a$ 都有 $f \in R([a, A])$. 如果极限

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$

存在, 称

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx := \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx \quad (5.5.1)$$

是函数 f 在 $[a, +\infty)$ 上的反常积分. 如果极限有限, 称反常积分收敛. 反之称反常积分发散.

类似地可以定义

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx := \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^a f(x) dx. \quad (5.5.2)$$

如果极限存在且有限, 称反常积分收敛.

现在考虑函数 $f: (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. 如果 $\forall c \in \mathbb{R}$, 反常积分

$$\int_{-\infty}^c f(x) dx \quad \text{和} \quad \int_c^{+\infty} f(x) dx$$

都收敛, 则称反常积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx := \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx \quad (5.5.3)$$

收敛. 实际上, (5.5.3) 中只要对某个 c 成立即可.

性质5.5.2. (1) $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 在任何 $[a, A]$ ($A > a$) 上都可积, 则对 $\forall b > a$

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ 收敛} \Leftrightarrow \int_b^{+\infty} f(x) dx \text{ 收敛}$$

且

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx.$$

(2) $f: (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 在任何 $[-A, A]$ ($A > 0$) 上都可积, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \text{ 收敛} \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} \text{ 使得 } \int_{-\infty}^c f(x) dx \text{ 和 } \int_c^{+\infty} f(x) dx \text{ 都收敛.}$$

证: (1) 显然.

(2) \Rightarrow : 根据定义. \Leftarrow : $\forall c' \neq c$ 我们得到

$$\int_{c'}^{+\infty} f(x) dx \text{ 和 } \int_{-\infty}^{c'} f(x) dx \text{ 都收敛.}$$

进一步

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^{c'} f(x) dx + \int_{c'}^{+\infty} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{c'} f(x) dx + \int_{c'}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx. \quad \square \end{aligned}$$

例5.5.3. (1) 计算

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \quad (p \in \mathbb{R}).$$

解:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1, \\ +\infty, & p \leq 1. \end{cases}$$

故反常积分只在 $p > 1$ 收敛. \square

(2) 计算

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} \quad (p \in \mathbb{R}).$$

解:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^p}$$

所以反常积分只在 $p > 1$ 收敛. \square

(3) 计算

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

解:

$$I = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi. \quad \square$$

(4) 计算

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-ax} dx = \begin{cases} \frac{1}{a}, & a > 0, \\ +\infty, & a \leq 0. \end{cases} \quad \square$$

(5) 计算

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} \left(\sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{3 + \sin \frac{k\pi}{n}} \right).$$

解:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \cdot \frac{\pi}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{3 + \sin \frac{k\pi}{n}} = \int_0^\pi \frac{dx}{3 + \sin x} \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{du}{3 + 2u + 3u^2} \quad \left(u = \tan \frac{x}{2} \right) = \frac{2}{3} \int_0^{+\infty} \frac{d(u + \frac{1}{3})}{(u + \frac{1}{3})^2 + (\frac{2\sqrt{2}}{3})^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} \frac{3}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{u + \frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{2\sqrt{2}} \right). \quad \square$$

(6) 证明

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

证: 因为

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+x^4} &= \int \frac{dx}{(1+x^2)^2 - (\sqrt{2}x)^2} \\ &= \int \frac{dx}{(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \left(\frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right) dx \\ &\quad + \frac{1}{4} \int \left[\frac{1}{(x + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} + \frac{1}{(x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} \right] dx \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\arctan(\sqrt{2}x + 1) + \arctan(\sqrt{2}x - 1) \right] + C. \end{aligned}$$

故

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \quad \square$$

(7) 计算

$$I := \int_0^{+\infty} e^{-bx} \sin(ax) dx, \quad J := \int_0^{+\infty} e^{-bx} \cos(ax) dx, \quad a, b > 0.$$

解: 分部积分得到

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx}}{-a} d \cos(ax) = \frac{-\cos(ax)}{ae^{bx}} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{b}{a} \cos(ax) e^{-bx} dx = \frac{1}{a} - \frac{b}{a} J$$

和

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx}}{a} d \sin(ax) = \frac{\sin(ax)}{ae^{bx}} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{b}{a} \sin(ax) e^{-bx} dx = \frac{b}{a} I.$$

从而得到

$$I = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad J = \frac{b}{a^2 + b^2}. \quad \square$$

注5.5.4. (1) 有如下等价刻画

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ 收敛} &\Leftrightarrow \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx \text{ 存在且有限.} \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \forall \epsilon > 0 \exists A > 0 \forall A_1 > A_2 > A \text{ 有} \\ \left| \int_{A_2}^{A_1} f(x) dx \right| = \left| \int_A^{A_1} f(x) dx - \int_A^{A_2} f(x) dx \right| < \epsilon \end{array} \right) \end{aligned}$$

(2) 类似地得到如下等价刻画

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx \text{ 收敛} \Leftrightarrow \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^a f(x) dx \text{ 存在且有限.}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \forall \epsilon > 0 \exists A < 0 \forall A_1 < A_2 < A \text{ 有} \\ \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| = \left| \int_{A_1}^a f(x) dx - \int_{A_2}^a f(x) dx \right| < \epsilon \end{array} \right)$$

(3) 有如下关系:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \text{ 收敛} \Rightarrow \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x) dx$$

但是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \text{ 收敛} \not\Leftrightarrow \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x) dx.$$

反例: $f(x) = \sin x, x \in (-\infty, +\infty)$.

例5.5.5. (1) Poisson 积分

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2} dx = 2\pi, \quad 0 < r < 1. \quad (5.5.4)$$

证: 做变量替换 $t = \tan \frac{x}{2}$ 得到

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-r^2}{1-2r \frac{1-t^2}{1+t^2} + r^2} \frac{2dt}{1+t^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2(1-r^2)}{(1-r)^2 + (1+r)^2 t^2} dt \\ &= 2 \arctan \left(\frac{1+r}{1-r} t \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 2 \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = 2\pi. \quad \square \end{aligned}$$

(2) Euler-Poisson 积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (5.5.5)$$

证: 利用多变量积分理论得到

$$I^2 = \iint_{[0, +\infty]^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

第二个证明要利用Wallis 公式 (5.4.31). 考察函数

$$\varphi(x) := e^{-x^2} - (1-x^2) \Rightarrow \varphi'(x) = 2x(1-e^{-x^2}) > 0 \quad (x > 0).$$

因此

$$e^{-x^2} > 1-x^2, \quad x > 0.$$

从而得到

$$e^{-nx^2} > (1-x^2)^n \quad (0 < x < 1),$$

且

$$e^{x^2} > 1 + x^2, \quad e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}, \quad e^{-nx^2} < \frac{1}{(1+x^2)^n}, \quad x > 0.$$

特别地

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx < \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2} t dt = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2}$$

和

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx > \int_0^1 e^{-nx^2} dx > \int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^1 \cos^{2n+1} t dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

根据

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt, \quad t = \sqrt{nx},$$

得到

$$n \left[\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \right]^2 < \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 < n \left[\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \right]^2 \frac{\pi^2}{4}.$$

例 5.4.22 (2) 推出

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left[\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \right]^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

且

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \right]^2 \frac{\pi^2}{4} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 (2n+1) \cdot \frac{\pi^2}{4} \frac{n(2n)^2}{(2n+1)(2n-1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi}{4}. \quad \square \end{aligned}$$

定义 5.5.6. (1) 假设函数 $f(x)$ 定义在区间 $[a, b)$ 上且在 b 的任何邻域内无界, 但是在任何闭子区间 $[a, b'] \subset [a, b)$ 上可积. 称

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{b' \rightarrow b} \int_a^{b'} f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\eta} f(x) dx \quad (5.5.6)$$

为 f 在 $[a, b)$ 上的瑕积分. 如果极限存在则称瑕积分收敛, 反之称为发散.

(2) 类似地, 如果函数 $f(x)$ 定义在区间 $(a, b]$ 上且在 a 的任何邻域内无界, 但是在任何闭子区间 $[a', b] \subset (a, b]$ 上可积, 定义瑕积分如下

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{a' \rightarrow a^+} \int_{a'}^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{a+\eta}^b f(x) dx. \quad (5.5.7)$$

如果极限存在则称瑕积分收敛, 反之称为发散.

(3) 如果函数 $f(x)$ 定义在区间 (a, b) 上但是在内点 $c \in (a, b)$ 的任何邻域内无界, 此时定义

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (5.5.8)$$

称瑕积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛如果瑕积分 $\int_a^c f(x) dx$ 和 $\int_c^b f(x) dx$ 都收敛.

例5.5.7. (1) 计算

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

解: 显然当 $p < 1$ 时瑕积分收敛. \square

(2) 计算

$$\int_{-1}^1 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx.$$

解: 根据定义得到

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx &= \int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx + \int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{-\epsilon} \frac{e^{1/x}}{x^2} dx + \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{\eta}^1 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(-e^{1/x} \right) \Big|_{-1}^{-\epsilon} + \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left(-e^{1/x} \right) \Big|_{\eta}^1 \\ &= \frac{1}{e} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} e^{-1/\epsilon} - e + \lim_{\eta \rightarrow 0^+} e^{1/\eta} = +\infty. \quad \square \end{aligned}$$

(3) 计算

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

解: $\pi/2$. \square

(4) 计算

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad n \geq 1.$$

解:

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{u \rightarrow 1^-} \int_0^u \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}, & n \text{ 偶数}, \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ 奇数}. \end{cases} \quad \square$$

定义5.5.8. (1) 假设函数 f 定义在 $[a, \infty)$ 上且 f 在 a 的任何领域内都无界. 称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛如果反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 和瑕积分 $\int_b^{+\infty} f(x) dx$ 对 $\forall b > a$ 都收敛. 此时定义

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx := \int_a^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx. \quad (5.5.9)$$

显然上述值和 $b > a$ 的选取无关.

(2) 假设函数 f 定义在 $[a, +\infty)$ 上, $c > a$, 且 f 在 c 的任何领域内都无界. 定义

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx := \int_a^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx \quad (5.5.10)$$

如果上述两个积分都收敛.

假设函数 f 定义在区间 $[a, b)$ 上且 f 在 b 的任何领域内都无界. 做变量替换 $y := \frac{1}{b-x}$, $a \leq x < b$, 得到

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\eta} f(x) dx \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\eta}} \frac{1}{y^2} f\left(b - \frac{1}{y}\right) dy = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \frac{1}{y^2} f\left(b - \frac{1}{y}\right) dy. \end{aligned}$$

这个说明瑕积分可化成无穷区间上的反常积分.

定理5.5.9. (1) **(被积函数线性)** 如果反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 和 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 都收敛, 则 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 反常积分 $\int_a^{+\infty} [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx$ 也收敛, 且

$$\int_a^{+\infty} [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x) dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x) dx. \quad (5.5.11)$$

(2) **(Newton-Leibnitz 公式)** $f \in C([a, +\infty))$, F 是 f 在 $[a, +\infty)$ 上的原函数 \Rightarrow 如果极限

$$F(+\infty) := \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$$

存在 (有限或无线), 则

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(x) \Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a). \quad (5.5.12)$$

(3) **(分部积分法)** $u, v \in C^1([a, +\infty)) \Rightarrow$ 如果极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x)$ 存在, 则

$$\int_a^{+\infty} u dv = uv \Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} v du. \quad (5.5.13)$$

(4) **(变量替换法)** $f \in C([a, b])$, $x = \varphi(t) \in C^1([\alpha, \beta]) \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad (5.5.14)$$

若 $\varphi([\alpha, \beta]) \subset (a, b)$, $\varphi(\alpha) = a$, 且 $\varphi(\beta-) = b$.

例5.5.10. (1) 计算

$$I = \int_0^1 \ln x dx.$$

解: 利用分部积分得到

$$I = x \ln x \Big|_0^1 - \int_0^1 dx = 0 - 1 = -1. \quad \square$$

(2) 计算

$$I_n := \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx, \quad n \geq 1.$$

解: 分部积分得到

$$\begin{aligned} I_n &= - \int_0^{+\infty} x^n de^{-x} = -x^n e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} nx^{n-1} e^{-x} dx \\ &= nI_{n-1} = \cdots = n!I_0 = n!. \quad \square \end{aligned}$$

(3) 计算 Euler 积分

$$I := \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx, \quad J := \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx. \quad (5.5.15)$$

解: 分部积分得到

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \ln 2 + \int_0^{\pi/2} \ln \left(\sin \frac{x}{2} \right) dx + \int_0^{\pi/2} \ln \left(\cos \frac{x}{2} \right) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\pi/4} \ln(\sin x) dx + 2 \int_0^{\pi/4} \ln(\cos x) dx. \end{aligned}$$

对第二个积分做变量替换 $t = \frac{\pi}{2} - x$ 得到

$$\int_0^{\pi/4} \ln(\cos x) dx = \int_{\pi/2}^{\pi/4} -\ln(\sin x) dx$$

从而得到

$$I = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2I \Rightarrow I = -\frac{\pi}{2} \ln 2. \quad \square$$

对 (5.5.15) 中第二个积分做变量替换 $u = \frac{\pi}{2} - x$ 就得到第一个积分.

(4) 计算

$$I = \int_0^{\pi} x \ln(\sin x) dx.$$

解: 利用变量替换 $x = \frac{\pi}{2} - u$ 得到

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - u \right) \ln(\cos u) (-du) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - u \right) \ln(\cos u) du \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln(\cos u) du = \pi \int_0^{\pi/2} \ln(\cos u) du = -\frac{\pi^2}{2} \ln 2. \quad \square \end{aligned}$$

(5) 假设

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

收敛且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \in \mathbb{R} \Rightarrow A = 0$.

证: 否则的话不妨假设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A > 0$. $\exists \Delta > \max\{a, 0\}$ 使得不等式

$$f(x) > \frac{A}{2} > 0, \quad \forall x > \Delta,$$

成立. 因此 $\forall b > a$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^\Delta f(x) dx + \int_\Delta^b f(x) dx > \int_a^\Delta f(x) dx + \frac{A}{2}(b - \Delta) \rightarrow +\infty,$$

当 $b \rightarrow +\infty$. 这就产生了矛盾! \square

(6) 假设函数 $f \in D([a, +\infty))$ 且反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad \text{和} \quad \int_a^{+\infty} f'(x) dx$$

都收敛 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

证: $\forall b > a$ 有

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

所以得到

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f'(t) dt = \int_a^{+\infty} f'(t) dt < +\infty.$$

根据(5) 得到 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. \square

(7) 计算

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}.$$

解: 利用变量替换 $y = 1/x$ 得到

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{dy}{(1+y^2)(1+y^{-\alpha})} + \int_1^{+\infty} \frac{dy}{(1+y^2)(1+y^\alpha)} \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan 1. \quad \square \end{aligned}$$

(8) 假如反常积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

收敛, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

证: 首先注意到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx = \int_0^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx + \int_{-\infty}^0 f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx.$$

其次把第一个积分写成

$$\int_0^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx = \int_0^1 f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx + \int_1^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx.$$

做变量替换 $t = x - 1/x$ 得到

$$\begin{aligned}\int_0^1 f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 f\left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right) dt, \\ \int_1^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} f(t) \left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right) dt.\end{aligned}$$

类似地可得到

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx &= \int_{-\infty}^{-1} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx + \int_{-\infty}^0 f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx, \\ \int_{-1}^0 f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} f(t) \left(1 - \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right) dt, \\ \int_{-\infty}^{-1} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 f(t) \left(1 - \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right) dt.\end{aligned}$$

相加得到最后结论. \square

(9) 给定 $a, b > 0$ 并假设反常积分

$$\int_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx$$

收敛 \Rightarrow

$$\int_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{x^2+4ab}\right) dx.$$

证: 考虑变量替换 $t = ax - b/x$ 则得到

$$x = \frac{t + \sqrt{t^2+4ab}}{2a}, \quad dx = \frac{t + \sqrt{t^2+4ab}}{2a\sqrt{t^2+4ab}} dt.$$

故

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\sqrt{t^2+4ab}\right) \frac{t + \sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}} dt \\ &= \frac{1}{2a} \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty} \right) f\left(\sqrt{t^2+4ab}\right) \frac{\sqrt{t^2+4ab} + t}{\sqrt{t^2+4ab}} dt \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{t^2+4ab}\right) dt. \quad \square\end{aligned}$$

(10) 假设函数 f 定义在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上, 且 $\forall [a, b] \subset (-\infty, +\infty)$ 都有 $f \in R([a, b]) \Rightarrow$ 如果极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 和 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = B$ 都存在, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x+t) - f(x)] dx = (A - B)t, \quad t > 0.$$

证: 首先注意到

$$\int_a^b [f(x+t) - f(x)] dx = \int_b^{b+t} f(x) dx - \int_a^{a+t} f(x) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_b^{b+t} [f(x) + A - A]dx - \int_a^{a+t} [f(x) + B - B]dx \\
&= (A - B)t + \int_b^{b+t} [f(x) - A]dx - \int_a^{a+t} [f(x) - B]dx.
\end{aligned}$$

$\forall \epsilon > 0 \exists X, -Y (X, Y > 0)$ 使得不等式

$$\int_b^{b+t} |f(x) - A|dx < \epsilon \quad (b > X) \quad \text{且} \quad \int_a^{a+t} |f(x) - B|dx < \epsilon \quad (a < -Y)$$

成立. 从而 $\forall a < -Y$ 和 $b > X$ 得到

$$\int_a^b [f(x+t) - f(x)]dx - (A - B)t \rightarrow 0$$

当 $a \rightarrow -\infty$ 和 $b \rightarrow +\infty$ 时. \square

(11) 注意

$$f \in C([a, +\infty)) \text{ 且 } \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

反例: 考察函数 $f(x) = x \cos(x^4)$. 则得到

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(x)dx &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \cos(x^4)dx^2 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \cos(x^2)dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \cos t \cdot \frac{1}{2}t^{-1/2}dt = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt.
\end{aligned}$$

利用下一小节的 Abel-Dirichlet 判别法可证最后这个反常积分是收敛的.

(12) 注意

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛} \Rightarrow \int_1^{+\infty} f^3(x)dx \text{ 和 } \int_1^{+\infty} \frac{|f(x)|}{x^2}dx \text{ 收敛.}$$

反例: 考察函数

$$f(x) = \begin{cases} n, & n \leq x \leq n + \frac{1}{n^3}, \\ 0, & \text{其它情形.} \end{cases}$$

和函数 $f(x) = x^2 \sin(x^4)$. \square

(13) 假设函数 f 定义在 $[0, +\infty)$ 上, $0 < f < 1$, 且

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

则反常积分

$$I := \int_0^{+\infty} \ln[1 - f(x)] \text{ 收敛.}$$

证: 利用Taylor 展开得到

$$\ln(1-t) = \ln(1-t) - \ln(1-0) = \frac{-1}{1-\theta t}(t-0) = \frac{-t}{1-\theta t}$$

从而

$$|\ln(1-t)| = \frac{t}{1-\theta t} < \frac{t}{1-t}, \quad 0 < \theta < 1.$$

$\exists M > 0$ 使得不等式 $1-f(x) > \frac{1}{2}$ 对任意 $x > M$ 都成立. 因此得到

$$\int_M^{+\infty} |\ln[1-f(x)]| dx \leq \int_M^{+\infty} \frac{f(x) dx}{1-f(x)} \leq 2 \int_M^{+\infty} f(x) dx < +\infty. \quad \square$$

(14) 证明

$$I(s) := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{s}-\frac{1}{x}}}{x} dx \sim \ln s$$

当 $s \rightarrow +\infty$ 时.

证: 因为 $x/s = 1/x \Rightarrow x = \sqrt{s}$ 把积分分成两部分

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\sqrt{s}} \frac{e^{-\frac{x}{s}-\frac{1}{x}}}{x} dx + \int_{\sqrt{s}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{s}-\frac{1}{x}}}{x} dx \\ &= \int_{\sqrt{s}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{s}-\frac{1}{t}}}{t} dt + \int_{\sqrt{s}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{s}-\frac{1}{x}}}{x} dx \quad \left(x := \frac{s}{t}, e^{-1/x} = 1 + O(s^{-1/2})\right) \\ &= 2 \int_{\sqrt{s}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{s}-\frac{1}{x}}}{x} dx = 2 \left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)\right] \int_{\sqrt{s}}^{+\infty} \frac{e^{-x/s}}{x} dx \\ &= 2 \left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)\right] \int_{s^{-1/2}}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = 2 \left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)\right] \left[\frac{\ln s}{2} + \int_{s^{-1/2}}^{+\infty} e^{-t} \ln t dt\right] \\ &= \ln s + o(1) \quad (s \rightarrow +\infty). \quad \square \end{aligned}$$

(15) 计算

$$I = \int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx.$$

解: $\forall 0 < \epsilon < 1$ 考察定积分

$$I_\epsilon := \int_\epsilon^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx.$$

分部积分得到

$$\begin{aligned} I_\epsilon &= - \int_\epsilon^1 \ln x d\left(\frac{1}{1+x}\right) = - \left[\frac{\ln x}{1+x} \Big|_\epsilon^1 - \int_\epsilon^1 \frac{dx}{x(1+x)} \right] \\ &= \frac{\ln \epsilon}{1+\epsilon} + \ln \frac{x}{x+1} \Big|_\epsilon^1 = \frac{\ln \epsilon}{1+\epsilon} - \ln 2 - \ln \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \\ &= -\frac{\epsilon \ln \epsilon}{1+\epsilon} - \ln 2 + \ln(1+\epsilon) \rightarrow -\ln 2 \end{aligned}$$

当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时. \square

(16) 计算

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}, \quad a > 1.$$

解: 先做变量替换 $x = \sin \theta$ 得到

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \theta d\theta}{(a - \sin \theta) \cos \theta} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{a - \sin \theta}.$$

再做变量替换 $t = \tan \theta/2$ 得到

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_{-1}^1 \frac{dt}{at^2 - 2t + a} = \frac{2}{a} \int_{-1}^1 \frac{dt}{(t - \frac{1}{a})^2 + 1 - (\frac{1}{a})^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}} \arctan \frac{a}{\sqrt{a^2 - 1}} \left(t - \frac{1}{a} \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}} \left(\arctan \sqrt{\frac{a-1}{a+1}} + \arctan \sqrt{\frac{a+1}{a-1}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}. \quad \square \end{aligned}$$

(17) 计算

$$I_n = \int_0^1 x^n (1-x)^p dx, \quad p > -1.$$

解: 注意到

$$I_0 = \int_0^1 (1-x)^p dx = \frac{1}{p+1}.$$

对一般的 n 有

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 t^p (1-t)^n dt = \int_0^1 t^p \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} (-1)^k t^k dt \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{p+k+1}. \end{aligned}$$

另一方面定义

$$I_{n,p} := \int_0^1 x^n (1-x)^p dx.$$

则得到

$$\begin{aligned} I_{n,p} &= \frac{-1}{p+1} \int_0^1 x^n d((1-x)^{p+1}) \\ &= \frac{n}{p+1} \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^{p+1} dx = \frac{n}{p+1} I_{n-1,p+1}. \end{aligned}$$

因此

$$I_n = I_{n,p} = \frac{n!}{(p+1) \cdots (p+n)} I_{0,p+n} = \frac{n!}{(p+1) \cdots (p+n+1)}.$$

作为一个副产品得到如下的组合恒等式

$$\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1} = \frac{n!}{(p+1) \cdots (p+n+1)}. \quad (5.5.16)$$

§5.5.2 收敛判别法

因为

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \int_{-a}^{+\infty} f(-t) dt \quad (t = -x)$$

及

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

所以对无穷区间上的反常积分的收敛性, 只要考虑 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 的收敛性即可.

(I) 反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 的收敛性.

定理5.5.11. 给定函数 $f: [a, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, 即函数 f 在 $[a, +\infty)$ 上非负.

(1) (有界判别法)

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ 收敛} \Leftrightarrow I(A) := \int_a^A f(x) dx \text{ 有界.}$$

(2) (比较判别法 1) 如果 $0 \leq f(x) \leq K\varphi(x)$ ($K > 0$), 则

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ 发散} \Rightarrow \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx \text{ 发散,}$$

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx \text{ 收敛} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ 收敛.}$$

(3) (比较判别法 2 或比较判别法的极限形式) 如果 $\varphi: [a, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = K \geq 0,$$

则

(a) $0 < K < +\infty$:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ 收敛} \Leftrightarrow \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx \text{ 收敛};$$

(b) $K = 0$:

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx \text{ 收敛} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ 收敛};$$

(c) $K = +\infty$:

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx \text{ 发散} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ 发散.}$$

(4) (Cauchy 判别法 1) 如果 $a > 0$ 则

$$f(x) \leq \frac{K}{x^p} \quad (K > 0, p > 1) \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ 收敛,}$$

$$f(x) \geq \frac{K}{x^p} \quad (K > 0, p \leq 1) \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ 发散.}$$

(5) (Cauchy 判别法 2 或 Cauchy 判别法的极限形式) 如果 $a > 0$ 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x) = K \geq 0,$$

则

(a) $0 \leq K < +\infty$ 且 $p > 1$:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ 收敛};$$

(b) $0 < K \leq +\infty$ 且 $p \leq 1$:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ 发散}.$$

证: (1) 利用单调函数极限存在的充要条件.

(2) 这是因为

$$I(A) \leq K \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx \text{ 有界} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ 收敛}.$$

(3) 如果 $0 < K < +\infty \Rightarrow \frac{K}{2}\varphi(x) \leq f(x) \leq \frac{3K}{2}\varphi(x), \forall x > a' > a$. 如果 $K = 0 \Rightarrow f(x) \leq \varphi(x), \forall x > a' > a$. 如果 $K = +\infty \Rightarrow f(x) \geq \varphi(x), \forall x > a' > a$.

(4) 在(2)中取 $\varphi(x) = 1/x^p$.

(5) 在(3)中取 $\varphi(x) = 1/x^p$. \square

例5.5.12. (1) 判断如下反常积分收敛性:

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^5+1}}, \int_1^{+\infty} x^p e^{-x} dx \ (p \geq 0), \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^p} dx, \\ & \int_1^{+\infty} \frac{dx}{r^{\ln x}} \ (r > 0), \int_2^{+\infty} \frac{dx}{(\ln x)^{\ln x}}, \int_3^{+\infty} \frac{dx}{(\ln x)^{\ln \ln x}}, \\ & \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\frac{1}{\ln x}}}, \int_2^{+\infty} \frac{dx}{(\ln x)^{(\ln x)^\alpha}} \ (1 \neq \alpha > 0), \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx, \\ & \int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3} dx, \int_2^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p(x^p + \sin x)} dx \ (2p > 1), \int_2^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{2}{x}\right) dx, \\ & \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2x^5-1}} dx, \int_2^{+\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^p \ln \frac{x+1}{x-1} dx, \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}. \end{aligned}$$

解:

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p \frac{1}{\sqrt{x^5+1}} = 1 \ (p = \frac{5}{2} > 1) \Rightarrow$ 收敛.

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^q (x^p e^{-x}) = 0 \ (\forall q \geq 0) \Rightarrow$ 收敛.

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^q \frac{\arctan x}{x^p} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x}{x^{p-q}} = \frac{\pi}{2} \ (q = p) \Rightarrow$ 如果 $p > 1$ 则收敛; 如果 $p \leq 1$ 则发散.

(d) 因为

$$r^{\ln x} = e^{\ln x \ln r} = e^{\ln x^{\ln r}} = x^{\ln r}$$

故

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{r^{\ln x}} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\ln r}} = \begin{cases} r > e, & \text{收敛,} \\ r \leq e, & \text{发散.} \end{cases}$$

(e) 如果 $x \geq e^{e^2}$ 则

$$\ln \ln x \geq \ln \ln (e^{e^2}) \geq \ln(e^2) \geq 2$$

从而

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(\ln x)^{\ln x}} = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{\ln \ln x}} \Rightarrow \text{收敛.}$$

(f)

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(\ln x)^{\ln \ln x}} = \int_3^{+\infty} \frac{dx}{e^{(\ln \ln x)^2}} > \int_3^{+\infty} \frac{dx}{e^{\ln x}} > \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x} \Rightarrow \text{发散.}$$

(g) 因为

$$x^{\frac{1}{\ln \ln x}} = e^{\frac{\ln x}{\ln \ln x}} = e^{\frac{\ln x \ln \ln x}{(\ln \ln x)^2}}$$

故

$$x^{\frac{1}{\ln \ln x}} = \exp \left[(\ln \ln x)^{\frac{\ln x}{(\ln \ln x)^2}} \right] = (\ln x)^{\frac{\ln x}{(\ln \ln x)^2}}.$$

从而得到

$$\forall x \geq 3 \Rightarrow \frac{\ln x}{(\ln \ln x)^2} > 2 \Rightarrow \frac{1}{x^{1+\frac{1}{\ln \ln x}}} \leq \frac{1}{x \ln^2 x} \Rightarrow \text{收敛.}$$

(h) 因为

$$(\ln x)^{(\ln x)^\alpha} = e^{(\ln x)^\alpha \ln \ln x} = e^{\ln x \frac{(\ln x)^\alpha \ln \ln x}{\ln x}} = x^{\frac{\ln \ln x}{(\ln x)^{1-\alpha}}},$$

所以

$$\alpha > 1 \Rightarrow \frac{\ln \ln x}{(\ln x)^{1-\alpha}} = \ln \ln x \cdot (\ln x)^{\alpha-1} > 2 \quad (x \text{ 充分大}) \Rightarrow \text{收敛,}$$

$$\alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{\ln \ln x}{(\ln x)^{1-\alpha}} (\rightarrow 0) \leq \frac{1}{2} \quad (x \text{ 充分大}) \Rightarrow \text{发散.}$$

(i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{e^{x^2}} = 0 \quad (\forall p \in \mathbb{R}) \Rightarrow \text{收敛.}$

(j) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$ 所以函数 $\frac{x - \sin x}{x^3}$ 可以连续地延拓到 $x = 0$ 处. 从而得到

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x} = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 1 - 0 = 1,$$

故收敛.

(k) 注意到

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin^2 x dx}{x^p(x^p + \sin x)} \leq \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p(x^p - 1)},$$

所以 $2p > 1 \Rightarrow$ 收敛.

(l) 根据 $1 - \cos \frac{2}{x} = 2 \sin^2 \frac{1}{x} \sim \frac{2}{x^2}$ 得到 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(1 - \cos \frac{2}{x}) = 2$. 因此收敛.

(m) 因为

$$\frac{x^2}{\sqrt{2x^5 - 1}} \sim \frac{x^2}{\sqrt{2x^{5/2}}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}x^{1/2}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{12} \frac{x^2}{\sqrt{2x^5 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{发散}.$$

(n) 因为

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}, \quad \ln \frac{x+1}{x-1} = \ln \left(1 + \frac{2}{x-1} \right),$$

所以得到

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^q \left((\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^p \ln \frac{x+1}{x-1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^q}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})^p} \ln \left(1 + \frac{2}{x-1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^q}{2^p x^{p/2}} \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{1-p}}{x^{1+\frac{p}{2}-q}} \quad (q \geq 0 \text{ 且取 } q = \frac{p}{2} + 1). \end{aligned}$$

则 $q = \frac{p}{2} + 1 > 1 (\Leftrightarrow p > 0)$: 收敛; $q = \frac{p}{2} + 1 \leq 1 (\Leftrightarrow p \leq 0)$: 发散.

(o) 首先注意到

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r}{x^p (\ln x)^q} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{r-p}}{(\ln x)^q} = \begin{cases} +\infty, & r = p > 0, \\ +\infty, & r - p = 0 \text{ 且 } q < 0, \\ 0, & r - p = 0 \text{ 且 } q > 0, \\ 0, & r - p < 0, \\ 1, & r - p = 0 \text{ 且 } q = 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} +\infty, & r > p \text{ 或 } (r = p \text{ 且 } q < 0), \\ 1, & r = p \text{ 且 } q = 0, \\ 0, & r < p \text{ 或 } (r = p \text{ 且 } q > 0). \end{cases} \end{aligned}$$

当 $p > 1$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p \frac{1}{x^p (\ln x)^q} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\ln x)^q} = 0 \quad (q > 0).$$

如果 $q \geq 0$: 收敛;

如果 $q < 0$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1+p}{2}} \frac{1}{x^p (\ln x)^q} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\frac{p-1}{2}} (\ln x)^q} = 0 \Rightarrow \text{收敛}.$$

当 $p = 1$:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^q x} = \int_2^{+\infty} \frac{d \ln x}{\ln^q x} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^q} = \begin{cases} \text{收敛, } q > 1, \\ \text{发散, } q \leq 1. \end{cases}$$

当 $p < 1$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1+p}{2}} \frac{1}{x^p \ln^q x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1-p}{2}}}{\ln^q x} = +\infty \Rightarrow \text{发散.}$$

因此

$p > 1$ 或 $(p = 1 \text{ 且 } q > 1)$: 收敛; $p < 1$ 或 $(p = 1 \text{ 且 } q \leq 1)$: 发散.

(2) 假设在 $[1, +\infty)$ 上 $f > 0$ 且反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛 \Rightarrow

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{f(x)}}{x^p} dx \quad (2p > 1) \text{ 收敛, } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 f(x)} \text{ 发散,}$$

且

$$\int_1^{+\infty} \sqrt{f(x)f(x+x_0)} dx \text{ 收敛.}$$

证: 这些结论根据下列不等式

$$0 \leq \int_1^A \frac{\sqrt{f(x)}}{x^p} dx \leq \left(\int_1^A f(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_1^A \frac{dx}{x^{2p}} \right)^{1/2},$$

$$f(x) + \frac{1}{x^2 f(x)} \geq 2 \sqrt{f(x) \frac{1}{x^2 f(x)}} = \frac{2}{x},$$

$$\sqrt{f(x)f(x+x_0)} \leq \frac{f(x) + f(x+x_0)}{2}$$

得到. \square

(3) 假设函数 f 定义在 $[1, +\infty)$, 非负, 且递减趋于 0. 则

$$\int_1^{+\infty} \frac{f^{p-1}(x)}{x^{1/p}} dx \quad (p > 1) \text{ 收敛} \Rightarrow \int_1^{+\infty} f^p(x) dx \text{ 收敛.}$$

证: 因为函数 $f^{p-1}(x)/x^{1/p}$ 单调递减, 得到

$$\int_{\frac{x}{2}}^x \frac{f^{p-1}(t)}{t^{1/p}} dt \geq \frac{f^{p-1}(x)}{x^{1/p}} (2x - x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{f^{p-1}(x)}{x^{1/p}} = 0$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{p-1}(x)}{x^{\frac{1-p}{p}}} = 0 \Rightarrow x^{1/p} f(x) \rightarrow 0.$$

另一方面

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/p} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^p(x)}{\frac{f^{p-1}(x)}{x^{1/p}}},$$

所以 $f^p(x) \leq f^{p-1}(x)/x^{1/p}$ 对充分大的 x 都成立. 根据比较判别法可知反常积分 $\int_1^{+\infty} f^p(x)dx$ 收敛. \square

(4) $f \in C([1, +\infty))$, $f > 0$, 且

$$F(x) := \int_1^x f(t)dt.$$

则

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = +\infty \Rightarrow I \text{ 发散但是 } J \text{ 收敛},$$

其中

$$I := \int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{F(x) \ln F(x)} dx, \quad J := \int_2^{+\infty} \frac{f(x)}{F(x) \ln^2 F(x)} dx.$$

证: 给定任意 $p > 0$. \exists 常数 a 使得 $F(a) > e$. 所以

$$\int_a^{+\infty} \frac{f(x)}{F(x) \ln^p F(x)} dx = \int_a^{+\infty} \frac{dF(x)}{F(x) \ln^p F(x)} = \int_{F(a)}^{+\infty} \frac{dt}{t \ln^p t} = \int_{\ln F(a)}^{+\infty} \frac{du}{u^p}.$$

故 $p > 1$ 收敛; $p \leq 1$ 发散.

(5) $f \in C^1((0, +\infty))$, $f > 0$, $f' > 0$, 则

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{f(x) + f'(x)} \text{ 收敛} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{f(x)} \text{ 收敛}.$$

证: 注意到

$$0 < \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x) + f'(x)} = \frac{f'(x)}{f^2(x) + f(x)f'(x)} \leq \frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

且

$$\int_1^A \frac{f'(x)dx}{f^2(x)} = \int_1^A \frac{df(x)}{f^2(x)} = \frac{1}{f(1)} - \frac{1}{f(A)}.$$

故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/f(x)$ 存在且 $\int_0^{+\infty} f'(x)dx/f^2(x)$ 收敛. \square

(6) 如果 $f \in C^2([a, +\infty))$ 则

$$\int_a^{+\infty} f^2(x)dx \text{ 且 } \int_a^{+\infty} [f''(x)]^2 dx \text{ 都收敛} \Rightarrow \int_a^{+\infty} [f'(x)]^2 dx \text{ 也收敛}.$$

证: 观察到

$$\int_a^A f(x)f''(x)dx = \int_a^A f(x)df'(x) = f(A)f'(A) - f(a)f'(a) - \int_a^A [f'(x)]^2 dx.$$

另一方面

$$\int_a^{+\infty} [f^2(x) + (f''(x))^2] dx \geq 2 \int_a^{+\infty} |f(x)f''(x)| dx \geq 2 \left| \int_a^{+\infty} f(x)f''(x) dx \right|$$

推出

$$\int_a^{+\infty} f(x)f''(x)dx$$

收敛. 故要证明结论, 只要说明 $f(x)f'(x)$ 有界即可. 考虑

$$f^2(A) - f^2(a) = \int_a^A df^2(x) = 2 \int_a^A f(x)f'(x)dx$$

并结合 $f^2(x)$ 有界可知 $f(x)f'(x)$ 也有界.

(7) 假设函数 $f: [1, +\infty) \rightarrow [e, +\infty)$ 递增, 则

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{f(x)} = +\infty \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln f(x)} = +\infty$$

但是有可能

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln f(x) \ln \ln f(x)} < +\infty.$$

证: 假设

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln f(x)} < +\infty.$$

则

$$+\infty > \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\ln f(e^t)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln f(e^x)} = 0 \Rightarrow \frac{\ln x}{\ln f(x)} \rightarrow 0$$

从而得到

$$\frac{\ln x}{\ln f(x)} < \frac{1}{2} \quad (x \text{ 充分大}) \Rightarrow f(x) > x^2 \Rightarrow \int_a^{+\infty} \frac{dx}{f(x)} < \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty.$$

取

$$a_n := \exp(\exp(e^n)), \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad f(x) := a_n \quad (a_{n-1} \leq x < a_n).$$

则计算得到

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} \rightarrow 0,$$

$$\int_{e^e}^{+\infty} \frac{dx}{f(x)} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{1 \leq n \leq N} \int_{a_{n-1}}^{a_n} \frac{dx}{f(x)} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{1 \leq n \leq N} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n} = +\infty,$$

但是

$$\begin{aligned} \int_{e^e}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln f(x) \ln \ln f(x)} &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{1 \leq n \leq N} \int_{a_{n-1}}^{a_n} \frac{dx}{x e^{e^n} e^n} \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{1 \leq n \leq N} \frac{e^{e^n} - e^{e^{n-1}}}{e^{e^n} e^n} < \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{1 \leq n \leq N} \frac{1}{e^n} = \frac{1}{e-1} < +\infty. \quad \square \end{aligned}$$

利用函数极限的 Cauchy 准则得到

定理5.5.13. (Cauchy 准则) 下列断言等价

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ 收敛} \Leftrightarrow \left(\forall \epsilon > 0 \exists A_0 \geq a \forall A_1, A_2 \geq A_0 \text{ 有} \right. \\ \left. \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| < \epsilon. \right)$$

作为直接推论得到

推论5.5.14. 我们有

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx \text{ 收敛} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ 收敛}.$$

定义5.5.15. 假设对任何闭子区间 $[a, A] \subset [a, \infty)$ 有 $f \in R([a, A])$.

- (1) 称函数 f 在 $[a, +\infty)$ 上绝对可积或 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 是绝对收敛如果反常积分 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛.
- (2) 称函数 f 在 $[a, +\infty)$ 上条件可积或 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 是条件收敛如果反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛但不是绝对收敛.

例5.5.16. (1) 判断如下反常积分的收敛性 (包括条件收敛和绝对收敛):

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx, \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx \ (p > 1), \int_1^{+\infty} \frac{\sin \sqrt{x}}{x} \arctan \frac{1}{\sqrt{x}} dx, \\ \int_1^{+\infty} \sin(x^2) dx, \int_2^{+\infty} \left(\cos \frac{1}{x} - 1 \right) dx.$$

解: (a) 因为

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{1+x^2} \right| dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

所以是绝对收敛.

(b) 因为 $|\cos x/x^p| \leq 1/x^p$, 所以绝对收敛.

(c) 因为

$$\left| \frac{\sin \sqrt{x}}{x} \arctan \frac{1}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{\sqrt{x}}{x} \frac{1}{x} = \frac{1}{x^{3/2}}$$

所以绝对收敛.

(d) 做变量替换 $t = x^2$ 得到

$$\int_1^A \sin(x^2) dx = \int_1^{A^2} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt = \int_1^{A^2} \frac{-1}{2\sqrt{t}} d \cos t \\ = \frac{-\cos t}{2\sqrt{t}} \Big|_1^{A^2} - \frac{1}{4} \int_1^A \frac{\cos t}{t^{3/2}} dt,$$

因此收敛. 但是根据 $|\sin(x^2)| \geq (\sin(x^2))^2 = [1 - \cos(2x^2)]/2$ 而且

$$\begin{aligned} \int_1^A \frac{\cos(2x^2)}{2} dx &= \frac{1}{8} \int_1^A \frac{d \sin(2x^2)}{x} \\ &= \frac{1}{8} \left[\frac{\sin(2A^2)}{A} - \frac{\sin 2}{1} + \int_1^A \frac{\sin(2x^2)}{x^2} dx \right], \end{aligned}$$

从而推出原来反常积分是条件收敛.

(e) 因为 $\cos(1/x) - 1 \leq 0$ 故

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2},$$

我们推出原来反常积分是绝对收敛.

(2) 判断反常积分

$$I := \int_1^{+\infty} x \sin x \sin x^4 dx$$

的敛散性 (包括绝对收敛和条件收敛).

解: $\forall A > 1$,

$$\begin{aligned} I_A &= - \int_1^A \frac{\sin x}{4x^2} d \cos x^4 \\ &= -\frac{1}{4} \left[\frac{\sin x \cos x^4}{x^2} \Big|_1^A - \int_1^A \cos x^4 \frac{x^2 \cos x - 2x \sin x}{x^4} dx \right] \\ &= -\frac{1}{4} \left[\frac{\sin x \cdot \cos x^4}{x^2} \Big|_1^A - \int_1^A \frac{\cos x^4 \cdot \cos x}{x^2} dx + 2 \int_1^A \frac{\cos x^4 \cdot \sin x}{x^3} dx \right], \end{aligned}$$

从而是绝对收敛.

定理5.5.17. (Abel - Dirichlet 判别法) 假设

(1) **(Abel)** 反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad \text{收敛且}$$

函数 $g(x)$ 单调有界, 或者

(2) **(Dirichlet)** 函数

$$F(A) := \int_a^A f(x) dx \quad \text{有界且}$$

函数 $g(x)$ 单调且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. 则反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx \quad \text{收敛.}$$

证: (1) 假设 $|g(x)| \leq M$ 对任何 $x \geq a$ 都成立, 这里 M 是某个正数. $\forall \epsilon > 0 \exists A_0 > a \forall A_2 > A_1 > A_0$ 有

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| < \frac{\epsilon}{2M}.$$

根据定理 5.4.9 可知 $\exists \zeta \in [A_1, A_2]$ 满足

$$\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x) dx = g(A_1) \int_{A_1}^{\zeta} f(x) dx + g(A_2) \int_{\zeta}^{A_2} f(x) dx.$$

因此

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x) dx \right| \leq M \frac{\epsilon}{2M} + M \frac{\epsilon}{2M} = \epsilon.$$

(2) 假设

$$\left| \int_a^A f(x) dx \right| \leq M, \quad \forall A > a.$$

$\forall \epsilon > 0 \exists A_0 > a \forall A_2 > A_1 > A_0$ 有

$$|g(A_2)| < \frac{\epsilon}{4M}, \quad |g(A_1)| < \frac{\epsilon}{4M}.$$

根据定理 5.4.9 可知 $\exists \zeta \in [A_1, A_2]$ 满足

$$\begin{aligned} \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x) dx \right| &\leq \frac{\epsilon}{4M} \left| \int_{A_1}^{\zeta} f(x) dx \right| + \frac{\epsilon}{4M} \left| \int_{\zeta}^{A_2} f(x) dx \right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{4M} 2M + \frac{\epsilon}{4M} 2M = \epsilon. \quad \square \end{aligned}$$

例 5.5.18. (1) 判断下列反常积分的敛散性 (包括绝对收敛和条件收敛):

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 0), \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx.$$

解: (a) 和 (c) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x/x = 1$, 所以 $\sin x/x$ 可以延拓到 0. 做分解

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx + \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx,$$

其中第二个是定积分. 在第一个积分里面

$$\left| \int_1^A f(x) dx \right| = \left| \int_1^A \sin x dx \right| = |\cos A - \cos 1| \leq 2, \quad \forall A \geq 1$$

且 $1/x$ 单调趋于 0. 利用 Dirichlet 判别法可知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 收敛. 然而

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1 - \cos 2x}{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x},$$

且 (利用相同的判别法)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx \text{ 收敛.}$$

故该反常积分是条件收敛.

(b) 根据Dirichlet 判别法可知该反常积分收敛. 但是从

$$\frac{1}{x^p} \geq \left| \frac{\sin x}{x^p} \right| \geq \frac{\sin^2 x}{x^p} = \frac{1}{x^p} - \frac{\cos 2x}{2x^p}$$

推出

$p > 1$: 绝对收敛; $0 < p \leq 1$: 条件收敛; $p \leq 0$: 发散.

(2) 判断反常积分的敛散性 (包括绝对收敛和条件收敛):

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx, \int_0^{+\infty} x \sin(x^4) dx, \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx.$$

解: 都是条件收敛.

(3) 判断下列反常积分的敛散性:

$$\int_1^{+\infty} \tan\left(\frac{\sin x}{x}\right) dx, \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} \ln\left(\cos \frac{1}{x}\right) dx, \int_0^{+\infty} x^p \sin x dx \quad (p > 0),$$

$$\int_1^{+\infty} e^{\sin x} \frac{\sin(2x)}{x^p} dx \quad (p > 0), \int_0^{+\infty} \sin^3(x^2 + 2x) dx, \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha - \sin x} dx \quad (\alpha > 0),$$

$$\int_0^{+\infty} x^2 \sin\left(\frac{\cos x^3}{1+x}\right) dx, \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} \arctan x dx \quad (p > 0),$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}} \sin(x^2) dx, \int_1^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^p + x^q} dx \quad (\max(p, q) > 1).$$

解: (a) 因为

$$\tan\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{\sin x}{x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) = \text{条件收敛} + \text{绝对收敛},$$

所以是条件收敛.

(b) 因为

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} \ln\left(\cos \frac{1}{x}\right) dx = - \int_1^{+\infty} -\frac{1}{x^p} \ln\left(\cos \frac{1}{x}\right) dx,$$

且

$$-\frac{\ln \cos \frac{1}{x}}{x^p} = -\frac{\ln[1 - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})]}{x^p} = -\frac{-\frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})}{x^p} = \frac{1}{2x^{2+p}} + o\left(\frac{1}{x^{2+p}}\right),$$

推出当 $p > -1$ 时条件收敛; 当 $p \leq -1$ 时发散.

(c) 取数列 $x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$ 和 $y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ 得到

$$\left| \int_{x_n}^{y_n} x^p \sin x dx \right| \geq \left(2n\pi + \frac{\pi}{4} \right)^p \int_{x_n}^{y_n} \sin x dx \geq n^p \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin x dx = \frac{n^p}{\sqrt{2}} \rightarrow +\infty.$$

(d) 取 $f(x) = e^{\sin x} \sin(2x)$ 和 $g(x) = 1/x^p$ 得到

$$\begin{aligned} \int_1^A f(x) dx &= -2 \int_1^A e^{\sin x} d \cos x = -2 \int_{\sin 1}^{\sin A} e^t t dt \\ &= -2 \int_{\sin 1}^{\sin A} t e^t dt = -2 \left[t e^t \Big|_{\sin 1}^{\sin A} - \int_{\sin 1}^{\sin A} e^t dt \right] \Rightarrow \text{收敛}, \end{aligned}$$

且 $g(x)$ 单调趋于 0. 从而该反常积分收敛.

(e) 做变量替换 $x = \sqrt{1+t} - 1$ 得到

$$\int_0^{+\infty} \sin^3(x^2 + 2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{\sqrt{1+t}} dt \Rightarrow \text{收敛}$$

利用Dirichlet 判别法.

(f) 注意到

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x^\alpha - \sin x} &= \frac{\sin x}{x^\alpha} \left(\frac{1}{1 - \frac{\sin x}{x^\alpha}} \right) = \frac{\sin x}{x^\alpha} \left[1 + \frac{\sin x}{x^\alpha} + o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \right] \\ &= \frac{\sin x}{x^\alpha} + \frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right) \\ &= \frac{\sin x}{x^\alpha} + \frac{1}{2x^{2\alpha}} - \frac{\cos(2x)}{2x^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right). \end{aligned}$$

所以当 $\alpha > 1/2$ 时收敛, 当 $\alpha \leq 1/2$ 时发散.

(g) 因为

$$\begin{aligned} x^2 \sin\left(\frac{\cos x^3}{1+x}\right) &= x^2 \left[\frac{\cos x^3}{1+x} - \frac{(\cos x^3)^3}{3!(1+x)^3} + o\left(\frac{1}{x^5}\right) \right] \\ &= \frac{x^2 \cos x^3}{1+x} - \frac{1}{6} \frac{x^2 \cos^3 x^3}{(1+x)^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right), \end{aligned}$$

所以该反常积分收敛.

(h) 利用Abel 判别法可知该反常积分收敛.

(9) 做变量替换 $t = x^2$ 得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}} \sin(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\sqrt{t}+1}} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{1/4}} \frac{\sqrt{\sqrt{t}}}{\sqrt{\sqrt{t}+1}} dt.$$

根据Abel 判别法可知该反常积分收敛.

(i) 不失一般性不妨假设 $p \geq q$ 和 $p > 1$. 从

$$\int_1^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^p + x^q} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p-1}} \frac{dx}{1 + x^{q-p}}$$

和Abel 判别法可知该反常积分收敛.

(4) 假设函数 $f \in C^1([1, +\infty))$, $|f'| \leq M$, 则

$$\int_1^{+\infty} |f(x)| dx \text{ 收敛} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

证: 根据假设条件可知

$$\int_1^{+\infty} |f(x)f'(x)| dx$$

收敛. 另一方面

$$\int_1^A f(x)f'(x) dx = \int_1^A f(x) df(x) = \frac{1}{2}f^2(A) - \frac{1}{2}f^2(1).$$

故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ 存在且有限. 根据例5.5.10 (5) 推出 $L = 0$. \square

(5) $f \in C([0, +\infty))$ 且反常积分 $\int_0^{+\infty} g(x) dx$ 绝对收敛, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} f\left(\frac{x}{n}\right) g(x) dx = f(0) \int_0^{+\infty} g(x) dx.$$

证: 做变量替换 $x = \sqrt{nt}$ 得到

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{\sqrt{n}} f\left(\frac{x}{n}\right) g(x) dx - \int_0^{\sqrt{n}} f(0)g(x) dx \right| \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left| f\left(\frac{x}{n}\right) - f(0) \right| |g(x)| dx \\ &= \int_0^1 \left| f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - f(0) \right| |g(\sqrt{nt})| \sqrt{nt} dt = \left| f\left(\frac{\xi_n}{\sqrt{n}}\right) - f(0) \right| \int_0^1 |g(\sqrt{nt})| \sqrt{nt} dt \\ &= \left| f\left(\frac{\xi_n}{\sqrt{n}}\right) - f(0) \right| \int_0^{\sqrt{n}} |g(x)| dx \leq \left| f\left(\frac{\xi_n}{\sqrt{n}}\right) - f(0) \right| \int_0^{+\infty} |g(x)| dx. \end{aligned}$$

因为函数 f 在 0 点连续, 所以 $\forall \epsilon > 0 \exists N$ 满足 $\forall n > N$

$$\left| f\left(\frac{\xi_n}{\sqrt{n}}\right) - f(0) \right| < \epsilon.$$

故

$$\left| \int_0^{\sqrt{n}} f\left(\frac{x}{n}\right) g(x) dx - f(0) \int_0^{\sqrt{n}} g(x) dx \right| < \epsilon \int_0^{+\infty} g(x) dx$$

当 $n > N$.

(6) 如果函数 $f \in D([a, +\infty))$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$, 且 f' 严格递增, 则

$$\int_a^{+\infty} \sin[f(x)] dx \text{ 收敛.}$$

证: 根据假设函数 $t = f(x)$ 存在反函数 $x = f^{-1}(t)$ 从而得到

$$\int_a^{+\infty} \sin[f(x)] dx = \int_{f(a)}^{+\infty} \frac{\sin t}{f'[f^{-1}(t)]} dt = \int_{f(a)}^{+\infty} \sin t \frac{1}{f'[f^{-1}(t)]} dt.$$

根据Dirichlet 判别法该反常积分收敛.

(7) 假设函数 $f > 0$ 且反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则 $\exists \xi \in (1, +\infty)$ 满足

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx = \int_1^{\xi} f(x) dx.$$

证: 首先根据Dirichlet 判别法可知反常积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx = \int_1^{+\infty} f(x) \frac{1}{x} dx$$

收敛. $\forall n \in \mathbb{Z}_+$,

$$\int_1^n \frac{f(x)}{x} dx = \int_1^{\xi_n} f(x) dx, \quad (\exists \xi_n \in (1, n)).$$

我们可以进一步要求 ξ_n 递增, 这时因为

$$\int_1^n \frac{f(x)}{x} dx = \int_1^{n-1} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{n-1}^n \frac{f(x)}{x} dx = \int_1^{n-1} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{n-1}^{\xi_n} \frac{f(x)}{x} dx,$$

导致 $1 < \xi_{n-1} < \xi_n < n$. 如果数列 $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ 有界, 则 \exists 收敛子列 $\{\xi_{n_k}\}_{k \geq 1}$ 满足 $\lim_{k \rightarrow +\infty} \xi_{n_k} = \xi \geq 1$, 因此 $\xi > 1$ 且

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_1^{\xi_{n_k}} f(x) dx = \int_1^{\xi} f(x) dx.$$

如果数列 $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ 无界, 则 \exists 子列 $\xi_{n_k} \rightarrow \infty$ 且

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_1^{n_k} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_1^{\xi_{n_k}} f(x) dx = \int_1^{+\infty} f(x) dx.$$

故

$$0 = \int_1^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) f(x) dx \Rightarrow f \equiv 0. \quad \square$$

II) 瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的收敛性 (b 是瑕点). 如下总是假设函数 $f(x)$ 定义在区间 $[a, b)$ 上且 b 是其唯一的瑕点.

定理5.5.19. 假设函数 $f: [a, b) \rightarrow [0, +\infty)$ 只有唯一的瑕点 b .

(1) (**比较判别法 1**) 如果 $0 \leq f(x) \leq K\varphi(x)$ ($K > 0$), 则

$$\int_a^b f(x)dx \text{ 发散} \Rightarrow \int_a^b \varphi(x)dx \text{ 发散},$$

且

$$\int_a^b \varphi(x)dx \text{ 收敛} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ 收敛}.$$

(2) (**比较判别法 2**) 如果函数 $\varphi: [a, b) \rightarrow [0, +\infty)$ 满足

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = K \geq 0,$$

则

$$0 < K < +\infty: \int_a^b f(x)dx \text{ 和 } \int_a^b \varphi(x)dx \text{ 具有相同的敛散性},$$

$$K = 0: \int_a^b \varphi(x)dx \text{ 收敛} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ 收敛},$$

$$K = +\infty: \int_a^b \varphi(x)dx \text{ 发散} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ 发散}.$$

(3) (**Cauchy 判别法 1**)

$$f(x) \leq \frac{K}{(b-x)^p} \quad (K > 0 \text{ 且 } p < 1) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ 收敛},$$

$$f(x) \leq \frac{K}{(b-x)^p} \quad (K > 0 \text{ 且 } p \geq 1) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ 发散}.$$

(4) (**Cauchy 判别法 2**) 如果

$$\lim_{x \rightarrow b^-} (b-x)^p f(x) = K \geq 0,$$

则

$$0 \leq K < +\infty \text{ 且 } p < 1 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ 收敛},$$

$$0 < L \leq +\infty \text{ 且 } p \geq 1 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ 发散}.$$

定理5.5.20. (Abel-Dirichlet 判别法) 假设

(1) (Abel) 函数 $g(x)$ 在 $[a, b)$ 上单调有界且瑕积分

$$\int_a^b f(x) dx \text{ 收敛,}$$

或

(2) (Dirichlet) 函数 $g(x)$ 单调且当 $x \rightarrow b^-$ 时 $g(x) \rightarrow 0$, 且函数

$$F(\eta) := \int_a^{b-\eta} f(x) dx \text{ 有界,}$$

则瑕积分

$$\int_a^b f(x)g(x) dx \text{ 收敛.}$$

例5.5.21. (1) 判断如下瑕积分的敛散性:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{1}{x^p} \sin \frac{1}{x} dx \ (p < 2), \quad \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx \ (p > 0), \quad \int_0^1 \frac{\cos^1(1/x)}{\sqrt{x}} dx, \\ & \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}, \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x}-2x+\sqrt{x}}, \quad \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}} dx, \\ & \int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{\sqrt{x} \sin \sqrt{x}} dx, \quad \int_0^2 \frac{\sqrt{x} dx}{e^{\sin x} - 1}, \quad \int_0^1 \frac{\arctan(x^2 + x^{2\alpha})}{x \ln^\alpha(1+x)} dx, \\ & \int_0^1 x^\alpha \ln^\beta x dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x - e^{-x^2}}{x^\alpha \tan x} dx, \quad \int_0^1 e^{\frac{x}{x}} (\cos x)^{\frac{1}{x^3}} dx, \\ & \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} \ln x dx, \quad \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{1-x}\right) \frac{dx}{1-x}, \quad \int_0^1 \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x^2} dx, \\ & \int_0^1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) \frac{dx}{x^a} \ (a > 0), \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(\frac{1}{\sin x}\right) \frac{dx}{x^a} \ (a > 0), \quad \int_0^1 \frac{x^a}{e^x - 1} \sin \frac{1}{x} dx, \\ & \int_0^1 x^p (1+x)^{\frac{1}{x}} \cos \frac{1}{x^2} dx \ (p > -3), \quad \int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1} |\ln x|^q dx, \quad \int_0^1 \frac{\cos(\frac{1}{1-x})}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx. \end{aligned}$$

解: (a) 注意到

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} \sin \frac{1}{x} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{p-2}} \cdot \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = \int_0^1 g(x) \cdot f(x) dx.$$

当 $p < 2$ 时, $g(x)$ 单调递减趋于 0, 且

$$\int_\eta^1 f(x) dx = - \int_\eta^1 \sin \frac{1}{x} d\frac{1}{x} \leq 2.$$

根据Dirichlet 判别法可知

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} \sin \frac{1}{x} dx \text{ 收敛.}$$

另一方面,

$$x^q \frac{1}{x^p} \left| \sin \frac{1}{x} \right| = 0 \quad (q - p > 0 \text{ 且 } q < 1).$$

故 $p < 1$, 绝对收敛; $1 \leq p < 2$, 条件收敛.

(b) $p \geq 2$, 发散; $1 < p < 2$, 条件收敛; $p \leq 1$, 绝对收敛.

(c) 收敛.

(d) 收敛.

(e) 收敛.

(f) 收敛.

(g) 收敛.

(h) 收敛.

(i) $a < 2$, 收敛; $s \geq 2$, 发散.

(j) 仅在 $\alpha > -1$ 和 $\beta > -1$ 时收敛.

(k) 仅在 $a < 4$ 时收敛.

(l) 收敛.

(m) 仅在 $m > 0$ 和 $n > -1$ 时收敛.

(n) 条件收敛.

(o) 条件收敛.

(p) $\alpha < 1$, 绝对收敛; $1 \leq \alpha < \frac{3}{2}$, 条件收敛.

(q) $\alpha < 1$, 绝对收敛; $1 \leq \alpha < 2$, 条件收敛.

(r) $\alpha > 0$, 绝对收敛; $-1 < \alpha \leq 0$, 条件收敛.

(s) 收敛.

(t) $p > 0$ 或者, $p = 0$ 且 $q < -1$, 收敛.

(u) $2p > 1$ 时收敛.

例5.5.22. (1) 假设函数 f 在 $(0, 1]$ 上单调且瑕积分 $\int_0^1 x^\alpha f(x) dx$ 收敛, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha+1} f(x) = 0.$$

证: 不失一般性假设 $\exists x_0 \in (0, 1]$ 使得对任意 $x \in (0, x_0]$ 都有 $f(x) > 0$ 成立. 如果 f 单调递增则

$$\int_x^{2x} t^\alpha f(t) dt > \begin{cases} f(x)x^\alpha x, & \alpha \geq 0, \\ f(x)(2x)^\alpha \cdot x, & \alpha < 0. \end{cases}$$

如果 f 单调递减则

$$\int_x^{2x} t^\alpha f(t) dt > \begin{cases} f(2x)x^\alpha \cdot x, & \alpha \geq 0, \\ f(2x)(2x)^\alpha \cdot x, & \alpha < 0. \end{cases}$$

从而 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha+1} f(x) = 0$. \square

(2) 如果函数 $f \in C([0, 1])$, $f \geq 0$, 且 f 单调递增, 则

$$I := \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \int_{0^-}^1 \frac{f(t) dt}{t^{\alpha+1}} = \frac{f(0)}{\alpha} \quad (\alpha > 0).$$

证: 如果 $f(0) > 0$, 则

$$\int_x^1 \frac{f(t) dt}{x^{\alpha+1}} \geq f(0) \int_x^1 \frac{dt}{t^{\alpha+1}} \rightarrow +\infty$$

故

$$I = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{-\alpha}} \int_x^1 \frac{f(t) dt}{t^{\alpha+1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-f(x)/x^{\alpha+1}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \frac{f(0)}{\alpha}.$$

如果 $f(0) = 0$ 则 $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ 使得 $f(x) < \alpha\epsilon$ 对任何 $x \in (0, \delta)$ 都成立, 从而得到

$$x^\alpha \int_x^\delta \frac{f(t) dt}{t^{\alpha+1}} < \alpha\epsilon x^\alpha \int_x^\delta \frac{dt}{t^{\alpha+1}} = \epsilon \quad (0 < x < \delta).$$

因此

$$\begin{aligned} x^\alpha \int_x^1 \frac{f(t) dt}{t^{\alpha+1}} &= x^\alpha \left[\int_x^\delta \frac{f(t) dt}{t^{\alpha+1}} + \int_\delta^1 \frac{f(t) dt}{t^{\alpha+1}} \right] \\ &< \epsilon + x^\alpha f(1) \int_\delta^1 \frac{dt}{t^{\alpha+1}} = \epsilon + x^\alpha f(1) \frac{1}{\alpha\delta^\alpha} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

当 $x \rightarrow 0+$. 所以结论成立.

(3) 假设函数 f 在 $(0, 1)$ 上单调且瑕积分 $\int_0^1 f(x)dx$ 收敛, 则

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

证: 不失一般性假设函数 f 单调递增. 故得到

$$\begin{aligned} \int_0^{1-\frac{1}{n}} f(x)dx &= \sum_{1 \leq k \leq n-1} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx \leq \sum_{1 \leq k \leq n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} \\ &\leq \sum_{2 \leq k \leq n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx. \quad \square \end{aligned}$$

(4) 计算极限

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} (\ln k)^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} \ln k \right)^2 \right].$$

解: 因为

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} (\ln k)^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} \ln k \right)^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} \left(\ln \frac{k}{n} + \ln n \right)^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} \left(\ln \frac{k}{n} + \ln n \right) \right)^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} \left(\ln \frac{k}{n} \right)^2 + (\ln n)^2 + \frac{2 \ln n}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} \ln \frac{k}{n} \\ &\quad - \frac{1}{n^2} \left[\left(\sum_{1 \leq k \leq n} \ln \frac{k}{n} \right)^2 + 2 \sum_{1 \leq k \leq n} \ln n \cdot n \cdot \ln \frac{k}{n} + \left(\sum_{1 \leq k \leq n} \ln n \right)^2 \right] \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n} \left(\ln \frac{k}{n} \right)^2 \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} \ln \frac{k}{n} \right)^2 \rightarrow \int_0^1 \ln^2 x dx - \left(\int_0^1 \ln x dx \right)^2. \end{aligned}$$

故最后极限等于 1.

(5) 证明

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \pi, \quad I_n := \sum_{1 \leq k \leq n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}.$$

证: 因为

$$I_n = \sum_{1 \leq k \leq n-1} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)}} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}},$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin t \cos t dt}{\sqrt{\sin^2 t \cdot \cos^2 t}} = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi. \quad \square$$

§5.5.3 反常积分 II: Cauchy 主值积分

我们知道无穷积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \text{ 收敛} \iff \lim_{A, B \rightarrow +\infty} \int_{-B}^A f(x) dx \text{ 存在.}$$

特别地得到极限

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x) dx \text{ 存在.}$$

函数 $f(x) = \sin x$ 表明反之则不一定成立.

引入函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上的 **Cauchy 主值积分(Cauchy principal value)**:

$$(\text{P.V.}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx := \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x) dx.$$

同样对瑕积分 (这里仅是 c 为瑕点)

$$\int_a^b f(x) dx \text{ 收敛} \iff \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\eta} f(x) dx \text{ 和 } \lim_{\eta' \rightarrow 0^+} \int_{c+\eta'}^b f(x) dx \text{ 都收敛.}$$

定义函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的 **Cauchy 主值积分(Cauchy principal value)**:

$$(\text{P.V.}) \int_a^b f(x) dx := \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left[\int_a^{c-\eta} f(x) dx + \int_{c+\eta}^b f(x) dx \right].$$

比如之前提到的函数 (1.6.6).

§5.5.4 * Euler 积分和 Γ 函数的刻画

Euler 积分包括 **Gamma 函数** 和 **Beta 函数**. 首先我们引入 Gamma 函数

$$\Gamma(s) := \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (5.5.17)$$

在未证明反常积分收敛性之前, 根据定义显然有

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_1^{\infty} = 1. \quad (5.5.18)$$

下面我们来证明 $\Gamma(s)$ 仅在 $s > 0$ 时收敛. 事实上, 把 $\Gamma(s)$ 分解如下

$$\Gamma(s) = \int_0^1 x^{s-1} e^{-x} dx + \int_1^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx =: I_1 + I_2.$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, 由于 $x^{1-s}(x^{s-1}e^{-x}) \rightarrow 1$, 我们得到 I_1 收敛仅当 $1-s < 1$. 对 I_2 , 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $x^2(x^{s-1}e^{-x}) \rightarrow 0$, 从而 I_1 对任意 $s \in \mathbb{R}$ 都收敛. 因此 $\Gamma(s)$ 仅当

$s > 0$ 时候收敛.

根据分部积分, 我们马上得到递推公式

$$\Gamma(1+s) = s\Gamma(s), \quad s > 0. \quad (5.5.19)$$

特别地,

$$\Gamma(1+n) = n!. \quad (5.5.20)$$

利用递推公式可以定义

$$\Gamma(s) := \frac{\Gamma(1+s)}{s}, \quad s > -1.$$

从而可以把 Γ 函数的定义域从 $s > 0$ 延拓到 $s \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

另一个非常重要的性质是

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}, \quad s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \quad (5.5.21)$$

一个简单证明需要用到复变函数知识, 具体证明在之后的章节给出.

其次, 我们引入 **Beta 函数**

$$B(a, b) := \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx, \quad a, b > 0. \quad (5.5.22)$$

在 (13.4.7) 利用重积分可证

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \quad (5.5.23)$$

考虑函数

$$f(x) := \frac{\Gamma(x)\Gamma(x+1/2)}{\Gamma(2x)}, \quad x > 0.$$

因为

$$\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(1/2)}{B(x, 1/2)}, \quad \Gamma(2x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{B(x, x)}, \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi},$$

最后等式见 (13.4.4), 所以

$$f(x) = \frac{\sqrt{\pi}B(x, x)}{B(x, 1/2)}.$$

下面来计算比值 $B(x, x)/B(x, 1/2)$. 根据定义得到

$$\begin{aligned} B(x, x) &= \int_0^1 v^{x-1}(1-v)^{x-1} dv = \int_0^1 (v-v^2)^{x-1} dv \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - v \right)^2 \right]^{x-1} dv = 2 \int_0^{1/2} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - v \right)^2 \right]^{x-1} dv \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4^{x-1}} \int_0^1 (1-u)^{x-1} \frac{du}{2\sqrt{u}} = 2^{1-2x} B(x, 1/2), \quad \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - v\right)^2 = \frac{1-u}{4}.$$

最后得到

$$f(x) = \sqrt{\pi} 2^{1-2x}$$

即, 利用 Γ 函数的延拓, **Legendre 加倍公式(Legendre doubling formula)**

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} 2^{1-2s} \Gamma(2s), \quad s \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z}_{\leq 0}/2). \quad (5.5.24)$$

定理5.5.23. (Γ 函数的刻画) 假设函数 $F \in C^1((0, +\infty))$ 满足

- (1) $F(x+1) = xF(x)$,
- (2) $F(x)$ 恒不为零,
- (3) $F(x)F(x+1/2) = \sqrt{\pi} 2^{1-2x} F(2x)$,

则 $F(x) \equiv \Gamma(x)$, $x > 0$.

证: 因为 $\Gamma(x)$ 满足上述三条性质, 所以考虑商 $q(x) := F(x)/\Gamma(x)$. 则得到

$$q(x+1) = q(x), \quad q\left(x + \frac{1}{2}\right) = q(2x).$$

定义

$$p(x) := \frac{q(x)}{q(x)} \in C((0, +\infty)).$$

计算得到

$$p(x+1) = p(x), \quad p(x) + p\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2p(2x).$$

从而得到

$$p(x) = \frac{1}{2} \left[p\left(\frac{x}{2}\right) + p\left(\frac{x+1}{2}\right) \right];$$

但是

$$p\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[p\left(\frac{x}{4}\right) + p\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right) \right]$$

和

$$p\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[p\left(\frac{x+1}{4}\right) + p\left(\frac{x+3}{4}\right) \right]$$

带入得到

$$p(x) = \frac{1}{4} \left[p\left(\frac{x}{4}\right) + p\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4}\right) + p\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right) + p\left(\frac{x}{4} + \frac{3}{4}\right) \right].$$

利用归纳假设易证

$$p(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{0 \leq k \leq 2^n - 1} p\left(\frac{x}{2^n} + \frac{k}{2^n}\right) \rightarrow \int_0^1 p(t) dt, \quad n \rightarrow +\infty, \quad x \in (0, 1].$$

所以对任意 $x \in (0, 1]$ 得到

$$p(x) = \int_0^1 p(t) dt = \ln |q(t)| \Big|_{t=0}^{t=1} = 0.$$

故 $F(x) \equiv \Gamma(x)$, $x \in (0, 1]$. 利用假设条件 (1) 得到 $F(x) \equiv \Gamma(x)$, $x > 0$. \square

§5.5.5 Froullani 积分

对任意 $a, b > 0$, 函数 $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 的 **Froullani** 积分定义为

$$\mathbf{F}_{a,b}(f) := \int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx. \quad (5.5.25)$$

定理5.5.24. 假设 $f \in C[0, \infty)$.

(1) 如果极限 $f(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在且有限, 则

$$\mathbf{F}_{a,b}(f) = [f(0) - f(\infty)] \ln \frac{b}{a}. \quad (5.5.26)$$

(2) 如果极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 不存在但是反常积分

$$\int_A^\infty \frac{f(x)}{x} dx$$

对某个 $A > 0$ 收敛, 则

$$\mathbf{F}_{a,b}(f) = f(0) \ln \frac{b}{a}. \quad (5.5.27)$$

证明: 对任给一个闭区间 $[\alpha, \beta] \subseteq (0, \infty)$, 我们得到

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx &= \int_{a\alpha}^{a\beta} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{b\alpha}^{b\beta} \frac{f(t)}{t} dt \\ &= \int_{a\alpha}^{b\alpha} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{a\beta}^{b\beta} \frac{f(t)}{t} dt = f(\xi) \int_{a\alpha}^{b\alpha} \frac{dt}{t} - f(\eta) \int_{a\beta}^{b\beta} \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

其中 $\xi \in [a\alpha, b\alpha]$ 和 $\eta \in [a\beta, b\beta]$.

(1) 令 $\alpha \rightarrow 0+$ 和 $\beta \rightarrow \infty$, 我们得到

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{a,b}(f) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0+, \beta \rightarrow \infty} \int_\alpha^\beta \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx \\ &= \left[\lim_{\xi \rightarrow 0+} f(\xi) - \lim_{\eta \rightarrow \infty} f(\eta) \right] \ln \frac{b}{a} = [f(0) - f(\infty)] \ln \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

(2) 在这种情形, 注意到

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{a\beta}^{b\beta} \frac{f(t)}{t} dt = 0.$$

所以

$$\mathbf{F}_{a,b}(f) = \lim_{a \rightarrow 0+} \int_{a\alpha}^{b\alpha} \frac{f(t)}{t} dt = f(0) \ln \frac{b}{a}. \quad \square$$

例5.5.25. 令 $a, b > 0$, 计算下列反常积分

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx, \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} dx, \quad \int_0^{\infty} \frac{b \sin(ax) - a \sin(bx)}{x^2} dx.$$

对第一个积分, 取 $f(x) = e^{-x}$ 从而得到 $\mathbf{F}_{a,b}(f) = [f(0) - f(\infty)] \ln \frac{b}{a} = \ln \frac{b}{a}$.

§5.5.6 * 对数积分和素数基本定理

Gauss 引入的对数积分定义如下

$$\mathbf{li}(x) := \mathbf{P.V.} \int_0^x \frac{dt}{\ln t} = \lim_{\epsilon \downarrow 0+} \left(\int_0^{1-\epsilon} + \int_{1+\epsilon}^x \right) \frac{dt}{\ln t}, \quad c \geq 2. \quad (5.5.28)$$

如上的积分可以写为

$$\mathbf{li}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left(\int_0^{1-\epsilon} + \int_{1+\epsilon}^2 \right) \frac{dt}{\ln t} + \mathbf{Li}(x), \quad (5.5.29)$$

其中

$$\mathbf{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\ln t} \quad (5.5.30)$$

是一个定积分. 为了证明 $\mathbf{li}(x)$ 中的第一部分是定义的, 令 $s = 2 - t$ 得到

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left(\int_0^{1-\epsilon} + \int_{1+\epsilon}^2 \right) \frac{dt}{\ln t} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left(\int_0^{1-\epsilon} \frac{dt}{\ln t} + \int_0^{1-\epsilon} \frac{ds}{\ln(2-s)} \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left(\int_{\epsilon}^1 \frac{du}{\ln(1-u)} + \int_{\epsilon}^1 \frac{du}{\ln(1+u)} \right) = \int_0^1 \left[\frac{1}{\ln(1-u)} + \frac{1}{\ln(1+u)} \right] du. \end{aligned}$$

根据

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0+} u^{1/2} \left[\ln \frac{1}{(1-u)} + \frac{1}{\ln(1+u)} \right] &= \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{u^{-1/2}}{2} [-(1-u) + (1+u)] \\ &= \lim_{u \rightarrow 0+} u^{1/2} = 0, \end{aligned}$$

我们发现上述反常积分是收敛的, 从而 $\mathbf{li}(x)$ 对任意 $x \geq 2$ 都是有限的.

分部积分马上得到

$$\mathbf{Li}(x) = \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2} + \int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t} = \frac{x}{\ln x} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right). \quad (5.5.31)$$

著名的素数分布定理是说如下的渐进关系

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \sim \mathbf{Li}(x) \sim \mathbf{li}(x) \quad (5.5.32)$$

当 $x \rightarrow \infty$ 时成立, 这里函数 $\pi(x)$ 表示不超过 x 的所有素数之和. 在 1850 年, 俄国数学家 **Chebyshev** 证明了不等式

$$c_1 \frac{x}{\ln x} \leq \pi(x) \leq c_2 \frac{x}{\ln x} \quad (5.5.33)$$

对所有 $x \geq 10$ 都成立, 这里

$$c_1 := \ln \frac{2^{1/2} 3^{1/3} 5^{1/5}}{30^{1/30}} \approx 0.921292 \quad \text{和} \quad c_2 := \frac{6}{5} c_1 \approx 1.1055 \quad (5.5.34)$$

是两个接近于 1 的常数.

§5.5.7 * Dirichlet 核

对任意 $x \in \mathbb{R}$, 令 $\omega := e^{ix}$. Dirichlet 核定义为

$$D_N(x) := \sum_{-N \leq n \leq N} \omega^n, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (5.5.35)$$

根据定义我们计算得到

$$\begin{aligned} D_N(x) &= \sum_{0 \leq n \leq N} \omega^n + \sum_{-N \leq n \leq -1} \omega^n = \frac{1 - \omega^{N+1}}{1 - \omega} + \frac{\omega^{-N} - 1}{1 - \omega} \\ &= \frac{\omega^{-N} - \omega^{N+1}}{1 - \omega} = \frac{\sin[(N + \frac{1}{2})x]}{\sin \frac{1}{2}x}. \end{aligned} \quad (5.5.36)$$

另一方面, 根据 $D_N(x)$ 的原始定义得到如下恒等式

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = 1 \quad (5.5.37)$$

对任意 $N \in \mathbb{N}$ 都成立. 然而, 我们可以证明如下关于 $|D_N(x)|$ 积分的下界

$$L_N := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)| dx \geq \frac{4}{\pi^2} \ln N + \frac{4}{\pi^2} \left(\gamma + \frac{1}{2N+1} \right) \quad (5.5.38)$$

其中 $\gamma := \lim_{N \rightarrow \infty} a_N$ 是 Euler 常数, 这里 $a_N := \sum_{1 \leq k \leq N} \frac{1}{k} - \ln N$. 为了得到下界, 我们首先把 L_N 写成

$$L_N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin[(N + \frac{1}{2})x]}{\sin \frac{1}{2}x} \right| dx.$$

对任意 $x \in [0, \pi/2]$, 我们有 $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$. 从而

$$\begin{aligned} L_N &\geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin[(N + \frac{1}{2})x]|}{|x|} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{N\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{|\sin \theta|}{\theta} d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{0 \leq k \leq N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin \theta|}{\theta} d\theta + \int_{N\pi}^{N\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{|\sin \theta|}{\theta} d\theta \\ &\geq \frac{2}{\pi} \sum_{0 \leq k \leq N-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin \theta| d\theta + \frac{2}{\pi(2N+1)} \int_{N\pi}^{N\pi + \frac{\pi}{2}} |\sin \theta| d\theta \\ &= \frac{4}{\pi^2} \sum_{1 \leq k \leq N} \frac{1}{k} + \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{2N+1} \geq \frac{4}{\pi^2} \ln N + \frac{4}{\pi^2} \left(\gamma + \frac{1}{2N+1} \right). \end{aligned}$$

进一步我们可以得到 L_N 一个上界

$$L_N \leq \frac{2}{\pi} \ln N + 2 \left(\frac{1}{\pi} + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta \right). \quad (5.5.39)$$

事实上,

$$\begin{aligned}
 L_N &\leq \int_0^\pi \frac{|\sin[(N + \frac{1}{2})x]|}{|x|} dx = \int_0^{N\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{|\sin \theta|}{\theta} d\theta \\
 &\leq \sum_{1 \leq k \leq N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin \theta|}{\theta} d\theta + \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta + \int_{N\pi}^{N\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{|\sin \theta|}{\theta} d\theta \\
 &\leq \sum_{1 \leq k \leq N-1} \frac{2}{k\pi} + \frac{2}{N\pi} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta = \frac{2}{\pi} \sum_{1 \leq k \leq N} \frac{1}{k} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta \\
 &\leq \frac{2}{\pi} (\ln N + 1) + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta = \frac{2}{\pi} \ln N + 2 \left(\frac{1}{\pi} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta \right).
 \end{aligned}$$

结合上述两个不等式, 我们粗略地得到 (舍去那些常数因子)

$$L_N \approx \ln N \quad (5.5.40)$$

当 $N \rightarrow \infty$. 更进一步的精细计算我们可以断言 (参见推论16.2.24)

$$L_N = \frac{4}{\pi^2} \ln N + O(1), \quad N \rightarrow \infty, \quad (5.5.41)$$

即存在一个常数 $C > 0$ 使得不等式

$$\left| L_N - \frac{4}{\pi^2} \ln N \right| \leq C \quad (5.5.42)$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时成立.

§5.6 定积分的应用

本节主要讨论定积分在几何中的应用, 和利用级数来近似计算椭圆积分.

§5.6.1 面积

假设区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 定义如下

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq g(x) \leq y \leq f(x)\}.$$

则 D 的面积为

$$|D| = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx. \quad (5.6.1)$$

如果区域 D 的参数化方程为

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

这里 $x, y \in C^1([\alpha, \beta])$, $x'(t) \neq 0$, $x(\alpha) = a$, 且 $x(\beta) = b$. 此时

$$|D| = \int_\alpha^\beta |y(t)x'(t)| dt = \int_\alpha^\beta |x(t)y'(t)| dt = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta |y(t)dx(x) - x(t)dy(t)|. \quad (5.6.2)$$

如果区域 D 在极坐标下可写成

$$r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta), \quad \alpha \leq \theta \leq \beta, \quad r \in C([\alpha, \beta]), \quad \beta - \alpha \leq 2\pi,$$

则得到

$$|D| = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [r_2^2(\theta) - r_1^2(\theta)] d\theta. \quad (5.6.3)$$

另一方面如果区域 D 在极坐标下可写成

$$\theta_1(r) \leq \theta \leq \theta_2(r), \quad a \leq r \leq b, \quad \theta \in C([a, b]),$$

则得到

$$|D| = \int_a^b [\theta_2(r) - \theta_1(r)] r dr. \quad (5.6.4)$$

例5.6.1. (1) 计算由曲线 $y^2 = 2x$ 和直线 $y = x - 4$ 所围成的区域的面积.

解: 区域由两部分组成, 故

$$\begin{aligned} |D| &= \int_0^2 (\sqrt{2x} + \sqrt{2x}) dx + \int_2^4 [\sqrt{2x} - (x - 4)] dx \\ &= 2\sqrt{2} \frac{3}{2} x^{3/2} \Big|_0^2 + \frac{3}{\sqrt{2}} x^{3/2} \Big|_2^4 - \frac{(x-4)^2}{2} \Big|_2^4 = 18. \quad \square \end{aligned}$$

§5.6.2 弧长

考虑平面曲线

$$C: x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

取任意分割 $T: \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ 并令 $\|T\| := \max_{1 \leq i \leq n} t_i$. 对每个 i 记

$$P_i := (x(t_i), y(t_i)).$$

称平面曲线 C 是**可求长的(rectifiable)** 如果极限

$$\lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{1 \leq i \leq n} |P_{i-1}P_i|$$

存在且和分割 T 的选取无关. 这个极限称为平面曲线 C 的**弧长(arc length)** 并记作 $|C|$. 如果进一步假设 $x, y \in C^1([\alpha, \beta])$, 则得到

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2} = \sqrt{|x'(\eta_i)|^2 + |y'(\eta_i^*)|^2} \Delta t_i,$$

其中 $\eta_i, \eta_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$. 上式可写成

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{|x'(\eta_i)|^2 + |y'(\eta_i)|^2} \Delta t_i + \clubsuit_i,$$

其中

$$\spadesuit_i := \left(\sqrt{|x'(\eta_i)|^2 + |y'(\eta_i^*)|^2} - \sqrt{|x'(\eta_i)|^2 + |y'(\eta_i)|^2} \right) \Delta t_i.$$

因为 y' 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致连续, 对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 只要 $|\eta - \eta^*| < \delta$ 都有

$$|y'(\eta)^2 - y'(\eta^*)^2| < \left(\frac{\epsilon}{\beta - \alpha} \right)^2$$

成立, 从而得到

$$\sum_{1 \leq i \leq n} |\spadesuit_i| \leq \sqrt{|y'(\eta_i)|^2 - |y'(\eta_i^*)|^2} \Delta t_i \leq \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\epsilon \Delta t_i}{\beta - \alpha} = \epsilon.$$

如果 $x, y \in C^1([\alpha, \beta])$ 且

$$|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2 \neq 0, \quad \forall t \in [\alpha, \beta],$$

称曲线 $C: (x(t), y(t))$ 是光滑曲线(smooth curve). 如果曲线是由有限多条光滑曲线所构成, 则该曲线称为分段光滑的(piecewise smooth).

定理5.6.2. 如果 $C: (x(t), y(t)), \alpha \leq t \leq \beta$, 是分段光滑曲线, 则其是可求长的且弧长为

$$|C| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt =: \int_{\alpha}^{\beta} ds, \quad (5.6.5)$$

其中 $ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$ 称为弧长微元(arc length element).

特别地

(1) 如果 $y = f(x), a \leq x \leq b$, 则

$$|C| = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx. \quad (5.6.6)$$

(2) 如果 $r = r(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta$, 则 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 从而得到

$$\begin{aligned} |C| &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[r'(\theta) \cos \theta - r(\theta) \sin \theta]^2 + [r'(\theta) \sin \theta + r(\theta) \cos \theta]^2} d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{|r(\theta)|^2 + |r'(\theta)|^2} d\theta. \end{aligned} \quad (5.6.7)$$

例5.6.3. (1) 如果 $x = a \cos t, y = b \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$, 则得到

$$|C| = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt.$$

对 \mathbb{R}^3 中的曲线 $C: (x, y, z) = (x(t), y(t), z(t)), \alpha \leq t \leq \beta$, 得到弧长公式

$$|C| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt. \quad (5.6.8)$$

§5.6.3 曲率

给定平面上一条光滑曲线 C . 取定固定点 M 和动点 N , 则得到 \widehat{MN} 的弧长 Δs . N 处和 M 处的切线与 x 正轴的夹角差记为 $\Delta\alpha$. 定义 M 处的曲率为

$$\kappa := \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right|. \quad (5.6.9)$$

注意, 这里的曲率总为非负的. 但是在微分几何里, 曲率是带符号的.

现在假设光滑曲线 $C: (x, y) = (x(t), y(t)), \alpha \leq t \leq \beta$, 且 $x, y \in D^2([\alpha, \beta])$. 则得到

$$\tan \alpha := \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{dy}{dx} \implies \alpha = \arctan \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

因此

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{1 + \frac{y'(t)^2}{x'(t)^2}} \cdot \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{x'(t)^2} = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{x'(t)^2 + y'(t)^2}.$$

利用 $ds/dt = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ 得到

$$\kappa = \left| \frac{d\alpha/dt}{ds/dt} \right| = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{[x'(t)^2 + y'(t)^2]^{3/2}}. \quad (5.6.10)$$

特别地如果曲线 C 是由 $(x, y) = (x, y(x))$ 所给出, 则

$$\kappa = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}. \quad (5.6.11)$$

称 $R := 1/\kappa$ ($\kappa \neq 0$) 为曲线的**曲率半径(radius of curvature)**.

例5.6.4. (1) 球曲线 $xy = 4$ 在 $(1, 4)$ 处的曲率.

解: $\kappa = (8/x^3)/(1 + 16/x^4)^{3/2}$. 故 $\kappa_{(1,4)} = 8/17^{3/2}$. \square

(2) 如果曲线在极坐标下写成 $r = r(\theta) \in D^2$, 则

$$\kappa = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}. \quad (5.6.12)$$

证: 计算得到

$$x' = r' \cos \theta - r \sin \theta, \quad x'' = r'' \cos \theta - 2r' \sin \theta - r \cos \theta,$$

和

$$y' = r' \sin \theta + r \cos \theta, \quad y'' = r'' \sin \theta + 2r' \cos \theta - r \sin \theta.$$

则得到

$$x'y'' - x''y' = r^2 + 2r'^2 - rr'', \quad x'^2 + y'^2 = r^2 + r'^2. \quad \square$$

(3) 计算曲线 $y = \ln x, x > 0$, 的曲率的最大值.

解: 计算得到

$$\kappa = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{1/x^2}{(1+1/x^2)^{3/2}} = \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$$

且

$$\kappa' = \frac{1-2x^2}{(1+x^2)^{5/2}}.$$

因此 $\kappa_{\max} = \kappa_{1/\sqrt{2}} = 2/3\sqrt{3}$. \square

(4) 求曲线 $r = a(1 + \cos \theta)$, $a > 0$, 在 $\theta = 0$ 处的曲率.

解: 计算得到 $\kappa = (3/2\sqrt{2}a)(1 + \cos \theta)^{-2}$, 故 $\kappa_0 = 3/4a$. \square

§5.6.4 体积

假设 \mathbb{R}^3 中的区域 Ω 定义为

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | a \leq x \leq b, (y, z) \in D_x\}$$

且 $|D_x| = A(x)$. 此时根据定积分定义得到区域 Ω 的

$$|\Omega| = \int_a^b A(x) dx. \quad (5.6.13)$$

现在考虑平面上曲线 $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, 绕着 x 轴旋转一周后形成的区域 Ω 的体积. 此时对 $[a, b]$ 的任意分割 T , 小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 旋转一周后形成的区域的体积近似为

$$\pi f(\xi_i)^2 \Delta x_i, \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

从而 Ω 的体积为

$$|\Omega| = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{1 \leq i \leq n} \pi f(\xi_i)^2 \Delta x_i = \int_a^b \pi f(x)^2 dx. \quad (5.6.14)$$

现在考虑平面上曲线 $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, 绕着 y 轴旋转一周后形成的区域 Ω 的体积. 此时对 $[a, b]$ 的任意分割 T , 小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 旋转一周后形成的区域的体积近似的为

$$f(x_i)\pi x_i^2 - f(x_{i-1})\pi x_{i-1}^2 \approx f(\xi_i)\pi(x_i^2 - x_{i-1}^2) = 2\pi\xi_i f(\xi_i)\Delta x_i, \quad \xi_i := \frac{x_i + x_{i-1}}{2}.$$

从而 Ω 的体积为

$$|\Omega| = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{1 \leq i \leq n} \pi f(\xi_i)^2 \Delta x_i = \int_a^b 2\pi x f(x) dx. \quad (5.6.15)$$

例5.6.5. (1) 计算椭球体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

的体积.

解: 固定 $x \in (a, a)$ 得到

$$\frac{y^2}{b^2(1-x^2/a^2)} + \frac{z^2}{c^2(1-x^2/a^2)} = 1.$$

因此体积为

$$V = \int_a^b \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi bc \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) \Big|_{-a}^a = \frac{4}{3}\pi abc. \quad \square$$

(2) 计算曲线 $y = e^x - 11, 0 \leq x \leq \ln 3$, 绕着 x 轴旋转一周后形成的区域的体积.

解: 计算得到

$$V = \int_0^{\ln 3} (e^x - 11)^2 dx = \pi \int_0^{\ln 3} (e^{2x} - 2e^x + 1) dx = \pi \ln 3. \quad \square$$

(3) 计算曲线 $y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi$, 绕着 y 轴旋转一周后形成的区域的体积.

解: 计算得到

$$V = \int_0^\pi 2\pi x \sin x dx = 2\pi \int_0^\pi -x d \cos x = 2\pi^2. \quad \square$$

§5.6.5 旋转曲面的表面积

考虑曲线 $C: (x, y) = (x(t), y(t)), y \geq 0, \alpha \leq t \leq \beta$, 绕着 x 轴旋转一周后形成的曲面 Σ . 对任意分割 $T: \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$, 小区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 旋转一周后形成的曲面的表面积为

$$\pi[y(t_{i-1}) + y(t_i)] \widehat{P_{i-1}P_i}, \quad P_{i-1} := (x(t_{i-1}), y(t_{i-1})), \quad P_i = (x(t_i), y(t_i)).$$

因此得到表面积为

$$S = |\Sigma| = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{1 \leq i \leq n} \Delta S_i = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt. \quad (5.6.16)$$

特别地

(1) 如果 $(x, y) = (x, f(x)), a \leq x \leq b$, 则得到

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx. \quad (5.6.17)$$

(2) 如果 $(x, y) = (r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta), \alpha \leq \theta \leq \beta$, 则得到

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta r(\theta) \sin \theta \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} d\theta. \quad (5.6.18)$$

§5.6.6 * 椭圆积分

回顾三类椭圆不定积分 (5.2.49), (5.2.51) 和 (5.2.52). 椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b > a > 0,$$

的弧长为

$$L = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} d\theta = 4b \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta,$$

其中 $k := \sqrt{b^2 - a^2}/b$.

(1) 第 1 类完备椭圆积分

$$\mathbf{K}(k) := \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad 0 \leq k \leq 1. \quad (5.6.19)$$

(2) 第 2 类完备椭圆积分

$$\mathbf{E}(k) := \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta, \quad 0 \leq k \leq 1. \quad (5.6.20)$$

从而

$$L = 4b \mathbf{E} \left(\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} \right).$$

(3) 第 3 类完备椭圆积分

$$\mathbf{II}(n, k) := \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \theta)(1 - n \sin^2 \theta)}}, \quad 0 \leq k \leq 1. \quad (5.6.21)$$

根据定义易证

$$\mathbf{E}' = \frac{\mathbf{E} - \mathbf{K}}{k}, \quad \mathbf{K}' = \frac{\mathbf{E}}{k(1 - k^2)} - \frac{\mathbf{K}}{k}. \quad (5.6.22)$$

Gauss 给出了利用级数来近似求解 \mathbf{K} . 给定 $a_1 > b_1 > 0$ 并定义

$$a_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_n := \sqrt{a_n b_n}.$$

则可证

- $a_n \searrow$ 和 $b_n \nearrow$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n =: L(a_1, b_1)$ 存在.
- $L(a_1, b_1) = \pi/2G(a_1, b_1)$, 这里

$$G(a_1, b_1) := \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{a_1^2 \cos^2 x + b_1^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{a_1} \mathbf{K} \left(\frac{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}}{a_1} \right).$$

事实上, 前面两个显然. 对第三个引入

$$\sin x := \frac{2a_1 \sin t}{(a_1 + b_1) + (a_1 - b_1) \sin^2 t}, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

计算可得

$$\frac{dx}{\sqrt{a_1^2 \cos^2 x + b_1^2 \sin^2 x}} = \frac{dt}{\sqrt{a_2^2 \cos^2 t + b_2^2 \sin^2 t}}$$

从而

$$G(a_1, b_1) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{a_2^2 \cos^2 t + b_2^2 \sin^2 t}} = \cdots = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 x + b_n^2 \sin^2 x}}.$$

因为 $a_n > b_n$, 所以 $\pi/2a_n \leq G \leq \pi/2b_n$ 故 $G = \pi/2L$.

比如取 $(a_1, b_1) = (\sqrt{2}, 1)$ 和 $n = 5$ 得到

$$L(\sqrt{2}, 1) \approx 1.198154, \quad G(\sqrt{2}, 1) \approx 1.3110138.$$

§5.7 参考文献

1. Koblitz, Neal. *Introduction to elliptic curves and modular forms*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics 97, Springer-Verlag, New York, 1993. x+248 pp. ISBN: 0-387-97966-2
2. 布鲁斯·C. 伯恩特 (Bruce C. Berndt) 主编: 拉玛努金笔记(第 2, 3, 4 卷), 哈尔滨工业大学出版社, 2019.
3. 徐森林, 薛春华 编著: 数学分析, 清华大学出版社, 2005.
4. 张福保, 薛金美, 潮小李 主编: 数学分析讲义, 科学出版社, 2019.
5. 梅加强 编著: 数学分析, 高等教育出版社, 2015.
6. 邓建平 编: 微积分 I 和 II, 科学出版社, 2019.
7. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis I*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+574 pp. ISBN: 3-540-40386-8
8. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis II*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xvi+681 pp. ISBN: 3-540-40633-6

9. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis I*, Translated from the 1988 German original by Gary Brookfield, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. xiv+426 pp. ISBN: 3-7643-7153-6
10. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis II*, Translated from the 1999 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. xii+400 pp. ISBN: 978-3-7643-7472-3; 3-7643-7472-3
11. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis III*, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. xii+468 pp. ISBN: 978-3-7643-7479-2; 3-7643-7479-2
12. 菲赫金哥尔茨 著 (徐献瑜, 冷生明, 梁文骐 译; 郭思旭 校): *微积分学教程* (第一、二、三卷), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.
13. 吉米多维奇 著 (李荣涑, 李植 译): *数学分析习题集* (根据 2010 年俄文版翻译), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.
14. 汪林 著: *数学分析中的问题和反例*, 现代数学基础 56, 高等教育出版社, 2015.
15. 裴礼文 编著: *数学分析中的典型问题与方法* (第二版), 高等教育出版社, 2015.
16. 朱尧辰 编著: *数学分析例选通过范例学技巧*, 哈尔滨工业大学出版社, 2013.
17. 周民强 编著: *数学分析习题演练* (第一、二、三册), 科学出版社, 2018.
18. 李逸 编著: *数学分析讲义*, 上海交通大学数学分析课讲义, 未出版, 2016.

第六章 级数理论

大学功夫即是明明德,明明德只是固诚意,诚意的工夫只是格物致知. 若以诚意为主,去用格物致知的工夫,即工夫始有下落,即为善去恶无非是诚意的事. —《传习录》理学编卷一

§6.1 数项级数

级数是一种特殊的极限过程,在之前的章节中或多或少已经接触了一些级数. 本节我们来系统地研究数项级数的性质.

§6.1.1 数项级数

考虑一个完整的披萨并假设其面积为 1. 现将这个披萨对半分,每部分面积都为 $1/2$; 对其中的半分再对半分,每部分面积都为 $1/4$; 这个过程继续下去就得到如下的公式

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots.$$

一般地,给定数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$, 形式和

$$\sum_{n \geq 1} a_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots, \quad (6.1.1)$$

称为**数项级数(numerical series)**或者**无穷级数(infinite series)**, 并称 a_n 为**通项(general term)**. 为了简便就直接称为**级数(series)**.

但是 (6.1.1) 不一定有意义, 比如取 $a_n = 1$, 则 $\sum_{n \geq 1} n = +\infty$. 有时候把首项 a_1 的下标取成 0, 即首项为 a_0 , 会更加方便, 特别是在考虑两个级数的乘积.

为了研究级数性质, 作截断得到**部分和(partial sum)**

$$S_n := \sum_{1 \leq k \leq n} a_k. \quad (6.1.2)$$

称级数 (6.1.1) 是**收敛的(convergent)** 如果部分和数列 $S_{n \geq 1}$ 是收敛的, 否则就称级数 (6.1.1) 是**发散的(divergent)**. 如果级数 (6.1.1) 收敛则

$$\sum_{n \geq 1} a_n = S := \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

称 S 为级数 (6.1.1) 的**和(sum)**.

§6.1.2 数项级数的 Cauchy 收敛

利用数列的 Cauchy 收敛原理得到了关于级数的 Cauchy 收敛判别法.

定理6.1.1. (Cauchy 收敛准则) 级数 (6.1.1) 收敛 $\iff \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \forall p \in \mathbb{N}$,

$$\left| \sum_{1 \leq i \leq p} a_{n+i} \right| < \epsilon. \quad (6.1.3)$$

上述定理则给出了级数 (6.1.1) 不收敛的判别法则:

$$(6.1.1) \text{ 不收敛} \iff \left(\begin{array}{l} \exists \epsilon_0 > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n > N \\ \exists p \in \mathbb{N} \text{ 满足 } |\sum_{1 \leq i \leq p} a_{n+i}| > \epsilon_0 \end{array} \right).$$

作为直接推论得到

推论6.1.2. (1) (级数收敛的必要条件) 级数 (6.1.1) 收敛 \implies

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0. \quad (6.1.4)$$

(2) 在级数 (6.1.1) 中改变有限项 (去掉、增加、调整次序或改变这有限项的值) 并不改变其收敛性. 当然在收敛时可能会改变级数的和.

(3) 假设级数 (6.1.1) 收敛, 则对其任意添加括号 (但不改变次序) 后得到的级数也收敛且和保持不变.

证: (1) 记 $S = \sum_{n \geq 1} a_n$ 和 $S_n = \sum_{1 \leq k \leq n} a_k$. 则得到 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$.

(2) 在定理 (6.1.1) 中取充分大的 N 避开这些有限项.

(3) 考虑添括号为

$$(a_1 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots + (a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}) + \cdots,$$

并记 ($n_0 := 0$)

$$b_k := a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}, \quad k \geq 1.$$

则得到级数 $\sum_{n \geq 1} b_n$ 和部分和 $T_n := b_1 + \cdots + b_n$. 因为

$$T_1 = S_{n_1}, \quad T_2 = S_{n_2}, \quad \cdots, \quad T_k = S_{n_k},$$

所以 $\{T_n\}_{n \geq 1}$ 是 $\{S_n\}_{n \geq 1}$ 的子列. 故 $\{T_n\}_{n \geq 1}$ 收敛且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

从而级数 $\sum_{n \geq 1} b_n$ 收敛且 $\sum_{n \geq 1} b_n = \sum_{n \geq 1} a_n$. \square

例6.1.3. (1) (6.1.3) \Rightarrow (6.1.1), 比如考察级数 $\sum_{n \geq 1} a_n$, 其中 $a_n = 1/n$.

(2) 几何级数(geometric series):

$$\sum_{n \geq 0} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + .$$

因为部分和为

$$S_n = \sum_{0 \leq k \leq n-1} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1, \\ n, & q = 1. \end{cases}$$

所以得到

$$\sum_{n \geq 0} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, & |q| < 1, \\ \text{发散}, & q = -1, \\ +\infty, & q = 1, \\ +\infty, & |q| > 1. \end{cases} \quad (6.1.5)$$

(3) 调和级数(harmonic series):

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}, \quad S_n := 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

因为 $S_n - \ln n \rightarrow \gamma$ (Euler 常数), 所以 $\sum_{n \geq 1} 1/n$ 发散. 如果用 ϵ - δ 语言写出来如下:

$$\left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right| \geq \frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + \cdots + \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2};$$

故 $\exists \epsilon_0 = \frac{1}{2} \forall N \in \mathbb{N} \exists n > N \exists p = n \in \mathbb{N}$ 使得 $\sum_{1 \leq i \leq n} 1/(n+i) > 1/2$.

如果我们把级数放到复数域 \mathbb{C} 里, 则考虑 **Riemann ζ 函数(Riemann zeta function)**:

$$\zeta(z) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (6.1.6)$$

我们可以证明级数 (此时称为函数项级数, 因为既有 n 又有 z ; 特别地, 当 $z > 1$ 时可以利用下节中的积分判别法来证明) (6.1.6) 收敛如果 $\operatorname{Re}(z) > 1$. 级数 (6.1.6) 是 **Riemann** 引入来研究素数定理从而引出了著名的 **Riemann 假设(Riemann hypothesis)**:

(6.1.6) 的非平凡零点只能位于 $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$ 处.

这里何为“非平凡零点”则需要进一步的复变知识来解释, 具体细节在之后的章节中给出. 注意到

$$\zeta(1) = \text{发散}, \quad \zeta(2) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{Euler}).$$

$\zeta(2)$ 的收敛性可立即得到, 但是和的精确值在 Fourier 级数这章给出, 当然也有其它方法得到 (参见 (2.3.2)). 可以证明 (γ 是 Euler 常数):

$$\gamma = \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n \zeta(n)}{n}, \quad (6.1.7)$$

$$\gamma = 1 - \ln 2 + \sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{\zeta(n) - 1}{n} \quad (\text{Euler}), \quad (6.1.8)$$

$$\gamma = 1 + \ln 2 - \ln 3 - \sum_{n \geq 1} \frac{\zeta(2n+1) - 1}{(2n+1)4^n} \quad (\text{Stieltjes}). \quad (6.1.9)$$

虽然调和级数是发散, 但是如果从中选取部分项构成的级数有可能是收敛的. 比如

$$\sum_{m=k^n, k, n \geq 2} \frac{1}{m-1} = 2, \quad (\text{Goldbach}), \quad (6.1.10)$$

$$\sum_{m=(2k)^n, k \geq 1, n \geq 2} \frac{1}{m-1} = 2, \quad (\text{Euler}). \quad (6.1.11)$$

这里求和不是对 k 和 n 同时求和, 而是对形如 $m = k^n$ 或 $m = (2k)^n$ 的所有 m 求和. 更一般地, 固定正整数 a 和 b , 且 $b = a$ 或 $b = a + 1$, 考虑集合

$$S_{a,b} := \{m \in \mathbb{N} \mid m = (ak + b)^n, \exists k \geq 0 \text{ 和 } n \geq 2\}.$$

则可证明

$$\sum_{m \in S_{a,b}} \frac{1}{m-1} = \frac{1}{a} \ln \frac{\Gamma(b/a)}{\Gamma((b-1)/a)}. \quad (6.1.12)$$

另一个简单例子是

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{3}{4}. \quad (6.1.13)$$

作为直接推论得到

$$\zeta(2) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{7}{4}.$$

(4) 因为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - 1/n)^n = 1/e \neq 0$, 所以级数 $\sum_{n \geq 1} (1 - 1/n)^n$ 发散.

(5) 计算级数

$$\sum_{n \geq 1} \frac{2n-1}{2^n}.$$

利用 (6.1.5) 得到

$$\sum_{n \geq 1} \frac{2n-1}{2^n} = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n} - \frac{1/2}{1-1/2} = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n} - 1.$$

因此只要计算级数

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n}, \quad S_n := \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{k}{2^k}.$$

即可. 根据部分和定义得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}S_n &= \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{k}{2^{k+1}} = \sum_{2 \leq \ell \leq n+1} \frac{\ell-1}{2^\ell} = \sum_{2 \leq \ell \leq n+1} \frac{\ell}{2^\ell} - \sum_{2 \leq \ell \leq n+1} \frac{1}{2^\ell} \\ &= \left(\frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2} + S_n \right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \right) \\ &= S_n - \frac{1}{2} + \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{\frac{1}{4}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}} = S_n - \frac{1}{2} + \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right). \end{aligned}$$

故

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \rightarrow 1 \implies S_n \rightarrow 2.$$

最后得到

$$\sum_{n \geq 1} \frac{2n-1}{2^n} = 2 \times 2 - 1 = 3.$$

在上述计算和证明过程中其实已经运用了如下定理.

定理6.1.4. 给定级数 $\sum_{n \geq 1} a_n$, $\sum_{n \geq 1} b_n$ 和常数 α, β .

- (1) 如果 $\alpha \neq 0$, $\sum_{n \geq 1} a_n$ 收敛 $\iff \sum_{n \geq 1} \alpha a_n$ 收敛.
 (2) $\sum_{n \geq 1} \alpha_n$ 和 $\sum_{n \geq 1} b_n$ 收敛 $\implies \sum_{n \geq 1} (\alpha a_n + \beta b_n)$ 收敛且

$$\sum_{n \geq 1} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n \geq 1} a_n + \beta \sum_{n \geq 1} b_n.$$

证: 利用定义和数列的四则运算性质. \square

注6.1.5. (1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n = a \neq 0 \implies \sum_{n \geq 1} a_n$ 发散.

(2) $\sum_{n \geq 1} a_n$ 收敛, $a_n \geq 0$, 且 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 单调递减 $\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n = 0$.

(3) $a_n \geq 0$ 且 $\sum_{n \geq 1} (a_n + a_{n+1})$ 收敛 $\implies \sum_{n \geq 1} a_n$ 收敛.

(4) $\sum_{n \geq 1} a_n$ 收敛且 $a_n \geq 0 \implies \sum_{n \geq 1} a_n^2$ 收敛.

(5) $\sum_{n \geq 1} a_n$ 收敛且 $a_n \geq 0 \implies \sum_{n \geq 1} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ 收敛.

(6) $a_n \leq c_n \leq b_n$ 且 $\sum_{n \geq 1} a_n$ 和 $\sum_{n \geq 1} b_n$ 收敛 $\implies \sum_{n \geq 1} c_n$ 收敛.

证: (1) 不失一般性不妨假设 $a > 0$. 因为 $a_n \sim \frac{a}{n}$ 所以 $\sum_{n \geq 1} a_n \sim a \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = +\infty$. 严格写出来的话, $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N$, 有 $|n a_n - a| < \epsilon$. 特别地, $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N$ 有 $a_n > a/2n$ 从而得到

$$\sum_{n \geq N} a_n \geq \sum_{n \geq N} \frac{a}{2n} = \frac{a}{2} \sum_{n \geq N} \frac{1}{n} \rightarrow +\infty.$$

(2) $\forall p$ 和 n 有 $p a_{n+p} \leq \sum_{n+1 \leq i \leq n+p} a_i$. 特别地

$$2n a_{2n} \leq 2 \sum_{n+1 \leq i \leq 2n} a_i, \quad (2n+1) a_{2n+1} \leq \frac{2n+1}{n+1} \sum_{n+1 \leq i \leq 2n+1} a_i.$$

因此得到

$$0 \leq na_n \leq 2 \sum_{[n/2]+1 \leq i \leq n} a_i.$$

由于级数 $\sum_{n \geq 1} q_n$ 收敛, 所以 $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = 0$.

(3) 记 $T_n := \sum_{1 \leq k \leq n} (a_k + a_{k+1})$, $S_n := \sum_{1 \leq k \leq n} a_k$, $T := \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$. 则

$$T_n = S_n + \sum_{2 \leq k \leq n+1} a_k = S_n + S_{n+1} - a_1 \implies T_n = 2S_n + a_{n+1} - a_1$$

即

$$S_n = \frac{T_n + a_1 - a_{n+1}}{2}.$$

另一方面级数 $\sum_{n \geq 1} (a_n + a_{n+1})$ 收敛得到 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + a_{n+1}) = 0$; 但是 $a_n \geq 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. 因此

$$S_n \rightarrow \frac{T + a_1 - 0}{2} = \frac{T + a_1}{2}.$$

(4) 级数收敛推出 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ 从而存在正数 $M > 0$ 使得 $0 \leq a_n \leq M$ 对所有 n 都成立. 因此 $\sum_{n+1 \leq i \leq n+p} a_i^2 \leq M \sum_{n+1 \leq i \leq n+p} a_i$, 故收敛.

(5) 利用算术几何平均不等式 $2\sqrt{a_n a_{n+1}} \leq a_n + a_{n+1}$.

(6) $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall p \in \mathbb{N}$ 有

$$-\epsilon < \sum_{n+1 \leq i \leq n+p} a_i, \quad \sum_{n+1 \leq i \leq n+p} b_i < \epsilon.$$

从而得到 $-\epsilon < \sum_{n+1 \leq i \leq n+p} c_i < \epsilon$. \square

例6.1.6. (1) 注(6.1.5) (4) 中条件 $a_n \geq 0$ 不能去掉, 反例为 $a_n = (-1)^n / \sqrt{n}$, 其中级数 $\sum_{n \geq 1} (-1)^n / \sqrt{n}$ 收敛性在 §6.3.2 中给出.

(2) 注(6.1.5) (4) 的逆命题不成立, 反例为, $a_n = 1/n$.

(3) $\sum_{n \geq 1} a_n$ 和 $\sum_{n \geq 1} b_n$ 发散 $\not\Rightarrow \sum_{n \geq 1} (a_n + b_n)$ 发散. 反例为 $a_n = \frac{1}{n}$ 和 $b_n = -\frac{1}{n}$.

(4) $\sum_{n \geq 1} a_n$ 和 $\sum_{n \geq 1} b_n$ 收敛 $\not\Rightarrow \sum_{n \geq 1} a_n b_n$ 收敛. 反例为 $a_n = \frac{(-1)^n}{n} = b_n$.

(5) $\sum_{n \geq 1} a_n$ 和 $\sum_{n \geq 1} b_n$ 发散 $\not\Rightarrow \sum_{n \geq 1} a_n b_n$ 发散. 反例为 $a_n = (-1)^n$ 和 $b_n = \frac{1}{n}$.

(6) $\sum_{n \geq 1} a_n$ 收敛和 $\sum_{n \geq 1} b_n$ 发散 $\not\Rightarrow \sum_{n \geq 1} a_n b_n$ 发散. 反例为 $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ 和 $b_n = n$.

(7) 如对每个固定 $p \in \mathbb{N}$ 都有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}) = 0 \not\Rightarrow \sum_{n \geq 1} a_n \text{ 收敛. 反例为 } a_n = \frac{1}{n}.$$

§6.2 正项级数

本节我们讨论正项级数收敛性的判别法则, 即考虑级数

$$\sum_{n \geq 1} a_n, \quad a_n \geq 0.$$

此时部分和

$$S_n := \sum_{1 \leq k \leq n} a_k$$

非负且单调递增. 因此得到

正项级数收敛 \iff 部分和有界.

为了得到更加有效和实用的判别法, 首先引入上、下极限.

§6.2.1 上极限和下极限

回顾

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \iff \left(\begin{array}{l} \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \\ |x_n - a| < \epsilon \end{array} \right).$$

并且我们知道收敛数列必有界, 但反之不一定成立.

给定有界数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 并令

$$\alpha_n := \inf_{k \geq n} \{x_k\}, \quad \beta_n := \sup_{k \geq n} \{x_k\}. \quad (6.2.1)$$

根据定义显然有 $\{\alpha_n\}_{n \geq 1}$ 单调递增和 $\{\beta_n\}_{n \geq 1}$ 单调递减. 从而根据定理(2.3.1) 得到

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n \equiv \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n := \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n \equiv \liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n := \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \quad (6.2.2)$$

存在. 称 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 和 $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 为数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 的上极限(upper limit)和下极限(lower limit).

如果数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 只有下界而没有上界, 同理可定义

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n := +\infty, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n.$$

如果数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 只有上界而没有下界, 同理可定义

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n := -\infty.$$

例6.2.1. (1) 求数列 $\{x_n = (-1)^n\}_{n \geq 1}$ 的上、下极限.

解: $\alpha_n = -1, \beta_n = 1$. 所以 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$ 和 $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = -1$. \square

(2) 求数列 $\{x_n = n \sin \frac{n\pi}{2}\}_{n \geq 1}$ 的上、下极限.

解: $\alpha_n = -\infty, \beta_n = +\infty$, 故 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ 和 $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty$. \square

定理6.2.2. 给定数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$.

$$(1) \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n.$$

$$(2) \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (-x_n) = -\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n \text{ 和 } \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (-x_n) = -\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n.$$

(3) 如果 $x_n > 0$, 则

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n}, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n}.$$

证: 直接利用定义可得到. \square

定理6.2.3. (1) $X_n \leq y_n \implies$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} y_n, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} y_n.$$

(2) 对任意数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 和 $\{y_n\}_{n \geq 1}$ 都有

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} y_n &\leq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (x_n + y_n) \\ &\leq \begin{cases} \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} y_n, \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} y_n, \end{cases} \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} y_n. \end{aligned}$$

(3) $x_n, y_n > 0 \implies$

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n \cdot \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} y_n &\leq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n y_n \\ &\leq \begin{cases} \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} y_n, \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n \cdot \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} y_n, \end{cases} \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} y_n. \end{aligned}$$

(4) 如果 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在, 则

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} y_n, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} y_n.$$

(5) 如果 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x \in (0, +\infty)$ 且 $y_n > 0$, 则

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} y_n, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \cdot \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} y_n.$$

证: (1) - (3) 利用定义可得. (4) - (5) 分别利用 (2) 和 (3). \square

定理6.2.4. (1) $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \iff$

$$\left(\begin{array}{l} (a) \exists \text{ 子列 } \{x_{n_k}\}_{k \geq 1} \subset \{x_n\}_{n \geq 1} \text{ 使得 } \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = a \text{ 成立,} \\ (b) \forall \text{ 收敛子列 } \{x_{n'_k}\}_{k \geq 1} \subset \{x_n\}_{n \geq 1} \text{ 有 } \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n'_k} =: a' \leq a. \end{array} \right)$$

(2) $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = b \iff$

$$\left(\begin{array}{l} (a) \exists \text{ 子列 } \{x_{n_k}\}_{k \geq 1} \subset \{x_n\}_{n \geq 1} \text{ 使得 } \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = b \text{ 成立,} \\ (b) \forall \text{ 收敛子列 } \{x_{n'_k}\}_{k \geq 1} \subset \{x_n\}_{n \geq 1} \text{ 有 } \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n'_k} =: b' \geq b. \end{array} \right)$$

证: 因为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty}(-x_n)$, 所以只要证明 (1) 即可. 如果 $a = +\infty$ 或 $a = -\infty$, 结论显然成立.

下面假设 a 是有限数. 记 $\beta_n = \sup_{k \geq n} \{x_k\}$ 并假设 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ 成立. 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = a$. 根据定义存在 $m_1 \in \mathbb{N}$ 满足 $a - 1 < \beta_{m_1} < a + 1$, 因此

$$a - 1 < \sup_{k \geq m_1} \{x_k\} < a + 1.$$

从而存在 $n_1 > m_1$ 满足 $a - 1 < x_{n_1} < a + 1$. 同样可得到 $n_2 > n_1$ 满足 $a - \frac{1}{2} < x_{n_2} < a + \frac{1}{2}$. 这个过程一直下去就得到严格递增数列 n_k 满足

$$a - \frac{1}{k} < x_{n_k} < a + \frac{1}{k}.$$

即存在子列 $\{x_{n_k}\}_{k \geq 1} \subset \{x_n\}_{n \geq 1}$ 使得 $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = a$ 成立. 对任意收敛子列 $\{x_{n'_k}\}_{k \geq 1} \subset \{x_n\}_{n \geq 1}$ 有 $x_{n'_k} \leq \beta_{n'_k}$ 故得到

$$a' = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n'_k} \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \beta_{n'_k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = a.$$

反之假设 (1) 中的 (a) 和 (b) 都成立, 不失一般性不妨假设 a 有限. 根据 $x_{n_k} \leq \beta_{n_k}$ 得到

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} \beta_{n_k} \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = a.$$

如果 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = c > a$, 则根据 (a) 得到收敛子列 $\{x_{n'_k}\}_{k \geq 1} \subset \{x_n\}_{n \geq 1}$ 使得 $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n'_k} = c > a$ 成立. 但是这个假设条件 (b) 矛盾, 从而必有 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$. \square

定理6.2.5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在 $\iff \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在且相等.

证: 假设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ 存在. 根据定义得到 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 的两个子列 $\{x_{n_k}\}_{k \geq 1}$ 和 $\{x_{n'_k}\}_{k \geq 1}$ 满足

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n'_k} = \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n.$$

因此 $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

反之, 根据 $\alpha_n \leq x_n \leq \beta_n$ 和夹逼定理, 定理2.2.3, 得到 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 的存在性. \square

例6.2.6. (1) $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 有界且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2x_n + x_{2n})$ 存在 $\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在.

证: 令 $a := \lim_{n \rightarrow +\infty} (2x_n + x_{2n})$. 则得到

$$a = \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (2x_n + x_{2n}) \leq 2 \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_{2n} \leq 2 \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n$$

和

$$a = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (2x_n + x_{2n}) \geq 2 \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_{2n} \geq 2 \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n.$$

故

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n. \quad \square$$

§6.2.2 正项级数判别法

在给出判别法之前, 首先看一个几个例子.

例6.2.7. (1) 考察实Riemann ζ 函数

$$\zeta(p) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

如果 $p = 1$, 即为调和级数, 故发散.

如果 $p < 1$, 部分和 $S_n > 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \rightarrow +\infty$.

如果 $p > 1$, 考察函数 $f(x) := 1/x^{p-1}$, $x > 0$. 因为 $f'(x) = (1-p)/x^p$, 根据微分中值定理, 定理4.5.3, 得到

$$f(n+1) - f(n) = \frac{1-p}{(n+\theta_n)^p}, \quad \exists \theta_n \in (0, 1).$$

所以

$$\frac{1}{(n+1)^p} < \frac{1}{1-p} \left[\frac{1}{(n+1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} \right].$$

从而部分和有上界

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k^p} < 1 + \frac{1}{1-p} \sum_{2 \leq k \leq n} \left[\frac{1}{k^{p-1}} - \frac{1}{(k-1)^{p-1}} \right] \\ &= 1 + \frac{1}{p-1} \left(1 - \frac{1}{n^{p-1}} \right) < \frac{p}{p-1}. \end{aligned}$$

(2) 证明

$$\sqrt{2} \leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \leq 2.$$

证: 因为

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} &= \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1} \cdot \sqrt{n+1}} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} \\ &= \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right), \end{aligned}$$

所以

$$\sqrt{2} \sum_{1 \leq n \leq N} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \leq S_N \leq 2 \sum_{1 \leq n \leq N} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right), \quad n \geq 1.$$

两边令 $N \rightarrow +\infty$ 得到所要的不等式. \square

定理6.2.8. (1) (比较判别法) 如果 $a_n, b_n \geq 0$ 且 $a_n \leq Mb_n$, 这里 $M > 0$, 则

(1.1) $\sum_{n \geq 1} b_n$ 收敛 $\implies \sum_{n \geq 1} a_n$ 收敛.

(1.2) $\sum_{n \geq 1} a_n$ 发散 $\implies \sum_{n \geq 1} b_n$ 发散.

(2) (比较判别法的极限形式) 如果 $a_n, b_n > 0$ 且

$$l := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

(2.1) $0 < l < +\infty$: $\sum_{n \geq 1} a_n$ 和 $\sum_{n \geq 1} b_n$ 具有相同的敛散性.

(2.2) $l = 0$: $\sum_{n \geq 1} b_n$ 收敛 $\implies \sum_{n \geq 1} a_n$ 收敛.

(2.3) $l = +\infty$: $\sum_{n \geq 1} b_n$ 发散 $\implies \sum_{n \geq 1} a_n$ 发散.

(3) 如果 $a_n, b_n > 0$ 且当 n 充分大时 a_n/b_n 单调递减, 则

(3.1) $\sum_{n \geq 1} b_n$ 收敛 $\implies \sum_{n \geq 1} a_n$ 收敛.

(3.2) $\sum_{n \geq 1} a_n$ 发散 $\implies \sum_{n \geq 1} b_n$ 发散.

(4) (Cauchy 判别法) 如果 $a_n \geq 0$ 且 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho \geq 0$, 则

(4.1) $\rho < 1$: $\sum_{n \geq 1} a_n$ 收敛.

(4.2) $\rho > 1$: $\sum_{n \geq 1} a_n$ 发散.

(4.3) $\rho = 1$: 无法判别.

(5) (D'Alembert 判别法) 如果 $a_n \geq 0$ 且

$$\bar{\rho} := \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =: \rho \geq 0,$$

则

(5.1) $\bar{\rho} < 1$: $\sum_{n \geq 1} a_n$ 收敛.

(5.2) $\rho > 1$: $\sum_{n \geq 1} a_n$ 发散.

(5.3) $\bar{\rho} \geq 1$ 或 $\rho \leq 1$: 无法判别.

(6) (积分判别法) 假设非负函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 并令

$$a_n := f(n), \quad S_n := \sum_{1 \leq k \leq n} a_k, \quad T_n := \int_1^n f(x) dx.$$

则 $\{S_n - T_n\}_{n \geq 1}$ 收敛且

$$\sum_{n \geq 1} a_n \text{ 收敛} \iff \int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ 收敛}.$$

证: (1) 可根据定义得出, 从而推出 (2) 和 (3).

(4) 假设 $\rho < 1$ 并取 $q = (1 + \rho)/2 \in (\rho, 1)$. 根据定理6.2.4 可知, $\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N$ 使得 $\sqrt[n]{a_n} < q < 1$ 成立, 即 $a_n < q^n, \forall n > N$. 由于 $\sum_{n \geq 1} q^n$ 收敛, 故 $\sum_{n \geq 1} a_n$ 收敛.

如果 $\rho > 1$, 则根据定理6.2.4 存在严格递增数列 $\{n_k\}_{k \geq 1}$ 使得 $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1$ 对充分大的 k 成立. 特别地 $a_{n_k} > 1$ 因此 $\sum_{n \geq 1} a_n$ 发散.

最后当 $\rho = 1$ 时, 这个判别法失效, 比如考察级数 $\sum_{n \geq 1} 1/n$ 和 $\sum_{n \geq 1} 1/n^2$.

(5) 证明和 (4) 类似. 当 $\rho = 1$, 取 $q = (1 + \rho)/2 \in (\rho, 1)$. 从而 $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N$ 有 $a_{n+1}/a_n < q$. 所以得到

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} < q, \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < q, \dots, \implies a_{N+p} < a_N q^p = \frac{a_N}{q^N} q^{N+p}.$$

令 $p \rightarrow +\infty$ 得到 $\sum_{n \geq 1} a_n$ 收敛.

当 $\rho > 1$ 时, $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N$ 使得 $a_{n+1}/a_n > 1$ 成立. 因此 $a_{n+1} > a_n$ 从而 $a_n \not\rightarrow 0$. 故级数发散.

当 $\rho \geq 1$ 或 $\rho \leq 1$ 时, 这个判别法失效, 比如考察级数 $\sum_{n \geq 1} 1/n$ 和 $\sum_{n \geq 1} 1/n^2$.

(6) 首先根据定义得到

$$a_{k+1} = f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k) = a_k.$$

故

$$S_n - T_n = \sum_{1 \leq k \leq n} a_k - \int_1^n f(x) dx = \sum_{1 \leq k \leq n-1} \left[a_k - \int_k^{k+1} f(x) dx \right] + a_n.$$

从而得到

$$0 \leq a_n \leq S_n - T_n \leq \sum_{1 \leq k \leq n-1} (a_k - a_{k+1}) + a_n \leq a_1,$$

即 $\{S_n - T_n\}_{n \geq 1}$ 有界. 另一方面

$$(S_{n+1} - T_{n+1}) - (S_n - T_n) = a_{n+1} - \int_n^{n+1} f(x) dx \leq 0,$$

所以 $\{S_n - T_n\}_{n \geq 1}$ 单调递减. 根据定理2.3.1 可知 $\{S_n - T_n\}_{n \geq 1}$ 收敛. 直接推论得到了最后的等价性. \square

例6.2.9. 判断如下级数的收敛性:

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{3\sqrt[n]{n}}, \quad \sum_{n \geq 1} \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^p, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{n^2(2 + (-1)^n)^n}{2^{2n+1}},$$

$$\sum_{n \geq 1} n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{x^n n!}{n^n}, \quad \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^p} \quad (p > 0).$$

解: (1) 因为

$$(\ln n)^{\ln n} = e^{\ln n(\ln \ln n)} = n^{\ln \ln n} > n^2, \quad n > e^{e^2},$$

所以

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} < \frac{1}{n^2}, \quad n > e^{e^2}.$$

因此级数收敛.

(2) 因为

$$\frac{1}{3\sqrt{n}} \bigg/ \frac{1}{n^2} = \frac{n^2}{3\sqrt{n}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty,$$

所以级数收敛.

(3) 利用Taylor公式展开 (4.7.15) 得到

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})} = e^{n(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}))}$$

和

$$\begin{aligned} \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^p &= \left[e - e^{1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})} \right]^p \\ &= e^p \left[1 - e^{-\frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})} \right]^p = e^p \left[\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]^p \sim (e/2)^p \frac{1}{n^p}. \end{aligned}$$

所以级数仅当 $p > 1$ 时收敛.

(4) 因为

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2(2 + (-1)^n)^n}{2^{2n+1}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2 3^n}{2^{2n+1}}} = \frac{3}{4} < 1,$$

所以级数收敛.

(5) 因为

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1) \tan \frac{\pi}{2^{n+2}}}{n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}} \rightarrow \frac{1}{2} < 1, \quad a_n := n \tan \frac{\pi}{2^{n+2}},$$

所以级数收敛.

(6) 因为

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^n x}{(n+1)^n} = \frac{x}{(1 + \frac{1}{n})^n} \rightarrow \frac{x}{e}, \quad a_n := \frac{x^n n!}{n^n},$$

所以当 $x < e$ 时级数收敛, 而当 $x > e$ 时级数发散. 如果 $x = e$, 则 $a_{n+1}/a_n = e/(1 + 1/n)^n > 1$, 此时级数发散.

(7) 因为

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx = \begin{cases} +\infty, & 0 < p \leq 1, \\ \frac{1}{p-1} \frac{1}{(\ln 2)^{p-1}}, & p > 1, \end{cases}$$

所以级数仅当 $p > 1$ 时收敛.

§6.2.3 当 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n/a_{n+1} = 1$ 时的判别法

D' Alembert 判别法对满足条件 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$ 的正项级数 $\sum_{n \geq 1} a_n$ 失效, 所以我们需要更加精细的判别法.

定理6.2.10. (1) (Kummer 判别法) 假设 $a_n, b_n > 0$.

(1.1) 如果存在 $\lambda > 0$ 满足

$$\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \geq \lambda > 0, \quad \forall n > N,$$

即 $\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{b_n}{b_{n+1}} \geq \lambda b_n$ ($\forall n > N$), 则 $\sum_{n \geq 1} a_n$ 收敛.

(1.2) 如果 $\sum_{n \geq 1} b_n$ 发散且

$$\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \leq 0, \quad \forall n > N,$$

即 $\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{b_n}{b_{n+1}} \leq 0$ ($\forall n > N$), 则 $\sum_{n \geq 1} a_n$ 发散.

(2) **(Raabe 判别法)** 假设 $a_n > 0$.

(2.1) $n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \geq r > 1$ ($\forall n > N$) $\implies \sum_{n \geq 1} a_n$ 收敛.

(2.2) $n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \leq 1$ ($\forall n > N$) $\implies \sum_{n \geq 1} a_n$ 发散.

(3) **(Rabbe 判别法的极限形式)** 假设 $a_n > 0$.

(3.1) $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = r > 1 \implies \sum_{n \geq 1} a_n$ 收敛.

(3.2) $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = r < 1 \implies \sum_{n \geq 1} a_n$ 发散.

(4) **(Gauss 判别法)** 假设 $a_n > 0$ 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\theta}{n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right), \quad \forall n > N.$$

则

(4.1) $\theta > 1 \implies \sum_{n \geq 1} a_n$ 收敛.

(4.2) $\theta \leq 1 \implies \sum_{n \geq 1} a_n$ 发散.

(5) **(Bertrand 判别法)** 假设 $a_n > 0$ 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\alpha_n}{n \ln n}, \quad \forall n > N.$$

则

(5.1) $\alpha_n \geq \mu > 1 \implies \sum_{n \geq 1} a_n$ 收敛.

(5.2) $\alpha_n \leq 1 \implies \sum_{n \geq 1} a_n$ 发散.

(6) (Gauss 判别法的一般形式) 假设 $a_n > 0$ 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}, \quad \forall n > N, \quad |\theta_n| \leq L.$$

则

(6.1) $\lambda > 1 \implies \sum_{n \geq 1} a_n$ 收敛.

(6.2) $\lambda = 1$ 且 $\mu > 1 \implies \sum_{n \geq 1} a_n$ 收敛.

(6.3) $\lambda = 1$ 且 $\mu \leq 1 \implies \sum_{n \geq 1} a_n$ 发散.

(6.4) $\lambda < 1 \implies \sum_{n \geq 1} a_n$ 发散.

(7) (Ermakor 判别法) 假设函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上连续, 严格正, 且单调递减.

(7.1) 如果 $f(e^x)e^x/f(x) \leq q < 1$ ($\forall x \geq x_0 \geq 1$) $\implies \sum_{n \geq 1} f(n)$ 收敛.

(7.2) 如果 $f(e^x)e^x/f(x) \geq 1$ ($\forall x \geq x_0 \geq 1$) $\implies \sum_{n \geq 1} f(n)$ 发散.

证: (1) 在假设条件 (1.1) 下得到

$$a_{n+1} \leq \frac{1}{\lambda} \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right), \quad \forall n \geq N.$$

所以

$$S_{n+1} \leq S_N + \frac{1}{\lambda} \sum_{N \leq k \leq n} \left(\frac{a_k}{b_k} - \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} \right) = S_N + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{a_N}{b_N} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right) \leq S_N + \frac{1}{\lambda} \frac{a_N}{b_N}.$$

数列 $\{S_n\}_{n \geq 1}$ 的有界性得到级数的收敛性.

在假设条件 (1.1) 下有 $a_n \geq (a_1/b_2)b_n$ 从而得到级数是发散的.

(2) 在 (1) 中取 $b_n = 1/n$.

(3) 显然.

(4) 在 (1) 中取 $b_n = 1/n \ln n$. 计算得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_n} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} &= n \ln n \left[1 + \frac{\theta}{n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right) \right] - (n+1) \ln(n+1) \\ &= (n+\theta) \ln n - (n+1) \ln(n+1) + o(1). \end{aligned}$$

如果 $\theta > 1$, 则存在正常数 $\lambda > 0$ 使得

$$\frac{1}{b_n} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} = (\theta - 1) \ln n - (n+1) \ln \frac{n+1}{n} + o(1) \geq \lambda > 0, \quad \forall b > N$$

成立, 这是因为

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) \ln \frac{n+1}{n} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

如果 $\theta < 1$, 则

$$\frac{1}{b_n} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_n} \leq 0, \quad \forall n > N.$$

如果 $\theta = 1$, 则

$$\frac{1}{b_n} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} = (n+1) \ln \frac{n}{n+1} + o(1) \rightarrow -1$$

故级数发散.

(5) 在 (1) 中取 $b_n = 1/n \ln n$ 并计算得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_n} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} &= \left[n \ln n \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{\alpha_n}{n \ln n}\right) - (n+1) \ln(n+1) \right] \\ &= (n+1) \ln n + \alpha_n - (n+1) \ln(n+1) = (n+1) \ln \frac{n}{n+1} + \alpha_n. \end{aligned}$$

如果 $\alpha_n \geq \mu > 1$, 则

$$\frac{1}{b_n} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} = (\alpha_n - 1) + \left[1 + (n+1) \ln \frac{n}{n+1}\right] \geq \lambda > 0, \quad \forall n > N.$$

此时级数收敛. 如果 $\alpha_n \leq 1$,

$$\frac{1}{b_n} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} = \left[1 + (n+1) \ln \frac{n}{n+1}\right] + \alpha_n - 1 \leq 0, \quad \forall n > N,$$

这是因为函数 $f(x+1) = (x+1) \ln \frac{x}{x+1}$ 在 $[1, +\infty)$ 是严格单调趋于 -1 ,

$$f'(x) = \ln \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) > 0.$$

此时级数发散.

(6) 利用 D'Alembert 判别法和 Gauss 判别法.

(7) 根据积分判别法只要研究反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 是否收敛. 在假设条件 (7.1) 下得到

$$\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t) dt = \int_{x_0}^x f(e^u) e^u du \leq q \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

所以得到

$$\begin{aligned} (1-q) \int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t) dt &\leq q \left[\int_{x_0}^x f(t) dt - \int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t) dt \right] \\ &\leq q \left[\int_{x_0}^{e^x} f(t) dt - \int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t) dt \right] \leq q \int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t) dt. \end{aligned}$$

故

$$\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t) dt \leq \frac{q}{1-q} \int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t) dt$$

和

$$\int_{x_0}^{e^x} f(t) dt \leq \frac{1}{1-q} \int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t) dt =: L.$$

根据 x 的任意性得到

$$\int_{x_0}^x f(t) dt \leq L, \quad \forall x \geq x_0.$$

因此级数 $\sum_{n \geq 1} f(n)$ 收敛.

在假设条件 (7.1) 下得到

$$\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t) dt \geq \int_{x_0}^x f(t) dt$$

从而得到

$$\int_x^{e^x} f(t) dt \geq \int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t) dt =: \gamma > 0.$$

定义数列 $x_n := e^{x_{n-1}}, n \geq 1$. 则得到

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t) dt \geq \gamma \implies \int_{x_0}^{x_n} f(t) dt \geq n\gamma \rightarrow +\infty.$$

此时级数发散. \square

例6.2.11. 判断如下级数的收敛性:

$$\sum_{n \geq 1} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^p, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} \quad (\alpha > 0),$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) := 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{b!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} x^n,$$

这里 $\alpha, \beta, \gamma, x > 0$,

$$\sum_{n \geq 1} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^s \frac{1}{2n+1}, \quad \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^{1+\sigma}} \quad (\sigma > 0), \quad \sum_{n \geq 3} \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}.$$

其中 $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ 就是在 (5.2.55) 中引入的超几何级数.

解: (1) 因为

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right)^p \rightarrow 1, \quad n \rightarrow +\infty,$$

所以考虑

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = n \left[\left(\frac{2n+2}{2n+1} \right)^p - 1 \right] = n \left[\left(1 + \frac{1}{2n+1} \right)^p - 1 \right] \sim n \cdot \frac{p}{2n} \rightarrow \frac{p}{2}.$$

当 $p > 2$ 时级数收敛, 当 $p < 2$ 时级数发散. 当 $p = 2$ 时,

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \frac{4n^2 + 3n}{4n^2 + 4n + 1} < 1,$$

所以级数发散.

(2) 因为

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = n \left(\frac{\alpha + n + 1}{n + 1} - 1 \right) = \frac{n}{n + 1} \alpha \rightarrow \alpha,$$

所以当 $\alpha < 1$ 时级数收敛, 当 $\alpha > 1$ 时级数发散. 当 $\alpha = 1$ 时

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \frac{n}{n + 1} < 1,$$

所以级数发散.

(3) 因为

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(\alpha + n)(\beta + n)}{(1 + n)(\gamma + n)} x \rightarrow x,$$

所以当 $x < 1$ 时级数收敛, 当 $x > 1$ 时级数发散. 当 $x = 1$ 时

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{\gamma}{n}\right)}{\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)\left(1 + \frac{\beta}{n}\right)} =$$

这里应用了展开

$$\frac{1}{1 + \frac{\alpha}{n}} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \frac{1}{1 + \frac{\beta}{n}} = 1 - \frac{\beta}{n} + \frac{\beta^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

故此时级数收敛仅当 $\gamma - \alpha - \beta + 1 > 1$ 时.

(4) 因为

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2n + 3}{2n + 1} \left(\frac{2n + 2}{2n + 1} \right)^s = 2 + \frac{2 + s}{2n + 1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{1 + \frac{s}{2}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

所以当 $s > 0$ 时级数收敛, 当 $s \leq 0$ 时级数发散.

(5) 因为

$$\frac{f(e^x)e^x}{f(x)} = \frac{(\ln x)^{1+\sigma}}{x^\sigma} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty,$$

所以级数收敛.

(6) 因为

$$\frac{f(e^x)e^x}{f(x)} = \ln \ln x \rightarrow +\infty, \quad x \rightarrow +\infty,$$

所以级数发散.

§6.3 任意项级数

在例6.1.6 (1) 中, 遗留一个问题即证明级数 $\sum_{n \geq 1} (-1)^n / \sqrt{n}$ 是收敛的. 本节主要研究通项不一定都为正的级数的敛散性.

§6.3.1 级数的绝对收敛和条件收敛

给定一般项级数 $\sum_{n \geq 1} a_n, a_n \in \mathbb{R}$. 称该级数是

- 收敛的(**convergent**) 如果部分和数列 $\{S_n := \sum_{1 \leq k \leq n} a_k\}_{n \geq 1}$ 是收敛的.
- 绝对收敛的(**absolutely convergent**) 如果 $\sum_{n \geq 1} |a_n|$ 收敛.
- 条件收敛的(**conditional convergent**) 如果 $\sum_{n \geq 1} a_n$ 收敛但 $\sum_{n \geq 1} |a_n|$ 发散.

根据定义和数列的 Cauchy 收敛准则立即得到绝对收敛级数必是收敛的.

§6.3.2 交错级数和 Leibniz 判别法

交错级数(**alternative series**) 是指形如

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} a_n, \quad a_n > 0, \quad (6.3.1)$$

的级数.

定理6.3.1. (Leibniz 判别法) 如果数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 单调递减趋于 0, 则交错级数 (6.3.1) 收敛.

证: 考察部分和

$$S_n := \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k-1} a_k.$$

计算得到

$$S_4 = S_2 + (a_3 - a_4) \geq S_2, \quad S_3 = S_1 - (a_2 - a_3) \leq S_1.$$

一般地得到 $\{S_{2n}\}_{n \geq 1}$ 单调递增和 $\{S_{2n+1}\}_{n \geq 1}$ 单调递减. 另一方面

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1,$$

$$S_{2n+1} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) + a_{2n+1} \geq 0.$$

故

$$S_{2n} \nearrow \text{ 且 } 0 \leq S_{2n} \leq a_1, \quad S_{2n+1} \searrow \text{ 且 } 0 \leq S_{2n+1} \leq a_1, \quad a_{2n+1} + S_{2n} = S_{2n+1}.$$

因此得到

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = S$$

存在.

从而根据定理2.3.9 (5) 可知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$ 存在, 即 $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛. \square

例6.3.2. 研究如下级数的敛散性:

(1) $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} / n^p, p > 0.$

(2) $a_n \geq 0, a_n$ 单调递减趋于 0, 考察级数

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

(3) $\sum_{n \geq 1} \sin(\pi\sqrt{n^2+1}).$

解: (1) $a_n := 1/n^p$ 单调递减趋于 0.

(2) 令

$$c_n := \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

因为

$$c_n - c_{n-1} = \frac{(a_1 - a_{n+1}) + (a_2 - a_{n+1}) + \cdots + (a_n - a_{n+1})}{n(n+1)} > 0,$$

所以 c_n 单调递减趋于 0.

(3) 化简得到

$$\begin{aligned} \sin(\pi\sqrt{n^2+1}) &= \sin(n\pi + \pi\sqrt{n^2+1} - n\pi) \\ &= \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n}\right) = (-1)^n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n}. \end{aligned}$$

因为 $\sin \pi / (\sqrt{n^2+1} + n)$ 单调递减趋于 0, 故级数收敛.

§6.3.3 Abel 判别法和 Dirichlet 判别法

在证明定理5.4.8 中已经引入了 Abel 变换

$$\sum_{1 \leq k \leq n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{1 \leq k \leq n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \quad (6.3.2)$$

$$= a_n B_n - \sum_{1 \leq k \leq n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k, \quad (6.3.3)$$

其中

$$A_k := \sum_{1 \leq i \leq k} a_i, \quad B_k := \sum_{1 \leq i \leq k} b_i.$$

作为推论直接得到

引理6.3.3. (Abel) 若数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 单调且级数 $\sum_{n \geq 1} b_n$ 部分和 $B_n := \sum_{1 \leq k \leq n} b_k$ 有界 ($|B_n| \leq M$), 则

$$\left| \sum_{1 \leq k \leq n} a_k b_k \right| \leq M (|a_1| + 2|a_n|)$$

对任意 $n \geq 1$ 都成立.

定理6.3.4. 给定级数 $\sum_{n \geq 1} a_n$ 和 $\sum_{n \geq 1} b_n$. 如果

- (1) **(Abel)** 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 单调有界且级数 $\sum_{n \geq 1} b_n$ 收敛, 或者
 (2) **(Dirichlet)** 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 单调趋于 0 且级数 $\sum_{n \geq 1} b_n$ 的部分和有界,
 则级数 $\sum_{n \geq 1} a_n b_n$ 收敛.

证: (1) 假设 $|a_n| \leq M$. 级数 $\sum_{n \geq 1} b_n$ 收敛推出 $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \forall p \in \mathbb{N}$ 有

$$\left| \sum_{n+1 \leq k \leq n+p} b_k \right| < \epsilon.$$

根据引理6.3.3 得到

$$\left| \sum_{n+1 \leq k \leq n+p} a_k b_k \right| \leq \epsilon (|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|) \leq 3M\epsilon.$$

从而级数 $\sum_{n \geq 1} a_n b_n$ 收敛.

(2) 假设 $|B_n| \leq M$, 其中 $B_n := \sum_{1 \leq k \leq n} b_k$. 从而得到

$$\left| \sum_{n+1 \leq i \leq n+k} b_i \right| \leq \left| \sum_{1 \leq i \leq n+k} b_i - \sum_{1 \leq i \leq n} b_i \right| \leq 2M.$$

因为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, 所以 $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N$ 有 $|a_n| < \epsilon$. 故再次利用引理6.3.3 得到

$$\left| \sum_{n+1 \leq k \leq n+p} a_k b_k \right| \leq 2M (|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|) \leq 6M\epsilon. \quad \square$$

例6.3.5. 研究下列级数的敛散性:

- (1) $\sum_{n \geq 1} \sin(nx)/n$ 和 $\sum_{n \geq 1} \cos(nx)/n$, 包括绝对收敛和条件收敛.
 (2) $\sum_{n \geq 1} (-1)^n (1 + \frac{1}{n})^n / \sqrt{n}$, 包括绝对收敛和条件收敛.
 (3) $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} / n^p$, $p > 0$, 包括绝对收敛和条件收敛.
 (4) $\sum_{n \geq 1} x^n / n^p$, 包括绝对收敛和条件收敛.
 (5) $\sum_{n \geq 1} \sin(nx) / n^p$, $p > 0$, $0 < x < \pi$, 包括绝对收敛和条件收敛.

解: (1) 利用三角公式可证

$$2 \sin \frac{x}{2} \sum_{1 \leq k \leq n} \sin(kx) = \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2} x, \quad n \geq 1, x \in \mathbb{R}.$$

因此数列 $\{\sum_{1 \leq k \leq n} \sin(kx)\}_{n \geq 1}$ 有界. 根据 Dirichlet 判别法可知 $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n}$ 收敛. 类似地可证 $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nx)}{n}$ 也收敛.

但是这两个级数都不是绝对收敛, 比如

$$\sum_{1 \leq k \leq n} \frac{|\sin(kx)|}{k} \geq \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\sin^2(kx)}{k} = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1 - \cos(2kx)}{2k},$$

这里第一个级数发散而第二个级数收敛. 故这两个级数都是条件收敛.

(2) 因为数列 $\{(1+1/n)^n\}_{n \geq 1}$ 单调递增趋于 e , 且级数 $\sum_{n \geq 1} (-1)^n / \sqrt{n}$ 收敛 (Dirichlet 判别法), 所以原来级数收敛. 另一方面,

$$\left| (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1+1}{\sqrt{n}} \geq \frac{2}{n},$$

可知原级数仅是条件收敛.

(3) 显然当 $p > 1$ 时是绝对收敛, $0 < p \leq 1$ 时是条件收敛.

(4) 因为 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|x|^n/n^p} = |x|$, 根据 Cauchy 判别法得到

$$|x| > 1 \implies \text{对任意 } p \text{ 都绝对收敛.}$$

因为 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |x|^n/n^p = +\infty$, 所以

$$|x| > 1 \implies \text{对任意 } p \text{ 都发散.}$$

当 $x = 1$ 时, 级数变为 $\sum_{n \geq 1} 1/n^p$ 故

$$x = 1 \text{ 且 } p > 1 \implies \text{绝对收敛, } x = 1 \text{ 且 } p \leq 1 \implies \text{发散.}$$

(5) 把 (1) 的推导稍作修改就得到, $p > 1$ 时绝对收敛; $0 < p \leq 1$ 时条件收敛.

§6.3.4 级数的乘法

首先考虑两个有限项级数的乘积

$$\sum_{0 \leq k \leq n} a_k \cdot \sum_{0 \leq k \leq n} b_k = \sum_{0 \leq k \leq 2n} c_k = \sum_{0 \leq k \leq n} d_k,$$

其中

$$c_k := \begin{cases} \sum_{i+j=k} a_i b_j, & 0 \leq k \leq n, \\ \sum_{i+j=k, i \geq k-n} a_i b_j, & n+1 \leq k \leq 2n, \end{cases} \quad d_k := \sum_{0 \leq i \leq k-1} (a_i b_k + a_k b_i) + a_k b_k.$$

这两种不同的写法可用下面的图来体现:

$$\begin{array}{cccc} a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 & \cdots \\ a_1 b_0 & a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots \\ a_2 b_0 & a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \quad c_0 = a_0 b_0, \quad c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0,$$

和

$$\begin{array}{cccc} a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 & \cdots \\ a_1 b_0 & a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots \\ a_2 b_0 & a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \quad d_0 = a_0 b_0, \quad d_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0.$$

类似的对级数 $\sum_{n \geq 1} a_n$ 和 $\sum_{n \geq 1} b_n$ 定义如下两种不同的乘积:

- 按**对角线**排列, 得到级数

$$\sum_{n \geq 0} c_n, \quad c_n := \sum_{i+j=n} a_i b_j. \quad (6.3.4)$$

- 按**曲边形**排列, 得到级数

$$\sum_{n \geq 0} d_n, \quad d_n := \sum_{0 \leq k \leq n-1} (a_k b_n + a_n b_k) + a_n b_n. \quad (6.3.5)$$

这样一个很自然的问题是, 这两个级数是否相等?

定理6.3.6. 给定级数 $\sum_{n \geq 0} a_n$ 和 $\sum_{n \geq 0} b_n$.

- (1) 如果 $\sum_{n \geq 0} a_n$ 和 $\sum_{n \geq 0} b_n$ 收敛, 则 (6.3.5) 收敛且

$$\sum_{n \geq 0} a_n \cdot \sum_{n \geq 0} b_n = \sum_{n \geq 0} d_n.$$

- (2) 如果 $\sum_{n \geq 0} a_n$ 和 $\sum_{n \geq 0} b_n$ 绝对收敛, 则 (6.3.4) 绝对收敛且

$$\sum_{n \geq 0} a_n \cdot \sum_{n \geq 0} b_n = \sum_{n \geq 0} c_n.$$

- (3) 如果 $\sum_{n \geq 0} a_n$, $\sum_{n \geq 0} b_n$ 和 (6.3.4) 收敛, 则 (6.3.5) 收敛且

$$\sum_{n \geq 0} a_n \cdot \sum_{n \geq 0} b_n = \sum_{n \geq 0} c_n = \sum_{n \geq 0} d_n.$$

证: (1) 是显然的, 因为 $\sum_{1 \leq k \leq n} d_k = (\sum_{1 \leq k \leq n} a_k)(\sum_{1 \leq k \leq n} b_k)$. (2) 和 (3) 可由定理6.3.7 和定理6.3.9 得到. \square

定理6.3.7. (Cauchy) 如果 $\sum_{n \geq 0} a_n$ 和 $\sum_{n \geq 0} b_n$ 绝对收敛, 则 (6.3.4) 绝对收敛且

$$\sum_{n \geq 0} a_n \cdot \sum_{n \geq 0} b_n = \sum_{n \geq 0} c_n.$$

进一步地, 将 $a_i b_j$ 按任意方式排列求和而成的级数也绝对收敛, 且和也等式 $\sum_{n \geq 0} a_n \cdot \sum_{n \geq 0} b_n$.

证: 假设 $a_{i_1} b_{j_1}, a_{i_2} b_{j_2}, \dots, a_{i_k} b_{j_k}$, 是任意一种排列, 对任意 n 令

$$N_n := \max_{1 \leq k \leq n} \{i_k, j_k\}.$$

从而得到

$$\sum_{1 \leq k \leq n} |a_{i_k} b_{j_k}| \leq \left(\sum_{0 \leq i \leq N_n} |a_i| \right) \left(\sum_{0 \leq j \leq N_n} |b_j| \right) \leq \left(\sum_{n \geq 0} |a_n| \right) \left(\sum_{n \geq 0} |b_n| \right).$$

因此 $\sum_{k \geq 1} a_{i_k} b_{j_k}$ 绝对收敛. 根据定理6.3.11 得到

$$\sum_{k \geq 1} a_{i_k} b_{j_k} = \sum_{n \geq 0} d_n = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot \sum_{n \geq 0} b_n. \quad \square$$

上述两个级数都“绝对收敛”的条件可减弱为至少有一个是绝对收敛, 但此时结论也相应地减弱为收敛.

定理6.3.8. (Mertens) 如果 $\sum_{n \geq 0} a_n$ 和 $\sum_{n \geq 0} b_n$ 收敛, 且其中至少有一个级数绝对收敛, 则 (6.3.4) 收敛且

$$\sum_{n \geq 0} a_n \cdot \sum_{n \geq 0} b_n = \sum_{n \geq 0} c_n.$$

证: 假设级数 $\sum_{n \geq 0} a_n$ 绝对收敛. 令

$$A_n := \sum_{0 \leq k \leq n} a_k, \quad B_n := \sum_{0 \leq k \leq n} b_k, \quad C_n := \sum_{0 \leq k \leq n} c_k.$$

则 A_n 收敛到 A 和 B_n 收敛到 B , 且

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{0 \leq k \leq n} \sum_{i+j=k} a_i b_j = a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \cdots + a_n B_0 \\ &= a_0(B + B_n - B) + a_1(B + B_{n-1} - B) + \cdots + a_n(B + B_n - B) \\ &= (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)B + [a_0(B_n - B) + a_1(B_{n-1} - B) + \cdots + a_n(B_0 - B)] \\ &= A_n B + \delta_n, \end{aligned}$$

这里

$$\delta_n := a_0(B_n - B) + a_1(B_{n-1} - B) + \cdots + a_n(B_0 - B).$$

为了证明 (6.3.4) 现在只要证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 0$.

因为 $B_n \rightarrow B$, 所以存在 $K > 0$ 使得 $|B_n - B| \leq K$ 对任意 $n \geq 0$ 都成立. 另一方面, 级数 $\sum_{n \geq 0} a_n$ 绝对收敛推出对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $N_1 \in \mathbb{N}$, 对任意 $n > N_1$ 有

$$|a_{N_1+1}| + \cdots + |a_n| < \frac{\epsilon}{2K+1}.$$

令 $L := |a_0| + \cdots + |a_{N_1}|$. 由于 $B_n - B \rightarrow 0$, 故存在 $N_2 \in \mathbb{N}$ 对任意 $n > N_2$ 有

$$|B_n - B| < \frac{\epsilon}{2L+1}.$$

从而对任意 $n > N_1 + N_2$ 得到

$$\begin{aligned} |\delta_n| &\leq \sum_{0 \leq k \leq N_1} |a_k| |B_{n-k} - B| + \sum_{N_1+1 \leq k \leq n} |a_k| |B_{n-k} - B| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2L+1} (|a_0| + \cdots + |a_{N_1}|) + \frac{\epsilon}{2K+1} K \\ &\leq \frac{L}{2L+1} \epsilon + \frac{K}{2K+1} \epsilon < \epsilon. \quad \square \end{aligned}$$

定理6.3.9. (Abel) 如果 $\sum_{n \geq 0} a_n$, $\sum_{n \geq 0} b_n$ 和 (6.3.4) 收敛, 则 (6.3.5) 收敛且

$$\sum_{n \geq 0} a_n \cdot \sum_{n \geq 0} b_n = \sum_{n \geq 0} c_n = \sum_{n \geq 0} d_n.$$

证: 首先证明如下引理:

$$\sum_{n \geq 0} c_n = C \text{ 收敛} \implies \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = C, \quad f(x) := \sum_{n \geq 0} c_n x^n \quad (0 \leq x < 1).$$

因为 $\sum_{n \geq 0} c_n$ 收敛, 所以 $|c_n| \leq K$ 对某个正常数 $K > 0$ 成立. 根据计算

$$\sum_{n \geq 0} |c_n| x^n \leq K \sum_{n \geq 0} x^n = \frac{K}{1-x},$$

可知 $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$ 绝对收敛. 令 $C_n := \sum_{0 \leq k \leq n} c_k$ 和 $C_{-1} = 0$. 则 $C_n \rightarrow C$ 和

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq k \leq n} c_k x^k &= \sum_{0 \leq k \leq n} (C_k - C_{k-1}) x^k = \sum_{0 \leq k \leq n} C_k x^k - x \sum_{0 \leq k \leq n-1} C_k x^k \\ &= C_n x^n + (1-x) \sum_{0 \leq k \leq n-1} C_k x^k \\ &= C_n x^n + (1-x) \sum_{0 \leq k \leq n-1} (C_k - C) x^k + C(1-x^n). \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow +\infty$ 得到

$$f(x) = C + (1-x) \sum_{n \geq 0} (C_n - C) x^n.$$

由于 $C_n \rightarrow C$, 所以对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $N \in \mathbb{N}$ 对任意 $n > N$ 有

$$|C_n - C| < \frac{\epsilon}{2}.$$

记 $M := \sum_{0 \leq k \leq N} |C_k - C|$. 则得到

$$\begin{aligned} |f(x) - C| &\leq (1-x) \sum_{0 \leq k \leq N} |C_k - C| x^k + (1-x) \sum_{n > N} |C_n - C| x^n \\ &\leq M(1-x) + (1-x) \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{x^{N+1}}{1-x} \leq M(1-x) + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

当 $x \in (1 - \epsilon / (2M + 1), 1)$ 时得到 $|f(x) - C| < \epsilon$.

考虑 (6.3.4). 则

$$\sum_{n \geq 0} c_n x^n = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \cdot \sum_{n \geq 0} b_n x^n.$$

利用上述引理, 当 $x \in [0, 1)$ 时

$$\sum_{n \geq 0} c_n = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot \sum_{n \geq 0} b_n. \quad \square$$

注6.3.10. (1) 如果级数 $\sum_{n \geq 0} a_n$ 和 $\sum_{n \geq 0} b_n$ 都是条件收敛, 则 (6.3.4) 不一定收敛. 比如考虑

$$a_n = b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}.$$

此时得到

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{i+j=n} \frac{(-1)^{i+j+2}}{\sqrt{(i+1)(j+1)}} = \sum_{i+j=n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(1+i)(1+j)}} \\ &= (-1)^n \sum_{0 \leq i \leq n} \frac{1}{\sqrt{(i+1)(n+1-i)}} \\ &= (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{3(n-1)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right). \end{aligned}$$

因为

$$\sum_{0 \leq i \leq n} \frac{1}{\sqrt{(i+1)(n+1-i)}} \geq \sum_{0 \leq i \leq n} \frac{1}{\sqrt{[(n+2)/2]^2}} = 2 \frac{n+1}{n+2} \rightarrow 2, \quad n \rightarrow +\infty.$$

所以 $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n \neq 0$ 从而级数 $\sum_{n \geq 0} c_n$ 发散.

(2) 根据定理6.3.8和定理6.3.9, 得到

$$\sum_{n \geq 0} a_n \text{ 和 } \sum_{n \geq 0} b_n \text{ 中至少有一个绝对收敛} \implies \sum_{n \geq 0} c_n = \sum_{n \geq 0} d_n \text{ 存在且相等.}$$

而且根据(1)可知“至少有一个级数是绝对收敛”的假设条件不能减弱为“两个级数都仅是条件收敛”.

§6.3.5 级数的重排

给定级数 $\sum_{n \geq 1} a_n$ 和双射 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, 称级数 $\sum_{n \geq 1} a_{f(n)}$ 为级数 $\sum_{n \geq 1} a_n$ 的**重排(rearrangement)**.

定理6.3.11. 如果级数 $\sum_{n \geq 1} a_n$ 绝对收敛, 则任意重排 $\sum_{n \geq 1} a_{f(n)}$ 也绝对收敛且

$$\sum_{n \geq 1} a_n = \sum_{n \geq 1} a_{f(n)}. \quad (6.3.6)$$

证: (1) $a_n \geq 0$. 此时令

$$S_n := \sum_{1 \leq k \leq n} a_k, \quad S := \sum_{n \geq 1} a_n, \quad S_n(f) = \sum_{1 \leq k \leq n} a_{f(k)}.$$

此时

$$S_n(f) \leq \sum_{1 \leq k \leq N} a_k = S_N \leq S, \quad N := \max_{1 \leq k \leq n} f(k).$$

所以 $\sum_{n \geq 1} a_{f(n)} = S(f)$ 收敛且 $S(f) \leq S$. 另一方面, 因为 $k = f^{-1}(f(k))$, 所以 $S = (S(f))(f^{-1}) \leq S(f)$. 故 $S = S(f)$.

(2) 对一般情形, 作分解

$$a_n := \frac{a_n + |a_n|}{2} - \frac{|a_n| - a_n}{2} =: a_n^+ - a_n^-, \quad a_n^\pm \geq 0$$

和

$$a_{f(n)} = a_{f(n)}^+ - a_{f(n)}^-, \quad a_{f(n)}^\pm \geq 0.$$

根据观察

$$a_n^\pm = \frac{|a_n| + a_n}{2} \leq |a_n|, \quad |a_n| = a_n^+ + a_n^-,$$

得到 $\sum_{n \geq 1} a_n^\pm$ 收敛当且仅当 $\sum_{n \geq 1} a_n$ 绝对收敛. 令

$$S^\pm := \sum_{n \geq 1} a_n^\pm.$$

从 (1) 得到 $\sum_{n \geq 1} a_{f(n)}^\pm$ 绝对收敛且

$$\sum_{n \geq 1} a_{f(n)}^\pm = \sum_{n \geq 1} a_n^\pm = S_n^\pm$$

从而

$$\sum_{n \geq 1} a_{f(n)} = \sum_{n \geq 1} a_{f(n)}^+ - \sum_{n \geq 1} a_{f(n)}^- = S^+ - S^- = \sum_{n \geq 1} a_n$$

绝对收敛. \square

定理6.3.12. (Riemann) 假设级数 $\sum_{n \geq 1} a_n$ 条件收敛. 则对任意常数 $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, 存在 $\sum_{n \geq 1} a_n$ 的重排 $\sum_{n \geq 1} a_{f(n)}$ 满足 $\sum_{n \geq 1} a_{f(n)} = b$.

例6.3.13. 考虑定积分

$$\begin{aligned} \ln 2 &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \int_0^1 \sum_{n \geq 0} (-x)^n dx \quad (\text{下一步需要用到函数项级数的性质}) \\ &= \sum_{n \geq 0} \int_0^1 (-x)^n dx = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}. \end{aligned}$$

考虑如下重排:

n	0	1	2	3	4	5	...
a_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{6}$...
$a_{f(n)}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{8}$...

即重排是按照“1个正项+2个负项”这样的次序,从而得到

$$\begin{aligned}\sum_{n \geq 0} a_{f(n)} &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \cdots \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \cdots \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\right) = \frac{1}{2} \ln 2.\end{aligned}$$

上面重排可一般化,即给定 $p, q \in \mathbb{N}$, 考虑重排

$$\sum_{n \geq 0} a_{f(n)} := \left[\underbrace{\text{正项}}_p + \underbrace{\text{负项}}_q \right] + \cdots.$$

因此

$$\sum_{n \geq 0} a_{f(n)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} S_{(p+q)k},$$

这里

$$\begin{aligned}S_{(p+q)k} &= \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2p-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2q}\right) + \cdots \\ &+ \left[\frac{1}{2p(k-1)+1} + \cdots + \frac{1}{2pk-1}\right] - \left[\frac{1}{2q(k-1)+2} + \cdots + \frac{1}{2qk}\right] \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2pk-1} + \frac{1}{2pk}\right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{pk}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{qk}\right).\end{aligned}$$

根据

$$\sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + r_n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0,$$

得到

$$\begin{aligned}S_{(p+q)k} &= \left[\ln(2pk) + \gamma + r_{2pk}\right] - \frac{1}{2} \left[\ln(pk) + \gamma + r_{pk}\right] - \frac{1}{2} \left[\ln(qk) + \gamma + r_{qk}\right] \\ &= \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{q}{p} + r_{2pk} - \frac{1}{2} (r_{pk} + r_{qk}) \rightarrow \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{q}{p}.\end{aligned}$$

因为 $q/p \in \mathbb{Q}$, 所以对形如 $b = \ln(2\sqrt{r})$, $r \in \mathbb{Q}$, 定理6.3.12 成立.

证明定理6.3.12. (1) $b \in \mathbb{R}$. 不失一般性不妨假设 $b > 0$, 否则的话若 $b < 0$, 则可事先考虑条件收敛级数 $\sum_{n \geq 1} -a_n$ 和 $-b$; 如果 $b = 0$, 则可事先考虑条件收敛级数 $\sum_{n \geq n_0+1} a_n$ 和 $b + a_{n_0} \neq 0$. 作分解

$$a_n = \frac{a_n + |a_n|}{2} - \frac{|a_n| - a_n}{2} =: a_n^+ - a_n^-, \quad a_n^\pm \geq 0.$$

因为 $\sum_{n \geq 1} |a_n| = +\infty$, 所以 $\sum_{n \geq 1} a_n^\pm = +\infty$. 令

$$S_n^\pm := \sum_{1 \leq k \leq n} a_m^\pm \rightarrow +\infty.$$

故只要 $n \gg 1$ 得到 $S_n^+ > b$; 从而存在 $\{n \in \mathbb{N} | S_n^+ > b\}$ 中的最小元 m_1 使得

$$S_{m_1}^+ > b > S_{m_1-1}^+ = S_{m_1}^+ - a_{m_1}^+$$

成立. 因为 $S_{m_1}^+ - S_n^- < b$ 当 $n \gg 1$ 时, 存在 $\{n \in \mathbb{N} | S_{m_1}^+ - S_n^- < b\}$ 中的最小元 n_1 使得

$$S_{m_1}^+ - S_{n_1}^- < b < S_{m_1}^+ - S_{n_1}^- + a_{n_1}^-$$

成立. 继续这个过程就得到递增数列

$$m_1 < m_2 < \cdots, \quad n_1 < n_2 < \cdots,$$

使得

$$S_{m_k}^+ - S_{n_k}^- < b < S_{m_k}^+ - S_{n_k}^- + a_{n_k}^-, \quad S_{m_k}^+ - S_{n_{k-1}}^- > b > S_{m_k}^+ - S_{n_{k-1}}^- - a_{m_k}^+.$$

考虑级数

$$\begin{aligned} & (a_1^+ + \cdots + a_{m_1}^+) - (a_1^- + \cdots + a_{n_1}^-) + (a_{m_1+1}^+ + \cdots + a_{m_2}^+) \\ & - (a_{n_1+1}^- + \cdots + a_{n_2}^-) + (a_{m_2+1}^+ + \cdots + a_{m_3}^+) =: \sum_{n \geq 1} b_n. \end{aligned}$$

其部分和 $\sum_{1 \leq k \leq n} b_k$ 满足

$$\left| \sum_{1 \leq k \leq n} b_k - b \right| \leq \begin{cases} a_{m_{[n/2]+1}}^+, & n \text{ 奇数}, \\ a_{n_{[n/2]}}^-, & n \text{ 偶数}. \end{cases}$$

因为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^+ = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^- = 0$. 从而得到 $\sum_{n \geq 1} a_{f(n)} = \sum_{n \geq 1} b_n = b$.

(2) $b = +\infty$. 此时 $\sum_{n \geq 1} a_n^+ = +\infty$. 存在 m_1 使得

$$S_{m_1}^+ > 1 - a_1^-$$

成立. 因为 $S_m^+ \rightarrow +\infty$, 当 $m_1 < m \rightarrow +\infty$ 时, 所以存在 $m_2 > m_1$ 使得

$$S_{m_2}^+ > (1 - a_1^-) + (1 - a_2^-) = 2 - a_1^- - a_2^-$$

成立. 这个过程持续下去就得到严格递增趋于 $+\infty$ 的数列 $m_1 < m_2 < \cdots$ 使得

$$S_{m_k}^+ > k - S_k^-$$

成立. 故得到 $\sum_{k \geq 1} a_k = +\infty$.

(3) $b = -\infty$. 此情形可转成称 (2). \square

例6.3.14. (1) $\sum_{n \geq 1} a_n$ 绝对收敛 $\implies \sum_{n \geq 1} a_n(a_1 + \cdots + a_n)$ 收敛.

(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = 0 \not\Rightarrow \sum_{n \geq 2} |a_n - a_{n-1}| < +\infty$.

(3) $2|a_{n+1}| \leq |a_n| \implies \sum_{n \geq 1} |a_n|$ 收敛.

(4) $\sum_{n \geq 1} b_n$ 收敛且 $\sum_{n \geq 1} (a_n - a_{n-1})$ 绝对收敛 $\implies \sum_{n \geq 1} a_n b_n$ 收敛.

(5) $\sum_{n \geq 1} a_n$ 发散且 $a_n > 0 \implies \sum_{n \geq 1} a_n / S_n$ 发散, 其中 $S_n = \sum_{1 \leq k \leq n} a_k$.

(6) $\sum_{n \geq 1} a_n$ 收敛且 $a_n > 0 \implies \sum_{n \geq 1} q_n / r_n$ 发散, 其中 $r_n := \sum_{k \geq n} a_k$.

(7) $\sum_{n \geq 1} a_n / n^\alpha$ 收敛且 $\beta > \alpha \implies \sum_{n \geq 1} a_n / n^\beta$ 收敛.

(8) $\sum_{n \geq 1} a_n / n^\alpha$ 收敛且 $\alpha > 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_1 + \cdots + a_n / n^\alpha) = 0$.

(9) 函数 f 在 $x = 0$ 附近二阶导数存在且连续, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/x = 0 \implies \sum_{n \geq 1} f(1/n)$ 绝对收敛.

(10) 函数 f 在 $[0, +\infty)$ 上单调且反常积分 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛 \implies

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{h \rightarrow 0^+} h \sum_{n \geq 1} f(nh).$$

(11) 求极限

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} (1-t) \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{1+t^n}.$$

(12) 证明级数 $\sum_{n \geq 1} (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} / n$ 条件收敛.

(13) $\sum_{n \geq 1} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n$ 存在 $\implies \sum_{n \geq 1} a_n$ 收敛.

(14) $\sum_{n \geq 1} a_n$ 收敛且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n = 0 \implies \sum_{n \geq 1} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛且 $\sum_{n \geq 1} n(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n \geq 1} a_n$.

证: (1) 根据假设级数 $\sum_{n \geq 1} |a_n|$ 收敛, 且 $\sum_{1 \leq k \leq n} |a_k|$ 单调递增且有界, 根据 Dirichlet 判别法原级数收敛.

(2) 反例为 $a_n = (-1)^n n$.

(3) 只要说明 $S_n := \sum_{1 \leq k \leq n} |a_k|$ 有界即可. 根据假设条件得到

$$S_{n-1} \leq S_n \leq |a_1| + \sum_{2 \leq k \leq n} \frac{|a_{k-1}|}{2} = |a_1| + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k \leq n-1} |a_k| = |a_1| + \frac{1}{2} S_{n-1}$$

所以 $S_{n-1} \leq 2|a_1|$.

(4) 因为 $\sum_{n \geq 2} |a_n - a_{n+1}|$ 收敛, 所以对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $N_1 \in \mathbb{N}$ 对任意 $n > N_1$ 和任意 $p \in \mathbb{N}$, 有

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p} - a_{n+p-1}| < \epsilon$$

故 $|a_{n+p} - a_{n+1}| < \epsilon$. 从而存在常数 $M_1 > 0$ 使得 $|a_n| \leq M_1$ 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 都成立.

因为 $\sum_{n \geq 1} b_n$ 收敛, 所以存在常数 M_2 使得 $|B_n| \leq M_2$ 对任意 n 都成立, 其中 $B_n := \sum_{1 \leq k \leq n} b_k$. 除此之外, 对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $N_2 \in \mathbb{N}$ 对任意 $n > N_2$ 和任意 $p \in \mathbb{N}$, 有

$$|B_{n+p} - B_n| < \epsilon.$$

最后对任意 $n > N := \max\{N_1, N_2\}$ 和任意 $p \in \mathbb{N}$ 有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{1 \leq k \leq p} a_{n+k} b_{n+k} \right| &= \left| a_{n+p} b_{n+p} + \sum_{n+1 \leq k \leq n+p-1} B_k (a_k - a_{k+1}) - a_{n+1} B_n \right| \\ &\leq \sum_{n+1 \leq k \leq n+p-1} |B_k| |a_k - a_{k+1}| + |a_{n+p}| |B_{n+p} - B_n| + |a_{n+p} - a_{n+1}| |B_n| \\ &\leq M_2 \sum_{n+1 \leq k \leq n+p-1} |a_k - a_{k+1}| + M_1 |B_{n+p} - B_n| + \epsilon M_2 \leq (M_1 + 2M_2)\epsilon. \end{aligned}$$

(5) $\sum_{n \geq 1} a_n$ 发散且 $a_n > 0$ 推出 S_n 单调递增趋于 $+\infty$. 对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $p \in \mathbb{N}$ 满足 $S_{n+p} \geq 2S_n$. 故

$$\sum_{n+1 \leq k \leq n+p} \frac{a_k}{S_k} > \frac{1}{S_{n+p}} \sum_{n+1 \leq k \leq n+p} a_k = \frac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}} = 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}} > \frac{1}{2}.$$

根据 Cauchy 收敛准则知级数 $\sum_{n \geq 1} a_n / S_n$ 发散.

(6) 因为 $\sum_{n \geq 1} a_n$ 收敛且 $a_n > 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ 且 r_n 单调递减趋于 0. 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 存在 $p \in \mathbb{N}$ 满足 $r_{n+p}/r_n < 1/2$. 故

(7) 显然.

(8) 固定任意 $\epsilon > 0$. 存在 $N \in \mathbb{N}$ 对任意 $n > N$ 和任意 $p \in \mathbb{N}$ 有

$$\left| \sum_{n+1 \leq k \leq n+p} \frac{a_k}{k^\alpha} \right| < \epsilon.$$

从而得到

$$\left| \sum_{n+1 \leq k \leq n+p} \frac{a_k}{(n+p)^\alpha} \right| = \left| \sum_{n+1 \leq k \leq n+p} \frac{a_k}{k^\alpha} \left(\frac{k}{n+p} \right)^\alpha \right| \leq 3\epsilon.$$

因为对固定 n

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+p)^\alpha} \sum_{1 \leq k \leq n} a_k = 0,$$

所以存在 $p \in \mathbb{N}$ 满足.

$$\left| \frac{1}{(n+p)^\alpha} \sum_{1 \leq k \leq n} a_k \right| < \epsilon.$$

最后得到

$$\left| \sum_{1 \leq k \leq n+p} \frac{a_k}{(n+p)^\alpha} \right| < \epsilon + 3\epsilon = 4\epsilon.$$

(9) 不妨假设 $f \in C^2([-1, 1])$. 则得到 $f(0) = f'(0) = 0$ 且

$$f(x) = \frac{f''(\xi)}{2} x^2, \quad \exists |\xi| \leq |x| < 1.$$

二阶导数的连续性推出 $|f''(x)| \leq M$ 从而 $|f(x)| \leq Mx^2/2$. 因此

$$\sum_{n \geq 1} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \sum_{n \geq 1} \frac{M}{2n^2} = \frac{\pi^2}{12}M.$$

(10) 不妨假设函数 f 单调递增. 因为 f 非负所以

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(x) dx &= \sum_{k \geq 1} \int_{(k-1)h}^{kh} f(x) dx \leq \sum_{k \geq 1} hf(kh) \\ &\leq \sum_{k \geq 1} \int_{kh}^{(k+1)h} f(x) dx = \int_h^{+\infty} f(x) dx. \end{aligned}$$

所以得到

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{h \rightarrow 0^+} h \sum_{k \geq 1} f(kh).$$

(11) 计算得到

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1^-} (1-t) \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{1+t^n} &= \lim_{t \rightarrow 1^-} (1-e^{\ln t}) \sum_{n \geq 1} \frac{e^{n \ln t}}{1+e^{n \ln t}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1-e^{-h}}{h} \cdot h \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-nh}}{1+e^{-nh}} \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \ln 2. \end{aligned}$$

(12) 显然级数不可能时绝对收敛. 计算

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n} = \sum_{k \geq 1} (-1)^k \left[\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2-1} \right] =: \sum_{k \geq 1} (-1)^k a_k.$$

因为

$$\frac{2}{k+1} = \frac{2k}{k^2+2k} < a_k < \frac{2k}{k^2} = \frac{2}{k'}$$

所以 a_k 单调递减趋于 0. 从而利用定理 6.3.1 可知原级数条件是收敛.

(13) 根据 Abel 变换得到

$$\sum_{1 \leq k \leq n} a_k = \sum_{1 \leq k \leq n} a_k \cdot 1 = na_n + \sum_{1 \leq k \leq n-1} k(a_k - a_{k-1})$$

故原级数收敛.

(14) 根据 Abel 变换得到

$$\sum_{1 \leq k \leq n-1} k(a_k - a_{k-1}) = \sum_{1 \leq k \leq n} a_k - na_n \rightarrow \sum_{n \geq 1} a_n.$$

故 $\sum_{n \geq 1} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛且和为 $\sum_{n \geq 1} a_n$. \square

§6.4 * 无穷级数和无穷乘积

对有限和 $\sum_{1 \leq k \leq n} a_k$, 观察到

$$\sum_{1 \leq k \leq n} a_k = \ln \left(\prod_{1 \leq k \leq n} e^{a_k} \right).$$

因此我们可以通过研究 $\prod_{1 \leq k \leq n} p_k$ 来研究 $\sum_{1 \leq k \leq n} a_k$. 类似的想法可应用到无穷级数.

§6.4.1 * 无穷乘积

给定数列 $\{p_n\}_{n \geq 1}$ 其中 $p_n \neq 0$. 形式乘积

$$\prod_{n \geq 1} p_n := p_1 \cdot p_2 \cdots p_n \cdots \quad (6.4.1)$$

称为无穷乘积(infinite product). 称 p_n 为无穷乘积的通项(general term), 而将其部分积(partial product) 记作

$$P_n := \prod_{1 \leq k \leq n} p_k, \quad n \geq 1. \quad (6.4.2)$$

称无穷乘积 (6.4.1) 收敛(convergence) 如果存在非零有限数 P 使得

$$P = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n.$$

否则称无穷乘积发散(divergence).

注6.4.1. (1) 根据上述定义无穷乘积如果收敛的话, 积必非零. 故无穷乘积

$$\prod_{n \geq 1} \frac{1}{2^n}$$

是发散的, 虽然部分积 $P_n = 1/2^{n(n+1)/2}$ 收敛.

(2) 如果无穷乘积 (6.4.1) 收敛, 则 $P_n \neq 0$ 对任意充分大 n 都成立.

(3) 假设无穷乘积 $\prod_{n \geq 1} p_n$ 和 $\prod_{n \geq 1} q_n$ 都收敛 $\nRightarrow \prod_{n \geq 1} (p_n + q_n)$ 收敛. 比如 $p_n = 1 - 1/n^2$ 和 $q_n = 1 + 1/n^2$.

性质6.4.2. (1) (无穷乘积收敛的必要条件) 如果无穷乘积 (6.4.1) 收敛, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1, \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \prod_{n \geq m} p_n = 1.$$

(2) 如果无穷乘积 (6.4.1) 收敛, 则任意改变有限项 (增加有限个非零因子或删除有限个因子) 所得的无穷乘积仍旧收敛.

(3) 如果无穷乘积 $\prod_{n \geq 1} p_n$ 和 $\prod_{n \geq 1} q_n$ 都收敛, 则 $\prod_{n \geq 1} p_n q_n$ 也收敛且

$$\prod_{n \geq 1} p_n q_n = \prod_{n \geq 1} p_n \cdot \prod_{n \geq 1} q_n.$$

(4) 如果无穷乘积 (6.4.1) 收敛, 则任意添加括号后形成的无穷乘积也收敛. 但反之不一定成立.

证: (1) 假设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = P$, 其中 $P_n = \prod_{1 \leq k \leq n} p_k$. 根据定义得到

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{P}{P} = 1.$$

另外

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \prod_{n \geq m} p_n = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\prod_{n \geq 1} p_n}{\prod_{1 \leq n \leq m-1} p_n} = 1.$$

(2) 显然.

(3) 显然.

(4) 显然. 反之不成立的例子是

$$p_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n \text{ 奇数}, \\ 2, & n \text{ 偶数}. \end{cases}$$

收敛, 但是一旦去掉括号则发散, 利用 (1). \square

例6.4.3. (1) 我们在例5.4.22 已经证明了 Wallis 公式 (5.4.31):

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) \quad \text{或} \quad \frac{\pi}{4} = \prod_{n \geq 1} \left[1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right]. \quad (6.4.3)$$

一般地有如下无穷乘积展开:

$$\sin x = x \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right), \quad \cos x = \prod_{n \geq 1} \left[1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2 \pi^2}\right]. \quad (6.4.4)$$

在 (6.4.4) 中第一个式子取 $x = \pi/2$ 得到 (6.4.3).

(2) 当 $x \neq 0$ 时

$$\prod_{1 \leq k \leq n} \cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \frac{x/2^n}{\sin(x/2^n)} \cdot \frac{\sin x}{x} \rightarrow \frac{\sin x}{x}.$$

故得到

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n \geq 1} \cos \frac{x}{2^n}. \quad (6.4.5)$$

上述公式在 $x = 0$ 显然成立, 当然此时函数 $\sin x/x$ 是在 $x = 0$ 处做了延拓. 在 (6.4.5) 取 $x = \pi/2$ 得到 Vieta 公式

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n \geq 1} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots, \quad (6.4.6)$$

这里应用公式 $\cos(a/2)\sqrt{(1+\cos a)/2}$.

(3) 无穷乘积

$$\prod_{n \geq 1} a^{\frac{(-1)^n}{n}} = a^{-\ln 2}, \quad a > 0,$$

这是因为部分积为 $P_n = a^{-1}a^{1/2} \cdots a^{(-1)^n/n} = a^{-\sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k-1}/k}$.

(4) 研究无穷乘积

$$\prod_{n \geq 1} \left[1 + \frac{1}{x^n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} \right]$$

的敛散性. 令

$$p_n := 1 + \left[\frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^n.$$

因为数列 $\{(1+1/n)^n\}_{n \geq 1}$ 单调递增趋于 e , 所以当 $|x| < e$ 时, $p_n \rightarrow 1$.

现在假设 $|x| = e$. 根据 (2.3.3) 的证明得到 $a_n = (1+1/n)^n < 3$, 并结合 (2.3.4) 得到

$$0 \leq e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \frac{1}{n} < \frac{3}{n}.$$

因为

$$p_n = 1 + \frac{(\operatorname{sgn}(x))^n}{e^n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} = 1 + (\operatorname{sgn}(x))^n \left[\frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^n =: 1 + a_n,$$

且

$$|a_n| = \left[\frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^n > \left[\frac{1}{e} \left(e - \frac{3}{n} \right) \right]^n = \left(1 - \frac{3}{en} \right)^n,$$

所以 $|p_n - 1| \rightarrow e^{-3/e} \neq 0$. 此时元无穷乘积发散.

当 $|x| > e$ 得到

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < e < \frac{e + |x|}{2}, \quad \forall n \geq 1.$$

若记

$$q := \frac{e + |x|}{2|x|}$$

则 $q \in (0, 1)$ 且

$$|a_n| = \left[\frac{1}{|x|} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^n < \left[\frac{e + |x|}{2|x|} \right]^n = q^n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

此时无穷乘积收敛.

§6.4.2 * 无穷级数和无穷乘积

本小节来回答本节一开始的问题: 无穷级数和无穷乘积的关系.

定理6.4.4. 假设 $p_n > 0$. 无穷乘积 $\prod_{n \geq 1} p_n$ 收敛 \iff 无穷级数 $\sum_{n \geq 1} \ln p_n$ 收敛.

证: 令

$$P_n = \prod_{1 \leq k \leq n} p_k, \quad S_n := \sum_{1 \leq k \leq n} \ln p_k, \quad P_n = e^{S_n}.$$

因此 $\{P_n\}_{n \geq 1}$ 收敛当且仅当 $\{S_n\}_{n \geq 1}$ 收敛. \square

如果无穷乘积 (6.4.1) 收敛, 则根据性质6.4.2 可知 $p_n \rightarrow 1$. 从而不妨假设

$$p_n := 1 + a_n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

推论6.4.5. (1) 假设 $a_n > 0 (n \geq 1)$ 或 $-1 < a_n < 0 (n \geq 1)$. 无穷乘积 $\prod_{n \geq 1} (1 + a_n)$ 收敛 $\iff \sum_{n \geq 1} a_n$ 收敛.

(2) 假设 $a_n > 0 (n \geq 1)$ 或 $-1 < a_n < 0 (n \geq 1)$, 且无穷级数 $\sum_{n \geq 1} a_n$ 收敛. 无穷乘积 $\prod_{n \geq 1} (1 + a_n)$ 收敛 \iff 无穷级数 $\sum_{n \geq 1} a_n^2$ 收敛.

(3) 假设 $a_n > 0 (n \geq 1)$ 或 $-1 < a_n < 0 (n \geq 1)$, 且无穷级数 $\sum_{n \geq 1} a_n^2$ 收敛. 无穷乘积 $\prod_{n \geq 1} (1 + a_n)$ 收敛 \iff 无穷级数 $\sum_{n \geq 1} a_n$ 收敛.

证: (1) 根据定理6.4.4, $\prod_{n \geq 1} (1 + a_n)$ 收敛当且仅当 $\sum_{n \geq 1} \ln(1 + a_n)$ 收敛. 但是 $\ln(1 + a_n) \sim a_n$, 因为 $a_n \rightarrow 0$, 所以无穷乘积 $\prod_{n \geq 1} (1 + a_n)$ 收敛当且仅当 $\sum_{n \geq 1} a_n$ 收敛.

(2) 因为 $\sum_{n \geq 1} a_n$ 收敛, 所以 $a_n \rightarrow 0$ 和 $\ln(1 + a_n) \leq a_n$. 根据

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n - \ln(1 + a_n)}{a_n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{1+a_n}}{2a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(1+a_n)} = \frac{1}{2}.$$

故 $\sum_{n \geq 1} \ln(1 + a_n)$ 收敛当且仅当 $\sum_{n \geq 1} a_n^2$ 收敛.

(3) 证明和 (2) 类似. \square

注6.4.6. 在推论6.4.5 (1) 和 (2) 中对 a_n 的假设是必要的. 比如考察无穷乘积

$$\prod_{n \geq 1} (1 + a_n), \quad a_n := \begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{k}}, & n = 2k - 1, \\ \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}}, & n = 2k. \end{cases}$$

此时无穷乘积 $\prod_{n \geq 1} (1 + a_n)$ 收敛, 但是两个无穷级数 $\sum_{n \geq 1} a_n$ 和 $\sum_{n \geq 1} a_n^2$ 发散.

要证无穷乘积 $\prod_{n \geq 1} (1 + a_n)$ 收敛, 只需要证明无穷级数 $\sum_{n \geq 1} \ln(1 + a_n)$ 收敛. 定义

$$x_k := \ln(1 + a_{2k}) + \ln(1 + a_{2k-1}) = \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}}\right)$$

$$= \ln \left[1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{k} \right) \right] = \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right).$$

因此级数 $\sum_{n \geq 1} x_n$ 收敛, 从而得到级数 $\sum_{n \geq 1} \ln(1 + a_n)$ 收敛.

记

$$y_k := a_{2k-1} + a_{2k}, \quad z_k := a_{2k-1}^2 + a_{2k}^2.$$

则得到

$$y_k = \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}}, \quad k \geq 1,$$

和

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{1}{k} + \left(\frac{1}{k} + \frac{2}{k\sqrt{k}} + \frac{3}{k^2} + \frac{2}{k^2\sqrt{k}} + \frac{1}{k^3} \right) \\ &= \frac{2}{k} + \frac{2}{k\sqrt{k}} + \frac{3}{k^2} + \frac{2}{k^2\sqrt{k}} + \frac{1}{k^3} = \frac{2}{k} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right). \end{aligned}$$

从而推出级数 $\sum_{n \geq 1} y_n$ 和 $\sum_{n \geq 1} z_n$ 都发散, 故原来两个级数也都发散.

§6.4.3 * 无穷乘积的绝对收敛和条件收敛

假设 $p_n > 0$. 称无穷乘积 $\prod_{n \geq 1} p_n$ 是绝对收敛的(**absolutely convergent**) 如果无穷级数 $\sum_{n \geq 1} \ln p_n$ 绝对收敛. 同样, 称无穷乘积 $\prod_{n \geq 1} p_n$ 是条件收敛的(**conditionally convergent**) 如果无穷级数 $\sum_{n \geq 1} \ln p_n$ 条件收敛.

定理6.4.7. 假设 $a_n > -1$. 则下面命题等价:

- (1) 无穷乘积 $\prod_{n \geq 1} (1 + a_n)$ 绝对收敛.
- (2) 无穷乘积 $\prod_{n \geq 1} (1 + |a_n|)$ 收敛.
- (3) 无穷级数 $\sum_{n \geq 1} a_n$ 绝对收敛.

证: 首先注意到 (1), (2) 和 (3) 成立的必要条件是 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. 这是因为 $\prod_{n \geq 1} (1 + a_n)$ 绝对收敛当且仅当 $\sum_{n \geq 1} \ln(1 + a_n)$ 绝对收敛. 但是

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|\ln(1 + a_n)|}{|a_n|} = 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + |a_n|)}{|a_n|},$$

所以 (1) \iff (3) \iff (2). \square

例6.4.8. 研究如下无穷乘积的绝对收敛和条件收敛:

$$\prod_{n \geq 1} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} \right], \quad \prod_{n \geq 1} \left[1 + \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n} \right].$$

解: (1) 令

$$a_n := \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}.$$

因为级数 $\sum_{n \geq 1} a_n$ 当 $p > 1$ 时是绝对收敛而当 $0 < p \leq 1$ 时是条件收敛, 所以无穷乘积当 $p > 1$ 时绝对收敛. 根据推论 6.4.5 (3) 可知, 当 $1 < p \leq 1$ 时无穷乘积条件收敛. 根据推论 6.4.5 (2) 可知, 当 $0 < p \leq 1$ 时无穷乘积发散. 最后当 $p \leq 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0$, 所以无穷乘积发散.

(2) 令 $p_n = 1 + (-1)^{n(n-1)/2}/n$ 得到

$$|\ln p_n| = \frac{1}{n} \left| \ln \left[1 + \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n} \right]^{\frac{n}{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}} \right| \sim \frac{1}{n}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

因此无穷乘积不是绝对收敛. 下证无穷乘积是条件收敛. 记

$$\begin{aligned} x_k &:= \ln p_{2k} + \ln p_{2k-1} = \ln \left[1 + \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \right] + \ln \left[1 + \frac{(-1)^k}{2k} \right] \\ &= \ln \left[1 + \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} + \frac{(-1)^k}{2k} + \frac{(-1)^{2k-1}}{2k(2k-1)} \right] = \ln \left[1 + \frac{(-1)^{k-1} - 1}{2k(2k-1)} \right]. \end{aligned}$$

因此 $\sum_{n \geq 1} x_n$ 收敛从而 $\sum_{n \geq 1} \ln p_n$ 收敛.

§6.4.4 * Γ 函数的 Euler-Gauss 公式和 Weierstrass \wp 函数简介

本节利用定理 3.1.17 来得到 Γ 函数 $\Gamma(x)$ 的刻画. 首先证明 $\ln \Gamma(x)$ 是凸的.

定义 Ψ 函数如下:

$$\Psi(x) := -\gamma - \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n+1} \right), \quad x > 0. \quad (6.4.7)$$

这里 γ 是 Euler 常数. 任给 $x > 0$, 上述级数收敛故 $\Psi(x)$ 有定义. 利用 γ 的定义得到

$$\Psi(x) = \sum_{n \geq 1} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{x+n} \right] - \frac{1}{x}. \quad (6.4.8)$$

定理 6.4.9. Ψ 函数满足

$$\Psi(x+1) - \Psi(x) = \frac{1}{x}, \quad \Psi'(x) = -\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(x+n)^2}, \quad x > 0. \quad (6.4.9)$$

证: 根据定义立即得到 ψ 函数所要满足的函数方程. 为证第二个, 令

$$u_n(x) := -\left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n+1} \right) \implies u'_n(x) = \frac{1}{(x+n)^2}.$$

因为 $x > 0$ 所以 $|u'_n(x)| \leq 1/n^2$ 从而 $\sum_{n \geq 1} u_n(x) \leq \sum_{n \geq 1} 1/n^2 = \pi^2/6$, 即级数 $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ “一致收敛”. 关于函数项级数的一致收敛定义和性质见第十四章, 对 (6.4.7) 中的级数而言, 我们可以把求导放在求和内:

$$\Psi'(x) = - \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{x+n} \right)' = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(x+n)^2}. \quad \square$$

首先利用 (6.4.9) 中的第一个公式可以将 Ψ 函数延拓到 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, 比如

$$\Psi(x) := \Psi(x+1) - \frac{1}{x}, \quad -1 < x < 0.$$

第二个公式告诉我们 Ψ 函数在任意开区间 $(k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, 内都是单调递增.

利用复变函数知识可以证明 (具体细节之后章节给出)

$$\frac{1}{x} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right) = \pi \cot(\pi x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \quad (6.4.10)$$

结合定义 (6.4.7) 就得到

定理 6.4.10. Ψ 函数满足

$$\Psi(1-x) - \Psi(x) = \pi \cot(\pi x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \quad (6.4.11)$$

考虑 Ψ 函数的部分和

$$S_n(x) := -\gamma - \sum_{0 \leq k \leq n} \left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{k+1} \right).$$

特别地得到

$$\begin{aligned} S_{2n+1}(x) &= -\gamma - \sum_{0 \leq k \leq 2n+1} \left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= -\gamma - \sum_{0 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{x+2i} - \frac{1}{2i+1} \right) - \sum_{0 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{x+2i+1} - \frac{1}{2i+2} \right) \\ &= -\gamma - \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{\frac{x}{2}+i} - \frac{1}{i+\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{\frac{x+1}{2}+i} - \frac{1}{i+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[S_n\left(\frac{x}{2}\right) + S_n\left(\frac{x+1}{2}\right) \right] + \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{i+\frac{1}{2}} - \frac{1}{i+1} \right) \end{aligned}$$

利用 γ 定义得到

$$\frac{1}{2} \sum_{0 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{i+\frac{1}{2}} - \frac{1}{i+1} \right) = \sum_{0 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{2i+1} - \frac{1}{2i+2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n+2}\right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n+2}\right) \\
&= \ln(2n+2) + \gamma + o(1) - [\ln(n+1) + \gamma + o(1)] = \ln 2 + o(1).
\end{aligned}$$

定理6.4.11. Ψ 函数满足

$$\Psi(z) = \frac{1}{2} \left[\Psi\left(\frac{x}{2}\right) + \Psi\left(\frac{x+1}{2}\right) \right] + \ln 2. \quad (6.4.12)$$

定义 Φ 函数如下

$$\Phi(x) := \int_1^x \Psi(t) dt, \quad x > 0. \quad (6.4.13)$$

再次利用求积分和求级数可以相交换得到

$$\begin{aligned}
\Phi(2) &= \int_1^2 \left[-\gamma - \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n+1} \right) \right] dx \\
&= -\gamma - \sum_{n \geq 0} \left[\ln \frac{n+2}{n+1} - \frac{1}{n+1} \right] = -\gamma + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1) \right].
\end{aligned}$$

引理6.4.12. $\Phi(2) = 0$ 和 $\Phi(1/2) = \ln \sqrt{\pi}$.

证: 第一个已证, 下证第二个等式. 计算得到

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_1^{\frac{1}{2}} \left[-\gamma - \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n+1} \right) \right] dx \\
&= \frac{1}{2}\gamma - \sum_{n \geq 0} \left(\ln \frac{\frac{1}{2} + n}{1+n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} \right) \\
&= \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right) \\
&\quad - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{0 \leq k \leq n-1} \ln \frac{2k+1}{2k+2} + \frac{1}{2} \ln n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\ln \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \right].
\end{aligned}$$

根据 (6.4.3) 得到 $2\Phi(1/2) = \ln \pi$. \square

定理6.4.13. $\Phi(x) = \ln \Gamma(x)$ 和 $\Psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$, $x > 0$.

证: 根据定理(5.5.23) 只要证明函数 $F(x) := e^{\Phi(x)}$ 满足

- $F(x+1) = xF(x)$,
- $F(x)$ 恒不为零,
- $F(x)F(x+1/2) = \sqrt{\pi}2^{1-2x}F(2x)$.

即证明

$$\Phi(x+1) = \Phi(x) + \ln x, \quad \Phi(x) + \Phi(1-x) = \ln \pi - \ln \sin(\pi x)$$

和

$$\Phi(x) = \Phi\left(\frac{x}{2}\right) + \Phi\left(\frac{x+1}{2}\right) + (x-1)\ln 2 - \ln \sqrt{\pi}.$$

对 (6.4.9) 第一个方程积分得到

$$\Phi(x+1) - \Phi(x) = \ln x + C_1.$$

根据引理6.4.12 可知 $C_1 = 0$. 对 (6.4.11) 积分得到

$$-\Phi(1-x) - \Phi(x) = \ln \sin(\pi x) + C_2.$$

根据引理6.4.12 可知 $C_2 = -2\Phi(1/2) = -\ln \pi$. 对 (6.4.12) 积分得到

$$\Phi(x) = \Phi\left(\frac{x}{2}\right) + \Phi\left(\frac{x+1}{2}\right) + x \ln 2 + C_3.$$

根据引理6.4.12 和 $\Phi(1) = 0$ 可知 $C_3 = -\ln 2 - \ln \sqrt{\pi}$. \square

定理6.4.14. (Euler-Gauss 公式) 当 $x > 0$ 时有

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \frac{1}{x} \prod_{n \geq 1} \frac{(n+1)^x}{n^{x-1}(x+n)}. \quad (6.4.14)$$

证: 利用定理6.4.13 和定理6.4.9 可知 $\ln \Gamma(x)$ 是凸的. 这样结合定理3.1.17 就给出了 (6.4.14). \square

上面引入的函数 Ψ 和 Φ 可类比函数 $1/x^k$ (不考虑系数):

$$\cdots \xrightarrow{D} x^2 \xrightarrow{D} x \xrightarrow{D} 1 \xrightarrow{?} \frac{1}{x} \xrightarrow{D} \frac{1}{x^2} \xrightarrow{D} \cdots$$

如何从 1 过渡到 $1/x$? 基本想法是引入对数:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{D} & x^2 & \xrightarrow{D} & x & \xrightarrow{D} & 1 & \xrightarrow{?} & \frac{1}{x} & \xrightarrow{D} & \frac{1}{x^2} & \xrightarrow{D} & \cdots \\ & & & & \ln \downarrow & & & & \uparrow D & & & & \\ & & & & \ln x & \equiv & \ln x & \equiv & \ln x & & & & \end{array}$$

Γ 函数和 Ψ, Φ 函数也有类似的图:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{D} & x^2 & \xrightarrow{D} & \Gamma(x) & \xrightarrow{D} & 1 & \xrightarrow{?} & \Psi(x) & \xrightarrow{D} & \Psi'(x) & \xrightarrow{D} & \cdots \\ & & & & \ln \downarrow & & & & \uparrow D & & & & \\ & & & & \Phi(x) & \equiv & \Phi(x) & \equiv & \Phi(x) & & & & \end{array}$$

上述想法可以用来构造“椭圆函数”, Weierstrass \wp 函数¹.

最后要说明的是, (6.4.10) 及其推广是 Eisenstein 用来构造椭圆函数的基石. 引入级数

$$\epsilon_k(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x+n)^k}, \quad k \in \mathbb{Z}_{\geq}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \quad (6.4.15)$$

显然 (6.4.15) 当 $k \geq 2$ 时是绝对收敛的, 但是

$$\lim_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{x+n} = \lim_{M, N \rightarrow +\infty} \sum_{-M \leq n \leq N} \frac{1}{z+n}$$

是发散的. 原因是当固定 x 时, 有 $(x+n)^{-1} \sim 1/n$. 为了处理 $\epsilon_1(x)$ 我们引入按“主值”求和或 Eisenstein 求和:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}}^E := \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{-N \leq n \leq N}. \quad (6.4.16)$$

这样我就把 $\epsilon_1(x)$ 按上述定义并得到:

$$\epsilon_1(x) := \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{-N \leq n \leq N} \frac{1}{x+n} = \frac{1}{x} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right). \quad (6.4.17)$$

这个不是别的就是之前 (6.4.10). 根据定义

$$\epsilon_1(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n \geq 1} c_n x^{n-1}, \quad c_n := 2 \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m^{2n}}.$$

第三次利用求导和求和可交换 (这是因为 $k \geq 2$ 时 $\epsilon_k(x)$ 绝对和一致收敛, 具体细节等到下章给出) 得到

$$\epsilon_k(x) = \frac{1}{x^k} + (-1)^k \sum_{n \geq 1} \binom{2n-1}{k-1} c_{2n} x^{2n-k}.$$

除了用复变函数给出 (6.4.10) 的证明外, 我们按照 Eisenstein 的方法² 给出一个初等证明³. 给定两个独立变量 p, q 并定义 $r := p + q$. 则得到

$$\frac{1}{pq} = \frac{1}{pr} + \frac{1}{qr}.$$

¹1862年由 Weierstrass 引入, 具体细节可参阅名著, *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*, 数学大师 Weil 著.

²Eisenstein, G. *Beiträge zu Theorie der elliptischen Functionen*, J. Reine Angew. Math., 35(1847), 137-184; 185-274.

³本处参考 Weil 的著作, *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*.

两边先对 p 求导得到

$$\frac{-1}{p^2q} = \frac{-1}{p^2r} - \frac{1}{pr^2} - \frac{1}{qr^2}$$

再对 q 求导得到

$$\frac{1}{p^2q^2} = \frac{1}{p^2r^2} + \frac{1}{q^2r^2} + \frac{2}{pr^3} + \frac{2}{qr^3}. \quad (6.4.18)$$

练习6.4.15. 对任意 $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 证明

$$\frac{1}{p^m q^n} = \sum_{0 \leq i \leq m-1} \frac{n(n+1) \cdots (n+i-1)}{i! p^{m-i} r^{n+i}} + \sum_{0 \leq j \leq n-1} \frac{m(m+1) \cdots (m+j-1)}{j! q^{n-j} r^{m+j}}.$$

在 6.4.18 中取 $p = x + n, q = y + r - n, r = z + r, z = x + y$, 这里 $n, r \in \mathbb{Z}$, 得到

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{p^2 q^2} - \frac{1}{p^2 r^2} - \frac{1}{q^2 r^2} \right) = \frac{2}{r^3} [\epsilon_1(x) + \epsilon_1(y+r)],$$

因为左边每项都是绝对收敛, 根据收敛级数的乘积性质得到

$$\epsilon_2(x)\epsilon_2(y) - \epsilon_2(x)\epsilon_2(z) - \epsilon_2(y)\epsilon_2(z) = 2\epsilon_3(z)[\epsilon_1(x) + \epsilon_1(y)], \quad (6.4.19)$$

这里 $x, y, z := x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. 固定 x 对 y 在 $y = 0$ 展开并比较系数得到

$$3\epsilon_4(x) = \epsilon_2(x)^2 + 2\epsilon_1(x)\epsilon_3(x). \quad (6.4.20)$$

类似地, 固定 x 对 z 在 $z = 0$ 展开并比较系数得到

$$\epsilon_2(x)^2 = \epsilon_4(x) + 2c_2\epsilon_2(x). \quad (6.4.21)$$

结合 (6.4.20) 和 (6.4.21) 得到

$$\epsilon_1(x)\epsilon_3(x) = \epsilon_2(x)^2 - 3c_2\epsilon_2(x). \quad (6.4.22)$$

根据

$$\epsilon'_k(x) = -k\epsilon_{k+1}(x), \quad k \geq 1. \quad (6.4.23)$$

对 (6.4.22) 两边求导得到

$$\epsilon_2(x)\epsilon_3(x) - 2c_2\epsilon_3(x) = \epsilon_1(x)\epsilon_4(x)$$

从而, 利用 (6.4.22),

$$\epsilon_3(x) = \epsilon_1(x)\epsilon_2(x). \quad (6.4.24)$$

把 (6.4.24) 代入 (6.4.20) 并结合 (6.4.21) 得到

$$\epsilon'_1(x) + \epsilon_1(x)^2 + 3c_2 = 0. \quad (6.4.25)$$

因为 $\epsilon_1(0) = \infty$, 此时上述常微分方程有唯一解

$$\epsilon_1(x) = \pi \cot(\pi x). \quad (6.4.26)$$

求导得到

$$\epsilon_2(x) = \left(\frac{\pi}{\sin(\pi x)} \right)^2. \quad (6.4.27)$$

练习6.4.16. 验证 (6.4.20) 和 (6.4.21).

一个直接应用, 我们来证明 (6.4.4). 考虑无穷乘积

$$P(x) := \prod_{n \geq 1} \left[1 - \left(\frac{x}{n} \right)^2 \right].$$

先去对数再求导得到

$$[\ln P(x)]' = \left[\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) + \sum_{n \geq 1} \ln \left(1 - \frac{x}{n} \right) \right]' = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{x+n} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{x-n}.$$

这里我们第四次利用求导和求和可交换! 化简得到

$$[\ln P(x)]' = [\ln \sin(\pi x)]' - \frac{1}{x} \implies \frac{d}{dx} \ln \left[\frac{x}{\sin(\pi x)} P(x) \right] = 0.$$

即 $xP(x)/\sin(\pi x)$ 是常数. 为求 $xP(x)/\sin(\pi x)$ 在 $x=0$ 处的值, 在 Eisenstein 的原始文章中, 他从最简单的三角恒等式

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2} \cot \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cot \frac{x+\pi}{2}$$

出发. 利用 (6.4.26) 得到

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = \frac{1}{2} \epsilon_1 \left(\frac{x}{2} \right) - \frac{1}{2} \epsilon_1 \left(\frac{1+x}{2} \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{x+n}. \quad (6.4.28)$$

因此

$$\frac{x}{\sin(\pi x)} P(x) \Big|_{x=0} = \frac{\pi}{\sin \pi x} P(x) \cdot \frac{x}{\pi} \Big|_{x=0} = \frac{1}{\pi}.$$

所以得到

$$\sin(\pi x) = \pi x \prod_{n \geq 1} \left[1 - \left(\frac{x}{n} \right)^2 \right].$$

公式 (6.4.28) 的一个应用就是证明 (5.5.21),

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

当然需要借助重积分的性质 (关于重积分在之后的章节给出):

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \Gamma(x) \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-x} dt = \int_0^{+\infty} t^x e^{-ty} y^{x-1} dy \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-x} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{-t(y+1)} dt \right] y^{x-1} dy = \int_0^{+\infty} \frac{y^{x-1}}{1+y} dy.$$

利用级数展开

$$\frac{1}{1+y} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n y^n$$

得到

$$\int_0^1 \frac{y^{x-1}}{1+y} dy = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \int_0^1 y^{x-1+n} dy = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{x+n}$$

和 ($t = 1/y$)

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{y^{x-1}}{1+y} dy &= \int_0^1 \frac{t^{-x}}{1+t} dt = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \int_0^1 t^{-x+n} dt \\ &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{1}{n+1-x} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{x-n} \end{aligned}$$

在这里我们利用了求积和求和可交换! 两式相加得到

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{x+n} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

级数 (6.4.15) 推广到复数域得到 k 权 Eisenstein 级数 (Eisenstein series of weight k)

$$G_k(\tau) := \sum_{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(c\tau + d)^k}, \quad \tau \in \mathcal{H}, \quad (6.4.29)$$

这里 $\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} | \text{Im}(z) > 0\}$ 是上半平面. 为了求 $G_k(\tau)$ 首先将 (6.4.17) 写成复数形式 (关于复数级数的定义及性质在之后的章节给出, 目前可“暂时”当成实级数来考虑)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} + \sum_{d \geq 1} \left(\frac{1}{\tau-d} + \frac{1}{\tau+d} \right) &= \pi \cot(\pi\tau), \quad \tau \in \mathcal{H} \\ &= \pi\sqrt{-1} + 2\pi\sqrt{-1} \sum_{m \geq 0} q^m, \quad q := e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}. \end{aligned} \quad (6.4.30)$$

上述第一个恒等式当 τ 是实数时已经给出了证明, 但是对一般的 $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ 其实也是成立的 (严格证明在之后的章节中给出); 第二个恒等式是利用

$$\cos(\pi\tau) = \frac{e^{\pi\tau\sqrt{-1}} + e^{-\pi\tau\sqrt{-1}}}{2}, \quad \sin(\pi\tau) = \frac{e^{\pi\tau\sqrt{-1}} - e^{-\pi\tau\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

对 (6.4.30) 求 $k-1$ 次导数得到 (这里要用到一致收敛的性质)

$$\sum_{d \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\tau+d)^k} = \frac{(-2\pi\sqrt{-1})^k}{(k-1)!} \sum_{m \geq 1} m^{k-1} q^m, \quad k \geq 2.$$

从而

$$\sum_{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(c\tau + d)^k} = \sum_{d \neq 0} \frac{1}{d^k} + 2 \sum_{c \geq 1} \left[\sum_{d \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(c\tau + d)^k} \right]$$

最后得到

$$G_k(\tau) = 2\zeta(k) + 2 \frac{(2\pi\sqrt{-1})^k}{(k-1)!} \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}(n) q^n, \quad k > 2, k \text{ 偶数}. \quad (6.4.31)$$

其中系数 $\sigma_{k-1}(n)$ 定义为

$$\sigma_{k-1}(n) := \sum_{m|n, m>0} m^{k-1}.$$

\mathbb{C} 中的格(lattice)是指集合

$$\Lambda := \omega_1 \mathbb{Z} \oplus \omega_2 \mathbb{Z},$$

这里 $\{\omega_1, \omega_2\}$ 是 \mathbb{C} (作为 \mathbb{R} 上的实向量空间) 的一组基. 不失一般性我们不妨假设 $\omega_1/\omega_2 \in \mathcal{H}$. 最简单的格是 $\sqrt{-1}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

给定格 $\Lambda = \omega_1 \mathbb{Z} \oplus \omega_2 \mathbb{Z}$, $\omega_1/\omega_2 \in \mathcal{H}$, 令

$$\tau := \omega_1/\omega_2, \quad \Lambda_\tau := \tau \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

可以证明 Λ 同构于 Λ_τ .

练习6.4.17. 考虑两个格

$$\Lambda = \omega_1 \mathbb{Z} \oplus \omega_2 \mathbb{Z}, \quad \Lambda' = \omega'_1 \mathbb{Z} \oplus \omega'_2 \mathbb{Z}, \quad \omega_1/\omega_2 \in \mathcal{H}, \quad \omega'_1/\omega'_2 \in \mathcal{H}.$$

证明 $\Lambda' = \Lambda \iff$

$$\begin{bmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}, \quad \text{存在} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

对给定的格, 定义其复环面(complex torus)为

$$\mathbb{C}/\Lambda := \{z + \Lambda \mid z \in \mathbb{C}\}.$$

几何上, 复环面就是由 ω_1, ω_2 所张成的平行四边形将其对边粘合而成. 代数上, 复环面是 Abelian 群.

给定格 Λ , 定义 Weierstrass \wp_Λ -函数(Weierstrass \wp_Λ -function)为

$$\wp_\Lambda(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda} \left[\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right], \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda. \quad (6.4.32)$$

形式求导得到 (其严格性需要用到函数项级数的性质)

$$\wp'_\Lambda(z) = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z - \omega)^3}.$$

可以证明 (在之后的章节给出)

$$\wp'_\Lambda(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2(\Lambda)\wp_\Lambda(z) - g_3(\Lambda), \quad (6.4.33)$$

这里 $(\Lambda = \omega_1\mathbb{Z} \oplus \omega_2\mathbb{Z}, \tau := \omega_1/\omega_2 \in \mathcal{H})$

$$g_2(\Lambda) := 60G_4(\Lambda), \quad g_3(\Lambda) := 140G_6(\Lambda), \quad G_k(\Lambda) := \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda} \frac{1}{\omega^k} \quad (k > 0 \text{ 偶数}).$$

注意到 $G_k(\tau) = G_k(\Lambda_\tau)$.

定义判别式函数(discriminant function)

$$\Delta(\Lambda) := g_2(\Lambda)^3 - 27g_3(\Lambda)^2. \quad (6.4.34)$$

特别地得到

$$\Delta(\tau) := \Delta(\Lambda_\tau).$$

若引入Dedekind eta-函数(Dedekind eta function)

$$\eta(\tau) := q_{24} \prod_{n \geq 1} (1 - q^n), \quad q_{24} := e^{2\pi\sqrt{-1}\tau/24}, \quad q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}, \quad \tau \in \mathcal{H}, \quad (6.4.35)$$

我们得到著名的恒等式

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} \eta(\tau)^{24}. \quad (6.4.36)$$

稍加提一句,

$$\Delta(\tau) \neq 0, \quad \tau \in \mathcal{H}. \quad (6.4.37)$$

考虑如下椭圆曲线集

$$\mathfrak{E} := \left\{ y^2 = 4x^3 - a_2x - a_3, \quad a_2^3 - 27a_3^2 \neq 0 \right\}$$

和 \mathbb{C} 中的所有格

$$\mathfrak{L} := \{ \Lambda \text{ 是 } \mathbb{C} \text{ 中的格} \}.$$

则 (6.4.33) 和 (6.4.37) 给出了映射

$$\mathbf{W}: \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{E}, \quad \Lambda \longmapsto (\wp_\Lambda, \wp'_\Lambda). \quad (6.4.38)$$

反之可以证明, 映射 \mathbf{W} 是满的.

§6.5 参考文献

1. Diamond, Fred; Shurman, Jerry. *A first course in modular forms*, Graduate Texts in Mathematics, **228**, Springer-Verlag, New York, 2005. xvi+436 pp. ISBN: 0-387-23229-X
2. Eisenstein, G. *Beiträge zu Theorie der elliptischen Functionen*, J. Reine Angew. Math., **35**(1847), 137-184; 185-274.
3. Koblitz, Neal. *Introduction to elliptic curves and modular forms*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics **97**, Springer-Verlag, New York, 1993. x+248 pp. ISBN: 0-387-97966-2
4. Weil, André. *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*, Reprint of the 1976 original, Classical in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1999. viii+93 pp. ISBN: 3-540-65036-9
5. 布鲁斯·C. 伯恩特 (Bruce C. Berndt) 主编: 拉玛努金笔记(第 2, 3, 4 卷), 哈尔滨工业大学出版社, 2019.
6. 谭琳 编著: Γ 函数札记, 浙江大学出版社, 1997.
7. 潘承洞, 潘承彪 著: 解析数论基础, 现代数学基础丛书, 科学出版社, 1999.
8. 徐森林, 薛春华 编著: 数学分析, 清华大学出版社, 2005.
9. 张福保, 薛金美, 潮小李 主编: 数学分析讲义, 科学出版社, 2019.
10. 梅加强 编著: 数学分析, 高等教育出版社, 2015.
11. 邓建平 编: 微积分 I 和 II, 科学出版社, 2019.
12. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis I*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+574 pp. ISBN: 3-540-40386-8
13. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis II*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xvi+681 pp. ISBN: 3-540-40633-6
14. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis I*, Translated from the 1988 German original by Gary Brookfield, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. xiv+426 pp. ISBN: 3-7643-7153-6
15. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis II*, Translated from the 1999 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. xii+400 pp. ISBN: 978-3-7643-7472-3; 3-7643-7472-3

16. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis III*, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. xii+468 pp. ISBN: 978-3-7643-7479-2; 3-7643-7479-2
17. 菲赫金哥尔茨 著 (徐献瑜, 冷生明, 梁文骐 译; 郭思旭 校): **微积分学教程** (第一、二、三卷), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.
18. 吉米多维奇 著 (李荣涑, 李植 译): **数学分析习题集** (根据 2010 年俄文版翻译), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.
19. 汪林 著: **数学分析中的问题和反例**, 现代数学基础 **56**, 高等教育出版社, 2015.
20. 裴礼文 编著: **数学分析中的典型问题与方法** (第二版), 高等教育出版社, 2015.
21. 朱尧辰 编著: **数学分析例选通过范例学技巧**, 哈尔滨工业大学出版社, 2013.
22. 周民强 编著: **数学分析习题演练** (第一、二、三册), 科学出版社, 2018.
23. 李逸 编著: **数学分析讲义**, 上海交通大学数学分析课讲义, 未出版, 2016.

第二部分

线性代数与常微分方程

第七章 矩阵和行列式

第八章 二次型和矩阵变换

第九章 常微分方程基本理论

第十章 常微分方程基本定理

第三部分

多变量理论

第十一章 多变量极限理论

亦非有心者所能得远, 亦非无心者所能得近. — 《冲虚至德真经》,
卷第四 (仲尼第四)

§11.1 Euclidean 空间及其子集

本节引入 Euclidean 空间中的一些基本概念.

§11.1.1 Euclidean 空间 \mathbb{R}^n

n 维 Euclidean 空间的定义:

$$\mathbb{R}^n := \{x = (x^1, \dots, x^n) : x^i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}. \quad (11.1.1)$$

里面的元素称为向量. 定义 n 个映射如下

$$\pi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^i, \quad (11.1.2)$$

其中 $1 \leq i \leq n$.

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ 构成了一个向量空间:

$$x + y := (x^1 + y^1, \dots, x^n + y^n), \quad (11.1.3)$$

$$\lambda x \equiv \lambda \cdot x := (\lambda x^1, \dots, \lambda x^n). \quad (11.1.4)$$

定义11.1.1. 称集合 G 为群 (group) 如果存在映射, 称为乘法 \cdot ,

$$G \times G \longrightarrow G, \quad (x, y) \longmapsto x \cdot y \equiv xy,$$

满足条件

- (i) **(结合律)** $\forall x, y, z \in G \implies (xy)z = x(yz)$;
- (ii) **(单位元)** $\exists e \in G$, 称为单位元, 对 $\forall x \in G$ 满足 $xe = ex = x$;
- (iii) **(逆元)** $\forall x \in G$, $\exists!$ (即表示存在且唯一) $x^{-1} \in G$ 使得 $xx^{-1} = e = x^{-1}x$ 成立.

群 G 称为阿贝尔群 (Abelian group) 如果 $xy = yx$ 对 $\forall x, y \in G$ 都成立.

练习11.1.2. 证明 $(\mathbb{R}^n, +)$ 是群.

练习11.1.3. 证明所有 $n \times n$ 实矩阵组成的集合 $\mathbf{Max}(n, \mathbb{R})$ 在矩阵乘法下是群. 说明该群不是阿贝尔群.

练习11.1.4. 证明所有 $n \times n$ 非奇异实矩阵组成的集合 $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ 在矩阵乘法下是群.

练习11.1.5. 定义映射如下:

$$\mathbf{Max}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2}, \quad A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \longmapsto (a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn}).$$

证明上述映射是同构.

练习11.1.6. 定义映射如下:

$$\det : \mathbf{Max}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad A \longmapsto \det(A).$$

证明 $\det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$. 定义

$$\mathbf{GL}^{\pm}(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = \pm 1\}, \quad \mathbf{SL}(n, \mathbb{R}) := \mathbf{GL}^{+}(n, \mathbb{R}).$$

证明

$$\mathbf{SL}(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ 可作用在复平面 \mathbb{C} 上:

$$\mathbf{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \left(A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, z \right) \longmapsto Az := \frac{az + b}{cz + d}.$$

证明如果 $z \in \mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ 则 $Az \in \mathcal{H}$ 对 $\forall A \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ 都成立.

定义11.1.7. 两个群 G_1, G_2 之间的映射 $f : G_1 \rightarrow G_2$ 称为群同态 (**group homomorphism**) 如果

$$f(x_1 y_1) = f(x_1) f(y_1), \quad \forall x_1, y_1 \in G_1,$$

这里左边是用 G_1 中的乘法而右边是用 G_2 中的乘法. 称 G_1 群同构 (**group isomorphic**) 于 G_2 如果存在群同态 $f_1 : G_1 \rightarrow G_2$ 和 $f_2 : G_2 \rightarrow G_1$ 满足恒等式 $f_1 \circ f_2 = 1_{G_2}$ 和 $f_2 \circ f_1 = 1_{G_1}$. 如果两个群 G_1 和 G_2 群同构, 则记作

$$G_1 \cong G_2.$$

练习11.1.8. (*)¹ 证明群和群同态构成了一个范畴 **Group**. 其中范畴定义见我个人主页上的讲义.

定义11.1.9. 假设 H 是群 G 的子集. 称 H 为 G 的子群 (**subgroup**) 如果 $xy^{-1} \in H$ 对 $\forall x, y \in H$ 都成立. 此时记作 $H < G$.

练习11.1.10. 证明 $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ 是 $\mathbf{Max}(n, \mathbb{R})$ 的子群.

¹选做.

定义子群 $H < G$ 的左右陪集 (left/right coset) 如下:

$$gH := \{gh : h \in H\}, \quad Hg := \{hg : h \in H\}. \quad (11.1.5)$$

称子群 H 是 G 的正规子群 (normal subgroup) 如果 $ghg^{-1} \in H$ 对 $\forall h \in H$ 和 $g \in G$ 都成立. 此时记作 $H \triangleleft G$.

练习11.1.11. 证明 $H \triangleleft G$ 当且仅当 $Hg = gH$ 对 $\forall g \in G$ 都成立.

练习11.1.12. 定义

$$\Lambda(n, \mathbb{R}) := \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} =: \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \mid \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R} \right\}$$

证明 $\Lambda(n, \mathbb{R}) \triangleleft \text{Max}(n, \mathbb{R})$.

如果 $H \triangleleft G$ 我们可以定义商群 (quotient group) 如下

$$G/H := \{gH : g \in G\}, \quad (11.1.6)$$

这里

$$(xH)(yH) := (xy)H, \quad x, y \in G.$$

练习11.1.13. 证明 $\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{R}$ 且 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

在 \mathbb{R}^n 中可引入内积 (inner product) 的概念:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \equiv \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{1 \leq i \leq n} x^i y^i. \quad (11.1.7)$$

其几何意义 (考虑 $n = 2$) 就是来衡量什么时候两个向量 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 垂直. 一般地, 定义两个向量 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 是垂直的 (perpendicular), 记作 $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, 如果 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

记号:

$$\mathbb{E}^n := (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle). \quad (11.1.8)$$

定理11.1.14. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, 和 $\forall a, b \in \mathbb{R}$, 有如下性质:

- (i) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ 且等号取到当且仅当 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;
- (ii) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$;
- (iii) $\langle a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = a\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + b\langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$;
- (iv) Schwarz 不等式: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$ 且等号取到当且仅当 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 平行, 即存在常数 a, b 满足 $a^2 + b^2 \neq 0$ 和 $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

证明: 作为练习请自证. \square

定义 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 的范数 (**norm**) 如下:

$$|\boldsymbol{x}| := \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} = \left(\sum_{1 \leq i \leq n} |x^i|^2 \right)^{1/2}. \quad (11.1.9)$$

利用 Schwarz 不等式立即得到

性质 11.1.15. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ 有如下三角不等式成立

$$|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|. \quad (11.1.10)$$

事实上 \mathbb{R}^n 上面存在很多“范数”也满足不等式 (11.1.10):

(i) p -范数 (p -norm), 这里 $p \geq 1$:

$$|\boldsymbol{x}|_p := \left(\sum_{1 \leq i \leq n} |x^i|^p \right)^{1/p}. \quad (11.1.11)$$

特别地, $|\boldsymbol{x}|_2 = |\boldsymbol{x}|$.

(ii) ∞ -范数 (∞ -norm):

$$|\boldsymbol{x}|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x^i|. \quad (11.1.12)$$

(iii) 对数范数 (ln-norm):

$$|\boldsymbol{x}|_{\ln} := \ln(1 + |\boldsymbol{x}|). \quad (11.1.13)$$

(iv) 商范数 (quotient-norm):

$$|\boldsymbol{x}|_{\mathbf{q}} := \frac{|\boldsymbol{x}|}{1 + |\boldsymbol{x}|}. \quad (11.1.14)$$

练习 11.1.16. 证明 (11.1.11)–(11.1.14) 都满足 (相应的) 三角不等式 (11.1.10).

对任意两个非零向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ 定义它们之间的夹角 (**angle**) 为

$$\theta := \arccos \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle}{|\boldsymbol{x}| |\boldsymbol{y}|} \in [0, \pi]. \quad (11.1.15)$$

显然 $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ 当且仅当 $\theta = \pi/2$.

\mathbb{R}^n 中两个向量 \boldsymbol{x} 和 \boldsymbol{y} 间的距离 (**distance**) 定义为

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = \left(\sum_{1 \leq i \leq n} |x^i - y^i|^2 \right)^{1/2}. \quad (11.1.16)$$

定理11.1.17. (11.1.16) 中定义的距离 d 满足:

- (i) **(正定性):** $d(x, y) \geq 0$ 且等号取到当且仅当 $x = y$;
- (ii) **(对称性):** $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in \mathbb{R}^n$;
- (iii) **(三角不等式):** $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

证明: 作为练习请自证. \square

假设 X 是非空集合. 映射 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ 称为 X 上的**度量(metric)** 或**距离(distance)** 如果 d 满足条件:

- (i) **(正定性):** $d(x, y) \geq 0$ 且等号取到当且仅当 $x = y$;
- (ii) **(对称性):** $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$;
- (iii) **(三角不等式):** $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in X$.

称偶对 (X, d) 为**度量空间(metric space)**. 如果把条件 (i) 换成

- (i') **(非负性):** $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$, 且 $d(x, x) = 0, \forall x \in X$,

则称 d 为**半度量(semi-metric)** 且 (X, d) 为**半度量空间(semi-metric space)**.

练习11.1.18. (*) 假设 (X, d) 是半度量空间. 定义 \sim 如下:

$$x \sim y \iff d(x, y) = 0.$$

证明 \sim 是等价关系. 把 x 的等价类记作 $[x]$, 并令

$$\tilde{X} \equiv X / \sim := \{[x] : x \in X\}.$$

定义映射 $\tilde{d}: \tilde{X} \times \tilde{X} \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$\tilde{d}([x], [y]) := d(x, y), \quad [x], [y] \in \tilde{X}.$$

证明 \tilde{d} 的定义不依赖等价类的代表元, 且 $(\tilde{X}/\tilde{d}, \tilde{d}) := (\tilde{X}, \tilde{d})$ 是度量空间.

练习11.1.19. 根据 (11.1.11) – (11.1.14) 定义

$$d_p(x, y) := |x - y|_p, d_\infty(x, y) := |x - y|, d_{\ln}(x, y) := |x - y|_{\ln}, d_q(x, y) := |x - y|_q$$

都是 \mathbb{R}^n 上的度量.

练习11.1.20. 定义

$$d(x, y) := |(x^1 - y^1) + (x^2 - y^2)|, \quad \forall x = (x^1, x^2), y = (y^1, y^2) \in \mathbb{R}^2.$$

证明 (\mathbb{R}^2, d) 是半距离空间但不是距离空间.

度量空间之间的映射 $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ 称为**等距映射(isometry)** 如果 f 是双射且满足条件

$$d_X(x_1, x_2) = d_Y(f(x_1), f(x_2)), \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

两个度量空间 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 是**等距的(isometric)** 如果它们之间存在一个等距映射.

练习11.1.21. 证明 $(\mathbb{R}^2/d, d)$ 和 (\mathbb{R}, d_1) 是等距的, 其中 (\mathbb{R}^2, d) 由练习 11.1.20 给出.

§11.1.2 \mathbb{R}^n 中的点列收敛

令 $x \in \mathbb{R}^n$. 称

$$\mathbb{B}^n(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\} \quad (11.1.17)$$

为以 x 为球心 r 为半径的球. 如果 $x = \mathbf{0}$ 简记为 $\mathbb{B}_r^n := \mathbb{B}^n(\mathbf{0}, r)$; 特别的 $\mathbb{B}^n := \mathbb{B}_1^n = \mathbb{B}^n(\mathbf{0}, 1)$ 表示 \mathbb{R}^n 中的**单位球**.

定义11.1.22. 假设 $\{x_i\}_{i \geq 1}$ 是 \mathbb{R}^n 中的点列, 即 $x_i \in \mathbb{R}^n, \forall i \geq 1$.

- (i) 称点列 $\{x_i\}_{i \geq 1}$ 是**有界的(bounded)** 如果 $\exists M > 0$ 使得 $|x_i| \leq M$ 成立, $i \geq 1, x_i \in \mathbb{B}_M^n$.
- (ii) 称 x 是点列 $\{x_i\}_{i \geq 1}$ 的**极限(limit)**, 记作 $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x$, 如果 $x \in \mathbb{R}^n$, 且 $\forall \epsilon > 0 \exists I \in \mathbb{N}$ 使得不等式

$$|x_i - x| < \epsilon \iff x \in \mathbb{B}^n(x, \epsilon),$$

对 $\forall i \geq I$ 都成立.

- (iii) 称点列 $\{x_i\}_{i \geq 1}$ 是**发散的(divergent)** 如果其不收敛到任何 \mathbb{R}^n 中的点.

利用映射 (11.1.2) 对给定的点列 $\{x_i\}_{i \geq 1}$ 得到 n 个数列

$$\{x_i^j = \pi_j(x_i)\}_{i \geq 1}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

定理11.1.23. $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x \iff \lim_{i \rightarrow \infty} x_i^j = x^j (1 \leq j \leq n)$.

证明: 利用不等式

$$|x_i^j - x^j| \leq |x_i - x| = \sqrt{\sum_{1 \leq k \leq n} (x_i^k - x^k)^2} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{1 \leq k \leq n} |x_i^k - x^k|. \quad \square$$

§11.1.3 \mathbb{R}^n 中的有界集、开集和闭集

假设 S 是 \mathbb{R}^n 中的点集.

- (1) 称 S 是**有界集(bounded set)** 如果 $\exists M > 0$ 使得 $S \subset \mathbb{B}_M^n$ 成立.
- (2) 称 $x \in \mathbb{R}^n$ 是 S 的**内点(interior point)** 如果存在 $r > 0$ 满足 $\mathbb{B}^n(x, r) \subset S$. S 的所有内点组成的集合记作 S° 或 $\text{Int}(S)$, 称为 S 的**内部(interior)**.
- (3) 称 $x \in \mathbb{R}^n$ 是 S 的**外点(exterior point)** 如果存在 $r > 0$ 满足 $\mathbb{B}^n(x, r) \subset \mathbb{R}^n \setminus S$. S 的所有外点组成的集合记作 $\text{Ext}(S)$, 称为 S 的**外部(exterior)**.
- (4) 称 $x \in \mathbb{R}^n$ 是 S 的**边界点boundary point)** 如果 $x \notin \text{Int}(S) \cup \text{Ext}(S)$. S 的所有边界点组成的集合记作 ∂S 或 $\text{Bdy}(S)$, 称为 S 的**边界(boundary)**. 等价地, $x \in \partial S$ 当且仅当 $\forall r > 0$ 球 $\mathbb{B}^n(x, r)$ 即包含 S 的点又包含 $\mathbb{R}^n \setminus S$ 的点.

显然成立关系: $\text{Int}(S) = \text{Ext}(\mathbb{R}^n \setminus S)$, $\text{Ext}(S) = \text{Int}(\mathbb{R}^n \setminus S)$, $\partial(S) = \partial(\mathbb{R}^n \setminus S)$, 和

$$S^\circ \subset S \quad \text{但是} \quad \partial S \text{ 可能不属于 } S. \quad (11.1.18)$$

比如 $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ 的边界 $\partial S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ 就不属于 S .

- (5) 称 $x \in \mathbb{R}^n$ 是 S 的**孤立点(isolated point)** 如果存在 $r > 0$ 满足 $\mathbb{B}^n(x, r) \cap S = \{x\}$. S 的所有孤立点组成的集合记作 $\text{Iso}(S)$. 显然 $\text{Iso}(S) \subset \partial S \cap S$.
- (6) 称 $x \in \mathbb{R}^n$ 是 S 的**聚点(cluster point)** 如果 $\forall r > 0$ 球 $\mathbb{B}^n(x, r)$ 都包含无穷多个 S 中的点. S 的所有聚点组成的集合记作 S' , 称为 S 的**导集(derived set)**.
- (7) S 的**闭包(closure)** 定义为 $\bar{S} := S \cup S'$.
- (8) 称 S 为**开集(open set)** 如果 $S^\circ = S$.
- (9) 称 S 为**闭集(closed set)** 如果 $\bar{S} = S$.

性质11.1.24. (a) $x \in S' \iff \forall r > 0$ 都有 $\mathbb{B}^n(x, r) \cap (S \setminus \{x\}) \neq \emptyset \iff$ 存在一互异的点列 $\{x_i\}_{i \geq 1}$ 满足 $x_i \in S$, $x_i \neq x (\forall i)$ 且 $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x$.

(b) $S^\circ \subset S'$ 且 $\partial S \setminus \text{Iso}(S) \subset S'$.

(c) $\bar{S} = S \cup \partial S$.

证明: (a): \implies 显然. 现在假设 $\forall r > 0$ 都有 $\mathbb{B}^n(x, r) \cap (S \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. 取 $r_1 = 1$ 得到 $x_1 \neq x$ 且 $x \in \mathbb{B}^n(x, 1) \cap S$. 令 $r_2 := |x_1 - x| > 0$. 则得到 $x_2 \neq x$ 且

$x_2 \in \mathbb{B}^n(x, r_2) \cap S$. 令 $r_3 := |x_2 - x| > 0$. 则得到 $x_3 \neq x$ 且 $x_3 \in \mathbb{B}^n(x, r_3) \cap S$. 这个过程一直下去就得到 S 中的无穷多个点.

(b): 显然.

(c): $S \cup \partial S = S \cup (\partial S \setminus \text{Iso}(S)) \subset S \cup S' = \bar{S}$ by (b). 反之, 因为 $S' \subset S^\circ \cup \partial S$ 所以结论得证. \square

例11.1.25. 考察集合

$$S := \mathbb{B}^2 \cup \{(\cos \theta, \sin \theta) : \theta \in [0, \pi/2) \cup (\pi, 3\pi/2]\} \cup \{(0, 2), (-2, 0)\}.$$

则

$$\begin{aligned} S^\circ &= \mathbb{B}^2, \\ \partial S &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0, 2), (-2, 0)\}, \\ \text{Iso}(S) &= \{(0, 2), (-2, 0)\}, \\ S' &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}, \\ \bar{S} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(0, 2), (-2, 0)\}. \end{aligned}$$

例11.1.26. (i) $\mathbb{B}^n(x, r)$ 是开集.

(ii) n 维开矩形 (n -dimensional open rectangle)

$$(a, b) \equiv \prod_{1 \leq i \leq n} (a^i, b^i) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : a^i < x^i < b^i, 1 \leq i \leq n \right\} \quad (11.1.19)$$

是开集.

(iii) n 维闭矩形 (n -dimensional closed rectangle)

$$[a, b] \equiv \prod_{1 \leq i \leq n} [a^i, b^i] := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : a^i \leq x^i \leq b^i, 1 \leq i \leq n \right\} \quad (11.1.20)$$

是闭集.

(iv) n 维闭球 (n -dimensional closed ball)

$$\bar{\mathbb{B}}^n(x, r) \equiv \overline{\mathbb{B}^n(x, r)} := \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| \leq r\} \quad (11.1.21)$$

是闭集.

(v) 假设 $S \neq \emptyset$. S 是开集 $\iff \mathbb{R}^n \setminus S$ 是闭集. 因为 \mathbb{R}^n 即开又闭, 如果规定 \emptyset 也是即开又闭的集合, 则上述等价刻画对任何集合都成立.

定理11.1.27. 开集和闭集具有如下性质:

- (i) 任意一族开集 $\{S_\alpha\}_\alpha$ 的并集 $\cup_\alpha S_\alpha$ 是开集;
- (ii) 任意一族闭集 $\{T_\alpha\}_\alpha$ 的交集 $\cap_\alpha S_\alpha$ 是闭集;

(iii) 任意有限个开集 S_1, \dots, S_k 的交集 $\bigcap_{1 \leq i \leq k} S_i$ 是开集;

(iv) 任意有限个闭集 T_1, \dots, T_k 的并集 $\bigcup_{1 \leq i \leq k} T_i$ 是闭集。

证明: 作为练习请自证. \square

集合 X 上的拓扑(topology) 是指 2^X 中的子集 \mathcal{T} , 其满足如下条件:

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;

(ii) $\forall U_\alpha \in \mathcal{T} \implies \bigcup_\alpha U_\alpha \in \mathcal{T}$;

(iii) 有限个 $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{T} \implies \bigcap_{1 \leq i \leq k} U_i \in \mathcal{T}$.

显然 \mathcal{T} 至少包含两个元素 \emptyset, X . \mathcal{T} 中的元素称为开集(open set). 开集的补集称为闭集(closed set). 偶对 (X, \mathcal{T}) 称为拓扑空间(topological space).

集合 X 上的拓扑至少有两个:

- 平凡拓扑(trivial topology): $\mathcal{T}_{\text{tri}} = \{\emptyset, X\}$;

- 离散拓扑(discrete topology): $\mathcal{T}_{\text{dis}} = 2^X$.

一个是最小的拓扑, 而另一个是最大的拓扑.

练习11.1.28. 证明 \mathcal{T}_{tri} 和 \mathcal{T}_{dis} 都是拓扑.

如果取 $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ 为 \mathbb{R}^n 上所有开集组成的集合, 则 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T})$ 就是一个拓扑空间.

假设 (X, \mathcal{T}) 是拓扑空间. $U \subset X$ 称为 $x \in X$ 的邻域²(neighborhood) 如果 $U \in \mathcal{T}$.

定义11.1.29. 拓扑空间 (X, \mathcal{T}) 是 Hausdorff 如果对任意 $x, y \in X$ 且 $x \neq y$, 都分别存在相应的邻域 $U, V \in \mathcal{T}$ 满足 $x \in U, y \in V$, 和 $U \cap V = \emptyset$.

练习11.1.30. 证明 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n})$ 是 Hausdorff.

当然存在非 Hausdorff 的拓扑空间, 这需要商拓扑(quotient topology) 的概念.

假设 (X, d) 是度量空间. 定义

$$B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}, \quad \bar{B}(x, r) := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}. \quad (11.1.22)$$

²有些书上定义 U 是 x 的邻域如果存在开集 $A \in \mathcal{T}$ 满足 $x \in A \subset U$. 本讲义采用第一种定义.

定义 (X, d) 上的拓扑, 称为**度量拓扑(metric topology)** 如下: $U \subset X$ 是**开集** 如果 $\forall x \in U \exists r > 0$ 满足 $B(x, r) \subset U$. $S \subset X$ 是**闭集** 如果 $X \setminus S$ 是开集.

假设 (X, \mathcal{T}) 是拓扑空间, Y 是 X 的子集. 定义 \mathcal{T}_Y 如下:

$$\mathcal{T}_Y := \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}, \quad (11.1.23)$$

称为由 \mathcal{T} 诱导出来的 Y 上的子空间拓扑(**subspace topology**). 则 (Y, \mathcal{T}_Y) 本身就是拓扑空间.

练习11.1.31. 证明 (Y, \mathcal{T}_Y) 是拓扑空间.

§11.2 \mathbb{R}^n 中的连续性

定义在区间上的函数的连续性可平行地搬到多元区间, 本节给出多元函数连续性的一般定义.

§11.2.1 闭区域套定理、Bozalno-Weierstrass 定理和 Cauchy 收敛准则

我们将之前的闭区间定理、Bozalno-Weierstrass 定理和 Cauchy 收敛准则推广到多元情形.

定理11.2.1. (闭矩形套定理) $\Delta_k := \prod_{1 \leq i \leq n} [a_k^i, b_k^i]$ 是 \mathbb{R}^n 中的一列闭矩形, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. 如果

(i) $\Delta_{k+1} \subset \Delta_k$, 即, $[a_{k+1}^i, b_{k+1}^i] \subset [a_k^i, b_k^i]$ ($1 \leq i \leq n, k \geq 1$), 且

(ii) $\sum_{1 \leq i \leq n} (b_k^i - a_k^i)^2 \rightarrow 0$ 当 $k \rightarrow \infty$,

则 $\exists! \zeta \in \bigcap_{k \geq 1} \Delta_k$ 满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k^i = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k^i = \zeta^i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

证明: $\forall i$ 利用映射 (11.1.2) 得到闭区间列 $\{\Delta_k^i := \pi_i(\Delta_k) = [a_k^i, b_k^i]\}_{k \geq 1}$. 上述条件 (i) 和 (ii) 等价于

$$\Delta_{k+1}^i \subset \Delta_k^i \text{ 和 } \lim_{k \rightarrow \infty} (b_k^i - a_k^i)^2 = 0.$$

利用闭区间套定理得到唯一点 $\zeta^i \in \bigcap_{k \geq 1} \Delta_k^i$ 满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k^i = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k^i = \zeta^i.$$

从而得到点 $\zeta = (\zeta^1, \dots, \zeta^n) \in \bigcap_{k \geq 1} \Delta_k$. \square

定理11.2.2. (Bozalno-Weierstrass 定理/致密性定理) \mathbb{R}^n 中任意有界点列必有收敛子列.

证明: 假设该有界点列为 $\{\mathbf{x}_k\}_{k \geq 1} \subset \mathbb{R}^n$. 令 $x_k^i := \pi_i(\mathbf{x}_k)$. 对数列 $\{x_k^1\}_{k \geq 1}$ 应用 Bolzano-Weierstrass 定理得到一收敛子列 $\{x_{k_1}^1\}_{k_1 \geq 1}$. 因为点列 $\{\mathbf{x}_{k_1}\}_{k_1 \geq 1}$ 也是有界的, 从而对数列 $\{x_{k_1}^2\}_{k_1 \geq 1}$ 应用 Bolzano-Weierstrass 定理得到一收敛子列 $\{x_{k_2}^2\}_{k_2 \geq 1}$. 这个过程一直下去就得到 $\{\mathbf{x}_k\}_{k \geq 1}$ 的收敛子列 $\{\mathbf{x}_{k_n}\}_{k_n \geq 1}$. \square

推论11.2.3. (聚点定理) \mathbb{R}^n 的任意有界无限点集至少有一个聚点.

\mathbb{R}^n 中的点列 $\{\mathbf{x}_k\}_{k \geq 1}$ 称为**Cauchy 列(Cauchy sequence)** 如果 $\forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1$ 使得 $|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_\ell| < \epsilon$ 对任何 $k, \ell > N$ 都成立.

定理11.2.4. (Cauchy 收敛原理/Cauchy 判别准则) \mathbb{R}^n 中的点列 $\{\mathbf{x}_k\}_{k \geq 1}$ 收敛当且仅当它是 Cauchy 列.

证明: $\{\mathbf{x}_k\}_{k \geq 1}$ 是 \mathbb{R}^n 中的 Cauchy 列当且仅当 $\{x_k^i\}_{k \geq 1}$ 是 \mathbb{R} 中的 Cauchy 列 ($1 \leq i \leq n$). 从而利用数列的 Cauchy 收敛原理得证. \square

定义11.2.5. 假设 (X, d) 是度量空间.

- (i) 点列 $(x_k)_{k \geq 1}$ 称为**Cauchy 列** 如果 $\forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1$ 使得 $d(x_k, x_\ell) < \epsilon$ 对任何 $k, \ell > N$ 都成立.
- (ii) 点列 $(x_k)_{k \geq 1}$ **收敛** 到 $x \in X$, 记作 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k =_d x$, 如果 $\forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1$ 使得 $d(x_k, x) < \epsilon$ 对任何 $k > N$ 都成立.

显然收敛点列 $(x_k)_{k \geq 1}$ 必是 Cauchy 的.

但是在一般的度量空间 (X, d) 上 Cauchy 列不一定是收敛的, 比如 (\mathbb{Q}, d_1) 其中 $d_1(x, y) := |x - y|$. 显然点列 $\{x_n := 1 + \sum_{1 \leq i \leq n} 1/i\}_{n \geq 1}$ 是 \mathbb{Q} 中的 Cauchy 列但不收敛.

称度量空间 (X, d) 是**完备的(complete)** 如果 X 中的任意 Cauchy 列都收敛. 比如 \mathbb{R}^n 在 d_2 下是完备的.

定理11.2.6. 对任意度量空间 (X, d) 存在完备空间 (X^*, d^*) 满足 $X \subset X^*$ 且 $d^*|_X = d$.

证明: 定义集合 \tilde{X} 为

$$\tilde{X} := \{ \{x_k\}_{k \geq 1} \text{ 是 Cauchy 列} \}.$$

对任意 $x \in X$, 点列 $\{x_k = x\}_{k \geq 1}$ 是 Cauchy 列, 从而存在映射

$$\iota: X \longrightarrow \tilde{X}, \quad x \longmapsto \{x_k = x\}_{k \geq 1}.$$

对任意 $\{x_k\}_{k \geq 1}, \{y_k\}_{k \geq 1} \in \tilde{X}$ 定义

$$\tilde{d}(\{x_k\}_{k \geq 1}, \{y_k\}_{k \geq 1}) := \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, y_k).$$

对任意 $k, \ell \geq 1$ 有

$$d(x_k, y_k) \leq d(x_k, x_\ell) + d(x_\ell, y_\ell) + d(y_\ell, y_k)$$

从而得到

$$|d(x_k, y_k) - d(x_\ell, y_\ell)| \leq d(x_k, x_\ell) + d(y_\ell, y_k).$$

因此 $\{d(x_k, y_k)\}_{k \geq 1}$ 是 \mathbb{R} 中的 Cauchy 列, 故极限 $\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, y_k)$ 存在. 显然 (\tilde{X}, \tilde{d}) 是半度量空间. 根据练习 11.1.18 得到度量空间 $(X^*, d^*) := (\tilde{X}/\tilde{d}, \tilde{d})$. 作为练习请证明存在单射 $X \rightarrow X^*$. \square

对任何子集 $S \subset \mathbb{R}^n$ 定义

$$\text{diam}(S) := \sup \{|x - y| : x, y \in S\}, \quad (11.2.1)$$

称为 S 的直径(diameter).

定理11.2.7. (Cantor 闭区域套定理) 如果 $\{S_k\}_{k \geq 1}$ 是 \mathbb{R}^n 中的递缩非空闭集列, 即满足

$$S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_k \supset S_{k+1} \supset \cdots,$$

和 $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(S_k) = 0$, 则 $\bigcap_{k \geq 1} S_k$ 是单点集.

证明: 由于 \mathbb{R}^n 是完备的, 结论有下面更一般的定理给出. \square

度量空间 (X, d) 中子集 S 的直径定义为

$$\text{diam}(S) := \sup_{x, y \in S} d(x, y). \quad (11.2.2)$$

定理11.2.8. 度量空间 (X, d) 是完备的 \iff 满足条件 $S_{k+1} \subset S_k$ ($k = 1, 2, \dots$) 和 $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(S_k) = 0$ 的任何非空闭集列 $\{S_k\}_{k \geq 1}$ 其交集 $\bigcap_{k \geq 1} S_k$ 是单点集.

证明: (1) 假设 (X, d) 是度量空间且 $\{S_k\}_{k \geq 1}$ 是满足条件 $S_{k+1} \subset S_k$ ($k = 1, 2, \dots$) 和 $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(S_k) = 0$ 的非空闭集列. 取点 $x_k, y_k \in S_k$ 使得 $d_k := \text{diam}(S_k) = d(x_k, y_k)$ 成立, 这是由于 S_k 是闭的. 考虑点列 $\{x_k\}_{k \geq 1}$ 和 $\{y_k\}_{k \geq 1}$. $\forall k > \ell$ 有

$$d(x_k, x_\ell) \leq d(x_k, y_\ell) + d(y_\ell, x_\ell) \leq d_\ell + d_\ell = 2d_\ell,$$

因为 $x_k \in S_k \subset S_\ell$. 因此 $\{x_k\}_{k \geq 1}$ 是 Cauchy 列从而收敛到 $x_\infty \in X$. 类似可证明 $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y_\infty \in X$. 根据不等式

$$d(x_\infty, y_\infty) \leq d(x_\infty, x_k) + d(x_k, y_k) + d(y_k, y_\infty),$$

得到 $x_\infty = y_\infty =: x \in X$. 前面计算表明

$$d(x, x_\ell) \leq 2d_\ell \implies x \in \overline{B}(x_\ell, 2d_\ell) = S_\ell.$$

故 $x \in \bigcap_{k \geq 1} S_k$.

(2) 反之, 任给 X 中的 Cauchy 列 $\{x_k\}_{k \geq 1}$. $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ 满足 $d(x_k, x_\ell) < \epsilon$ 只要 $k > \ell \geq N$. 特别的 \exists 递增数列 $\{k_\ell\}_{\ell \geq 1}$ 使得不等式

$$d(x_k, x_{k_\ell}) \leq \frac{1}{2^\ell}, \quad k \geq k_\ell.$$

令 $S_\ell := \overline{B}(x_{k_\ell}, 2^{-\ell+1})$ 为 X 中的一非空闭集. 则 $\forall y \in S_{\ell+1}$ 得到

$$d(y, x_{k_\ell}) \leq d(y, x_{k_{\ell+1}}) + d(x_{k_{\ell+1}}, x_{k_\ell}) \leq \frac{1}{2^\ell} + \frac{1}{2^\ell} = \frac{1}{2^{\ell-1}}.$$

即 $y \in \overline{B}(x_{k_\ell}, 2^{-\ell+1})$ 从而 $S_{\ell+1} \subset S_\ell$. 因为 $\text{diam}(S_\ell) \leq 2^{2-\ell} \rightarrow 0$, 所以根据假设条件存在点 $x \in \bigcap_{\ell \geq 1} S_\ell$. 对每个 ℓ 得到

$$d(x, x_{k_\ell}) \leq \frac{1}{2^{\ell-1}} \implies d(x, x_k) \leq d(x, x_{k_\ell}) + d(x_{k_\ell}, x_k) \leq \frac{1}{2^{\ell-1}} + \frac{1}{2^\ell} = \frac{3}{2^\ell}$$

只要 $k \geq k_\ell$. 因此 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$. 即 (X, d) 是完备的. \square

§11.2.2 * 紧致度量空间的刻画和道路连通集

首先引入紧集的定义.

定义11.2.9. 假设 (X, \mathcal{T}) 是拓扑空间.

- (i) X 上的开覆盖(open covering) 是指一族开集 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{T}$ 满足条件 $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X$.
- (ii) X 上的开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 的开子覆盖(open sub-covering) 是指一族开集 $\{U_\beta\}_{\beta \in B} \subset \mathcal{T}$ 满足 $B \subset A$ 且 $\bigcup_{\beta \in B} U_\beta = X$. 该开子覆盖 $\{U_\beta\}_{\beta \in B}$ 是有限的(finite) 如果 B 是有限集.
- (iii) X 称为紧的(compact) 如果任意开覆盖都包含一个有限开子覆盖.
- (iv) X 称为非紧的(non-compact) 如果 X 不是紧的.

假设 S 是拓扑空间 (X, \mathcal{T}) 的子集. 称 S 是 X 的紧子集(compact subset) 如果 S 在子空间拓扑 \mathcal{T}_S 下是紧的. 也就是说, $S \subset X$ 是紧的当且仅当对任意满足条件 $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \supset S$ 的开集族 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{T}$ 存在一个有限集 $B \subset A$ 使得 $\bigcup_{\beta \in B} U_\beta \supset S$ 成立.

定义11.2.10. 假设 (X, d) 是度量空间.

- (i) 给定 $\epsilon > 0$. 子集 $S \subset X$ 称为 ϵ -网(ϵ -net) 如果

$$\text{dist}(x, S) = \inf_{y \in S} d(x, y) \leq \epsilon$$

对任何 $x \in X$ 都成立.

(ii) 给定 $\epsilon > 0$ 和子集 $Y \subset X$. 子集 $S \subset X$ 称为 (ϵ, Y) -网(ϵ -net for Y) 如果

$$\text{dist}(y, S) = \inf_{z \in S} d(y, z) \leq \epsilon$$

对任何 $y \in Y$ 都成立.

(iii) (X, d) 称为全有界的(totally bounded) 如果 $\forall \epsilon > 0$ 存在 X 中的有限 ϵ -网.

性质11.2.11. 如果 (X, d) 是度量空间, 则下面性质成立:

- (1) 给定 $\epsilon > 0$ 和 $Y \subset X$. 如果存在有限 (ϵ, Y) -网, 则存在包含于 Y 的 $(2\epsilon, Y)$ -网.
- (2) X 全有界的 $\implies X$ 的任意子集 (本身也是度量空间) 也是全有界的.
- (3) $X = \mathbb{R}^n \implies$ 任何有界子集必是全有界的.

证明: 只给出 (3) 的证明. 假设 U 是有界子集. 任取 $r > 0$ 且考虑集合

$$S := \{x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^i \in r\mathbb{Z}\}.$$

选择 r 充分小后可以把 U 相对于 S 分解成有限多个子集 U_1, \dots, U_k 使得

$$\text{diam}(U_i) \leq \epsilon, \quad 1 \leq i \leq k.$$

对 $\forall y \in U$ 有 $\text{diam}(y, S) \leq \text{diam}(U_i) \leq \epsilon, U_i \ni y$. \square

定理11.2.12. (紧空间刻画定理) 假设 (X, d) 是度量空间. 则下面结论等价:

- (1) X 是紧的;
- (2) X 的任何无限子集必有聚点;
- (3) X 是完备的和全有界的;
- (4) X 中的任何点列必有收敛子列.

证明: 参看任何一本拓扑书. \square

推论11.2.13. 如果 S 是 \mathbb{R}^n 中的子集, 则西面结论等价:

- (1) S 是紧的;
- (2) S 的任何无限子集必有聚点且聚点在 S 中;
- (3) S 是有界闭的.

练习11.2.14. 证明推论 11.2.13.

定义11.2.15. 给定拓扑空间 (X, \mathcal{T}_X) 和 (Y, \mathcal{T}_Y) . 称映射 $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ 是连续的(continuous) 或 $\mathcal{T}_X/\mathcal{T}_Y$ -连续的($\mathcal{T}_X/\mathcal{T}_Y$ -continuous) 如果 $\forall V \in \mathcal{T}_Y$ 都有 $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$.

$[0, 1]$ 作为 \mathbb{R} 的子集本身就是拓扑空间.

定义11.2.16. 假设 (X, \mathcal{T}) 是拓扑空间.

- (i) X 中的道路(path)是指连续映射 $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$. 分别称 $\gamma(0), \gamma(1)$ 为道路的起点(start point) 和终点(end point). γ 称为圈(loop) 如果 $\gamma(0) = \gamma(1)$.
- (ii) 称 X 是道路连通的(path-connected) 如果 $\forall x, y \in X \exists$ 道路 $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ 使得 $\gamma(0) = x$ 和 $\gamma(1) = y$.

\mathbb{R}^n 中道路连通的开集称为(开)区域(open domain). 区域的闭包称为闭区域(closed domain). 比如开球 $\mathbb{B}^n(x, r)$ 和开矩形 $[a, b] = \prod_{1 \leq i \leq n} [a_i, b_i]$ 都是区域.

§11.3 多元函数的极限

本节引入多元函数的极限, 重点是区分累次极限和重极限之间的关系.

§11.3.1 向量值函数

首先将多元函数推广到向量值函数.

定义11.3.1. 假设 $D \subset \mathbb{R}^n$. 映射

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad x = (x^1, \dots, x^n) \mapsto y = (y^1, \dots, y^m), \quad (11.3.1)$$

称为 n 元 m 维向量值函数(vector-valued function), 记为 $y = f(x)$, 其中 D 称为 f 的定义域(domain), $f(D) = \{y \in \mathbb{R}^m : y = f(x), x \in D\}$ 称为 f 的像域(image), \mathbb{R}^m 称为值域(range), 而

$$\text{Graph}(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} : y = f(x), x \in D\} \quad (11.3.2)$$

称为 f 的图像(graph).

令 $y^i := f^i(x)$ 为 f 的第 i 个坐标函数, 从而 f 可表示成:

$$f = (f^1, \dots, f^m) \quad \text{或} \quad f(x) = (f^1(x), \dots, f^m(x)). \quad (11.3.3)$$

当 $m = 1$ 时, 映射 $f: D \rightarrow \mathbb{R}, x = (x^1, \dots, x^n) \mapsto y$, 称为 n 元函数(function with n variables), 记为 $y = f(x) = f(x^1, \dots, x^n)$. 另一方面当 $n = 1$ 时, 映射 $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto y = (y^1, \dots, y^m)$, 称为向量值函数(vector-valued function), 记为 $y = f(x) = (f^1(x), \dots, f^m(x))$.

例11.3.2. (1) 定义投影(projection)如下:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\text{proj}_1} & \mathbb{R}^m \\ \text{proj}_2 \downarrow & & \\ & & \mathbb{R}^n \end{array} \quad (11.3.4)$$

这里

$$\text{proj}_1(x, y) := x, \quad \text{proj}_2(x, y) := y.$$

(2) 映射

$$f: [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (r, \theta) \longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, r). \quad (11.3.5)$$

(4) 映射

$$f: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto (\cos t, \sin t). \quad (11.3.6)$$

§11.3.2 多元函数的极限

回顾球邻域

$$\mathbb{B}^n(\mathbf{a}, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - \mathbf{a}| < r\}$$

和方邻域

$$\mathbb{O}^n(\mathbf{a}, r) := \{x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : |x^i - a^i| < r, 1 \leq i \leq n\}.$$

由于如下关系

$$\mathbb{B}^n(\mathbf{a}, r) \subset \mathbb{O}^n(\mathbf{a}, r) \subset \mathbb{B}^n(\mathbf{a}, \sqrt{nr}), \quad (11.3.7)$$

我们不加区别地把上述两种邻域统称为邻域并记作 $U(\mathbf{a}, r)$.

定义11.3.3. 假设 $D \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \in D'$ 是 D 的聚点, $z = f(x)$ 是 D 上的 n 元函数, $A \in \mathbb{R}$. 如果 $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ 使得当 $x \in (U(\mathbf{a}, \delta) \setminus \{\mathbf{a}\}) \cap D$ 时, 不等式

$$|f(x) - A| < \epsilon, \quad (11.3.8)$$

成立, 则称 $f(x)$ 在 D 上当 x 趋于 \mathbf{a} 时以 A 为极限(limit), 并记为

$$\lim_{x \rightarrow \mathbf{a}} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow \mathbf{a}). \quad (11.3.9)$$

此时在定义中, x 趋于 \mathbf{a} 的方式有无穷多种, 从而导致多元函数的极限很复杂.

注11.3.4. 和一元函数极限一样, 多元函数的极限也有唯一性、局部有界性、局部保号性、夹逼性质及四则运算法则等.

例11.3.5. (1) 证明

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

这可以由不等式 $|x^2 y / (x^2 + y^2)| \leq |x|$ 得到.

(2) 证明极限

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{x}$$

不存在. 事实上, 考虑特殊情形 $y = kx$ ($k \neq 0$), 即 (x, y) 沿着直线 $y = kx$ 趋于 $(0, 0)$. 带入得到

$$\lim_{(x,y=kx) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx}{x} = k.$$

但是根据注11.3.4, 极限若存在必唯一, 所以上述函数极限不存在.

§11.3.3 二元函数的累次极限

二元函数有三种不同的求极限过程, 我们来研究下它们之间的关系.

定义11.3.6. 假设 $D = D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^2$, $z = f(x, y)$ 是定义在 D 上的二元函数, x_0 是 D_1 的聚点, y_0 是 D_2 的聚点. 如果对每个固定的 $y \in D_2$ 且 $y \neq y_0$, 作为 x 的一元函数 $f(x, y)$, 极限

$$\lim_{D_1 \ni x \rightarrow x_0} f(x, y)$$

存在且第二个极限

$$\lim_{D_2 \ni y \rightarrow y_0} \lim_{D_1 \ni x \rightarrow x_0} f(x, y) \quad (11.3.10)$$

也存在, 则称后者为 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点先对 x 后对 y 的累次极限(repeated limit),

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y). \quad (11.3.11)$$

类似地可定义先对 y 后对 x 地累次极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y). \quad (11.3.12)$$

例11.3.7. 重极限和累次极限的关系是很复杂的.

(1) 重极限存在, 但两个累次极限都不存在. 比如

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ 且 } y \neq 0, \\ 0, & x = 0 \text{ 或 } y = 0. \end{cases}$$

则重极限为 0.

(2) 重极限存在, 但两个累次极限一个存在而另一个不存在. 比如

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

则重极限为 0, $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$, 但是 $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ 不存在.

(3) 两个累次极限都存在且相等, 但是重极限不存在. 比如

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

则重极限不存在, 但是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0 = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = f(0, 0).$$

(4) 两个累次极限都存在, 但不相等. 比如

$$f(x, y) = \frac{x^2(1+x^2) - y^2(1+y^2)}{x^2 + y^2}$$

在原点 $(0, 0)$ 处两个累次极限为 $1, -1$.

定理11.3.8. 假设二元函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点处存在重极限

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A.$$

这里 A 是一实数.

(i) 如果当 $y \neq y_0$ 时存在极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \phi(y), \quad (11.3.13)$$

则 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点处的先 x 后 y 的累次极限存在, 且

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \phi(y) = A. \quad (11.3.14)$$

(ii) 如果当 $x \neq x_0$ 时存在极限

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x), \quad (11.3.15)$$

则 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点处的先 y 后 x 的累次极限存在, 且

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A. \quad (11.3.16)$$

证明: 作为练习请自证. \square

推论11.3.9. (1) 如果两个累次极限和重极限都存在, 则三者必相等.

(2) 如果两个累次极限都存在但不相等, 则重极限必不存在.

§11.4 多元函数的连续性

假设 $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ 是拓扑空间 (X, \mathcal{T}_X) 和 (Y, \mathcal{T}_Y) 之间的映射, 我们已经给出了 f 是 $\mathcal{T}_X/\mathcal{T}_Y$ - 连续的定义, 即 f 是 $\mathcal{T}_X/\mathcal{T}_Y$ - 连续当且仅当 $\forall V \in \mathcal{T}_Y$ 都有 $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$.

称 f 在 $x \in X$ 连续 如果 $\forall V \in \mathcal{T}_Y$ 且 $f(x) \in V$ 都有 $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$ 且 $x \in f^{-1}(V)$.

§11.4.1 多元函数连续定义及基本性质

令 $(X, \mathcal{T}_X) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n})$ 和 $(Y, \mathcal{T}_Y) = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$. \mathbb{R}^n 内的任意点集 D 在子空间拓扑 \mathcal{T}_D 下本身就是一个拓扑空间. 此时函数 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $x_0 \in D$ 连续就等价于:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ 使得当 } x \in \mathbb{B}^n(x_0, \delta) \cap D \text{ 时有 } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

根据点 x_0 的类型有:

- x_0 是 D 的聚点 $\implies f$ 在点 x_0 连续当且仅当 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- x_0 是 D 的孤立点 $\implies f$ 自动在 x_0 连续.

练习11.4.1. 证明上述两种关于函数 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $x_0 \in D$ 连续的定义是等价的.

多元连续函数 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 也具有如下性质:

- (1) **局部有界性:** f 在 x_0 连续 $\implies \exists x_0$ 的邻域 U (根据子空间拓扑的定义, 此时 $U = \mathbb{B}^n(x_0, r) \cap D, \exists r > 0$) 使得 f 在 U 上有界.

如果假设点集 D 是开集, 则根据定义上述 x_0 的邻域 U 可取成球邻域 $\mathbb{B}^n(x_0, r)$.

- (2) **局部保号性:** f 在 x_0 连续且 $f(x_0) > 0 \implies \exists x_0$ 的邻域 U 使得 $\forall x \in U$ 都有 $f(x) > 0$.

如果假设点集 D 是开集, 则根据定义上述 x_0 的邻域 U 可取成球邻域 $\mathbb{B}^n(x_0, r)$.

- (3) **四则运算:** 若有限个多元函数 f_1, \dots, f_k 都在 x_0 连续, 则 f_1, \dots, f_k 之间进行有限次的加、减、乘、除运算 (做除法运算时要假设分母不为零) 后, 所得到的多元函数在 x_0 也连续.

- (4) **复合函数的连续性:** 多元函数的复合运算保持连续性. 比如

- (4.1) 假设函数 $z = f(u, v)$ 在 $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ 连续, $u = u(x, y)$ 和 $v = v(x, y)$ 都在 (x_0, y_0) 连续, 其中 $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$, 且它们能够复合, 则复合函数 $z = f(u(x, y), v(x, y))$ 在 (x_0, y_0) 连续.
- (4.2) 假设函数 $z = f(u, v)$ 在区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 内连续, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 都在区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 内连续, 且 $\forall (x, y) \in D$ 都有 $(u(x, y), v(x, y)) \in \Omega$, 则复合函数 $z = f(u(x, y), v(x, y))$ 在 D 内连续.
- (4.3) 假设函数 $z = f(x, y)$ 在区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 内连续, $C: x = x(t), y = y(t)$ ($\alpha < t < \beta$) 是连续曲线 (即 $x(t), y(t)$ 在 (α, β) 内连续) 且 $(x(t), y(t)) \in \Omega$, 则 $f(x(t), y(t))$ 在 (α, β) 内连续.

多元初等函数(elementary functions of several variables)是指固定其它自变量后, 函数作为剩下自变量的一元函数是初等函数. 比如

$$f(x, y) = \sin(x^2 + xy) \ ((x, y) \in \mathbb{R}^2), f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \ ((x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}),$$

和

$$f(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/4t}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty).$$

性质11.4.2. 多元初等函数在其定义域内是连续的.

例11.4.3. (1) 对函数

$$f(x, y) := \begin{cases} (x + y) \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

可知其仅在 $D := (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}) \cup \{(0, 0)\}$ 上连续. 该函数在 $D \setminus \{(0, 0)\}$ 内的连续性是显然的. 而在 $(0, 0)$ 处, 根据极限义可知

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0).$$

(2) 根据性质11.4.2 易得到

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 1)} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\ln(0 + e^1)}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \ln e = 1.$$

(3) 考虑特殊路径 $y = kx$ ($k \neq 0$ 且 $x > 0$) 趋于 $(0, 0)$, 即从第一或第四象限趋于原点. 因此函数 $\ln(x + e^y) / \sqrt{x^2 + y^2}$ 沿着这条路径趋于 $(0, 0)$ 的极限为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x + e^{kx})}{\sqrt{1 + k^2}x} = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + ke^{kx}}{x + e^{kx}} = \frac{1 + k}{\sqrt{1 + k^2}}.$$

这表明函数 $\ln(x + e^y) / \sqrt{x^2 + y^2}$ 在 $(0, 0)$ 处极限不存在.

(4) 考察函数

$$f(x, y) := \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ y, & x \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}. \end{cases}$$

令 $D = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$. 下证函数只在 D 上连续. 任取 $(x_0, y_0) \notin D$, 则 $y_0 \neq 0$. 若 $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 则 $f(x_0, y_0) = 0$; 此时存在两个数列 $\{x_{0,n}\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 和 $\{x'_{0,n}\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{Q}$ 满足条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{0,n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x'_{0,n} = x_0$; 但是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{0,n}, y_0) = 0 \neq y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_{0,n}, y_0);$$

故在 (x_0, y_0) 不连续. 类似地可以证明当 $x_0 \in \mathbb{Q}$ 时函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 也不连续.

最后来证明函数 $f(x, y)$ 在 D 上连续. 任取 $(x_0, 0) \in D$ 则 $f(x_0, y_0) = 0$. 如果 $(x, y) \in \mathbb{B}^2((x_0, 0), \epsilon)$ 时, 即 $(x - x_0)^2 + y^2 < \epsilon^2$ 时, 有

$$|f(x, y) - f(x_0, 0)| = |f(x, y)| \leq |y| < \sqrt{(x - x_0)^2 + y^2} < \epsilon.$$

故函数 $f(x, y)$ 在 $(x_0, 0)$ 连续.

§11.4.2 向量值函数的极限和连续

多元函数的极限和连续概念可平行的推广到向量值函数.

假设 $D \subset \mathbb{R}^n$, x_0 是 D 的聚点, $f: D \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^m$ 向量值函数, 且 A 是 m 维向量. 如果 $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ 使得当 $x \in \mathbb{B}^n(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ 时 $f(x) \in \mathbb{B}^m(A, \epsilon)$, 则称 A 为 f 在 x_0 的极限, 并记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

假设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为点集, $x_0 \in D$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ 向量值函数. 如果 $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ 使得当 $x \in \mathbb{B}^n(x_0, \delta) \cap D$ 时 $f(x) \in \mathbb{B}^m(f(x_0), \epsilon)$, 则称 f 在 x_0 连续.

(1) 若映射 f 在 D 上没一点都连续则称 f 在 D 上不连续.

(2) 若 $x_0 \in D$ 为聚点, 则 f 在 x_0 点连续 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

定理11.4.4. 令 $x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$. 向量值函数 $f = (f^1, \dots, f^m): D \rightarrow \mathbb{R}^m$ 在 x_0 连续 \Leftrightarrow 每个分量函数 f^i 在 x_0 连续, $1 \leq i \leq m$.

证明: 利用定理11.1.23 中的不等式. \square

对向量值函数同样可以定义加法、减法、数乘、乘法 (当然乘法有不同类型的定义), 且这些运算保持连续性.

§11.4.3 向量值连续函数的三大定理

定理11.4.5. (1) (紧性不变性) 连续映射将紧集合映为紧集.

(2) (有界性) 紧集上的连续映射必有界.

(3) (最值定理) 紧集上的连续函数必有最大值和最小值.

证明: (1) 假设 $f: K \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是紧集 K 上的连续映射. 根据推论??, 取 $f(K)$ 中的点列 $(y_k)_{k \geq 1}$. 从而 $y_k = f(x_k)$, $x_k \in K$. 但 K 是紧的, \exists 子列 $(x_{k_i})_{i \geq 1}$ 及 $a \in K$ 满足 $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{k_i} = a \in K$. 连续性告诉我们

$$\lim_{i \rightarrow \infty} y_{k_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{k_i}) = f(a) \in f(K),$$

即 $f(a)$ 是 $(y_k)_{k \geq 1}$ 的聚点. 故 $f(K)$ 是紧集.

(2) 再次利用推论11.2.13.

(3) 现在 $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ 是紧集 K 上的连续函数. 数集 $f(K) \subset \mathbb{R}$ 是紧的从而是有界且闭的. 根据 Zorn 引理必存在上确界和下确界; 数集 $f(K)$ 是闭的告诉我们上/下确界必在 $f(K)$ 内, 故数集 $f(K)$ 必有最大值和最小值. \square

定理11.4.6. (1) 连续函数将连通集映为连通集.

(2) 连续函数将有界闭区域与有界闭连通集映为有界闭区间. 特别地, 一元连续函数将有界闭区间映为有界闭区间.

(3) (中间值定理) 设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 为有界闭区域或有界闭连通集, 则其上的连续函数 f 可取到它在 K 上的最大值 M 和最小值 m 之间的一切值.

证明: (1) 假设函数 $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是连通集 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上的连续映射. 对任意 $f(x), f(y) \in f(D)$, 存在道路 $\gamma: [0, 1] \rightarrow D$ 使得 $\gamma(0) = x$ 和 $\gamma(1) = y$. 从而连续映射 $f \circ \gamma$ 连接 $f(x)$ 和 $f(y)$.

(2) 连通紧集关于连续函数的像是 \mathbb{R} 上的连通紧集, 故必是有界闭区间.

(3) 考察最大值点和最小值点的连线 (利用连通性), 并应用一元的介值定理. \square

假设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 且 $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是向量值函数. 如果 $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ 使得对 D 中的所有满足 $|x - y| < \delta$ 的 x, y , 都成立 $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, 则称 f 在 D 上一致连续的(uniformly continuous).

定理11.4.7. 假设 $D \subset \mathbb{R}^n$, 则向量值函数 $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ 一致连续

\iff 对 D 中任何点列 $(x_n)_{n \geq 1}$ 和 $(y_n)_{n \geq 1}$ 只要满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| = 0$ 就有 $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n) - f(y_n)| = 0$.

证明: 证明和一元函数一模一样, 只要把绝对值换成范数. \square

定理11.4.8. (Cantor 定理) 紧集上的连续函数必一致连续.

证明: 假设函数 f 在紧集 D 上连续但不是一致连续. 否则根据定理11.4.7 $\exists \delta_0 > 0 \exists$ 点列 $(x_n)_{n \geq 1}, (y_n)_{n \geq 1}$ 虽然 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| = 0$, 但 $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0$. $(y_n)_{n \geq 1}$ 在紧集 D 中有界, 根据定理11.2.2 可知 \exists 收敛子列 $(y_{n_k})_{k \geq 1}$ 满足 $y_{n_k} \rightarrow y_0 \in D$. 因此 $x_{n_k} \rightarrow y_0$ 故

$$0 < \epsilon_0 \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \rightarrow |f(y_0) - f(y_0)| = 0.$$

矛盾表明紧集上的连续函数必一致连续. \square

例11.4.9. 函数 $z = \sin(xy)$ 在 \mathbb{R}^2 不是一致连续. 这是因为函数 $\sin(x^2)$ 在非一致连续 (注3.3.34).

§11.4.4 习题课

1. 求极限

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y}.$$

2. 求极限

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin(x^3 + y^2)}{\sqrt{e^x + e^y}}.$$

解: 利用四则运算得到

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin(x^3 + y^2)}{\sqrt{e^x + e^y}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \sin(x^3 + y^2) \bigg/ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \sqrt{e^x + e^y} \\ &= \frac{\sin 4}{\sqrt{1 + e^2}}. \quad \square \end{aligned}$$

3. 求极限

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{xy+1} - 1}{xy}.$$

解: 利用分子有理化得到

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{xy+1} - 1}{xy} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(xy+1) - 1}{xy(\sqrt{xy+1} + 1)} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{\sqrt{xy+1} + 1} = \frac{1}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

4. 求极限

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0+,0+)} (1+xy)^{\frac{1}{\sin(xy)}}.$$

解: 利用取对数法得到

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0+,0+)} (1+xy)^{\frac{1}{\sin(xy)}} &= \exp \left[\lim_{(x,y) \rightarrow (0+,0+)} \frac{\ln(1+xy)}{\sin(xy)} \right] \\ &= \exp \left[\lim_{(x,y) \rightarrow (0+,0+)} \frac{xy}{\sin(xy)} \cdot \frac{\ln(1+xy)}{xy} \right] = e^{1 \cdot 1} = e. \quad \square \end{aligned}$$

5. 求极限

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{xy - y}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}.$$

解: 令 $u := x - 1$ 和 $v := y$ 得到

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{xy - y}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = \lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{uv}{\sqrt{u^2 + v^2}} = 0. \quad \square$$

6. 求极限

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2).$$

解: 用变量替换 $t = x^2 + y^2 \rightarrow 0$ 得到

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) = \lim_{t \rightarrow 0} t^2 \ln t = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1/t}{-3/t^3} = 0. \quad \square$$

7. 假设函数 f 在 \mathbb{R}^2 上是连续的且 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty$. 证明 f 有最小值.

证: 定义 $A := f(0, 0)$. 假设条件 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty$ 得到存在 $R > 0$ 使得 $f(x, y) > A$ 在 $\mathbb{R}^2 \setminus D$ 上都成立, 这里 $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R\}$. 另一方面, 由于 D 是有界闭集故必为紧集, 从而连续函数 f 在 $(x_0, y_0) \in D$ 上取到最小值, 即

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y), \quad \forall (x, y) \in D.$$

特别的

$$f(x_0, y_0) \leq f(0, 0) = A < f(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D.$$

因此函数 f 在 (x_0, y_0) 达到最小值. \square

8. 用有限覆盖定理证明零点定理: 如果连续函数 f 定义在闭区间 $[a, b]$ 上且满足条件 $f(a) > 0 > f(b)$ 则存在 $x_0 \in (a, b)$ 使得 $f(x_0) = 0$ 成立.

证: 否则的话, $\forall x \in [a, b]$ 都有 $f(x) \neq 0$. 如果 $f(x) > 0$ 则存在一个关于 x 的邻域 I_x 使得 $f|_{I_x} > 0$; 如果 $f(x) < 0$ 则存在一个关于 x 的邻域 I_x 使得 $f|_{I_x} < 0$. 因此 $\forall x \in [a, b], \exists I_x$ 使得 $f|_{I_x}$ 和 $f(x)$ 同号. 这样 $(I_x)_{x \in [a, b]}$ 构成了紧集 $[a, b]$ 的一个开覆盖, 利用有限覆盖定理可知存在一个有限子覆盖 $(I_{x_i})_{1 \leq i \leq n}$. 因为 $a \in [a, b]$ 存在邻域 I_{x_i} 包含 a , 同样存在邻域 I_{x_j} 包含 b . 如果 $i = j$, 则 a, b 在同一个邻域内, 根据邻域的构造 $f(a), f(b)$ 必同号, 矛盾. 如果 $i \neq j$, 那么 I_{x_i} 必被第三个邻域 I_{x_k} 所连接, 这样根据 $f(a) > 0$ 得到 $f|_{I_{x_i} \cup I_{x_k}} > 0$, 经过有限步之后得到 $f|_{I_{x_1} \cup \dots \cup I_{x_n}} > 0$, 这和 $f(b) < 0$ 矛盾. \square

9. 利用 $[a, b]$ 的连通性 (即 $[a, b]$ 不可能写成两个非空互不相交的开集的并) 证明零点定理.

证明: 否则对 $\forall x \in [a, b]$ 都有 $f(x) \neq 0$. 定义两个集合

$$U := \{x \in [a, b] : f(x) > 0\}, \quad V := \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}.$$

则根据假设得到 $a \in U$ 和 $b \in V$. 根据函数 f 的连续性可知 U, V 都是开的, 从而得到 $[a, b] = U \cup V$ 且 $U \cap V = \emptyset$. 矛盾! \square

10. 求下列 \mathbb{R}^2 中的子集的边界点和内点:

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\},$$

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ 且 } y \neq 0\},$$

$$C := A \cup B,$$

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\},$$

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 - y^2 \leq 1\},$$

$$F := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \text{ 且 } y \leq 1/x\}.$$

解: 根据定义得到

$$\partial A = A, \quad A^\circ = \emptyset,$$

$$\partial B = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}, \quad B^\circ = B,$$

$$\partial C = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}, \quad C^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\},$$

$$\partial D = \mathbb{R}^2, \quad D^\circ = \emptyset,$$

$$\partial E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y|\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}$$

$$E^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 - y^2 < 1\},$$

$$\partial F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1/x, x > 0\} \cup \{(x, 0) | x \geq 0\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$$

$$F^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, y < 1/x\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y < 0, y < 1/x\}.$$

11. 下面集合不是连通的,

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = \frac{1}{x} \right\}.$$

这里 X 上赋予子空间拓扑.

12. 下列 \mathbb{R}^2 中的子集不是紧的:

$$A = \left\{ \left(x, \frac{1}{x} \right) : 0 < x \leq 1 \right\}, \quad B = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) : 0 < x \leq 1 \right\}.$$

解: A 是闭的但不是有界的, B 是有界的但不是闭的. \square

13. 多元函数和一元函数的区别:

- 一元函数: 连续 \Leftarrow 可导 \Leftarrow 可微 \Rightarrow 连续, 可导 \Rightarrow 可微
- 多元函数: 连续 \Leftarrow 可偏导 \Leftarrow 可微 \Rightarrow 连续, 可偏导 \nRightarrow 可微

§11.5 参考文献

1. Koblitz, Neal. *Introduction to elliptic curves and modular forms*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics 97, Springer-Verlag, New York, 1993. x+248 pp. ISBN: 0-387-97966-2
2. 布鲁斯·C. 伯恩特 (Bruce C. Berndt) 主编: 拉玛努金笔记(第 2, 3, 4 卷), 哈尔滨工业大学出版社, 2019.
3. 徐森林, 薛春华 编著: 数学分析, 清华大学出版社, 2005.
4. 张福保, 薛金美, 潮小李 主编: 数学分析讲义, 科学出版社, 2019.
5. 梅加强 编著: 数学分析, 高等教育出版社, 2015.
6. 邓建平 编: 微积分 I 和 II, 科学出版社, 2019.
7. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis I*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+574 pp. ISBN: 3-540-40386-8
8. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis II*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xvi+681 pp. ISBN: 3-540-40633-6
9. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis I*, Translated from the 1988 German original by Gary Brookfield, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. xiv+426 pp. ISBN: 3-7643-7153-6
10. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis II*, Translated from the 1999 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. xii+400 pp. ISBN: 978-3-7643-7472-3; 3-7643-7472-3
11. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis III*, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. xii+468 pp. ISBN: 978-3-7643-7479-2; 3-7643-7479-2
12. 菲赫金哥尔茨 著 (徐献瑜, 冷生明, 梁文骐 译; 郭思旭 校): 微积分学教程 (第一、二、三卷), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.
13. 吉米多维奇 著 (李荣涑, 李植 译): 数学分析习题集 (根据 2010 年俄文版翻译), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.
14. 汪林 著: 数学分析中的问题和反例, 现代数学基础 56, 高等教育出版社, 2015.

15. 裴礼文 编著: 数学分析中的典型问题与方法 (第二版), 高等教育出版社, 2015.
16. 朱尧辰 编著: 数学分析例选通过范例学技巧, 哈尔滨工业大学出版社, 2013.
17. 周民强 编著: 数学分析习题演练 (第一、二、三册), 科学出版社, 2018.
18. 李逸 编著: 数学分析讲义, 上海交通大学数学分析课讲义, 未出版, 2016.

第十二章 多变量导数理论

When kings are buildings, carters have work to do.

§12.1 多元函数的微分和偏导数

本节引入多元函数的偏导数和可微性, 和一元情形不同的是此时可微和可偏导是不等价的.

§12.1.1 多元函数的微分

回顾下一元函数 $y = f(x)$ 在 a 处的微分

$$f(a + \Delta x) = f(a) + f'(a)\Delta x + o(|\Delta x|).$$

根据无穷小的定义得到

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a) - f'(a)\Delta x}{|\Delta x|} = 0.$$

由此可以推广到多元函数情形: 把绝对值换成范数, 把乘积换成内积.

定义12.1.1. 假设 n 元函数 $y = f(x) = f(x^1, \dots, x^n)$ 在点 $a = (a^1, \dots, a^n)$ 的某邻域内有定义, 若存在 n 维向量 $\mathbf{b} = (b^1, \dots, b^n)$ 使得

$$\lim_{\Delta \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(a + \Delta \mathbf{x}) - f(a) - \langle \mathbf{b}, \Delta \mathbf{x} \rangle}{|\Delta \mathbf{x}|} = 0, \quad (12.1.1)$$

成立, 其中 $\Delta \mathbf{x}$ 是 n 维变量, 即

$$f(a + \Delta \mathbf{x}) - f(a) = \langle \mathbf{b}, \Delta \mathbf{x} \rangle + o(|\Delta \mathbf{x}|), \quad (12.1.2)$$

则称函数 f 在 a 处可微的或可导的(differentiable), 向量 \mathbf{b} 为函数 f 在 a 处的导数(derivative), 记为

$$\mathbf{b} = f'(a) = \nabla f(a). \quad (12.1.3)$$

把 $\langle \mathbf{b}, \Delta \mathbf{x} \rangle = \sum_{1 \leq i \leq n} b^i \Delta x^i$ 称为 f 在 a 处的全微分(total differential) 并记作

$$df(a) = \langle \mathbf{b}, \Delta \mathbf{x} \rangle. \quad (12.1.4)$$

若函数 f 在区域 D 内每点都可微, 则称函数 f 在 D 内可微.

因为对每个 $1 \leq i \leq n$, 有 $dx^i = \Delta x^i$, 故

$$\Delta \mathbf{x} = (\Delta x^1, \dots, \Delta x^n) = (dx^1, \dots, dx^n) =: d\mathbf{x}. \quad (12.1.5)$$

从而 (12.1.4) 可记成

$$df(a) = \langle f'(a), d\mathbf{x} \rangle = \langle \nabla f(a), d\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{b}, d\mathbf{x} \rangle = \sum_{1 \leq i \leq n} b^i dx^i. \quad (12.1.6)$$

注12.1.2. (1) 若 f 在 D 内可微, 则 df 也是 D 上的函数.

(2) 导数的几何意义: 如果函数 f 在 \mathbf{a} 可微, 考察超平面 (称为切平面)

$$\pi: y = f(\mathbf{a}) + \langle f'(\mathbf{a}), x - \mathbf{a} \rangle. \quad (12.1.7)$$

显然 π 经过 $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$, 且当 x 趋于 \mathbf{a} 时 π 可近似代替曲面 $y = f(x)$.

(3) 和一元可微函数一样, 多元函数在这点可微必在该点连续.

(4) 多元函数在一点连续 \Rightarrow 在该点可微: 考察函数

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \mathbf{a} = (0, 0).$$

显然函数 f 在 $(0, 0)$ 连续, 但不可微. 反之, 存在 $\mathbf{b} = (b^1, b^2)$ 满足

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+y^2} - (b^1x + b^2y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

即

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow 0} \frac{b^1x + b^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1.$$

但是上述极限不存在, 因为取特殊路径 $y = kx, x > 0$ 得到

$$1 = \frac{b^1 + kb^2}{\sqrt{1+k^2}}, \quad \forall k > 0.$$

这个等式不可能对任意 k 都成立. 矛盾表明函数 f 在 $(0, 0)$ 不可微.

§12.1.2 多元函数的偏导数

一元函数的导数的高维推广即是偏导数.

定义12.1.3. 假设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是开集, $z = f(x, y)$ 是定义在 D 上的二元函数, $(x_0, y_0) \in D$ 是固定点. 如果存在极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (12.1.8)$$

则称函数 f 在 (x_0, y_0) 关于 x 可偏导, 并称极限为 f 在 (x_0, y_0) 处关于 x 的偏导数 (partial derivative), 记为

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0). \quad (12.1.9)$$

显然 f 在 (x_0, y_0) 处关于 x 的偏导数就是一元函数 $f(x, y_0)$ 在 x_0 的导数.

如果函数 f 在 D 中的每点都关于 x 可偏导, 则得到 D 上的二元函数, 称为 f 关于 x 的偏导函数, 记为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f'_x(x, y). \quad (12.1.10)$$

类似可定义 f 在 (x_0, y_0) 处关于 y 的偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) \quad (12.1.11)$$

和关于 y 的偏导函数

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y(x, y). \quad (12.1.12)$$

如果函数 f 在 (x_0, y_0) 处关于 x 和 y 都可偏导, 称 f 在 (x_0, y_0) 处可偏导.

例12.1.4. (1) (偏导数存在但不可微) 研究函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

在 $(0, 0)$ 的偏导数和可微性.

解: $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$, 但是 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处不连续, 故不可微. \square

(2) (连续但不存在偏导数)¹ 研究函数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在 $(0, 0)$ 的偏导数和连续性.

解: 计算可得

$$f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

另一方面

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

故 $f'_x(0, 0)$ 和 $f'_y(0, 0)$ 都不存在. 但是 f 在 $(0, 0)$ 是连续的.

注意到

$$f''_{xx}(x, y) + f''_{yy}(x, y) = \frac{1}{f(x, y)}, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

这表明函数 f 是偏微分方程 $\Delta f = 1/f$ (算子 Δ 定义在 (??)) 在 $D := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 上的一个解. \square

(3) (可微但偏导数不连续) 研究函数

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = 0, \end{cases}$$

在 $(0, 0)$ 处的可微性和偏导数的连续性.

¹感谢张凌枫同学指出错误.

解: 根据 \sin 的有界性立即得到函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 是可微的. 但是

$$f_x(x, y) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

如果取 $x_k = y_k = 1/2k\pi\sqrt{2}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 则得到

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_x(x_k, y_k) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0 = f_x(0, 0).$$

所以偏导数 f_x 在 $(0, 0)$ 处不连续. 类似可证 f_y 在 $(0, 0)$ 处也不连续. \square

定理12.1.5. 如果函数 $f(x)$ 在 a 处可微, 则在 a 处必存在偏导数且满足

$$f'(a) = (f'_{x^1}(a), \dots, f'_{x^n}(a)), \quad df(a) = f'(a) \cdot dx = \sum_{1 \leq i \leq n} f'_{x^i}(a) dx^i. \quad (12.1.13)$$

但是反之则不一定成立.

证: 可微推出 $\exists b \in \mathbb{R}^n$ 满足 $f(a + \Delta x) - f(a) = \langle b, \Delta x \rangle + o(|\Delta x|)$. 取特殊的无穷小 $\Delta x = (0, \dots, \Delta x^i, \dots, 0)$ 得到

$$f(a^1, \dots, a^i + \Delta x^i, \dots, a^n) - f(a^1, \dots, a^n) = b^i \Delta x^i + o(|\Delta x^i|).$$

根据定义得到 $b^i = f'_{x^i}(a)$. \square

可微 \implies 可偏导, 可偏导 + 偏导连续 \implies 可微.

定理12.1.6. 如果函数 $f(x)$ 在 a 的某个邻域上存在(全部)偏导数且(全部)偏导数在 a 处连续, 则 f 在 a 处可微.

证: 令 $\Delta z := f(\Delta x + a) - f(a)$ 得到

$$\begin{aligned} \Delta z &= [f(\Delta x^1 + a^1, a^2, \dots, a^n) - f(a^1, a^2, \dots, a^n)] \\ &+ [f(\Delta x^1 + a^1, \Delta x^2 + a^2, \dots, \Delta x^n + a^n) - f(\Delta x^1 + a^1, a^2, \dots, a^n)] \\ &= f'_{x^1}(a) \Delta x^1 + o(|\Delta x^1|) + [f(\Delta x^1 + a^1, \Delta x^2 + a^2, a^3, \dots, a^n) - \\ &f(\Delta x^1 + a^1, a^2, a^3, \dots, a^n)] + [f(\Delta x^1 + a^1, \Delta x^2 + a^2, \Delta x^3 + a^3, \dots, \Delta x^n + a^n) \\ &\quad - f(\Delta x^1 + a^1, \Delta x^2 + a^2, a^3, \dots, a^n)] \\ &= f'_{x^1}(a) \Delta x^1 + o(|\Delta x^1|) + f'_{x^2}(\Delta x^1 + a^1, a^2, a^3, \dots, a^n) \Delta x^2 + o(|\Delta x^2|) + \\ &[f(\Delta x^1 + a^1, \Delta x^2 + a^2, \Delta x^3 + a^3, \dots, \Delta x^n + a^n) - f(\Delta x^1 + a^1, \Delta x^2 + a^2, a^3, \dots, a^n)]. \end{aligned}$$

利用偏导数连续性可以进一步得出

$$\begin{aligned}\Delta z &= f'_{x^1}(\mathbf{a})\Delta x^1 + o(|\Delta x^1|) + \left[f'_{x^2}(\mathbf{a}) + o(|\Delta x^1|) \right] \Delta x^2 + o(|\Delta x^2|) + \\ &[f(\Delta x^1 + a^1, \Delta x^2 + a^2, \Delta x^3 + a^3, \dots, \Delta x^n + a^n) - f(\Delta x^1 + a^1, \Delta x^2 + a^2, a^3, \dots, a^n)] \\ &= f'_{x^1}(\mathbf{a})\Delta x^1 + f'_{x^2}(\mathbf{a})\Delta x^2 + o(|\Delta \mathbf{x}|) + \\ &[f(\Delta x^1 + a^1, \Delta x^2 + a^2, \Delta x^3 + a^3, \dots, \Delta x^n + a^n) - f(\Delta x^1 + a^1, \Delta x^2 + a^2, a^3, \dots, a^n)].\end{aligned}$$

这一计算过程继续下去就得到

$$\Delta z = \sum_{1 \leq i \leq n} f'_{x^i}(\mathbf{x})\Delta x^i + o(|\Delta \mathbf{x}|).$$

即函数 f 在 \mathbf{a} 处可微. \square

§12.1.3 多元函数的方向导数

偏导数 f'_{x^i} 是函数 f 沿着 x^i -轴方向的变化率. 一般地, 我们可以考虑函数沿着某个固定方向的变化率.

定义12.1.7. 假设 n 元函数 $z = f(\mathbf{x})$ 定义在 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上, \mathbf{x}_0 是 D 的内点, 且 $\mathbf{v} = (v^1, \dots, v^n)$ 是一单位向量 (即满足 $|\mathbf{v}| = 1$). 如果极限

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) := \lim_{t \rightarrow +} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} \quad (12.1.14)$$

存在, 则称函数 f 在 \mathbf{x}_0 处沿着方向 \mathbf{v} 是方向可导的并称该极限为函数 f 在 \mathbf{x}_0 处沿着方向 \mathbf{v} 的方向导数 (**directional derivative**).

例12.1.8. (1) (方向导数存在但偏导数不存在) 求函数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在 $(0, 0)$ 处的方向导数.

(2) (偏导数的刻画) n 元函数 $f(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 处关于 x^i 的偏导数存在 $\iff n$ 元函数 $f(\mathbf{x})$ 沿着方向 $(0, \dots, 1, \dots, 0)$ 和 $(0, \dots, -1, \dots, 0)$ 的两个方向导数存在且互为相反数.

(3) 求 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 的梯度 $\mathbf{grad}(r)$.

(4) (方向导数存在但函数本身不连续) 如果函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处沿着任意方向都存在方向导数, 是否蕴含着 f 在 (x_0, y_0) 处连续.

解: (1) 对任意方向 $\mathbf{v} = (v^1, v^2)$ 得到

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t\mathbf{v})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{t} = 1.$$

但是之前计算表明偏导数不存在.

(3) 因为

$$r_x = \frac{x}{r}, \quad r_y = \frac{y}{r}, \quad r_z = \frac{z}{r},$$

所以 $\mathbf{grad}(r) = (x, y, z)/r$ 从而 $\mathbf{grad}(r)$ 是一个方向.

(4) 考察函数

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y}, \quad (x_0, y_0) = (0, 0).$$

之前的习题课已证该函数在 $(0, 0)$ 处不连续. 但是对任意方向 $\nu = (\alpha, \beta)$ 有

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(\alpha t, \beta t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^3 \alpha^3 + t^3 \beta^3}{t(t^2 \alpha^2 + t\beta)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t(\alpha^3 + \beta^3)}{t\alpha^2 + \beta} = 0.$$

即所有的方向导数均为 0. \square

方向可导的 \Leftarrow 可微 \Rightarrow 可偏导.

定理12.1.9. 假设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $x_0 \in D$, $f(x)$ 定义在 D 上且在 x_0 处可微. 则对任意方向 ν , 函数 f 在 x_0 处沿着方向 ν 的方向导数存在且满足

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0) = \sum_{1 \leq i \leq n} f'_{x_i}(x_0) \nu^i. \quad (12.1.15)$$

证: 可微推出

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t\nu) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \left[\sum_{1 \leq i \leq n} f'_{x_i}(x_0) t \nu^i + o(t) \right] \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} f'_{x_i}(x_0) \nu^i + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{o(t)}{t} = \sum_{1 \leq i \leq n} f'_{x_i}(x_0) \nu^i. \quad \square \end{aligned}$$

定义12.1.10. 假设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $x_0 \in D$, 函数 $f(x)$ 定义在 D 上且在 x_0 处的偏导数存在. 函数 f 在 x_0 处的梯度(**gradient**)定义为

$$\mathbf{grad}_{x_0} f \equiv \nabla_{x_0} f := (f'_{x_1}(x_0), \dots, f'_{x_n}(x_0)). \quad (12.1.16)$$

显然当函数 f 可微时, $\mathbf{grad}_{x_0} f = f'(x_0)$ 且

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0) = \langle \mathbf{grad}_{x_0} f, \nu \rangle. \quad (12.1.17)$$

从 (12.1.17) 得到

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0) \right| \leq \left| \mathbf{grad}_{x_0} f \right| |\nu| = \left| \mathbf{grad}_{x_0} f \right|$$

且等号取到当且仅当 $\nu \parallel \mathbf{grad}_{x_0} f$. 因此, 当梯度非零时, 函数绝对值沿着梯度方向增加最快.

§12.1.4 多元函数的高阶导数

给定 n 元函数 $f(x)$, 其高阶偏导数(**higher order partial derivatives**)可定义如下:

$$f_{x^{i_1} \dots x^{i_k}}^{(k)} = \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \cdots \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} f. \quad (12.1.18)$$

这里要注意求偏导的顺序:

$$f''_{x^i x^j} \neq f''_{x^j x^i}. \quad (12.1.19)$$

例12.1.11. (1) 函数

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

的所有二阶偏导数存在但两个混合偏导数却不相等 (即 $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$).

定义拉普拉斯算子(**Laplacian operator**)为

$$\Delta := \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}. \quad (12.1.20)$$

开集 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上的函数 f 称为调和的(**harmonic**)如果 f 所有二阶偏导数都存在且满足

$$\Delta f(x) \equiv 0, \quad \forall x \in D. \quad (12.1.21)$$

性质12.1.12. 定义 $D := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上的函数

$$f(x) := \begin{cases} |x|^{2-n}, & n \geq 3, \\ -\ln|x|, & n = 2. \end{cases} \quad (12.1.22)$$

则 f 在 D 上调和函数.

证: 一个计算复杂的练习. \square

定理12.1.13. 假设函数 $f(x)$ 的二阶偏导数 $f_{x^i x^j}$ 和 $f_{x^j x^i}$ ($i \neq j$) 在 x_0 处连续, 则必有 $f_{x^i x^j}(x_0) = f_{x^j x^i}(x_0)$.

证: 不失一般性不妨假设 $n = 2$, 这样只要证明若 f_{xy} 和 f_{yx} 在 (x_0, y_0) 连续则必相等. 回顾定义

$$\begin{aligned} f_{xy}(x_0, y_0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f_x(x_0, y_0 + \Delta y) - f_x(x_0, y_0)}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y} \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)}{\Delta x} \right. \\ &\quad \left. - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y} \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(\Delta x, \Delta y)}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(\Delta x, \Delta y)}{\Delta y \Delta x} \end{aligned}$$

这里

$$F(\Delta x, \Delta y) := f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) + f(x_0, y_0).$$

类似可得到

$$f_{yx}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F(\Delta x, \Delta y)}{\Delta x \Delta y}.$$

如果 $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$ 则本质上是说两个累次极限相等, 但是这件事不一定成立. 因此一般情形下两个混合偏导数不相等.

下面假设混合偏导数在 (x_0, y_0) 处连续. 引入两个辅助函数

$$\varphi(x) := f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0), \quad \psi(y) := f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y).$$

则利用一元函数的微分中值定理得到, 存在 $\alpha, \beta \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} F(\Delta x, \Delta y) &= \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0 + \alpha \Delta x) \Delta x \\ &= [f_x(x_0 + \alpha \Delta x, y_0 + \Delta y) - f_x(x_0 + \alpha \Delta x, y_0)] \Delta x \\ &= f_{xy}(x_0 + \alpha \Delta x, y_0 + \beta \Delta y) \Delta y \Delta x. \end{aligned}$$

同样计算得到, 存在 $\mu, \nu \in [0, 1]$,

$$F(\Delta x, \Delta y) = f_{yx}(x_0 + \mu \Delta x, y_0 + \nu \Delta y) \Delta x \Delta y.$$

从而最后得到

$$f_{xy}(x_0 + \alpha \Delta x, y_0 + \beta \Delta y) = f_{yx}(x_0 + \mu \Delta x, y_0 + \nu \Delta y).$$

偏导数连续性推出 $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$. \square

定义12.1.14. 记号 $f \in C^k(D)$ 表示定义在开集 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上的函数直到 k 阶的所有高阶偏导数存在且连续. 比如

$$\begin{aligned} C^1(D) &= \{f : D \rightarrow \mathbb{R} \mid f_x, f_y \text{ 连续}\}, \\ C^2(D) &= \{f : D \rightarrow \mathbb{R} \mid f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy} \text{ 连续}\}. \end{aligned}$$

根据定理 12.1.13, $C^2(D)$ 可写成

$$C^2(D) = \{f : D \rightarrow \mathbb{R} \mid f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy} = f_{yx}, f_{yy} \text{ 连续}\}.$$

在上述定义中把所有直到 k 阶的偏导数放入 $C^k(D)$ 的定义中, 主要是因为多元函数的偏导数存在不一定原来的函数连续. 如果 $n = 1$, 即考虑一元函数, 则上述定义自动回到上学期 $C^k(I)$ 的定义, 这里 I 是某个开区间.

§12.1.5 多元函数的高阶微分

如果 $f \in C^1(D)$ 则根据定理12.1.6 可知 f 是可微的且

$$df = f_x dx + f_y dy = dx \frac{\partial f}{\partial x} + dy \frac{\partial f}{\partial y}.$$

故很自然地引入算子

$$d = dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y}. \quad (12.1.23)$$

回忆二项式展开公式

$$(a+b)^k = \binom{k}{i} a^i b^{k-i}.$$

对任意 $f \in C^k(D)$ 引入算子

$$d^k f \equiv \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^k f := \sum_{0 \leq i \leq k} \binom{k}{i} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^i \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^{k-i} f dx^i dy^{k-i}. \quad (12.1.24)$$

这个称为 f 的高阶微分(**higher order differentials**).

§12.1.6 向量值函数的微分和偏导数

现在我们结论推广到向量值函数上来. 在这里我们把向量表示成列向量.

假设 $D \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)^\top$ 且

$$\begin{aligned} f: D &\longrightarrow \mathbb{R}^m, \\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} &\longmapsto f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f^1(x^1, \dots, x^n) \\ \vdots \\ f^n(x^1, \dots, x^n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

定义12.1.15. (1) 如果存在和 $\Delta \mathbf{x}$ 无关地 $m \times n$ 矩阵 \mathbf{A} 使得

$$\Delta \mathbf{y} := f(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + o(\Delta \mathbf{x}), \quad (12.1.25)$$

则称向量值函数 f 在 \mathbf{x}_0 处可微或可导并称 \mathbf{A} 是 f 在 \mathbf{x}_0 处的导数, 记为 $f'(\mathbf{a})$ 或 $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$, 而 $d\mathbf{y} := \mathbf{A} \Delta \mathbf{x}$ 称为 f 在 \mathbf{x}_0 处的微分.

(2) 如果 f 的每个分量函数 f^i , $1 \leq i \leq m$, 都在 \mathbf{x}_0 处可偏导, 则称向量值函数 f 在 \mathbf{x}_0 处可偏导. 此时引入向量值函数 f 在 \mathbf{x}_0 处的Jacobi 矩阵

$$\mathbf{Jac}_{\mathbf{x}_0}(f) \equiv \frac{\mathbf{D}(y^1, \dots, y^m)}{\mathbf{D}(x^1, \dots, x^n)}(\mathbf{x}_0) := \begin{bmatrix} f_{x^1}^1 & f_{x^2}^1 & \cdots & f_{x^n}^1 \\ f_{x^1}^2 & f_{x^2}^2 & \cdots & f_{x^n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x^1}^m & f_{x^2}^m & \cdots & f_{x^n}^m \end{bmatrix}(\mathbf{x}_0) \quad (12.1.26)$$

类似多元函数情形有

$$d\mathbf{y} = \mathbf{A}d\mathbf{x}.$$

定理12.1.16. 向量值函数 f 在 \mathbf{x}_0 处可微 \iff 它的坐标分量函数 $f^i, 1 \leq i \leq m$, 都在 \mathbf{x}_0 处可微. 此时有等式

$$f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{Jac}_{\mathbf{x}_0}(f). \quad (12.1.27)$$

证: \implies : 则存在矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ 使得 $\Delta\mathbf{y} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + o(\Delta\mathbf{x})$ 成立. 写成分量形式得到

$$\Delta y^i = \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} \Delta x^j + o^i(\Delta\mathbf{x}), \quad 1 \leq i \leq m,$$

这里 $o(\Delta\mathbf{x}) = (o^1(\Delta\mathbf{x}), \dots, o^m(\Delta\mathbf{x}))^T$ 且

$$\lim_{\Delta\mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{o^i(\Delta\mathbf{x})}{|\Delta\mathbf{x}|} = 0, \quad 1 \leq i \leq m.$$

取特殊的 $\Delta\mathbf{x} = (0, \dots, \Delta x^j, \dots, 0)^T$ 得到 $f_{x_j}^i(\mathbf{x}_0) = a_{ij}$.

\impliedby : 根据 $f^i, 1 \leq i \leq m$, 在 \mathbf{x}_0 处的可微性得到

$$\Delta y^i = \Delta f^i = \sum_{1 \leq j \leq n} f_{x_j}^i(\mathbf{x}_0) \Delta x^j + o(|\Delta\mathbf{x}|).$$

故有 $\mathbf{A} = (a_{ij}) = (f_{x_j}^i(\mathbf{x}_0))$. \square

§12.2 多元复合函数的求导法则

多元复合函数的求导, 满足所谓的链式法则. 其大意是把每个分量上的求导算到底, 再相加.

§12.2.1 多元复合函数求偏导的链式法则

假设函数 $z = f(u, v)$ 是区域 $D_f \subset \mathbb{R}^2$ 上的二元函数, $\mathbf{g}: D_g \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是区域 $D_g \subset \mathbb{R}^2$ 上的二元二维向量值函数: $\mathbf{g}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, 并假设 $\mathbf{g}(D_g) \subset D_f$. 从而得到复合函数

$$f \circ \mathbf{g}(x, y) = f(u(x, y), v(x, y)), \quad (x, y) \in D_g. \quad (12.2.1)$$

定理12.2.1. (链式法则) 如果函数 f 在 (u_0, v_0) 处可微, \mathbf{g} 在 $(x_0, y_0) \in D_g$ 处可偏导, 其中 $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$, 则复合函数 $f \circ \mathbf{g}$ 在 (x_0, y_0) 处可偏导且

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0), \quad (12.2.2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0). \quad (12.2.3)$$

证: 根据定义

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(u(x_0 + \Delta x, y_0), v(x_0 + \Delta x, y_0)) - f(u_0, v_0)}{\Delta x}$$

引入记号

$$\Delta u := u(x_0 + \Delta x, y_0) - u_0, \quad \Delta v := v(x_0 + \Delta x, y_0) - v_0$$

得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) - f(u_0, v_0)}{\Delta x}.$$

由于函数 f 在 (u_0, v_0) 处可微, 故

$$\begin{aligned} & f(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) - f(u_0, v_0) \\ &= f_u(u_0, v_0)\Delta u + f_v(u_0, v_0)\Delta v + o\left(\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}\right). \end{aligned}$$

定义

$$\alpha(\Delta u, \Delta v) := o\left(\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}\right) / \sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2},$$

则 $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \alpha(\Delta u, \Delta v) = 0$. 所以

$$\begin{aligned} & f(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) - f(u_0, v_0) \\ &= f_u(u_0, v_0)\Delta u + f_v(u_0, v_0)\Delta v + \alpha(\Delta u, \Delta v)\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}. \end{aligned}$$

又因为 u 和 v 都存在偏导数, 得到

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u_x(x_0, y_0), \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v_x(x_0, y_0),$$

和

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta u, \Delta v) = \lim_{(\Delta u, \Delta v) \rightarrow (0,0)} \alpha(\Delta u, \Delta v) = 0.$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) &= f_u(u_0, v_0)u_x(x_0, y_0) + f_v(u_0, v_0)v_x(x_0, y_0) \\ &\quad + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta u, \Delta v) \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \sqrt{\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)^2} \\ &= f_u(u_0, v_0)u_x(x_0, y_0) + f_v(u_0, v_0)v_x(x_0, y_0). \quad \square \end{aligned}$$

根据 (12.2.2) - (12.2.3), 如果函数 f 在区域 D_f 上处处可微且 g 在区域 D_g 上处处可偏导, 则

$$z_x = f_u u_x + f_v v_x, \quad z_y = f_u u_y + f_v v_y. \quad (12.2.4)$$

在矩形记号下可写成

$$(f \circ g)' = (z_x, z_y) = (f_u, f_v) \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} = f' g' \quad (12.2.5)$$

这个形式我们可以推广到多元情形.

假设函数 $z = f(\mathbf{y}) = f(y^1, \dots, y^m)$ 定义在区域 $D_f \subset \mathbb{R}^m$ 上, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(x^1, \dots, x^n)$ 是 $D_g \subset \mathbb{R}^n$ 上的 n 元 m 维向量值函数, 且 $\mathbf{g}(D_g) \subset D_f$, 则定义复合函数

$$f \circ \mathbf{g}(\mathbf{x}) = f(y^1(x^1, \dots, x^n), \dots, y^m(x^1, \dots, x^n)). \quad (12.2.6)$$

定理12.2.2. (链式法则) 如果 $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_0 \in D_g$ 处可偏导, 且 $z = f(\mathbf{y})$ 在 $\mathbf{y}_0 = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$ 处可微, 则 $z = f(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$ 在 \mathbf{x}_0 处可偏导且

$$z_{x^i}(\mathbf{x}_0) = \sum_{1 \leq j \leq m} f_{y^j}(\mathbf{y}_0) y_{x^i}^j(\mathbf{x}_0), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (12.2.7)$$

在矩形记号下可写成

$$(f \circ \mathbf{g})'(\mathbf{x}_0) = f'(\mathbf{y}_0) \mathbf{g}'(\mathbf{x}_0) = f'(\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)) \mathbf{g}'(\mathbf{x}_0). \quad (12.2.8)$$

例12.2.3. (1) 如果 $u = u(x, y)$ 可微, 求 Δu 在极坐标下的表达式.

(2) 如果 $u = u(x, y, z)$ 可微, 求 Δu 在极坐标下的表达式.

(3) 假设 $z = (1 + u^2)^v$, $u = x + y$, $v = x^2$. 求 z_x, z_y .

(4) 假设 $z = f(xy, x/y, x)$ 其中 f 是二阶连续可微的, 求 z_{x^2}, z_{xy}, z_{y^2} .

§12.2.2 多元函数的一阶全微分的不变性

假设 $z = f(x, y)$ 可微, 则得到

$$dz = z_x dx + z_y dy.$$

如果 $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, 根据定理12.2.1 得到

$$\begin{aligned} dz &= z_u du + z_v dv = (z_x \varphi_u + z_y \psi_u) du + (z_x \varphi_v + z_y \psi_v) dv \\ &= z_x (\varphi_u du + \varphi_v dv) + z_y (\psi_u du + \psi_v dv) = z_x dx + z_y dy. \end{aligned}$$

从而说明多元复合函数也具有一阶全微分的形式不变性.

例12.2.4. (1) 假设可微函数 $f(x, y, z)$ 满足

$$f(tx, t^k y, t^m z) = t^n f(x, y, z)$$

其中 $t > 0$, $k, m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. 则

$$(1.1) f(x, y, z) = x^n f(1, y/x^k, z/x^m).$$

$$(1.2) x f_x(x, y, z) + k y f_y(x, y, z) + m z f_z(x, y, z) = n f(x, y, z).$$

(2) 假设 $u = f(r) = u(x^1, \dots, x^n)$ 为二阶连续可微, $r^2 = \sum_{1 \leq i \leq n} (x^i)^2$. 证明

$$\Delta u = f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r).$$

(3) 假设 $g \in C^2$ 且 $v = g(t - r/c)/r = v(x, y, z)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 其中 c 是常数. 证明

$$\Delta v = \frac{1}{c^2} v_{tt}.$$

证明: (1) 根据定义得到

$$f(x, y, z) = f(x \cdot 1, x^k \cdot (y/x^k), x^m \cdot (z/x^m)) = x^n f(1, y/x^k, z/x^m).$$

对 $f(tx, t^k y, t^m z) = t^n f(x, y, z)$ 两边关于 t 求导得到

$$\begin{aligned} n t^{n-1} f(x, y, z) &= x f_x(tx, t^k y, t^m z) + k t^{k-1} y f_y(tx, t^k y, t^m z) \\ &\quad + m t^{m-1} z f_z(tx, t^k y, t^m z); \end{aligned}$$

两边同乘以 t

$$\begin{aligned} n t^n f(x, y, z) &= x f_x(tx, t^k y, t^m z) + k t^k y f_y(tx, t^k y, t^m z) \\ &\quad + m t^m z f_z(tx, t^k y, t^m z). \end{aligned}$$

最后两边令 $t = 1$ 得到 (1.2).

(2) u 的一阶偏导数为

$$u_{x^i} = f'(r) r_{x^i} = f'(r) \frac{x^i}{r}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

从而得到二阶偏导数

$$u_{x^i x^j} = f''(r) r_{x^j} r_{x^i} + f'(r) r_{x^i x^j} = f''(r) \frac{x^i x^j}{r^2} + f'(r) \frac{\delta_{ij} r - x^i x^j / r}{r^2}$$

特别地

$$\begin{aligned} \Delta u &= \sum_{1 \leq i \leq n} u_{x^i x^i} = \sum_{1 \leq i \leq n} \left[f''(r) \frac{(x^i)^2}{r^2} + f'(r) \frac{r^2 - (x^i)^2}{r^3} \right] \\ &= f''(r) \frac{r^2}{r^2} + f'(r) \frac{n r^2 - r^2}{r^3} = f''(r) + f'(r) \frac{n-1}{r}. \end{aligned}$$

(3) 计算得到

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{1}{r^2} \left[g' \left(t - \frac{r}{c} \right) \cdot \frac{-x}{cr} \cdot r - g \left(t - \frac{r}{c} \right) \frac{x}{r} \right] \\ &= -\frac{1}{r^2} \left[\frac{x}{c} \cdot g' \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{x}{r} \cdot g \left(t - \frac{r}{c} \right) \right], \\ v_{xx} &= \frac{x^2}{c^2 r^3} g'' \left(t - \frac{r}{c} \right) + \left(\frac{3x^2}{cr^4} - \frac{1}{cr^2} \right) g' \left(t - \frac{r}{c} \right) + \left(\frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) g \left(t - \frac{r}{c} \right). \end{aligned}$$

故

$$\Delta v = \frac{1}{c^2 r} g'' \left(t - \frac{r}{c} \right) = \frac{1}{c^2} v_{tt}. \quad \square$$

§12.3 多元函数的微分中值定理和 Taylor 公式

本节引入多元函数的 Taylor 公式, 我们将它形式上此写成和一元函数的 Taylor 公式一样, 便于记忆和应用.

§12.3.1 多元函数的微分中值定理

称区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是凸的(convex), 如果 $\forall x_0, x_1 \in D$ 都有

$$\overline{x_0 x_1} := \{(1-t)x_0 + tx_1 = x_0 + t(x_1 - x_0) | 0 \leq t \leq 1\} \subset D.$$

称区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是(关于 x_0)星形的(star-shaped relative to x_0), 如果 $x_0 \in D$ 且 $\forall x_1 \in D$ 都有 $\overline{x_0 x_1} \subset D$.

练习12.3.1. 证明凸区域一定是星形区域, 但是反之不一定成立.

定理12.3.2. (中值定理) 假设多元函数 $f(x)$ 再凸区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 内可微, 则对 D 内的任意两点 x_0 和 x , $\exists \theta \in (0, 1)$ 使得

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \left\langle \mathbf{grad}_{x_0 + \theta(x - x_0)}(f), x - x_0 \right\rangle \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} f_{x^i}(x_0 + \theta(x - x_0))(x^i - x_0^i). \end{aligned} \quad (12.3.1)$$

证: 凸性得到 $x_0 + t(x - x_0) \in D$ 对任意 $t \in [0, 1]$ 都成立. 定义一元辅助函数

$$F(t) := f(x_0 + t(x - x_0)), \quad t \in [0, 1].$$

f 在 D 上的可微性推出 $F \in C([0, 1]) \cap D((0, 1))$. 从而利用一元函数的 Lagrange 微分中值定理得到, $\exists \theta \in (0, 1)$,

$$F'(\theta) = F(1) - F(0) = f(x) - f(x_0).$$

另一方面利用链式法则, 定理12.2.2, 得到

$$F'(t) = f_{x^i}(x_0 + t(x - x_0))(x^i - x_0^i). \quad \square$$

推论12.3.3. 如果多元函数 $f(x)$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上可微且一阶偏导数恒为 0, 则函数 f 在 D 上是常数.

证: 任取 $x_0 \in D$, 则根据定义 \exists 球邻域 $\mathbb{B}^n(x_0, r) \subset D$. 因为 $\mathbb{B}^n(x_0, r)$ 是凸区域, 利用定理12.2.2 可知 $\forall x \in \mathbb{B}^n(x_0, r)$, $\exists \xi \in \mathbb{B}^n(x_0, r)$ 满足

$$f(x) - f(x_0) = \left\langle \mathbf{grad}_{\xi}(f), x - x_0 \right\rangle = 0.$$

从而得到

$$f \equiv f(\mathbf{x}_0) \text{ 在 } \mathbb{B}^n(\mathbf{x}_0, r) \text{ 内.}$$

任取 D 中的两点 \mathbf{x}_0 和 \mathbf{y}_0 . 根据道路连通性可知 \exists 连续映射 $\gamma: [0, 1] \rightarrow D$ 使得 $\gamma(0) = \mathbf{x}_0$ 和 $\gamma(1) = \mathbf{y}_0$. 区间 $[0, 1]$ 是紧的从而可找到有限个点 \mathbf{x}_i , $0 \leq i \leq N$ 和有限个正数 r_i , $0 \leq i \leq N$, 满足 $\mathbf{x}_N = \mathbf{y}_0$, $\mathbb{B}^n(\mathbf{x}_i, r_i) \subset D$, $\mathbb{B}^n(\mathbf{x}_i, r_i) \cap \mathbb{B}^n(\mathbf{x}_{i+1}, r_{i+1}) \neq \emptyset$ ($0 \leq i \leq N-1$), 且 $\gamma([0, 1]) \subset \cup_{0 \leq i \leq N} \mathbb{B}^n(\mathbf{x}_i, r_i)$. 根据前面论断可知

$$f(\mathbf{x}_0) = f|_{\mathbb{B}^n(\mathbf{x}_0, r_0)} = f(\mathbf{x}_1) = f|_{\mathbb{B}^n(\mathbf{x}_1, r_1)}.$$

经过有限步骤后得到 $f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{y}_0)$. 即证明了 f 在 D 上恒为常数. \square

例12.3.4. (1) 假设函数 $f(x, y)$ 在区域 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 5\} = \overline{\mathbb{B}^2(\mathbf{0}, \sqrt{5})}$ 上连续可微, $f(0, 0) = 0$, 且对任意 $(x, y) \in D$ 都有 $|\mathbf{grad}_{(x,y)}(f)| \leq 1$. 证明 $|f(1, 2)| \leq \sqrt{5}$.

(2) 对函数 $F(x, y) = (x^2 - 2xy + 1)^{-1/2}$ 应用中值定理证明存在 $\theta \in (0, 1)$ 使得

$$\sqrt{2}(1 - 3\theta) + (\sqrt{2} - 1)(1 - 2\theta + 3\theta^2)^{3/2} = 0$$

成立.

解: (1) 中值定理告诉我们存在 $\theta \in (0, 1)$ 满足

$$\begin{aligned} |f(1, 2) - f(0, 0)| &= |f_x(\theta, 2\theta) \cdot 1 + f_y(\theta, 2\theta) \cdot 2| = \left| \langle \mathbf{grad}_{(\theta, 2\theta)}(f), (1, 2) \rangle \right| \\ &\leq \left| \mathbf{grad}_{(\theta, 2\theta)}(f) \right| |(1, 2)| \leq 1 \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5}. \end{aligned}$$

(2) to be added.

§12.3.2 多元函数的 Taylor 公式

回忆一元函数的 Taylor 公式:

$$f(x_1) - f(x_0) = \sum_{1 \leq i \leq k} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x_1 - x_0)^i + R_k,$$

其中 R_k 是余项. 在证明 n 元函数的 Taylor 公式之前, 我们引入如下记号.

- \mathbb{R}^n 空间中的 n 重指标 α 定义为

$$\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \alpha_i \in \mathbb{N}.$$

对此 n 重指标定义

$$\alpha! := \prod_{1 \leq i \leq n} \alpha_i!, \quad |\alpha| := \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i. \quad (12.3.2)$$

- 给定 n 重指标 α 和 n 元变量 $x = (x^1, \dots, x^n)$, 定义

$$x^\alpha := \prod_{1 \leq i \leq n} (x^i)^{\alpha_i}. \quad (12.3.3)$$

- 给定 n 重指标 α 和 n 元函数 f , 定义

$$f^{(\alpha)} := \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)^{\alpha_n} f \equiv \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f. \quad (12.3.4)$$

定理12.3.5. (带 Lagrange 型余项 Taylor 公式) 假设 n 元函数 $f(x) \in C^{k+1}(D)$, 其中 D 是 x_0 的某个球邻域 $\mathbb{B}^n(x_0, r)$, 则 $\forall x_1 \in D$ 有

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_0) + \sum_{1 \leq i \leq k} \sum_{|\alpha|=i} \frac{f^{(\alpha)}(x_0)}{\alpha!} (x_1 - x_0)^\alpha + R_k \\ &\equiv f(x_0) + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} \frac{f^{(\alpha)}(x_0)}{\alpha!} (x_1 - x_0)^\alpha + R_k, \end{aligned} \quad (12.3.5)$$

其中 R_k 为 Lagrange 型余项

$$R_k = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{f^{(\alpha)}(x_0 + \theta(x_1 - x_0))}{\alpha!} (x_1 - x_0)^\alpha, \quad \exists \theta \in (0, 1). \quad (12.3.6)$$

证: D 是球邻域推出 $x_0 + t(x_1 - x_0) \in D$ 对任意 $t \in [-1, 1]$ 都成立. 引入辅助函数

$$F(t) := f(x_0 + t(x_1 - x_0)), \quad -1 \leq t \leq 1.$$

则 $F \in C^{k+1}([-1, 1])$ 并在 $t = 0$ 处 Taylor 展开

$$F(t) = F(0) + \sum_{1 \leq i \leq k} \frac{F^{(i)}(0)}{i!} t^i + \frac{F^{(k+1)}(\theta t)}{(k+1)!} t^{k+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

根据链式法则得到, 这里 $x_t := x_0 + t(x_1 - x_0)$,

$$\begin{aligned} F^{(i)}(t) &= \left(\sum_{1 \leq j \leq n} (x_1^j - x_0^j) \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^i f(x_t) \\ &= \sum_{i_1 + \dots + i_n = i} \binom{i}{i_1 \dots i_n} (x_1^1 - x_0^1)^{i_1} \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)^{i_1} \cdots (x_1^n - x_0^n)^{i_n} \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)^{i_n} f(x_t) \\ &= \sum_{i_1 + \dots + i_n = i} \frac{i!}{i_1! \cdots i_n!} \cdot \prod_{1 \leq j \leq n} (x_1^j - x_0^j)^{i_j} \cdot \prod_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)^{i_j} f(x_t) \\ &= \sum_{|\alpha|=i} \frac{i!}{\alpha!} (x_1 - x_0)^\alpha f^{(\alpha)}(x_t). \end{aligned}$$

因此

$$f(x_1) = f(x_0) + \sum_{1 \leq i \leq k} \sum_{|\alpha|=i} \frac{f^{(\alpha)}(x_0)}{\alpha!} (x_1 - x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{f^{(\alpha)}(x_\theta)}{\alpha!} (x_1 - x_0)^\alpha.$$

从而得到 (12.3.5). \square

推论12.3.6. (带 Peano 型余项的 Taylor 公式) 设 n 元函数 $f(x) \in C^{k+1}(D)$, 其中 D 是 x_0 的某个球邻域 $B^n(x_0, r)$, 则当 $x_1 \rightarrow x_0$ 且 $x_1 \in D$ 时有

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_0) + \sum_{1 \leq i \leq k} \sum_{|\alpha|=i} \frac{f^{(\alpha)}(x_0)}{\alpha!} (x_1 - x_0)^\alpha + o(|x_1 - x_0|^k) \\ &\equiv f(x_0) + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} \frac{f^{(\alpha)}(x_0)}{\alpha!} (x_1 - x_0)^\alpha + o(|x_1 - x_0|^k). \end{aligned} \quad (12.3.7)$$

例12.3.7. (1) 近似计算 $(1, 08)^{3.96}$.

(2) 求函数 $f(x, y) = xy$ 在 $(1, 1)$ 处的 3 阶 Taylor 公式.

(3) 求函数 $f(x, y) = \ln(1+x)\ln(1+y)$ 在 $(0, 0)$ 处的带 Peano 型余项的 2 阶 Taylor 公式.

(4) 求函数 $f(x, y) = \ln(1+x+y)$ 在 $(0, 0)$ 处的带 Lagrange 型余项的 n 阶 Taylor 公式.

(5) 假设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是包含原点的凸区域, f 在 D 上连续可微, 且满足 $xf_x + yf_y = 0$. 则 f 在 D 内为一常数. 如果 D 是不包含原点的凸区域, 则上述结论不一定成立.

解: (1) 取 $x_0 = (1, 4)$ 和 $x_1 = (1.08, 3.96)$, 并考虑二元函数 $f(x, y) = x^y$. 根据 (12.3.7) 得到

$$f(x_1) \approx f(x_0) + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq 2} \frac{f^{(\alpha)}(x_0)}{\alpha!} (x_1 - x_0)^\alpha.$$

如果 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ 满足 $|\alpha| = 1$, 则 $\alpha = (1, 0)$ 或 $(0, 1)$:

α	$(1, 0)$	$(0, 1)$
$f^{(\alpha)}$	$f_x = yx^{y-1}$	$f_y = x^y \ln x$
$f^{(\alpha)}(x_0)$	4	0
$\frac{f^{(\alpha)}(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha$	$4 \cdot 0.08$	0

如果 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ 满足 $|\alpha| = 2$, 则 $\alpha = (2, 0)$ 或 $(1, 1)$ 或 $(0, 2)$:

α	$(2, 0)$	$(1, 1)$	$(0, 2)$
$f^{(\alpha)}$	$f_{xx} = y(y-1)x^{y-2}$	$f_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x$	$f_{yy} = x^y (\ln x)^2$
$f^{(\alpha)}(x_0)$	12	1	0
$\frac{f^{(\alpha)}(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha$	$6 \cdot (0.08)^2$	$-0.08 \cdot 0.04$	0

因此得到

$$1.35630721 \cdots = (1.08)^{3.96} \approx 1 + 4 \cdot 0.08 + 6 \cdot (0.08)^2 - 0.08 \cdot 0.04 = 1.3552.$$

(2) 根据 (12.3.5) 得到

$$f(x_1) \approx f(x_0) + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq 3} \frac{f^{(\alpha)}(x_0)}{\alpha!} (x_1 - x_0)^\alpha.$$

取 $x_0 = (1, 1)$ 并计算

$$f_x = y, \quad f_y = x, \quad f_{xx} = 0, \quad f_{xy} = 1, \quad f_{yy} = 0.$$

因此

$$f(x, y) = 1 + (x - 1) + (y - 1) + (x - 1)(y - 1).$$

(3) 计算可得

$$f_x = \frac{1}{1+x} \ln(1+y), \quad f_y = \frac{1}{1+y} \ln(1+x)$$

和

$$f_{xx} = -\frac{1}{(1+x)^2} \ln(1+y), \quad f_{yy} = -\frac{1}{(1+y)^2} \ln(1+x), \quad f_{xy} = \frac{1}{(1+x)(1+y)}.$$

因此

$$\ln(1+x) \ln(1+y) \approx xy.$$

(4) 两种计算方法:

$$\begin{aligned} \ln(1+x+y) &= \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{(-1)^{k-1} (x+y)^k}{k} + \frac{(-1)^n (x+y)^{n+1}}{(n+1)(1+\theta(x+y))^{n+1}} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = k} \frac{k!}{\alpha_1! \alpha_2!} x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} + \frac{(-1)^n (x+y)^{n+1}}{(n+1)(1+\theta(x+y))^{n+1}} \\ &= \sum_{1 \leq |\alpha| \leq n} \frac{(-1)^{|\alpha|-1} (|\alpha|-1)!}{\alpha!} (x, y)^\alpha + \frac{(-1)^n (x+y)^{n+1}}{(n+1)(1+\theta(x+y))^{n+1}}. \end{aligned}$$

直接利用 (12.3.5) 也得到一样的结果.

(5) 根据凸性和 Taylor 公式或中值定理得到

$$f(x, y) = f(0, 0) + x \cdot f_x(\theta x, \theta y) + y \cdot f_y(\theta x, \theta y) = f(0, 0), \quad (x, y) \in D.$$

故函数 f 在 D 内恒为常数.

如果 D 不包含原点则结论不成立: 考虑定义在 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上的函数

$$f(x, y) = \frac{x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

计算可得

$$f_x = \frac{y^2 + xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad f_y = -\frac{x^2 + xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

从而对 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 内的任意凸区域都有 $xf_x + yf_y = 0$ 但是函数 f 本身不恒为常数.

§12.4 隐函数定理

隐函数定理是分析里面很重要的定理之一, 其一般版本在之后的章节中会给出.

§12.4.1 隐函数

隐函数定理(implicit function theorem) 基本想法是如何从 $n + 1$ 元函数方程

$$F(x, y) = 0, \quad (12.4.1)$$

这里 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $y \in \mathbb{R}$, 中求得 $y = f(x)$. 假设这样的 $y = f(x^1, \dots, x^n)$ 存在且我们可以取任意可能的偏导数. 则两边对 x^i 求偏导得到

$$0 = F_{x^i}(x, y) + F_y(x, y)f_{x^i}(x).$$

从而得到

$$f_{x^i}(x) = -\frac{F_{x^i}(x, y)}{F_y(x, y)}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (12.4.2)$$

这里事先假设 $F_y(x, y) \neq 0$.

例12.4.1. (1) 如果不加任何条件, 显然这样的 y 不一定在整体上是唯一存在的. 考虑函数方程

$$0 = F(x, y) = x - y^2.$$

这个方程关于 y 有两个解, 即 $y = \sqrt{x}$ 和 $y = -\sqrt{x}$. 这两个解的交点只有一个 $x = 0$. 注意到此时

$$F_y(0, 0) = -2y|_{(0,0)} = 0$$

不满足条件 $F_y(x, y) \neq 0$.

(2) 另一方面 $F_y(x, y) \neq 0$ 不是必要条件, 比如考察函数方程

$$0 = F(x, y) = x - |y|.$$

显然 $F_y(0, 0)$ 不存在, 但是 $F(x, y) = 0$ 有两个解 $y = x$ 和 $y = -x$.

定义12.4.2. 假设 $F(x, y)$ 是区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 上的 $n+1$ 元函数. 如果 \exists 区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 和开区间 $E \subset \mathbb{R}$ 使得 $D \times E \subset \Omega$ 且对每个 $x \in D \exists!$ $y \in E$, 满足 (12.4.1), 则称 (12.4.1) 确定了从 D 到 E 的隐函数, 记为 $y = f(x)$. 注意到

$$F(x, f(x)) = 0, \quad \forall x \in D.$$

§12.4.2 隐函数定理

下面首先证明一元函数的隐函数定理, 然后将其推广到多元函数情形.

定理12.4.3. (一元隐函数定理) 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是区域, $(x_0, y_0) \in \Omega$, $F(x, y)$ 是定义在 Ω 上的二元函数, 且

- (i) $F(x_0, y_0) = 0$;
- (ii) $F(x, y)$ 在闭矩形 $\square_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\} \subset \Omega$ 上有连续偏导数;
- (iii) $F_y(x_0, y_0) \neq 0$.

则存在 (x_0, y_0) 的某个邻域 $U_0 \subset \square_0$, 使得方程 $F(x, y) = 0$ 在 U_0 唯一确定可导的隐函数, 即存在 $\rho > 0, \rho' > 0$ 和函数

$$y = f(x), \quad x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \text{ 且 } (x, y) \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \times (y_0 - \rho', y_0 + \rho') = U_0,$$

满足

- (a) $F(x, f(x)) = 0$;
- (b) $y_0 = f(x_0)$;
- (c) $f \in C^1((x_0 - \rho, x_0 + \rho))$;
- (d) 其导数满足 (隐函数求导公式)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}. \quad (12.4.3)$$

证: 不失一般性不妨假设 $F_y(x_0, y_0) > 0$. 根据 $F_y(x, y)$ 的连续性, 存在 $a_1 \in (0, a)$ 和 $b_1 \in (0, b)$ 使得偏导数 $F_y(x, y) > 0$ 在闭矩形

$$\square_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| \leq a_1, |y - y_0| \leq b_1\} \subset \square_0$$

上恒成立. 定义一元函数

$$\alpha(y) := F(x_0, y), \quad y \in [y_0 - b_1, y_0 + b_1].$$

则 $\alpha(y)$ 在 $[y_0 - b_1, y_0 + b_1]$ 上是严格单调递增且满足

$$\alpha(y_0 - b_1) < 0 = \alpha(y_0) < \alpha(y_0 + b_1).$$

又因为 $F(x, y)$ 在 \square_1 上连续, 存在 $a_2 \in (0, a_1]$ 使得

$$F|_{(x_0 - a_2, x_0 + a_2) \times \{y_0 - b_1\}} < 0, \quad F|_{(x_0 - a_2, x_0 + a_2) \times \{y_0 + b_1\}} > 0. \quad (*)$$

考虑 x_0 的邻域 $(x_0 - \rho, x_0 + \rho) := (x_0 - a_2, x_0 + a_2)$ 和 y_0 的邻域 $(y_0 - \rho', y_0 + \rho') = (y_0 - b_1, y_0 + b_1)$. $\forall x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, 一元函数 $F(x, \cdot)$ 在 $[y_0 - b_1, y_0 + b_1]$ 上连续且在端点处异号. 根据连续函数零点定理和 $F(x, \cdot)$ 在 $[y_0 - b_1, y_0 + b_1]$ 上严格递增, $\exists! y \in (y_0 - b_1, y_0 + b_1)$ 使得 $F(x, y) = 0$ 成立. 这样就得到如下函数

$$f: (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \longrightarrow (y_0 - b_1, y_0 + b_1), \quad x \longmapsto y = f(x),$$

它满足恒等式 $F(x, f(x)) = 0$ 且 $y_0 = f(x_0)$.

(1) $f \in C((x_0 - \rho, x_0 + \rho))$. 任取 $\bar{x} \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, 则有 $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ 这里 $\bar{y} = f(\bar{x})$. 根据 (*) 可知

$$F(\bar{x}, \bar{y} - \epsilon) < 0 < F(\bar{x}, \bar{y} + \epsilon), \quad \forall \epsilon \in (0, b_1].$$

利用函数 $F(x, y)$ 在 \square_1 上的连续性 $\exists \delta > 0$ 使得

$$F(x, \bar{y} - \epsilon) < 0 < F(x, \bar{y} + \epsilon), \quad \forall x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta),$$

成立. 再次根据连续函数零点定理和 $F(x, \cdot)$ 的严格递增性, $\exists! y \in (\bar{y} - \epsilon, \bar{y} + \epsilon)$ 满足 $F(x, y) = 0$ 且 $y = f(x)$. 即

$$|x - \bar{x}| < \delta \implies |f(x) - f(\bar{x})| < \epsilon.$$

(2) $f \in D((x_0 - \rho, x_0 + \rho))$. 任取 $\bar{x} \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, 并取 Δx 充分小满足 $\bar{x} + \Delta x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$. 定义

$$\bar{y} = f(\bar{x}), \quad \Delta y := f(\bar{x} + \Delta x) - \bar{y}.$$

从而得到

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = 0 = F(\bar{x} + \Delta x, \bar{y} + \Delta y).$$

根据定理 12.3.2 存在 $\theta \in (0, 1)$ 满足

$$\begin{aligned} 0 &= F(\bar{x} + \Delta x, \bar{y} + \Delta y) - F(\bar{x}, \bar{y}) \\ &= F_x(\bar{x} + \theta \Delta x, \bar{y} + \theta \Delta y) \Delta x + F_y(\bar{x} + \theta \Delta x, \bar{y} + \theta \Delta y) \Delta y. \end{aligned}$$

但在 \square_1 上偏导数 $F_y > 0$, 因此

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(\bar{x} + \theta\Delta x, \bar{y} + \theta\Delta y)}{F_y(\bar{x} + \theta\Delta x, \bar{y} + \theta\Delta y)}.$$

利用偏导数 F_x 和 F_y 的连续性, 得到

$$f'(\bar{x}) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(\bar{x}, \bar{y})}{F_y(\bar{x}, \bar{y})}.$$

(3) $f \in C^1((x_0 - \rho, x_0 + \rho))$. 这个性质立即从上述等式推出. \square

定理12.4.4. (多元隐函数存在定理) 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是区域, $(x_0, y_0) \in \Omega$, $F(x, y)$ 是定义在 Ω 上的 $n+1$ 元函数, 且

- (i) $F(x_0, y_0) = 0$;
- (ii) $F(x, y)$ 在闭矩体 $\square_0 := \{(x^1, \dots, x^n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x^i - x_0^i| \leq a^i, |y - y_0| \leq b\} \subset \Omega$ 上有连续偏导数;
- (iii) $F_y(x_0, y_0) \neq 0$.

则存在 (x_0, y_0) 的某个邻域 $U_0 \subset \square_0$, 使得方程 $F(x, y) = 0$ 在 U_0 唯一确定可导的隐函数, 即存在 $\rho > 0, \rho' > 0$ 和函数

$$y = f(x), \quad x \in \mathbb{B}^n(x_0, \rho) \text{ 且 } (x, y) \in \mathbb{B}^n(x_0, \rho) \times (y_0 - \rho', y_0 + \rho') = U_0,$$

满足

- (a) $F(x, f(x)) = 0$;
- (b) $y_0 = f(x_0)$;
- (c) $f \in C^1(\mathbb{B}^n(x_0, \rho))$;
- (d) 其导数满足 (隐函数求导公式)

$$\frac{\partial y}{\partial x^i} = -\frac{F_{x^i}(x, y)}{F_y(x, y)}. \quad (12.4.4)$$

例12.4.5. (1) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ ($a \neq 0$).

(2) $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$. 求 z_{xx}, z_{xy}, z_{yy} .

(3) $F(xz, yz) = 0$, 其中 $F \in C^2$. 求 z_{xx}, z_{xy}, z_{yy} .

(4) 证明方程 $y - xe^x - \epsilon \sin y = 0$ ($0 < \epsilon < 1$) 在 $(0, 0)$ 处可确定隐函数 $y = y(x)$, 并求出 $y'(0)$.

解: (1) 此时 $F(x, y) := x^3 + y^3 - 3axy$. 计算可得

$$F_x = 3x^2 - 3ay, \quad F_y = 3y^2 - 3ax.$$

联立方程 $F_x = 0 = F_y$, 得到 $(x, y) = (0, 0), (\sqrt[3]{4a}, \sqrt[3]{2a}), (\sqrt[3]{2a}, \sqrt[3]{4a})$. 因此在曲线上除了这三个点外, 我们都可以局部地确定隐函数 $y = y(x)$ 和 $x = x(y)$. 根据公式 (12.4.3) 得到

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - 3ay}{3y^2 - 3ax} = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}.$$

继续求导得到

$$y'' = \frac{(ay' - 2x)(y^2 - ax) - (ay - x^2)(2yy' - a)}{(y^2 - ax)^2} = -\frac{2a^3xy}{(y^2 - ax)^3}.$$

(2) 此时 $F(x, y) = x^2 + y^2 + z^2 - 4z$. 计算得到

$$F_x = 2x, \quad F_y = 2y, \quad F_z = 2z - 4.$$

根据公式 (12.4.4) 可知

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{x}{2-z}, \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{y}{2-z}.$$

继续求偏导得到

$$z_{xx} = \frac{(2-z) - x(-z_x)}{(2-z)^2} = \frac{2-z + \frac{x^2}{2-z}}{(2-z)^2} = \frac{(2-z)^2 + x^2}{(2-z)^3} = \frac{4-y^2}{(2-z)^3},$$

和

$$z_{xy} = \frac{xz_y}{(2-z)^2} = \frac{xy}{(2-z)^3},$$

和

$$z_{yy} = \frac{(2-z) - y(-z_y)}{(2-z)^2} = \frac{2-z + \frac{y^2}{2-z}}{(2-z)^2} = \frac{(2-z)^2 + y^2}{(2-z)^3} = \frac{4-x^2}{(2-z)^3}.$$

(3) 这里假设函数 $F = F(u, v)$, $u = xz, v = yz$. 利用链式法则得到

$$0 = F_u(z + xz_x) + F_v(yz_x) \implies z_x = -\frac{zF_u}{xF_u + yF_v}$$

和

$$0 = F_u(xz_y) + F_v(z + yz_y) \implies z_y = -\frac{zF_v}{xF_u + yF_v}.$$

继续求偏导得到

$$0 = F_{uu}(z + xz_x)^2 + F_u(2z_x + xz_{xx}) + (2F_{vu}(z + xz_x) + F_{vv}(yz_x))(yz_x) + F_v(yz_{xx}).$$

故

$$z_{xx} = \frac{2zF_u^2(xF_u + yF_v) - y^2z^2(F_v^2F_{uu} - 2F_uF_vF_{uv} + F_u^2F_{vv})}{(xF_u + yF_v)^3}.$$

同样可得

$$z_{yy} = \frac{2zF_v^2(xF_u + yF_v) - x^2z^2(F_v^2F_{uu} - 2F_uF_vF_{uv} + F_u^2F_{vv})}{(xF_u + yF_v)^3}.$$

作为练习请求出 z_{xy} .

(4) 此时 $F(x, y) = y - xe^x - \epsilon \sin y$. 计算得到

$$F_x = -e^x - xe^x, \quad F_y = 1 - \epsilon \cos y$$

从而得到

$$y'(0) = -\frac{F_x(0,0)}{F_y(0,0)} = -\frac{-1}{1-\epsilon} = \frac{1}{1-\epsilon}.$$

§12.4.3 向量值隐函数定理

考虑由 $2n$ 元 n 维向量值函数 $F(x, y)$ 所确定的函数方程组

$$F(x, y) = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} F^1(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) \\ \vdots \\ F^n(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (12.4.5)$$

假设 (12.4.5) 可确定函数 $y = f(x)$. 对方程 $0 = F^k(x^i, y^j)$ 求偏导得到

$$0 = F_{x^i}^k(x, y) + F_{y^j}^k(x, y)f_{x^i}^j(x).$$

引入矩阵函数

$$A := [a_{ki}], \quad B := [b_{kj}], \quad C := [c_{ji}], \quad a_{ki} := F_{x^i}^k, \quad b_{kj} := F_{y^j}^k, \quad c_{ji} := f_{x^i}^j.$$

那么得到

$$\mathbf{0} = A + BC \implies C = -B^{-1}A$$

如果矩阵 B 非奇异.

定理12.4.6. (2n 元 n 维向量值隐函数存在定理) 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ 是区域, $(x_0, y_0) \in \Omega$, $F(x, y)$ 是定义在 Ω 上的 $2n$ 元 n 维函数, 且

(i) $F(x_0, y_0) = \mathbf{0}$;

(ii) $F(x, y)$ 在闭矩体 $\square_0 := \{(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^{2n} \mid |x^i - x_0^i| \leq a^i, |y^j - y_0^j| \leq b^j\} \subset \Omega$ 上有连续偏导数;

(iii) 矩阵

$$F_y := \begin{bmatrix} F_{y^1}^1 & \cdots & F_{y^n}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{y^1}^n & \cdots & F_{y^n}^n \end{bmatrix}$$

在 (x_0, y_0) 处非奇异.

则存在 (x_0, y_0) 的某个邻域 $U_0 \subset \square_0$, 使得方程 $F(x, y) = \mathbf{0}$ 在 U_0 唯一确定可导的隐函数, 即存在 $\rho > 0, \rho' > 0$ 和函数

$$y = f(x), \quad x \in \mathbb{B}^n(x_0, \rho) \text{ 且 } (x, y) \in \mathbb{B}^n(x_0, \rho) \times \mathbb{B}^n(y_0, \rho') = U_0,$$

满足

(a) $F(x, f(x)) = \mathbf{0};$

(b) $y_0 = f(x_0);$

(c) $F \in C^1(\mathbb{B}^n(x_0, \rho));$

(d) 其导数满足 (隐函数求导公式)

$$[f_{x^i}^j] = -[F_{y^j}^k]^{-1}[F_{x^i}^k]. \quad (12.4.6)$$

例12.4.7. (1) 研究方程组

$$F(x, y, u, v) = u^2 + v^2 - x^2 - y = 0, \quad G(x, y, u, v) = -u + v - xy + 1 = 0$$

在 $P_0 = (2, 1, 1, 2)$ 附近的隐函数并求其偏导数.(2) 假设 $(y = y(x), z = z(x))$ 是由方程组

$$z = xf(x + y), \quad F(x, y, z) = 0,$$

所确定的向量值隐函数, 其中 $f, F \in C^1$. 求 dz/dx .

(3) 假设 $u = u(x, y, z), v = v(x, y, z)$ 和 $x = x(s, t), y = y(s, t), z = z(s, t)$ 都有连续的一阶偏导数, 证明

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} + \frac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)} \frac{\partial(y, z)}{\partial(s, t)} + \frac{\partial(u, v)}{\partial(z, x)} \frac{\partial(z, x)}{\partial(s, t)}.$$

解: (1) 直接计算可得

$$\begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x & -1 \\ -y & -x \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u & 2v \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

则得到

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}_{P_0} = - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7/6 \\ -1 & -5/6 \end{bmatrix}$$

(2) 因为

$$z_x = f + xf'(1 + y'), \quad 0 = F_x + F_y y' + F_z z'$$

得到

$$z' = \frac{-F_x - F_y \left(\frac{z' - f}{xf'} - 1 \right)}{F_z} = \frac{(f + xf')F_y - xf'F_x - z'F_y}{xf'F_z}.$$

(3) ???

label

§12.4.4 逆映射定理

逆映射定理是保证如何从函数组

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad (u, v) \in D, \quad (12.4.7)$$

求出

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad (x, y) \in E. \quad (12.4.8)$$

换句话说, 映射

$$\mathbf{T}: D \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (u, v) \mapsto \mathbf{T}(u, v)$$

什么时候存在逆映射? 一般来说映射 \mathbf{T} 在整体上不存在逆映射, 但是局部上可以存在逆映射. 比如考察函数 $\mathbf{T}(u, v) = (u^2, v^2)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

定理12.4.8. (逆映射定理) 假设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是区域, $\mathbf{x}_0 \in D$, $\mathbf{T}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$, 是定义在 D 上的 n 元 n 维向量值函数, 且

- (i) $\mathbf{y}_0 := \mathbf{T}(\mathbf{x}_0)$,
- (ii) $\mathbf{T} \in C^1(D)$,
- (iii) $\mathbf{Jac}_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{T}) \neq 0$.

则存在 \mathbf{x}_0 的某个邻域 $\mathbb{B}^n(\mathbf{x}_0, \rho)$ 和 \mathbf{y}_0 的某个邻域 $\mathbb{B}^n(\mathbf{y}_0, \rho')$, 使得

$$\mathbf{T}: \mathbb{B}^n(\mathbf{x}_0, \rho) \longrightarrow \mathbb{B}^n(\mathbf{y}_0, \rho')$$

存在逆映射 $\mathbf{S} := \mathbf{T}^{-1}$, 且满足

- (a) $\mathbf{S}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{x}_0$;
- (b) $\mathbf{S}' = (\mathbf{T}')^{-1}$, 即

$$\mathbf{Jac}_{\mathbf{y}}(\mathbf{S}) = [\mathbf{Jac}_{\mathbf{S}(\mathbf{y})}(\mathbf{T})]^{-1}.$$

证: 定义 $2n$ 元 n 维向量值函数

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbf{y} - \mathbf{T}(\mathbf{x}), \quad \Omega := D \times \mathbf{T}(D) \subset \mathbb{R}^{2n}.$$

则得到 $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 在任何包含在 Ω 内的闭矩体

$$\square_0 := \left\{ (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^{2n} \mid |x^i - x_0^i| \leq a^i, |y^j - y_0^j| \leq b^j \right\}$$

上有连续的偏导数, 且

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{Jac}_x(\mathbf{T})$$

在 \mathbf{x}_0 非奇异. 从而根据定理12.4.6 存在 \mathbf{y}_0 的某个邻域 $\mathbb{B}^n(\mathbf{y}_0, \rho')$ 和某个函数 $\mathbf{x} = \mathbf{S}(\mathbf{y})$, 其中 $\mathbf{y} \in \mathbb{B}^n(\mathbf{y}_0, \rho')$ 和 $\mathbf{x} \in \mathbb{B}^n(\mathbf{x}_0, \rho)$, 且

$$\mathbf{S}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{F}(\mathbf{S}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{S} \in C^1(\mathbb{B}^n(\mathbf{y}_0, \rho')),$$

和

$$[S_{y^i}^j] = -[F_{x^j}^k]^{-1}[F_{y^i}^k].$$

化简得到

$$\mathbf{T} \circ \mathbf{S} = \mathbf{1} \quad \text{在 } \mathbb{B}^n(\mathbf{y}_0, \rho') \text{ 成立,}$$

且

$$[S_{y^i}^j] = [T_{x^j}^k]^{-1}[\delta_i^k] \implies \mathbf{Jac}(\mathbf{S}) = [\mathbf{Jac}(\mathbf{T})]^{-1}. \quad \square$$

例12.4.9. (1) 对关于二元函数 $u = u(t, x) \in C^2$ 的波动方程 $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ ($a \neq 0$) 作变量替换

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at.$$

求 u 关于 ξ, η 所要满足的方程.

(2) 假设二元函数 $z = z(x, y) \in C^2$ 且满足方程

$$z_{xx} + 2z_{xy} + z_{yy} = 0.$$

作变量替换

$$u = x + y, \quad v = x - y.$$

求 $w := xy - z$ 关于 u, v 所要满足的方程.

(3) 对方程

$$x^2 z_{xx} - y^2 z_{yy} = 0$$

作变量替换 $u = xy$ 和 $v = y/x$.

解: (1) 计算

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(t, x)} = \det \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 1 & a \end{bmatrix} = 2a \neq 0.$$

从而变量替换是可逆的. 根据

$$u_x = u_{\xi}\xi_x + u_{\eta}\eta_x = u_{\xi} + u_{\eta}, \quad u_t = u_{\xi}\xi_t + u_{\eta}\eta_t = a(u_{\eta} - u_{\xi}),$$

得到

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2u_{\xi\eta}, \quad u_{tt} = a^2(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) - 2a^2u_{\xi\eta}.$$

因此 $u_{tt} = a^2u_{xx}$ 推出 $u_{\xi\eta} = 0$. 即 $u(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \eta(\eta)$, 其中 $\varphi, \psi \in C^2$. 故波动方程 $u_{tt} = a^2u_{xx}$ 且 $u \in C^2$ 的一般解是 $u(t, x) = \varphi(x - at) + \eta(x + at)$.

(2) 计算

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -2.$$

从而变量替换是可逆的. 根据

$$z_x = y - w_x = y - (w_u + w_v), \quad z_y = x - w_y = x - (w_u - w_v),$$

得到

$$z_{xx} = -(w_{uu} + 2w_{uv} + w_{vv}), \quad z_{xy} = (w_{uu} - 2w_{uv} + w_{vv}), \quad z_{yy} = 1 - (w_{uu} - w_{vv})$$

从而 $w_{uu} = 1/2$.

(3) 根据

$$u_x = y, \quad u_y = x, \quad u_x = -\frac{y}{x^2}, \quad v_y = \frac{1}{x}$$

得到

$$z_x = yz_u - \frac{y}{x^2}z_v, \quad z_y = xz_u + \frac{1}{x}z_v$$

且

$$z_{xx} = y^2z_{uu} - \frac{2y^2}{x^2}z_{uv} + \frac{y^2}{x^4}z_{vv} + \frac{2y}{x^3}z_v, \quad z_{yy} = x^2z_{uu} + 2z_{uv} + \frac{1}{x}z_{vv}.$$

最后得到 $2uz_{uv} = z_v$ 或者 $2u(z_v)_u = z_v$. 分部积分得到 $(z_v)^2 = \varphi(v)u$. \square

§12.5 偏导数的几何应用

本节中的几何应用主要是介绍如何求空间曲线的切线和法平面, 及空间曲面的法线和切平面.

§12.5.1 空间曲线的切线和法平面

求空间曲面的切线与法平面.

1、参数方程表示的空间曲线的切线与法平面. 此时空间区间 γ 用参数 t 记为参数形式

$$\gamma: x = x(t), y = y(t), z = z(t), \quad t \in [a, b], \quad (12.5.1)$$

或可记成向量形式

$$\mathbf{r}(t) := (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [a, b].$$

称空间曲线 γ 光滑的²如果 $\mathbf{r}'(t)$ 连续且 $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$.

固定曲线 γ 上点 $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$. 任取其它点 $\mathbf{P} = (x(t), y(t), z(t))$, 则连接 \mathbf{P}_0 和 \mathbf{P} 的向量为 $(x(t) - x_0, y(t) - y_0, z(t) - z_0)$. 令 $t \rightarrow t_0$ 得到曲线 γ 在 \mathbf{P}_0 处的切线的方向向量, 即切向量(tangent vector)

$$\mathbf{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \quad (12.5.2)$$

和曲线在 \mathbf{P}_0 处的切线方程

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}. \quad (12.5.3)$$

同时曲线在 \mathbf{P}_0 处的法平面(normal plane)(即过 \mathbf{P}_0 且和切线垂直的平面)为

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0. \quad (12.5.4)$$

利用几何直观性可写成向量形式

$$\langle \mathbf{r}'(t), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle = 0. \quad (12.5.5)$$

例12.5.1. (1) 如果空间曲线 γ 的方程为

$$y = y(x), \quad z = z(x) \implies \mathbf{r}(x) = (x, y(x), z(x)).$$

则在 $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0 = y(x_0), z_0 = z(x_0))$ 处的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{y'(x_0)} = \frac{z - z_0}{z'(x_0)} \quad (12.5.6)$$

且法平面方程为

$$(x - x_0) + y'(x_0)(y - y_0) + z'(x_0)(z - z_0) = 0. \quad (12.5.7)$$

(2) 求螺旋线

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt,$$

在 $t_0 = \pi/3$ 处的切线和法平面方程.

²但在微分几何中光滑曲线通常是指 $\mathbf{r}(t)$ 的各阶导数存在且连续. 在这里光滑曲线又称为正规曲线(regular curve).

2、一般形式表示的空间曲线的切线与法平面. 空间曲线的一般形式可表示为两个曲面的交集:

$$\Gamma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0 = G(x, y, z) \right\}, \quad (12.5.8)$$

其中 F 和 G 都具有连续的偏导数. 取 Γ 上的固定 $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 使得 Jacobi 矩阵

$$\mathbf{Jac}_{\mathbf{P}_0}(\Gamma) = \begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{bmatrix}_{\mathbf{P}_0}$$

在 \mathbf{P}_0 处满秩, 即 $\text{rank}(\mathbf{Jac}_{\mathbf{P}_0}(\Gamma)) = 2$. 根据秩的定义, 存在某个 2×2 的子矩阵是非奇异的. 不是一般性不妨假设

$$\begin{bmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{bmatrix}_{\mathbf{P}_0} \text{ 非奇异} \iff \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \Big|_{\mathbf{P}_0} = \det \left(\begin{bmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{bmatrix}_{\mathbf{P}_0} \right) \neq 0.$$

根据定理 12.4.6 可知存在 (x_0, y_0, z_0) 的某个领域

$$U_0 := (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \times \mathbb{B}^2((y_0, z_0), \rho')$$

使得方程 $F(x, y, z) = 0 = G(x, y, z)$ 在 U_0 唯一确定可导的隐函数:

$$y = y(x), \quad z = z(x), \quad x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$$

满足

$$F_x + F_y y' + F_z z' = 0 = G_x + G_y y' + G_z z'$$

从而得到

$$y'(x_0) = \frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}} \Big|_{\mathbf{P}_0}, \quad z'(x_0) = \frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}} \Big|_{\mathbf{P}_0}.$$

因此过 \mathbf{P}_0 处的切线方程和法平面方程分别为

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}(\mathbf{P}_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}(\mathbf{P}_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}(\mathbf{P}_0)} \quad (12.5.9)$$

和

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}(\mathbf{P}_0)(x - x_0) + \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}(\mathbf{P}_0)(y - y_0) + \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}(\mathbf{P}_0)(z - z_0) = 0. \quad (12.5.10)$$

方程 (12.5.10) 可写成

$$\begin{vmatrix} F_x(\mathbf{P}_0) & F_y(\mathbf{P}_0) & F_z(\mathbf{P}_0) \\ G_x(\mathbf{P}_0) & G_y(\mathbf{P}_0) & G_z(\mathbf{P}_0) \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

定理12.5.2. 曲线 (12.5.8) 在 P_0 处的法平面就是梯度 $\text{grad}_{P_0}(F)$ 和 $\text{grad}_{P_0}(G)$ 所张成的经过 P_0 的平面.

例12.5.3. (1) 求两个柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 和 $x^2 + z^2 = R^2$ 交线在 $P = \frac{R}{\sqrt{2}}(1, 1, 1)$ 处的切线方程和法平面方程.

§12.5.2 空间曲面的切平面和法线

和曲线的切线和法平面对偶的是曲面的切平面和法线.

1、一般形式曲面的切平面和法线. 此时曲面 S 的方程为

$$S: F(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in D, \quad (12.5.11)$$

其中多元函数 F 在 D 上具有连续偏导数 F_x, F_y, F_z 且偏导数不全为 0. 固定曲面 S 上的点 $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$. 对经过 M_0 的 S 上的任意光滑曲线 $\gamma: \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, 有 $x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0), z_0 = z(t_0)$, 且 $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$. 在 t_0 处求导得到

$$F_x(M_0)x'(t_0) + F_y(M_0)y'(t_0) + F_z(M_0)z'(t_0) = 0.$$

γ 的切线构成了曲面 S 在 M_0 处的切平面(tangent plane). 由此得到切平面的法向量是

$$\mathbf{n} := (F_x(M_0), F_y(M_0), F_z(M_0)). \quad (12.5.12)$$

从而得到切平面和法线方程为

$$F_x(M_0)(x - x_0) + F_y(M_0)(y - y_0) + F_z(M_0)(z - z_0) = 0 \quad (12.5.13)$$

和

$$\frac{x - x_0}{F_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(M_0)}. \quad (12.5.14)$$

例12.5.4. (1) 如果曲面 S 的方程表示为

$$S: z = f(x, y), \quad (x, y) \in E \implies f(x, y) - z = 0,$$

此时的切平面方程和法线方程为

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (12.5.15)$$

和

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \quad (12.5.16)$$

(2)

2、参数形式曲面的切平面和法线. 假设曲面可表示为参数形式:

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad (12.5.17)$$

其中 x, y, z 都具有连续的偏导数. 假设 Jacobi 矩阵

$$\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix}$$

在 $M_0 = (x_0 = x(u_0, v_0), y_0 = y(u_0, v_0), z_0 = z(u_0, v_0))$ 处满秩. 不失一般性不妨假设 $\partial(x, y)/\partial(u, v)|_{(u_0, v_0)} \neq 0$, 从而在 (x_0, y_0) 附近可以确定函数

$$u = u(x, y), v = v(x, y) \implies z = z(x, y) = z(u(x, y), v(x, y)) =: f(x, y).$$

由于

$$f_x = z_u u_x + z_v v_x, \quad f_y = z_u u_y + z_v v_y$$

和

$$x_u u_x + x_v v_x = 1 = y_u u_y + y_v v_y, \quad x_u u_y + x_v v_y = 0 = y_u u_x + y_v v_x,$$

得到

$$f_x = -\frac{\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}, \quad f_y = -\frac{\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}.$$

从方程 $f(x, y) - z = 0$ 得到 S 在 M_0 的法向量为

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)} \right). \quad (12.5.18)$$

相应的切平面方程和法线方程为

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)} (x - x_0) + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)} (y - y_0) + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)} (z - z_0) = 0 \quad (12.5.19)$$

和

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)}}. \quad (12.5.20)$$

例12.5.5. (1) 求球面

$$x = \sin \varphi \cos \theta, \quad y = \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \cos \varphi,$$

在对应于 $\theta = \varphi = \pi/4$ 处的切平面方程和法线方程.

(2) 证明曲线

$$\Gamma: x = ae^t \cos t, \quad y = ae^t \sin t, \quad z = ae^t$$

和锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 的每条母线 $x = pt, y = qt, z = t$, 其中 $p^2 + q^2 = r^2$, 相交称定角.

(3) 证明对任意常数 ρ, φ , 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ 与锥面 $x^2 + y^2 = \tan^2 \varphi \cdot z^2$ 是正交的.

§12.6 无条件极值问题

这一节主要讨论无条件极值问题.

§12.6.1 多元函数的极值

多元函数的极值定义如下.

定义12.6.1. 假设 n 元函数 $f(x)$ 定义在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上且 $x_0 \in D$. 若存在 x_0 的邻域 $\mathbb{B}^n(x_0, \rho)$ 使得

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x)), \quad \forall x \in \mathbb{B}^n(x_0, \rho) \cap D,$$

则称 x_0 为函数 f 的极大值点(极小值点), $f(x_0)$ 为极大值(极小值). 极大值点和极小值点统称为极值点而极大值和极小值统称为极值. 如果存在 x_0 的去心邻域 $\mathbb{B}^n(x_0, \rho) \setminus \{x_0\}$ 使得

$$f(x_0) > f(x) \quad (f(x_0) < f(x)), \quad \forall x \in (\mathbb{B}^n(x_0, \rho) \setminus \{x_0\}) \cap D,$$

则称 x_0 为函数 f 的严格极大值点(极严格小值点), $f(x_0)$ 为严格极大值(严格极小值). 严格极大值点和严格极小值点统称为严格极值点而严格极大值和严格极小值统称为严格极值.

定理12.6.2. (多元函数 Fermat 引理) 假设 n 元函数 $f(x)$ 在 x_0 处可偏导且 x_0 为其极值点, 则 $f'(x_0) = \mathbf{0}$.

证: 定义一元函数 $\varphi_i(t) := f(x_0^1, \dots, x_0^{i-1}, t, x_0^{i+1}, \dots, x_0^n)$, 从而 φ_i 在 x_0^i 可导. 则根据一元函数 Fermat 引理得到 $0 = \varphi_i'(x_0^i) = f_{x^i}(x_0)$. \square

x_0 称为 n 元函数 f 的驻点, 如果 f 在 x_0 可偏导且满足 $f'(x_0) = \mathbf{0}$.

- 和一元函数一样, 可偏导的极值点必是驻点, 但是反之不一定成立. 比如考虑函数 $f(x, y) = xy$ 和 $(x_0, y_0) = (0, 0)$.
- 其上偏导数不存在的点也可能是驻点. 比如考虑函数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和 $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

定理12.6.3. (n 元函数极值的充分条件) 假设 n 元函数 $f(x)$ 定义在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上且 $x_0 \in D$ 为其驻点, 并假设 $f(x)$ 在 x_0 附近具有二阶连续偏导数. 引入函数 f 的 Hessian 矩阵

$$\mathbf{Hess}_x(f) := [f_{x^i x^j}(x)]_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{bmatrix} f_{x^1 x^1} & \cdots & f_{x^1 x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x^n x^1} & \cdots & f_{x^n x^n} \end{bmatrix}_x. \quad (12.6.1)$$

则有如下结论:

- $\mathbf{Hess}_{x_0}(f)$ 正定, $f(x_0)$ 为严格极小值.
- $\mathbf{Hess}_{x_0}(f)$ 负定, $f(x_0)$ 为严格极大值.
- $\mathbf{Hess}_{x_0}(f)$ 不定, $f(x_0)$ 不是极值.

证: 根据推论 12.3.6 得到

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) + o(|x - x_0|^2) &= \sum_{|\alpha|=2} \frac{f^{(\alpha)}(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{f_{x^i x^i}(x_0)}{2!} (x^i - x_0^i)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{f_{x^i x^j}(x_0)}{1!1!} (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq n} f_{x^i x^i}(x_0) (x^i - x_0^i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} f_{x^i x^j}(x_0) (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} f_{x^i x^j}(x_0) (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) = \frac{1}{2} (x - x_0) \cdot \mathbf{Hess}_{x_0}(f) \cdot (x - x_0)^\top. \end{aligned}$$

即

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2} (x - x_0) \cdot \mathbf{Hess}_{x_0}(f) \cdot (x - x_0)^\top + o(|x - x_0|^2). \quad (12.6.2)$$

假设函数 $f(x)$ 在邻域 $\mathbb{B}^n(x_0, \rho)$ 内具有二阶连续偏导数.

(a) $\mathbf{Hess}_{x_0}(f)$ 正定: 此时正定二次型

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{Hess}_{x_0}(f) \cdot \mathbf{y}^\top, \quad \mathbf{y} := \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}$$

在 $\partial \mathbb{B}^n(\mathbf{0}, 1) = \mathbb{S}^{n-1}$ 上取到最小值 $m > 0$. 从未得到

$$f(x) - f(x_0) \geq m|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2 + o(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{B}^n(x_0, \rho).$$

当 ρ 足够小得到 $f(x) > f(x_0)$ 对任何 $\mathbf{x} \in \mathbb{B}^n(x_0, \rho) \setminus \{x_0\}$ 都成立. 即 $f(x_0)$ 是严格极小值.

(b) $\mathbf{Hess}_{\mathbf{x}_0}(f)$ 负定: 类似可证 $f(\mathbf{x}_0)$ 是严格极大值.

(c) $\mathbf{Hess}_{\mathbf{x}_0}(f)$ 不定: 反证法, 假设 $f(\mathbf{x}_0)$ 为极小值. 给定非零向量 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, 考虑一元函数

$$\varphi(t) := f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{a}), \quad |t| < \rho/|\mathbf{a}|.$$

极小值推出 $\varphi'(0) = 0 \leq \varphi''(0)$. 另一方面

$$\varphi'(t) = \sum_{1 \leq i \leq n} f_{x_i}(\mathbf{x}_0)a^i, \quad \varphi''(0) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} f_{x_i x_j}(\mathbf{x}_0)a^i a^j = \mathbf{a} \cdot \mathbf{Hess}_{\mathbf{x}_0}(f) \cdot \mathbf{a}^\top.$$

从而得到 $\mathbf{Hess}_{\mathbf{x}_0}(f) \geq 0$. 矛盾表明 $f(\mathbf{x}_0)$ 不是极值. \square

例12.6.4. (1) 求函数 $f(x, y) = 3axy - x^3 - y^3$ 的极值 ($a > 0$).

(2) 求函数 $f(x, y) = -\frac{4}{5}x^5 + x^4 - 2x^2y + \frac{1}{2}y^2$ 的极值.

§12.6.2 多元函数的最值

假设 n 元函数 $f(\mathbf{x})$ 是定义在有界闭区域 D 上的连续函数. 此时最大值和最小值存在, 且可根据如下求得最值:

- (i) 求出驻点和不可偏导点和相应的函数值,
- (ii) 求出边界上的函数值;
- (iii) 最后比较 (i) 和 (ii).

例12.6.5. (1) 求函数 $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$ 的最值.

(2) 证明二元不等式 $xy \leq x \ln x - x + e^y$, 其中 $x \geq 1$ 和 $y \geq 0$.

§12.6.3 最小二乘法

假设 \mathbb{R}^{2n} 内有 m 个向量对 $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1), \dots, (\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m)$ 其大致满足线性函数关系 $\mathbf{y} = a\mathbf{x} + \mathbf{b}$. 最小二乘法可以告诉我们如何求出 a 和 \mathbf{b} , 即要求函数

$$Q := \sum_{1 \leq i \leq m} |\mathbf{y}_i - a\mathbf{x}_i - \mathbf{b}|^2 = \sum_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} |y_i^j - ax_i^j - b^j|^2 \quad (12.6.3)$$

最小. 计算

$$\begin{aligned} Q_a &= \sum_{1 \leq i \leq m} 2(\mathbf{y}_i - a\mathbf{x}_i - \mathbf{b}) \cdot (-\mathbf{x}_i) \\ &= 2a \sum_{1 \leq i \leq m} |\mathbf{x}_i|^2 - 2 \sum_{1 \leq i \leq m} \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i \rangle + 2 \sum_{1 \leq i \leq m} \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}_i \rangle, \end{aligned}$$

和

$$Q_{b^j} = \sum_{1 \leq i \leq m} -2(y_i^j - ax_i^j - b^j) = 2a \sum_{1 \leq i \leq m} x_i^j - 2 \sum_{1 \leq i \leq m} y_i^j + 2mb^j.$$

根据多元函数极值条件得到

$$Q_a = 0 = Q_{b_j}.$$

从而得到线性方程组

$$\left[\begin{array}{c|c} \sum_{1 \leq i \leq m} |\mathbf{x}_i|^2 & \boldsymbol{\alpha} \\ \hline \boldsymbol{\alpha}^\top & mI_n \end{array} \right] \begin{bmatrix} a \\ \mathbf{b}^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{1 \leq i \leq m} \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i \rangle \\ \boldsymbol{\beta}^\top \end{bmatrix} \quad (12.6.4)$$

这里 I_n 是 $n \times n$ 单位矩阵且

$$\boldsymbol{\alpha} := \left(\sum_{1 \leq i \leq m} x_i^1, \dots, \sum_{1 \leq i \leq m} x_i^n \right), \quad \boldsymbol{\beta} := \left(\sum_{1 \leq i \leq m} y_i^1, \dots, \sum_{1 \leq i \leq m} y_i^n \right)$$

根据 (12.6.4) 可以求出 a 和 \mathbf{b} .

§12.7 条件极值问题

本节给出常用的 Lagrange 函数来求解条件极值问题.

§12.7.1 条件极值和 Lagrange 函数

在 m 个约束条件

$$g_k(x^1, \dots, x^n) = 0, \quad 1 \leq k \leq m < n,$$

下求函数 $y = f(x^1, \dots, x^n)$ 的极值. 此时的极值称为条件极值.

定理12.7.1. 假设 $D \subset \mathbb{R}^3$ 是区域, 且 (x_0, y_0, z_0) 是函数 $f(x, y, z) : D \rightarrow \mathbb{R}$ 满足约束条件

$$G(x, y, z) = 0 = H(x, y, z)$$

的条件极值点. 进一步假设 f, G, H 具有连续偏导数且 Jacobi 矩阵

$$\mathbf{Jac}_{(x,y,z)} := \begin{bmatrix} G_x & G_y & G_z \\ H_x & H_y & H_z \end{bmatrix}$$

在曲面 $\Gamma := \{(x, y) \in D : G(x, y, z) = 0 = H(x, y, z)\}$ 内满秩. 则存在常数 λ_0, μ_0 满足

$$\mathbf{grad}_{(x_0, y_0, z_0)}(f) = \lambda_0 \mathbf{grad}_{(x_0, y_0, z_0)}(G) + \mu_0 \mathbf{grad}_{(x_0, y_0, z_0)}(H).$$

证: 不妨假设 $\partial(G, H)/\partial(y, z)(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. 从而在 (x_0, y_0, z_0) 附近可唯一确定

$$y = y(x), \quad z = z(x), \quad x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho), \quad y_0 = y(x_0), \quad z_0 = z(x_0).$$

此时一元函数

$$\Phi(x) := f(x, y(x), z(x)), \quad x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$$

在 x_0 处取得极值, 即 $\Phi'(x_0) = 0$:

$$0 = f_x(x_0, y_0, z_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)y'(x_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)z'(x_0).$$

换句话说, 梯度向量

$$\mathbf{grad}_{(x_0, y_0, z_0)}(f) = (f_x(x_0, y_0, z_0), f_y(x_0, y_0, z_0), f_z(x_0, y_0, z_0))$$

与曲面 Γ 在 (x_0, y_0, z_0) 的切向量 $(1, y'(x_0), z'(x_0))$ 正交, 即 $\mathbf{grad}_{(x_0, y_0, z_0)}(f)$ 落在 (x_0, y_0, z_0) 的法平面内. 从而根据定理12.6.2 得到

$$\mathbf{grad}_{(x_0, y_0, z_0)}(f) = \lambda_0 \mathbf{grad}_{(x_0, y_0, z_0)}(G) + \mu_0 \mathbf{grad}_{(x_0, y_0, z_0)}(H). \quad \square$$

上述定理可推广到多元情形.

定理12.7.2. 假设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是区域, 且 x_0 是函数 $f(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$ 满足约束条件

$$g(x) = \mathbf{0} \iff g^i(x) = 0, \quad 1 \leq i \leq m < n,$$

的条件极值点. 进一步假设 f, g^1, \dots, g^m 具有连续偏导数且Jacobi 矩阵

$$\mathbf{Jac}_x := \begin{bmatrix} g_{x^1}^1 & \cdots & g_{x^n}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{x^1}^m & \cdots & g_{x^n}^m \end{bmatrix}$$

在超曲面 $\Gamma := \{x \in D : g(x) = \mathbf{0}\}$ 内满秩. 则存在 m 个常数 $\lambda^1, \dots, \lambda^m$ 满足

$$\mathbf{grad}_{x_0}(f) = \sum_{1 \leq i \leq m} \lambda_i \mathbf{grad}_{x_0}(g^i).$$

接下来我们利用Lagrange 函数

$$L(x, \lambda) := f(x) - \sum_{1 \leq i \leq m} \lambda^i g^i(x) \quad (12.7.1)$$

来求出条件极值点. 作为 $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+m}$ 的函数, 条件极值点满足方程

$$0 = L_{x^i} = f_{x^i} - \sum_{1 \leq k \leq m} \lambda^k g_{x^i}^k, \quad (12.7.2)$$

$$0 = L_{\lambda^k} = -g^k. \quad (12.7.3)$$

(12.7.3) 自动满足而 (12.7.2) 就是定理12.7.2 的结论. 把满足 (12.7.2) - (12.7.3) 的点称为条件驻点.

- (1) 条件极值点必落在超曲面 $\Gamma := \{x \in D : g(x) = 0\}$ 内. 所以条件极值点必是极值点, 但反之不一定成立.
- (2) 如果超曲面 $\Gamma := \{x \in D : g(x) = 0\}$ 是有界闭集, 则结合边界上的函数值可求出最值.

例12.7.3. (1) 求函数 $V = 8xyz, x, y, z > 0$, 在约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上的最值.

(2) 求原点到曲线

$$\gamma : x + y + z = 1, \quad x + 2y + 3z = 6$$

的距离.

(3) 求函数 $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ 在闭区域 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最值, 其中 $b^2 - ac < 0$ 且 $a, b, c > 0$.

(4) 设 a^1, \dots, a^n 为 n 个常数, 求函数 $f(x) = |x|^2$ 在约束条件 $\langle a, x \rangle = 1$ 下的最小值.

(5) 证明椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad Ax + By + Cz = 0$$

的短轴长度 r 满足方程

$$\frac{a^2}{r^2 - a^2} A^2 + \frac{b^2}{r^2 - b^2} B^2 + \frac{c^2}{r^2 - c^2} C^2 = 0.$$

解: (4) 考虑函数

$$L(x, \lambda) := |x|^2 - \lambda (\langle a, x \rangle - 1).$$

计算得到

$$L_{x^i} = 2x^i - \lambda a^i, \quad L_\lambda = 1 - \langle a, x \rangle.$$

从而得到极值点为 $x_0 = a/|a|^2$ 和极小值为 $f(x_0) = 1/|a|^2$.

(5)

§12.7.2 * 等周不等式

§12.7.3 * 最优传输问题

§12.8 参考文献

1. Koblitz, Neal. *Introduction to elliptic curves and modular forms*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics 97, Springer-Verlag, New York, 1993. x+248 pp. ISBN: 0-387-97966-2

2. 布鲁斯·C. 伯恩特 (Bruce C. Berndt) 主编: 拉玛努金笔记(第 2, 3, 4 卷), 哈尔滨工业大学出版社, 2019.
3. 徐森林, 薛春华 编著: 数学分析, 清华大学出版社, 2005.
4. 张福保, 薛金美, 潮小李 主编: 数学分析讲义, 科学出版社, 2019.
5. 梅加强 编著: 数学分析, 高等教育出版社, 2015.
6. 邓建平 编: 微积分 I 和 II, 科学出版社, 2019.
7. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis I*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+574 pp. ISBN: 3-540-40386-8
8. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis II*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xvi+681 pp. ISBN: 3-540-40633-6
9. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis I*, Translated from the 1988 German original by Gary Brookfield, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. xiv+426 pp. ISBN: 3-7643-7153-6
10. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis II*, Translated from the 1999 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. xii+400 pp. ISBN: 978-3-7643-7472-3; 3-7643-7472-3
11. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis III*, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. xii+468 pp. ISBN: 978-3-7643-7479-2; 3-7643-7479-2
12. 菲赫金哥尔茨 著 (徐献瑜, 冷生明, 梁文骐 译; 郭思旭 校): 微积分学教程 (第一、二、三卷), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.
13. 吉米多维奇 著 (李荣涑, 李植 译): 数学分析习题集 (根据 2010 年俄文版翻译), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.
14. 汪林 著: 数学分析中的问题和反例, 现代数学基础 56, 高等教育出版社, 2015.
15. 裴礼文 编著: 数学分析中的典型问题与方法 (第二版), 高等教育出版社, 2015.
16. 朱尧辰 编著: 数学分析例选通过范例学技巧, 哈尔滨工业大学出版社, 2013.

17. 周民强 编著: 数学分析习题演练 (第一、二、三册), 科学出版社, 2018.
18. 李逸 编著: 数学分析讲义, 上海交通大学数学分析课讲义, 未出版, 2016.

第十三章 多变量积分理论

一个幽灵, 共产主义的幽灵, 在欧洲游荡. 现在是共产党人向全世界公开说明自己的观点、自己的目的、自己的意图并且拿党自己的宣言来反驳关于共产主义幽灵的神话的时候了. —《共产党宣言》, 马克思和恩格斯著.

§13.1 重积分

我们首先从一个简单例子来感受下重积分的定义. 假设曲顶柱体在 xoy 平面上的投影是矩形 $D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$, 而其“曲顶”为一曲面 $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$. 为了几何直观性, 进一步假设 f 为 D 上的非负连续函数. 仿照定积分的做法,

分割 \longrightarrow 取点 \longrightarrow 求和 \longrightarrow 取极限

我们来计算以 D 为底 $z = f(x, y)$ 为顶的曲顶柱体的体积.

- **分割:** 将 D 分成若干小矩形, 即在 $[a, b]$ 中任取分割

$$T_1: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

同时在 $[c, d]$ 中任取分割

$$T_2: c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d,$$

由此得到 $n \times m$ 个小矩形

$$D_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m.$$

称 $T := (T_1, T_2)$ 为 D 的一个分割.

- **取点:** 任取 $(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \in D_{ij}$. 令 $\xi := (\xi_{ij})_{i,j}$ 和 $\eta := (\eta_{ij})_{i,j}$.
- **求和:** 将每个以 D_{ij} 为底 $f(\xi_{ij}, \eta_{ij})$ 为高的长方体的体积求和得到

$$V(f, T, (\xi, \eta)) := \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j.$$

- **取极限:** 让分割的模 $\|T\| := \max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} d_{ij}$ 变得越来越细, 这里

$$d_{ij} := \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2},$$

得到极限

$$V := \lim_{\|T\| \rightarrow 0} V(f, T, (\xi, \eta)).$$

这个极限若存在则就是所求的体积, 并称为区域 D 上的二重积分且记作

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

§13.1.1 可求面积区域

上述二重积分定义是基于被积区域是“好的区域”矩形 $[a, b] \times [c, d]$. 一个很自然的问题是如何定义一般区域上的二重积分, 当然一个最基本的想法是用有限个或可数个矩形区域来描述一般区域.

假设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是一有界子集, 并取一闭矩形 $\square = [a, b] \times [c, d]$ 包含 D . 仿照之前的做法考虑分割 T :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b,$$

得到 $n \times m$ 个小矩形

$$\square_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m.$$

这些小矩形可分成 3 类:

- (1) \square_{ij}° : 完全包含在 D 内;
- (2) \square_{ij}^\vee : 完全落在 D 外;
- (3) \square_{ij}^\cap : 包含 ∂D .

定义

$$s(T, D) := \sum_{\square_{ij}^\circ} |\square_{ij}^\circ|, \quad S(T, D) := s(T, D) + \sum_{\square_{ij}^\cap} |\square_{ij}^\cap|. \quad (13.1.1)$$

根据定义得到如下不等式

$$0 < s(T, D) \leq S(T, D) \leq |\square| = (d - c)(b - a). \quad (13.1.2)$$

定义

$$\mathfrak{T} := \{\square \text{ 的所有分割 } T\}.$$

在 \mathfrak{T} 上引入如下的偏序关系:

$$T \leq T' \iff T' \text{ 是 } T \text{ 的加细},$$

这里称 T' 是 T 的加细如果 T' 是在 T 的基础上分别在 $[a, b]$ 和 $[c, d]$ 中增加有限个分点. 和定积分的 Darboux 上下和一样 (参见 ?? 和 ??), 得到

$$T \leq T' \implies s(T, D) \leq s(T', D) \text{ 和 } S(T, D) \leq S(T', D).$$

进一步有 (参见 ??)

$$s(T, D) \leq S(T', D), \quad \forall T, T' \in \mathfrak{T}.$$

事实上, 根据 $T, T' \leq T \cup T'$ 得到

$$s(T, D) \leq s(T \cup T', D) \leq S(T \cup T', D) \leq S(T', D).$$

根据 Zorn 引理得到

$$m_*(D) := \sup_{T \in \mathfrak{T}} s(T, D), \quad m^*(D) := \inf_{T \in \mathfrak{T}} S(T, D) \quad (13.1.3)$$

都存在. 注意到

$$D \text{ 是矩形} \implies m_*(D) = m^*(D) = |D|.$$

从 (13.1.3) 推出

$$0 \leq m_*(D) \leq m^*(D) \quad (13.1.4)$$

且 $m_*(D)$ 和 $m^*(D)$ 均与 \square 的选取无关 (作为练习, 请自证).

定义13.1.1. 假设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是有界子集. 如果 $m_*(D) = m^*(D)$, 则称该值为 D 的 **Jordan 面积 (Jordan area)** 并记作 $m(D)$ 或 $|D|$. 此时称 D 是 **可求面积的 (rectifiable area)**. 若 $m(D) = 0$, 则称 D 是 **零面积的**.

参见定理 5.3.18, 类似的可证

$$D \text{ 是可求面积的} \iff \left(\forall \epsilon > 0 \exists U \text{ 的分割 } T \text{ 满足} \right. \\ \left. S(T, D) - s(T, D) = S(T, \partial D) < \epsilon \right). \quad (13.1.5)$$

定理13.1.2. 有界点集 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是可求面积的 $\iff \partial D$ 是零面积的.

并不是每个有界点集的边界是零面积的, 比如考察有界点集

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq D(x)\}$$

这里 $D(x)$ 是 Dirichlet 函数, 此时 $\partial S = [0, 1] \times [0, 1]$ 面积为 1. 另一方面, 如果有界点集 D 可写成两个内部互不相交的可求面积的有界点集 D_1 和 D_2 的并, 则

$$|D| = |D_1| + |D_2|. \quad (13.1.6)$$

性质13.1.3. 假设函数 $y = f(x)$ 在 $x \in [a, b]$ 上是非负可积. 则它与直线 $x = a$, $x = b$ 和 $y = 0$ 所围成的有界区域 D 是可求面积的且

$$|D| = \int_a^b f(x) dx.$$

证: 因为闭区间上的可积函数必有界, 因此区域 D 是有界的. 假设 T 是闭区间 $[a, b]$ 的任意分割

$$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

并记 $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$. 则得到矩形 $\square := [a, b] \times [0, M]$ 包含区域 D . 设 m_i 和 M_i 分别是函数 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的上确界和下确界, 从而得到 $[0, M]$ 的一个分割

$$T': 0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = M,$$

这里 y_1, \cdots, y_{m-1} 是将所有 m_i, M_i 按从大到小排列所得到的数列. 对分割 $\mathbf{T} = (T, T')$ 得到

$$\begin{aligned} s(\mathbf{T}, D) &= \sum_{1 \leq i \leq n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \underline{S}(f, T), \\ S(\mathbf{T}, D) &= \sum_{1 \leq i \leq n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \bar{S}(f, T). \end{aligned}$$

另一方面

$$s(\mathbf{T}, D) \leq \mathbf{m}_*(D) \leq \mathbf{m}^*(D) \leq S(\mathbf{T}, D).$$

参见定理 5.3.18, 得到

$$f \in R([a, b]) \implies \mathbf{m}_*(D) = \mathbf{m}^*(D) = |D| = \int_a^b f(x) dx$$

即 D 是可求面积的. \square

我们可以直接对性质 13.1.3 中的有界区域 D 证明 ∂D 是零面积的, 从而定理 13.1.2 对 D 成立. 首先注意到, $L := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x), a \leq x \leq b\}$

$$\partial D = L \cup ([a, b] \times \{0\}) \cup (\{a\} \times [0, M]) \cup (\{b\} \times [0, M]) =: L \cup L_0 \cup L_a \cup L_b.$$

对 $L_0 = [a, b] \times \{0\}$, 矩形全体 $([x_{i-1}, x_i] \times [0, \epsilon])_{1 \leq i \leq n}$ 构成其一个分割 \mathbf{T}_0 且包含 L_0 , 同时

$$S(\mathbf{T}_0, L_0) = \sum_{1 \leq i \leq n} \epsilon \Delta x_i = \epsilon(b-a) \implies \mathbf{m}^*(L_0) = 0.$$

类似得可证明

$$\mathbf{m}^*(L_a) = \mathbf{m}^*(L_b) = 0.$$

对 L , 矩形全体 $([x_{i-1}, x_i] \times [m_i, M_i])_{1 \leq i \leq n}$ 构成其一个分割 \mathbf{T}_L 且包含 L , 同时

$$S(\mathbf{T}_L, L) = \sum_{1 \leq i \leq n} (M_i - m_i) \Delta x_i \implies \mathbf{m}^*(L) = 0.$$

因此 $|\partial D| = 0$.

§13.1.2 二重积分

下面引入二重积分.

定义13.1.4. 假设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是可求面积的有界点集, $z = f(x, y)$ 在 D 上有界. 任取分割 T 把 D 分成 n 个可求面积的子区域 D_1, \dots, D_n (从而它们的内部互不相交), 并记

$$\|T\| := \max_{1 \leq i \leq n} (\text{diam}(D_i)). \quad (13.1.7)$$

在每个子区域 D_i 上任取点 (ξ_i, η_i) , 并求和

$$\sigma(f, T, (\xi, \eta)) := \sum_{1 \leq i \leq n} f(\xi_i, \eta_i) |D_i|. \quad (13.1.8)$$

若 $\|T\| \rightarrow 0$ 时 $\sigma(f, T, (\xi, \eta))$ 的极限存在且和分割 T 及点 (ξ_i, η_i) 的选取无关, 则称函数 $f(x, y)$ 在 D 上可积, 并称该极限为函数 $f(x, y)$ 在 D 上的二重积分(double integral),

$$\iint_D f d\sigma \equiv \iint_D f(x, y) dx dy := \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{1 \leq i \leq n} \sigma(f, T, (\xi, \eta)). \quad (13.1.9)$$

我们称 $f(x, y)$ 是可积函数, D 是积分区域, x, y 是积分变量, 且 $d\sigma = dx dy$ 是面积元. 把 D 上所有的可积函数做成一个集合 $R(D)$.

和定积分一样引入 Darboux 上和和下和,

$$\underline{S}(f, T) := \sum_{1 \leq i \leq n} m_i |D_i|, \quad \bar{S}(f, T) := \sum_{1 \leq i \leq n} M_i |D_i|, \quad (13.1.10)$$

这里 M_i 和 m_i 是 $f(x, y)$ 的上确界和下确界.

性质13.1.5. 函数 $f(x, y)$ 在可求面积的有界子集 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上可积的 \iff

$$\lim_{\|T\| \rightarrow 0} [\bar{S}(f, T) - \underline{S}(f, T)] = 0, \quad (13.1.11)$$

即

$$\lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{1 \leq i \leq n} \omega(f, D_i) |D_i| = 0, \quad (13.1.12)$$

这里 $\omega(f, D_i) = M_i - m_i$ 是 $f(x, y)$ 在 D_i 上的振幅. 此时

$$\lim_{\|T\| \rightarrow 0} \underline{S}(f, T) = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \bar{S}(f, T) = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (13.1.13)$$

证: 参见定义 5.3.11 (9). \square

定积分性质告诉我们 $f \in R([a, b])$ 则 f 必有界. 而对定义在有界点集 D 上的二元函数 $f(x, y)$, 如果 D 就是矩形, 则相同的结论也成立; 但对一般的有界点集就不一定成立了.

定理13.1.6. 假设 D 是可求面积的有界闭区域. 则

$$f \in C(D) \implies f \in R(D). \quad (13.1.14)$$

这里 $C(D)$ 是表示 D 上连续函数构成的集合.

更一般的结论是, 如果定义在 D 上的有界函数 $f(x, y)$ 它的不连续点仅在有限个零面积的曲线上, 则 $f(x, y)$ 在 D 上是可积的.

证: 根据定义区域 D 是有界闭集, 故必是 \mathbb{R}^2 中的紧集. 从而推出连续函数 $f(x, y)$ 在 D 上是有界的且一致连续的. $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ 满足

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D \text{ 且 } |(x_1, y_1) - (x_2, y_2)| < \delta \implies |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \epsilon.$$

任取 D 的分割 $T: D_1, \dots, D_n$. 当 $\|T\| < \delta$ 时, $\omega(f, D_i) < \epsilon$ 从而导致

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \omega(f, D_i) |D_i| < \epsilon \sum_{1 \leq i \leq n} |D_i| = \epsilon |D|.$$

因此 $f \in R(D)$. \square

例13.1.7. (1) 用直线网 $x = i/n, y = j/n, 1 \leq i, j \leq n-1$ 分割正方形 $D = [0, 1] \times [0, 1]$ 并由此计算二重积分

$$\iint_D xy dx dy.$$

解: 根据题意得到分割 T_0 . 先取 $(\xi_i^0, \eta_j^0) = (i/n, j/n)$ 得到

$$\sigma(f, T_0, (\xi^0, \eta^0)) = \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \frac{ij}{n^4} = \frac{(n-1)^2}{4n^2} \rightarrow \frac{1}{4}.$$

再取任意点 $(\xi_i, \eta_j) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ 得到

$$\begin{aligned} \left| \sigma(f, T, (\xi, \eta)) - \sigma(f, T_0, (\xi^0, \eta^0)) \right| &\leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left| \xi_i \eta_j - \frac{ij}{n^2} \right| \frac{1}{n^2} \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{1}{n^2} \left| \left[\xi_i \left(\eta_j - \frac{j}{n} \right) + \left(\xi_i - \frac{i}{n} \right) \frac{j}{n} \right] \right| \\ &\leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{1}{n^2} \left(\frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{j}{n} \right) = \frac{n-1}{n^2} \leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

最后任取 D 的分割 T 使得当其模很细时满足 $T_0 \leq T$. 从而

$$s(T_0, D) \leq s(T, D) \leq S(T, D) \leq S(T_0, D).$$

因此

$$\iint_D xy dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^2}{4n^2} = \frac{1}{4}. \quad \square$$

(2) 函数

$$f(x, y) := \begin{cases} 1, & (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}), \\ 0, & (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \setminus (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}). \end{cases}$$

在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上是不可积的.

§13.1.3 n 重积分

为了定义三重积分和 n 重积分, 我们首先把可求面积点集和零面积点集推广到 n 维情形. 回顾 \mathbb{R}^n 中的 n 维闭矩形为

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] := \prod_{1 \leq i \leq n} [a^i, b^i] = [a^1, b^1] \times \cdots \times [a^n, b^n].$$

定义 $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ 的 n 维体积为

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| := \prod_{1 \leq i \leq n} |[a^i, b^i]| = \prod_{1 \leq i \leq n} (b^i - a^i).$$

对任给的有界点集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 可类似地定义 $m_*(\Omega)$ 和 $m^*(\Omega)$. 我们称 Ω 是可测的(measurable)如果 $m_*(\Omega) = m^*(\Omega)$. 此时定义 Ω 的测度(measure)为

$$|\Omega| \equiv m(\Omega) := m^*(\Omega) = m_*(\Omega).$$

如果 $|\Omega| = 0$ 则称 Ω 是零测度的(zero measurable). 同样可以证明

- \mathbb{R}^n 中的光滑曲面是零测度.
- 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) 是有界区域且其边界是由有限个光滑闭曲面构成, 则 Ω 是可测的当且仅当 $\partial\Omega$ 是零测度的.

定义13.1.8. 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是可测的闭区域且 $f(x)$ 是其上的有界函数. 任取分割 T 把 Ω 分成 m 个可测的子区域 $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ (从而它们的内部互不相交), 并记

$$\|T\| := \max_{1 \leq i \leq m} (\text{diam}(\Omega_i)).$$

在每个子区域 Ω_i 上任取点 ξ_i , 并求和

$$V(f, T, \xi) := \sum_{1 \leq i \leq m} f(\xi_i) |\Omega_i|.$$

若 $\|T\| \rightarrow 0$ 时 $V(f, T, \xi)$ 的极限存在且和分割 T 及点 ξ_i 的选取无关, 则称函数 $f(x)$ 在 Ω 上可积, 并称该极限为函数 $f(x)$ 在 Ω 上的 n 重积分(n -multiple integral),

$$\int_{\Omega} f dV = \int_{\Omega} f(x) dx = \int \cdots \int_{\Omega} f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \cdots dx^n. \quad (13.1.15)$$

我们称 $f(x)$ 是可积函数, Ω 是积分区域, x 是积分变量, 且 $dV = dx$ 是体积元. 把 D 上所有的可积函数做成一个集合¹ $R(\Omega)$.

经常用到的是三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz.$$

¹按照我们关于可积函数的定义, $f \in R(\Omega)$ 已经自动地蕴含了 f 是有界函数.

§13.1.4 重积分的基本性质

定积分的性质可平行的推广到多重积分上来.

性质13.1.9. 假设 Ω 是可测的闭区域.

(1) $f \in C(\Omega) \implies f \in R(\Omega)$.

(2) (被积函数可加性) $f, g \in R(\Omega) \implies \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha f + \beta g \in R(\Omega)$ 且

$$\int_{\Omega} (\alpha f + \beta g) dV = \alpha \int_{\Omega} f dV + \beta \int_{\Omega} g dV.$$

(3) (被积区域可加性) 假设 Ω 可写成两个内部互不相交的子区域 Ω_1 和 Ω_2 的并, 则 $f \in R(\Omega) \iff f \in R(\Omega_1) \cap R(\Omega_2)$. 此时

$$\int_{\Omega} f dV = \int_{\Omega_1} f dV + \int_{\Omega_2} f dV.$$

(4) 特别的有

$$|\Omega| = \int_{\Omega} dV.$$

(5) (保序性) $f, g \in R(\Omega)$ 且 $f \leq g \implies$

$$\int_{\Omega} f dV \leq \int_{\Omega} g dV.$$

进一步得到, 若 $f, g \in C(\Omega)$ 且满足 $f \leq g$ 但 f 和 g 不恒相等, 则

$$\int_{\Omega} f dV < \int_{\Omega} g dV.$$

作为一个直接推论得到, $f \in R(\Omega) \implies$

$$\left(\inf_{\Omega} f \right) |\Omega| \leq \int_{\Omega} f dV \leq \left(\sup_{\Omega} f \right) |\Omega|.$$

(6) (绝对可积性) $f \in R(\Omega) \implies |f| \in R(\Omega)$ 且

$$\left| \int_{\Omega} f dV \right| \leq \int_{\Omega} |f| dV.$$

(7) (乘积可积性) $f, g \in R(\Omega) \implies fg \in R(\Omega)$.

(8) (积分中值定理) $f, g \in R(\Omega)$ 且 g 在 Ω 上不变号 $\implies \exists \mu \in [\inf_{\Omega} f, \sup_{\Omega} f]$ 满足

$$\int_{\Omega} fg dV = \mu \int_{\Omega} g dV.$$

如果进一步 $f \in C(\Omega)$, 则可取 $\mu = f(\xi), \xi \in \Omega$.

例13.1.10. (1) 证明不等式

$$1.96 < \iint_{|x|+|y|\leq 10} \frac{dxdy}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq 2.$$

解: 因为 $100 \leq 100 + \cos^2 x + \cos^2 y \leq 102$, 所以得到

$$\frac{200}{102} \leq \iint_{|x|+|y|\leq 10} \frac{dxdy}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{200}{100}. \quad \square$$

(2) (绝对连续性) 如果函数 f 在区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上可积, 则当 $A \subset \Omega$ 的测度 $|A| \rightarrow 0$ 时积分 $\int_A f dV \rightarrow 0$.

证: 根据可积的定义我们有 $|f(x)| \leq M$, 其中 M 是某个正数. 从而得到

$$\left| \int_A f dV \right| \leq M|A| \rightarrow 0. \quad \square$$

§13.2 重积分的 Fubini 定理

对 n 重积分可以用累次积分(iterated integral)来计算, 即 Fubini 定理.

§13.2.1 矩形区域上的 Fubini 定理

矩形区域上 n 重积分的计算. 假设 $z = f(x, y)$ 是闭矩形 $D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ 上的非负连续函数 (从而 f 在 D 上有界). 此时以 D 为底而以曲面 $z = f(x, y)$ 为顶的曲顶柱体的体积

$$V = \iint_D f(x, y) dxdy.$$

任取 $x \in [a, b]$, 用过 $(x, 0, 0)$ 且和 yz -平面平行的平面去截曲顶柱体得到曲边梯形. 它的面积是

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy.$$

从而得到

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx =: \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

称为先对 y 再对 x 的累次积分.

上述公式对一般的可积函数也成立.

定理13.2.1. (Fubini 定理) (1) 假设二元函数 $f(x, y)$ 在闭矩形 $D = [a, b] \times [c, d]$ 上可积, 且对任意固定的 $x \in [a, b]$, 一元函数 $f(x, \cdot)$ 在 $[c, d]$ 上可积. 若记

$$F(x) := \int_c^d f(x, y) dy, \quad x \in [a, b],$$

则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积且有如下公式

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b F(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (13.2.1)$$

(2) 假设二元函数 $f(x, y)$ 在闭矩形 $D = [a, b] \times [c, d]$ 上可积, 且对任意固定的 $y \in [c, d]$, 一元函数 $f(\cdot, y)$ 在 $[a, b]$ 上可积. 若记

$$G(y) := \int_a^b f(x, y) dx, \quad y \in [c, d],$$

则 $G(y)$ 在 $[c, d]$ 上可积且有如下公式

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d G(y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (13.2.2)$$

证: (2) 的证明类似, 下只证 (1). 考虑 $[a, b]$ 上的任意分割 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. 证明 (13.2.1) 等价于证明

$$\lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{1 \leq i \leq n} F(\xi_i) \Delta x_i = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

这里 $\xi_i \in \Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, 且 $\|T\| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$. 考虑 $[c, d]$ 上的任意分割 $T': c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$, 并令 $\Delta y_j := y_j - y_{j-1}$. 这样 T 和 T' 构成了区域 $[a, b] \times [c, d]$ 上的一个分割 $\mathbf{T} = (T, T')$:

$$D_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad m_{ij} := \inf_{D_{ij}} f, \quad M_{ij} := \sup_{D_{ij}} f.$$

则得到

$$\sum_{1 \leq j \leq m} m_{ij} \Delta y_j \leq \sum_{1 \leq j \leq m} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y) dy = F(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{1 \leq j \leq m} M_{ij} \Delta y_j, \quad 1 \leq i \leq n.$$

两边同乘以 Δx_i 并对 i 求和得到

$$\sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \leq \sum_{1 \leq i \leq n} F(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j.$$

根据记号 (13.1.10) 上述可以写成

$$\underline{S}(f, \mathbf{T}) \leq \sum_{1 \leq i \leq n} F(\xi_i) \Delta x_i \leq \bar{S}(f, \mathbf{T}).$$

利用性质 13.1.5 得到

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\|\mathbf{T}\| \rightarrow 0} \sum_{1 \leq i \leq n} F(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b F(x) dx. \quad \square$$

定理 13.2.1 的直接推论是, 如果 $f \in R([a, b])$ 和 $g \in R([c, d])$, 则

$$\int_{[a, b] \times [c, d]} f(x)g(y) dx dy = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_c^d g(y) dy.$$

定理13.2.2. 假设 n 元函数 $f(x)$ 在 n 维闭矩形 $\Omega = [a, b] = \prod_{1 \leq i \leq n} [a^i, b^i]$ 上可积. 令 $\Omega_{(i)} := \prod_{1 \leq j \neq i \leq n} [a^j, b^j]$. 若积分

$$F(x^i) := \int_{\Omega_{(i)}} f(x) dx_{(i)}, \quad dx_{(i)} := dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^n = \prod_{1 \leq j \neq i \leq n} dx^j.$$

在 $[a^i, b^i]$ 上可积, 则有

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{a^i}^{b^i} F(x^i) dx^i = \int_{a^i}^{b^i} dx^i \int_{\Omega_{(i)}} f(x) dx_{(i)}. \quad (13.2.3)$$

证: 证明和定理 13.2.1 类似. 考虑 $[a^i, b^i]$ 上的任意分割 $T_i : a^i = x_0^{(i)} < x_1^{(i)} < \cdots < x_m^{(i)} = b^i$. 证明 (13.2.1) 等价于证明

$$\lim_{\|T_i\| \rightarrow 0} \sum_{1 \leq j \leq m} F(\xi_j^{(i)}) \Delta x_j^{(i)} = \iint_{\Omega} f(x) dx.$$

这里 $\xi_j^{(i)} \in \Delta_j^{(i)} = [x_{j-1}^{(i)}, x_j^{(i)}]$, $\Delta x_j^{(i)} = x_j^{(i)} - x_{j-1}^{(i)}$, 且 $\|T_i\| = \max_{1 \leq j \leq m} \Delta x_j^{(i)}$. 考虑 $\Omega_{(i)}$ 上的任意分割 $\mathbf{T}^i = (D_k^{(i)})$ 从而得到区域 Ω 上的一个分割 $\mathbf{T} = (T_i, \mathbf{T}^i)$:

$$D_{jk}^{(i)} := \Delta_j^{(i)} \times D_k^{(i)}, \quad m_{jk}^{(i)} := \inf_{D_{jk}^{(i)}} f, \quad M_{jk}^{(i)} := \sup_{D_{jk}^{(i)}} f.$$

则得到

$$\begin{aligned} \sum_k m_{jk}^{(i)} |D_k^{(i)}| &\leq \sum_k \int_{D_k^{(i)}} f(x^1, \dots, x^{i-1}, \xi_j^{(i)}, x^{i+1}, \dots, x^n) dx_{(i)} \\ &= F(\xi_j^{(i)}) \leq \sum_k M_{jk}^{(i)} |D_k^{(i)}|, \quad 1 \leq j \leq m. \end{aligned}$$

两边同乘以 $\Delta x_j^{(i)}$ 并对 j 求和得到

$$\sum_{j,k} m_{jk}^{(i)} \Delta x_j^{(i)} |D_k^{(i)}| \leq \sum_{1 \leq j \leq m} F(\xi_j^{(i)}) \Delta x_j^{(i)} \leq \sum_{1 \leq j \leq m} M_{jk}^{(i)} \Delta x_j^{(i)} |D_k^{(i)}|.$$

根据记号 (13.1.10) 上述可以写成

$$\underline{S}(f, \mathbf{T}) \leq \sum_{1 \leq j \leq m} F(\xi_j^{(i)}) \Delta x_j^{(i)} \leq \overline{S}(f, \mathbf{T}).$$

利用性质 13.1.5 得到

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{1 \leq j \leq m} F(\xi_j^{(i)}) \Delta x_j^{(i)} = \int_{a^i}^{b^i} F(x^i) dx_{(i)}. \quad \square$$

归纳得到

推论13.2.3. 假设 n 元函数 $f(x)$ 在 n 维闭矩形 $\Omega = [a, b] = \prod_{1 \leq j \leq n} [a^j, b^j]$ 上连续, 则

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} f(x) dx &= \int_{a^1}^{b^1} dx^1 \cdots \int_{a^{n-1}}^{b^{n-1}} dx^{n-1} \int_{a^n}^{b^n} f(x^1, \dots, x^n) dx^n \\ &= \left(\prod_{1 \leq j \leq n} \int_{a^j}^{b^j} dx^j \right) f(x) \equiv \int_a^b dx f(x). \end{aligned} \quad (13.2.4)$$

§13.2.2 x -型区域和 y -型区域上的 Fubini 定理

对一般区域上的重积分我们可利用“区域降维”来计算.

I. 二重积分为累次积分. 假设二元函数 $f(x, y)$ 在 x -型区域

$$D := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x) \leq y \leq \psi(x), a \leq x \leq b \right\} \quad (13.2.5)$$

上连续, 其中 $\varphi, \psi \in C([a, b])$. 令

$$c := \min_{[a,b]} \varphi, \quad d := \max_{[a,b]} \psi, \quad \square := [a, b] \times [c, d] \supset D.$$

将连续函数 $f(x, y)$ 延拓到 \square 上来:

$$\tilde{f}(x, y) := \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \in \square \setminus D, \end{cases}$$

则 \tilde{f} 在 \square 上可积且利用定理 13.2.1 得到

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_{\square} \tilde{f}(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d \tilde{f}(x, y) dy.$$

对任意固定 $x \in [a, b]$ 得到

$$\begin{aligned} \int_c^d \tilde{f}(x, y) dy &= \int_c^{\varphi(x)} \tilde{f}(x, y) dy + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \tilde{f}(x, y) dy + \int_{\psi(x)}^d \tilde{f}(x, y) dy \\ &= \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \tilde{f}(x, y) dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy. \end{aligned}$$

最后得到公式

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy. \quad (13.2.6)$$

同理若二元函数 $f(x, y)$ 在 y -型区域

$$D := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(y) \leq x \leq \psi(y), c \leq y \leq d \right\} \quad (13.2.7)$$

上连续, 其中 $\varphi, \psi \in C([c, d])$, 则得到

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx. \quad (13.2.8)$$

II. 三重积分为累次积分. 考虑区域

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y), (x, y) \in D\}$$

其中 D 是区域 Ω 在 xoy 平面上的投影. 同样得到公式 (即: 先 dz 后 $dxdy$)

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (13.2.9)$$

类似的可以得到公式:

先 dy 后 $dxdz$ 或 先 dx 后 $dydz$.

上面公式是把体积元 $dxdydz$ 拆成先 1 个微元再 2 个微元, 即 $3 = 1 + 2$. 类似地, 可以拆成 $3 = 2 + 1$, 即先 2 个微元再 1 个微元:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_e^f dz \iint_{\Omega_z} f(x, y, z) dx dy, \quad (13.2.10)$$

其中 $[e, f]$ 是 z 的取值范围, 且对每个 z_0 区域 Ω_{z_0} 是 Ω 和平面 $z = z_0$ 的交集. 同理我们可以考虑

$$\Omega = [a, b] \times \Omega_x = [c, d] \times \Omega_y = [e, f] \times \Omega_z.$$

例13.2.4. (1) 计算二重积分

$$I := \iint_D y dx dy,$$

其中 D 是由直线 $x = -2, y = 0, y = 2$ 和曲线 $x + \sqrt{2y - y^2} = 0$ 所围成的区域.

(2) 计算二重积分

$$I := \iint_D e^{\max(x^2, y^2)} dx dy,$$

其中 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1\} = [0, 1] \times [0, 1]$.

(3) 计算二重积分

$$I = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy.$$

(4) 计算三重积分

$$I := \iiint_{\Omega} \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}, \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x, y, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}.$$

(5) 计算三重积分

$$I := \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz,$$

其中 Ω 是锥面 $z^2 = h^2(x^2 + y^2)/R^2$ 和平面 $z = h$ 所围成的区域.

(6) 计算二重积分

$$I := \iint_{[0,1] \times [0,1]} \frac{xdxdy}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

(7) 计算二重积分

$$I := \int_0^1 dy \int_y^1 \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2} \right) dx.$$

(8) 计算三重积分

$$I := \iiint_{|x|+|y|+|z| \leq 1} (|x| + |y| + |z|) dx dy dz.$$

(9) 证明

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^4} \iiint_{r \leq n} [r] dx dy dz,$$

这里 $[r]$ 表示 $r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 的整数部分.

解: (1) 计算可得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 y dy \int_{-2}^{-\sqrt{2y-y^2}} dx = \int_0^2 y \left(2 - \sqrt{2y-y^2} \right) dy \\ &= \int_0^2 y \left(2 - \sqrt{1-(1-y)^2} \right) dy = \int_0^{-1} (1-t)(2 - \sqrt{1-t^2})(-dt) \\ &= \int_{-1}^0 (1-t)(2 - \sqrt{1-t^2}) dt = 3 - \int_{-1}^0 \sqrt{1-t^2} dt + \int_{-1}^0 t \sqrt{1-t^2} dt \\ &= 3 - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \sqrt{1-t^2} d(1-t^2) = 3 - \frac{\pi}{4} - t^{1/2} \Big|_{-1}^0 = 4 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

(2) 利用对称性计算得到

$$I = 2 \int_{0 \leq x \leq y \leq 1} e^{y^2} dx dy = 2 \int_0^1 e^{y^2} dy \int_0^y dx = \int_0^1 ye^{y^2} dy = \frac{e-1}{2}.$$

(3) 利用交换积分顺序得到

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dy \int_{y^2}^y \frac{\sin y}{y} dx = \int_0^1 (1-y) \sin y dy = \int_0^1 (y-1) d \cos y \\ &= - \int_0^1 \cos y dy = 1 - \sin 1. \end{aligned}$$

(4) 把 Ω 投影到 xoy 平面得到

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, x + y \leq 1 \right\}.$$

从而得到

$$\begin{aligned} I &= \iint_D dx dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} = -\frac{1}{2} \iint_D \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{(1+x+y)^2} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{(1+x+y)^2} \right] dy \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[\left(\frac{y}{4} + \frac{1}{1+x+y} \right) \Big|_0^{1-x} \right] = -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \left(\frac{1-x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{1+x} - \frac{3}{4} \right) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} + \ln 2 - \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{5}{8} \right). \end{aligned}$$

(5) 计算得到

$$I = \int_0^h \iint_{\Omega_z} z^2 dx dy = \int_0^h z^2 dz \iint_{\Omega_z} dx dy = \int_0^h \frac{\pi R^2}{h^2} z^4 dz = \frac{\pi R^2 h^3}{5},$$

其中 $\Omega_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2 z^2 / h^2\}$.

(6) 计算可得

$$\begin{aligned} I_n &:= \frac{1}{n^4} \sum_{1 \leq k \leq n} \iiint_{k-1 < r \leq k} [r] dx dy dz = \frac{1}{n^4} \sum_{1 \leq k \leq n} (k-1) \iiint_{k-1 < r \leq k} dx dy dz \\ &= \frac{1}{n^4} \sum_{1 \leq k \leq n} (k-1) \left[\frac{4}{3} \pi k^3 - \frac{4}{3} \pi (k-1)^3 \right] = \frac{4\pi}{3n^4} \left(n^4 - \sum_{1 \leq k \leq n} k^3 \right). \end{aligned}$$

利用 Stone 定理可得

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \frac{4\pi}{3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 - (n-1)^4 - n^3}{n^4 - (n-1)^4} \\ &= \frac{4\pi}{3} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^3 - n^3}{4n^3} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{3}{4} = \pi. \quad \square \end{aligned}$$

§13.2.3 * Stieltjes 积分

本小节引入 Stieltjes 积分使得二重积分可化某种“定积分”.

I、有界变差函数. 假设函数 $f(x)$ 定义在闭区间 $[a, b]$ 上. 对任意 $[a, b]$ 上的分割 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 考虑

$$\bigvee_T f := \sum_{0 \leq i \leq n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|. \quad (13.2.11)$$

称 f 是有界变差函数(function of bounded variation), 记为 $f \in \mathbf{BV}([a, b])$, 如果

$$\sup_T \bigvee_T f < +\infty.$$

此时定义

$$\bigvee_a^b f := \sup_T \bigvee_T f. \quad (13.2.12)$$

如果函数 $f(x)$ 定义在区间 $[a, +\infty)$, 称 $f \in \mathbf{BV}([a, +\infty))$ 如果 $(\bigvee_a^b f)_{b>a}$ 是有界的. 此时定义

$$\bigvee_a^{+\infty} f := \sup_{b>a} \bigvee_a^b f. \quad (13.2.13)$$

注13.2.5. (1) $C([a, b]) \not\Rightarrow \mathbf{BV}([a, b])$. 考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{2x}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

显然 $f \in C([0, 1])$. 取分割 T 如下

$$x_0 = 0, \quad x_i = \frac{1}{2n+1-i}, \quad 1 \leq i \leq 2n.$$

从而得到

$$\begin{aligned} \bigvee_T f &= \sum_{0 \leq i \leq 2n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \\ &= \sum_{1 \leq i \leq 2n-1} \left| x_{i+1} \cos \frac{\pi}{2x_{i+1}} - x_i \cos \frac{\pi}{2x_i} \right| + \left| \frac{1}{2n} \cos(n\pi) \right| \\ &= \frac{1}{2n} + \sum_{1 \leq i \leq 2n-1} \left| \frac{1}{2n-i} \cos \frac{(2n-i)\pi}{2} - \frac{1}{2n+1-i} \cos \frac{(2n+1-i)\pi}{2} \right| \\ &= \frac{1}{2n} + \sum_{1 \leq i \leq 2n-1} \left| \frac{1}{2n-i} \cos \left(n\pi - \frac{i\pi}{2} \right) - \frac{1}{2n+1-i} \cos \left(n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{i\pi}{2} \right) \right| \\ &= \frac{1}{2n} + \sum_{1 \leq i \leq 2n-1} \left| \frac{1}{2n-i} \cos \frac{i\pi}{2} - \frac{1}{2n+1-i} \sin \frac{i\pi}{2} \right| \\ &= \frac{1}{2n} + \sum_{1 \leq k \leq n-1} \left| \frac{1}{2n-2k} \cos(k\pi) - \frac{1}{2n+1-2k} \sin(k\pi) \right| \\ &\quad + \sum_{1 \leq k \leq n} \left| \frac{1}{2n-2k+1} \cos \left(k\pi - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{2n-2k+2} \sin \left(k\pi - \frac{\pi}{2} \right) \right| \\ &= \frac{1}{2n} + \sum_{1 \leq k \leq n-1} \frac{1}{2n-2k} + \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{2n-2k+2} \end{aligned}$$

故

$$\bigvee_T f = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \rightarrow +\infty.$$

因此 $f \notin \mathbf{BV}([0, 1])$.

(2) $\mathbf{BV}([a, b]) \not\Rightarrow C([a, b])$. 考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

则 $f \notin C([0, 1])$ 但是 $\bigvee_0^1 f = 1$.

(3) 如果函数 f 在 $[a, b]$ 或 $[a, +\infty)$ 上有界且单调, 则 $f \in \mathbf{BV}([a, b])$ 或 $f \in \mathbf{BV}([a, +\infty))$, 这是因为

$$\bigvee_a^b f = |f(b) - f(a)| \quad \text{或} \quad \bigvee_a^{+\infty} f = [f(+\infty) - f(a)].$$

(4) $\mathbf{Lip}([a, b]) \Rightarrow \mathbf{BV}([a, b])$. 这里 $f \in \mathbf{Lip}([a, b])$ 是表示存在 $L > 0$ 使得 $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ 对任意 $x, y \in [a, b]$ 都成立. 从而

$$\bigvee_T f = \sum_{0 \leq i \leq n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq \sum_{0 \leq i \leq n-1} L|x_{i+1} - x_i| = L(b-a)$$

即 $\bigvee_a^b f \leq L(b-a)$.

(5) 如果 f' 在 $[a, b]$ 上有界, 则根据 (4) 得到 $f \in \mathbf{BV}([a, b])$.

(6) 若对任意 $x \in [a, b]$ 有

$$f(x) = c + \int_a^x \varphi(t) dt, \quad |\varphi| \in R([a, b]),$$

则 $f \in \mathbf{BV}([a, b])$ 且

$$\bigvee_a^b f \leq \int_a^b |\varphi(t)| dt.$$

事实上,

$$\bigvee_T f = \sum_{0 \leq i \leq n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \sum_{0 \leq i \leq n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(t) dt \right| \leq \int_a^b |\varphi(t)| dt.$$

定理13.2.6. 假设 $a, b \in \mathbb{R}$ 和 $a < b$.

(1) $\mathbf{BV}([a, b]) \subset B([a, b])$, 即 $[a, b]$ 上的有界函数构成的集合.

(2) $f, g \in \mathbf{BV}([a, b]) \Rightarrow f \pm g \in \mathbf{BV}([a, b])$.

(3) $f, g \in \mathbf{BV}([a, b])$ 且 $|g| \geq \sigma > 0 \Rightarrow f/g \in \mathbf{BV}([a, b])$.

(4) 给定 $c \in (a, b)$. 则 $f \in \mathbf{BV}([a, b]) \Leftrightarrow f \in \mathbf{BV}([a, c])$ 和 $f \in \mathbf{BV}([c, b])$. 此时

$$\bigvee_a^b f = \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f.$$

(5) $f \in \mathbf{BV}([a, b]) \Rightarrow g(x) := \bigvee_a^x f$ 在 $[a, b]$ 上有界且递增.

(6) $f \in \mathbf{BV}([a, b]) \Leftrightarrow \exists [a, b]$ 上的有界递增函数 F 满足

$$|f(x) - f(y)| \leq F(x) - F(y), \quad a \leq y < x \leq b.$$

(7) $f \in \mathbf{BV}([a, b]) \Leftrightarrow \exists [a, b]$ 上的有界递增函数 g 和 h 满足 $f = g - h$.

(8) $f \in \mathbf{BV}([a, b])$ 且 f 在 $x_0 \in [a, b]$ 处连续, 则 $\bigvee_a^x f$ 在 x_0 处连续.

(9) $f \in \mathbf{BV}([a, b]) \cap C([a, b]) \Rightarrow \exists [a, b]$ 上的连续递增函数 g 和 h 满足 $f = g - h$.

(10) $f \in \mathbf{BV}([a, b]) \cap C([a, b]) \Rightarrow \forall [a, b]$ 上的分割 T 有

$$\bigvee_a^b f = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{0 \leq i \leq n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|.$$

证: (1) - (3) 和 (10) 是显然的.

(4) 令 $f \in \mathbf{BV}([a, b])$ 和 $c \in (a, b)$. 考虑两个分割

$$T_y : a = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = c, \quad T_z : c = z_0 < z_1 < \cdots < z_n = b.$$

则 $T := T_y \cup T_z$ 构成了 $[a, b]$ 的分割. 从而

$$\bigvee_T f = \sum_{0 \leq i \leq m-1} |f(y_{i+1}) - f(y_i)| + \sum_{0 \leq j \leq n-1} |f(z_{j+1}) - f(z_j)| = \bigvee_{T_y} f + \bigvee_{T_z} f$$

和 $\bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f \leq \bigvee_a^b f$. 另一方面, 假设 $f \in \mathbf{BV}([a, c])$ 和 $f \in \mathbf{BV}([c, b])$. 考虑 $[a, b]$ 上的分割 $T : a < x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. 如果 $c = x_{i_0}$ ($\exists i_0$) 则

$$\bigvee_T f = \sum_{0 \leq i \leq i_0-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + \sum_{i_0 \leq i \leq n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f.$$

如果 $c \neq x_i$ ($\forall 0 \leq i \leq n$), 定义 $T' := T \cup \{c\}$. 则

$$\begin{aligned} \bigvee_{T'} f &= \sum_{0 \leq i \leq i_0-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + |f(c) - f(x_0)| + |f(x_{i_0+1}) - f(c)| \\ &\quad + \sum_{i_0+1 \leq i \leq n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f. \end{aligned}$$

最后得到 $\bigvee_a^b f = \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f$.

(5) $\forall a \leq x < y \leq b$ 有

$$\bigvee_a^y f = \bigvee_a^x f + \bigvee_x^y f.$$

从而得到 $g(y) - g(x) = \bigvee_x^y f \geq 0$, 即 $g(x) \leq \bigvee_a^b f < +\infty$.

(6) 若 $f \in \mathbf{BV}([a, b])$, 定义 $F(x) := \bigvee_a^x f$. 根据 (5), 函数 F 有界递增且

$$F(y) - F(x) = \bigvee_x^y f \geq |f(y) - f(x)|, \quad \forall x < y.$$

反之, 对任意 $[a, b]$ 上的分割 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ 有

$$\bigvee_T f = \sum_{0 \leq i \leq n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq \sum_{0 \leq i \leq n-1} |F(x_{i+1}) - F(x_i)| = F(b) - F(a).$$

(7) 如果 $f \in \mathbf{BV}([a, b])$, 定义 $g(x) := \bigvee_a^x f$. 根据 (5) 函数 g 是有界递增的. 取 $h := g - f$. $\forall x < y$, 有

$$h(y) - h(x) = [g(y) - g(x)] - [f(y) - f(x)] \geq [g(y) - g(x)] - \bigvee_x^y f \geq 0.$$

如果 $f = g - h$, 这里 g, h 都是有界递增的, 则 $F := g + h$ 递增且

$$|f(x) - f(y)| \leq [g(x) - g(y)] + [h(x) - h(y)] = F(x) - F(y), \quad a \leq y < x \leq b.$$

(8) 不失一般性不妨假设 $a < x_0 < b$. $\forall \epsilon > 0 \exists [x_0, b]$ 上的分割 $T: x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 满足

$$\sum_{0 \leq i \leq n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \bigvee_T f \geq \bigvee_{x_0}^b f - \epsilon \quad \text{且} \quad |f(x_1) - f(x_0)| < \epsilon.$$

因此得到

$$\bigvee_{x_0}^b f < \epsilon + \sum_{0 \leq i \leq n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| < 2\epsilon + \sum_{1 \leq i \leq n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq 2\epsilon + \bigvee_{x_1}^b f$$

根据函数 $g(x) := \bigvee_a^x f$ 的定义对任意 $x_1 \searrow x_0$ 有 $g(x_1) - g(x_0) < 2\epsilon$. 特别地 $g(x_0 + 0) = g(x_0)$. 同理可证 $g(x_0 - 0) = g(x_0)$.

(9) 因为 $f \in \mathbf{BV}([a, b]) \cap C([a, b])$, 所以根据 (7) 得到 $f = g - h$, 这里 g, h 都是有界递增的. 根据 (8) 得到 $g \in C([a, b])$ 故 $h \in C([a, b])$. \square

II、Stieltjes 积分. 假设函数 f, g 在闭区间 $[a, b]$ 上有界. 考虑 $[a, b]$ 上的一个分割

$$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \|T\| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i.$$

对任意 $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 定义 **Stieltjes 和** 为

$$S(f, T, \zeta; g) := \sum_{1 \leq i \leq n} f(\zeta_i) \Delta g(x_i), \quad \Delta g(x_i) := g(x_i) - g(x_{i-1}). \quad (13.2.14)$$

类似 Riemann 积分的定义, f 关于 g 的 **Stieltjes 积分** 定义为

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} S(f, T, \zeta; g) \quad (13.2.15)$$

如果极限存在且和分割 T 和点 ζ_i 选择都无关.

- 如果 $g(x) = x$, 则 Stieltjes 积分就是通常的 Riemann 积分.
- 如果 g 递增, 则

$$\int_a^b f(x) dg(x) \text{ 存在} \iff \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{1 \leq i \leq n} \omega(f, \Delta_i) \Delta g(x_i) = 0,$$

这里 $\omega(f, \Delta_i) = M_i - m_i$, $M_i = \sup_{\Delta_i} f$, $m_i = \inf_{\Delta_i} f$, 和 $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$.

定理13.2.7. 如果 $f \in C([a, b])$ 且 $g \in \mathbf{BV}([a, b])$, 则

$$\int_a^b f(x) dg(x)$$

存在.

证: 首先假设 g 是递增的. $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ 满足 $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ 只要 $|x - y| < \delta$. 考虑 $[a, b]$ 上的任意分割 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 使得 $\|T\| < \delta$. 从而

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \omega(f, \Delta_i) \Delta g(x_i) \leq \epsilon \sum_{1 \leq i \leq n} \Delta g(x_i) = [g(b) - g(a)]\epsilon.$$

此时 Stieltjes 积分存在.

对一般的 g , 根据定理13.2.6 作分解 $g = g_1 - g_2$, 这里 g_1, g_2 是有界递增的. 故此时 Stieltjes 积分也存在. \square

推论13.2.8. (1) 如果 $f \in R([a, b])$ 且 $g \in \mathbf{Lip}([a, b])$, 则

$$\int_a^b f(x) dg(x)$$

存在.

(2) $f \in R([a, b])$ 且

$$g(x) = c + \int_a^x \varphi(t) dt, \quad |\varphi| \leq L,$$

则

$$\int_a^b f(x) dg(x)$$

存在.

定理13.2.9. 当Stieltjes积分存在时,下列公式成立:

$$\begin{aligned}\int_a^b dg(x) &= g(b) - g(a), \\ \int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)] dg(x) &= \int_a^b f_1(x) dg(x) \pm \int_a^b f_2(x) dg(x), \\ \int_a^b f(x) d[g_1(x) \pm g_2(x)] &= \int_a^b f(x) dg_1(x) \pm \int_a^b f(x) dg_2(x), \\ \int_a^b kf(x) d[\ell g(x)] &= k\ell \int_a^b f(x) dg(x), \\ \int_a^b f(x) dg(x) &= \int_a^c f(x) dg(x) + \int_c^b f(x) dg(x).\end{aligned}$$

定理13.2.10. (分部积分法) 如果函数 f, g 在 $[a, b]$ 上有界且Stieltjes积分

$$\int_a^b f(x) dg(x)$$

存在, 则

$$\int_a^b f(x) dg(x) = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x) df(x). \quad (13.2.16)$$

证: 作为练习请自证. □

作为简单例子考虑函数

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

注意到 0 是该函数的第一间断点. 假设 $c \in [a, b]$, 函数 f 在 c 处连续, 且 $f \in R([a, b])$. 定义

$$I := \int_a^b f(x) d\rho_c(x), \quad \rho_c(x) := \rho(x - c) = \begin{cases} 0, & x \leq c, \\ 1, & x > c. \end{cases}$$

则 I 存在且

$$\begin{aligned}S &= \sum_{1 \leq i \leq n} f(\xi_i) \Delta \rho_c(x_i) = \left(\sum_{i \neq k} + \sum_{i=k} \right) f(\xi_i) [\rho_c(x_i) - \rho_c(x_{i-1})] \\ &= f(\xi_k) [\rho_c(x_k) - \rho_c(x_{k-1})] = f(\xi_k),\end{aligned}$$

这里 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 是 $[a, b]$ 上的分割且 $x_{k-1} < c < x_k$. 令 $\|T\| \rightarrow 0$ 得到

$$\int_a^b f(x) d\rho_c(x) = f(c), \quad a \leq c < b.$$

此结果可推广到如下形式.

定理13.2.11. (广义分部积分法) 假设 $f \in C([a, b])$, $g \in C([a, b]) \setminus \{c_0, \dots, c_m\}$, 这里 $a = c_0 < \dots < c_m = b$ 是 g 的第一类间断点, $g'(x)$ 除了在有限个点外存在, 且 $|g'| \in R([a, b])$. 则

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dg(x) &= \int_a^b f(x)g'(x)dx \\ &+ \sum_{1 \leq k \leq m-1} f(c_k)[g(c_k+0) - g(c_k-0)] \\ &+ f(a)[g(a+0) - g(a)] + f(b)[g(b) - g(b-0)]. \end{aligned} \quad (13.2.17)$$

证: 作为练习请自证. \square

练习13.2.12. (1) 计算

$$I = \int_{-2}^2 x dg(x), \quad g(x) = \begin{cases} x+2, & -2 \leq x \leq -1, \\ 2, & -1 < x < 1, \\ x^2-1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

(2) 证明定理13.2.13 中的 (1) 和 (2).

定理13.2.13. (1) 假设函数 f 在 $[a, b]$ 上有界, g 递增, 且 Stieltjes 积分

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

存在, 则

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \mu \int_a^b dg(x) = \mu[g(b) - g(a)],$$

这里 $\mu \in [m_f, M_f]$. 当 $f \in C([a, b])$, 我们可以取 $\mu = f(\zeta)$, 这里 $\zeta \in [a, b]$.

(2) 如果 $f \in C([a, b])$ 且 $g \in \mathbf{BV}([a, b])$, 则

$$\left| \int_a^b f(x)dg(x) \right| \leq M \bigvee_a^b g,$$

这里 $M := \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$.

(3) 如果 $(f_n)_{n \geq 1} \subset C([a, b])$, $f_n \rightrightarrows f$ (一致收敛), 且 $g \in \mathbf{BV}([a, b])$, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x)dg(x) = \int_a^b f(x)dg(x).$$

(4) 如果 $f \in C([a, b])$, $(g_n)_{n \geq 1} \subset \mathbf{BV}([a, b])$ 满足 $g_n \rightarrow g$ 和 $\bigvee_a^b g_n \leq V$, 则 $g \in \mathbf{BV}([a, b])$ 且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dg_n(x) = \int_a^b f(x)dg(x).$$

证: (1) 和 (2) 作为练习请自证.

(3) $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ 满足

$$\max_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad n > N.$$

因此

$$\left| \int_a^b f_n(x) dg(x) - \int_a^b f(x) dg(x) \right| \leq \max_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| \bigvee_a^b g \leq \epsilon \bigvee_a^b g, \quad n > N.$$

(4) 考虑 $[a, b]$ 上的任意分割 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$. 则

$$\bigvee_T g_n = \sum_{1 \leq i \leq m} |g_n(x_i) - g_n(x_{i-1})| \leq \bigvee_a^b g_n \leq V.$$

令 $n \rightarrow +\infty$ 得到

$$\sum_{1 \leq i \leq m} |g(x_i) - g(x_{i-1})| \leq V$$

从而 $g \in \mathbf{BV}([a, b])$. 令

$$S := \sum_{1 \leq i \leq m} f(\xi_i) \Delta g(x_i), \quad S_n := \sum_{1 \leq i \leq m} f(\xi_i) \Delta g_n(x_i), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ 只要 $|x - y| < \delta$ 都有 $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. 从而得到

$$\begin{aligned} \left| S_n - \int_a^b f(x) dg_n(x) \right| &= \left| S_n - \sum_{1 \leq i \leq m} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dg_n(x) \right| \\ &\leq \sum_{1 \leq i \leq m} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(\xi_i) - f(x)| dg_n(x) \leq \epsilon \sum_{1 \leq i \leq m} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dg_n(x) \leq \epsilon \bigvee_a^b g_n \leq \epsilon V \end{aligned}$$

同理可证

$$\left| S - \int_a^b f(x) dg(x) \right| \leq \epsilon V.$$

从而 $\exists N \in \mathbb{N}$ 使得 $|S_n - S| < \epsilon, \forall n \geq N$. 最后得到

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dg_n(x) - \int_a^b f(x) dg(x) \right| &\leq \left| \int_a^b f(x) dg_n(x) - S_n \right| + |S_n - S| \\ &+ \left| \int_a^b f(x) dg(x) - S \right| \leq \epsilon V + \epsilon + \epsilon V = (1 + 2V)\epsilon. \quad \square \end{aligned}$$

III、应用. 第一个应用是 Stieltjes 积分和 Riemann 积分的联系. 第二个应用是给出 Euler 常数的余项估计.

定理13.2.14. (Catalan) 假设 $f, g \in C(D)$, 其中 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是有界可求面积的闭区域. 令 $m = \min_D g$, $M := \max_D g$, $\varphi \in C([m, M])$, 和

$$\psi(u) := \iint_{(x,y) \in D, m \leq g(x,y) \leq u} f(x,y) dx dy.$$

则

$$\iint_D f(x,y) \varphi(g(x,y)) dx dy = \int_m^M \varphi(u) d\psi(u). \quad (13.2.18)$$

证: 不失一般性不妨假设 $f > 0$. 选择 $[m, M]$ 上的分割 $T: m = u_0 < u_1 < \dots < u_n = M$. 则

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y) \varphi(g(x,y)) dx dy &= \sum_{1 \leq i \leq n} \iint_{u_{i-1} \leq g \leq u_i} f(x,y) \varphi(g(x,y)) dx dy \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} \varphi(g(\xi_i^*, \eta_i^*)) \iint_{u_{i-1} \leq g \leq u_i} f(x,y) dx dy \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} \varphi(g(\xi_i^*, \eta_i^*)) [\psi(u_i) - \psi(u_{i-1})] \rightarrow \int_m^M \varphi(u) d\psi(u). \quad \square \end{aligned}$$

记号 $[x]$ 表示 x 的整数部分, 从而

$$\langle x \rangle := x - [x]$$

表示 x 的小数部分.

对任给子集 $A \subset \mathbb{N}$ 和 $x > 1$, 定义

$$A(x) := \#\{a \leq x : a \in A\}. \quad (13.2.19)$$

计算可得

$$\int_1^x f(t) dA(t) = \sum_{n \leq x} \int_{n-0}^{n+0} f(t) dA(t) = \sum_{n \leq x, n \in A} f(n).$$

性质13.2.15. (1) 如果 $f \in C([1, x])$, 则

$$\sum_{a \leq x, a \in A} f(x) = \int_1^x f(t) dA(t). \quad (13.2.20)$$

(2) **(Abel 求和公式)** 令 $(a_n)_{n \geq 1}$ 是复数列且 $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$. 对每个实数 $x \geq 1$, 令

$$A(x) := \sum_{n \leq x} a_n$$

并假设 $f(x) \in C^1([1, +\infty))$. 则

$$\sum_{n \leq x} a_n f(x) = A(x) f(x) - \int_1^x A(t) f'(t) dt. \quad (13.2.21)$$

证: (1) 已证.

(2) 首先假设 $x = N \in \mathbb{N}$. 故得到

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} a_n f(n) &= A(1)f(1) + \sum_{2 \leq n \leq N} [A(n) - A(n-1)]f(n) \\ &= A(1)f(1) + \sum_{2 \leq n \leq N} A(n)f(n) - \sum_{1 \leq n \leq N-1} A(n)f(n+1) \\ &= \sum_{1 \leq n \leq N-1} A(n)[f(n) - f(n+1)] + A(N)f(N) \\ &= A(N)f(N) - \sum_{1 \leq i \leq N-1} A(i) \int_i^{i+1} f'(t) dt \\ &= A(N)f(N) - \sum_{1 \leq i \leq N-1} \int_i^{i+1} A(t)f'(t) dt = A(N)f(N) - \int_1^N A(t)f'(t) dt. \end{aligned}$$

对一般的 x 令 $N := [x]$. 因为 $A(t)$ 在区间 $[N, x]$ 上是常数, 所以

$$\begin{aligned} A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f'(t) dt &= A(x)f(x) - \int_N^x A(t)f'(t) dt - \int_1^N A(t)f'(t) dt \\ &= A(x)f(x) - A(N) \int_N^x f'(t) dt - \int_1^N A(t)f'(t) dt \\ &= A(N)f(N) - \int_1^N A(t)f'(t) dt = \sum_{n \leq N} a_n f(n) = \sum_{n \leq x} a_n f(n). \quad \square \end{aligned}$$

第二个应用是给出 Euler 常数的余项估计. 所谓的 **Euler 常数** γ 定义为

$$\gamma := 1 - \int_1^{\infty} \frac{t - [t]}{t^2} dt = 0.57721 \dots \quad (13.2.22)$$

猜想13.2.16. γ 是无理数.

上述著名猜想仍旧是个公开的问题. 接下来我们将会证明由 (13.2.22) 定义的 Euler 常数和之前的定义

$$\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{1 \leq n \leq N} \frac{1}{n} - \ln N \right) \quad (13.2.23)$$

是一样的.

定理13.2.17. 如果 γ 由 (13.2.22) 给出, 则

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \ln x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \geq 1. \quad (13.2.24)$$

证: 在 (13.2.21) 中取 $a_n \equiv 1$ 且 $f(t) = 1/t$ 得到 $A(x) = \sum_{n \leq x} 1 = [x]$ 和

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} &= \frac{[x]}{x} + \int_1^x \frac{[t]}{t^2} dt = 1 - \frac{x - [x]}{x} + \int_1^x \frac{dt}{t} - \int_1^x \frac{t - [t]}{t^2} dt \\ &= 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x - \int_0^\infty \frac{t - [t]}{t^2} dt + \int_x^\infty \frac{t - [t]}{t^2} dt \\ &= \ln x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right) + \int_x^\infty \frac{t - [t]}{t^2} dt \\ &= \ln x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right) + O\left(\int_x^\infty \frac{dt}{t^2}\right) = \ln x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right). \quad \square \end{aligned}$$

性质13.2.18. 令 $a, b \in \mathbb{N}$ 满足 $a < b$ 并令 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $[a, b]$ 上单调. 则存在实数 $\theta = \theta(a, b) \in [0, 1]$ 使得

$$\sum_{a < n \leq b} f(n) = \int_a^b f(t) dt + \theta[f(b) - f(a)]. \quad (13.2.25)$$

证: 在 (13.2.20) 中取 $A = \mathbb{N}$ 则 $A(t) = [t]$ 且

$$\begin{aligned} \sum_{a < n \leq b} f(n) - \int_a^b f(t) dt &= \int_a^b f(t) d[t] - \int_a^b f(t) dt = - \int_a^b f(t) d\langle t \rangle \\ &= [-f(t)\langle t \rangle] \Big|_a^b + \int_a^b \langle t \rangle df(t) = \int_a^b \langle t \rangle df(t). \end{aligned}$$

不失一般性不妨假设 f 递增, 从而根据定理13.2.13 得到

$$\int_a^b \langle t \rangle df(t) = \theta \int_a^b df(t) = \theta[f(b) - f(a)], \quad \exists \theta \in [0, 1]. \quad \square$$

作为直接推论可证 (作为练习请自证)

$$\begin{aligned} \ln(n!) &= (n-1) \ln n + O(\ln n), \\ \sum_{n \leq x} n^\alpha &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + O(x^\alpha), \quad \alpha \geq 0, \\ \sum_{n \leq x} n^\alpha \ln n &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left(\ln x - \frac{1}{\alpha+1} \right) + O(x^\alpha \ln x), \quad \alpha > 0. \end{aligned}$$

当函数 f 递减, 可以把性质13.2.18 加强到如下.

性质13.2.19. 假设函数 $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 连续且递增, 并假设 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, 则存在常数 A 使得

$$\sum_{1 < n \leq x} f(n) = \int_1^x f(t) dt + A + O(f(x)). \quad (13.2.26)$$

证: 给定正整数 N 考虑

$$D(N) := \int_1^N f(t) dt - \sum_{2 \leq n \leq N} f(n) = \sum_{2 \leq n \leq N} \left[\int_{n-1}^n f(t) dt - f(n) \right].$$

因为 $D(N) \geq 0$, 为了证明数列 $(D(N))_{N \geq 1}$ 的收敛性只要验证

$$R(N) := \sum_{n \geq N+1} \left[\int_{n-1}^n f(t) dt - f(n) \right] = O(f(N)).$$

对正整数 M, N 只要满足 $M \geq N + 3$, 利用 f 的递减性, 就有

$$\sum_{N+1 \leq n \leq M-1} f(n) + f(M) \leq \int_N^M f(t) dt \leq f(N) + \sum_{N+1 \leq n \leq M-1} f(n),$$

因此

$$0 \leq \sum_{N+1 \leq n \leq M} \left[\int_{n-1}^n f(t) dt - f(n) \right] \leq f(N) - f(M) \leq f(N)$$

故 $0 \leq R(N) \leq f(N)$. \square

考虑满足如下条件的函数列 $(b_i(x))_{i \geq 0} \subset C([0, 1])$:

$$b_0(x) \equiv 1, \quad b'_i(x) = i b_{i-1}(x), \quad \int_0^1 b_i(x) dx = 0, \quad i \geq 1. \quad (13.2.27)$$

显然 (13.2.27) 已经完全确定这个函数列.

练习13.2.20. 验证

$$\sum_{i \geq 0} b_i(x) \frac{y^i}{i!} = \frac{y e^{xy}}{e^y - 1} = \frac{y}{e^y - 1} \sum_{n \geq 0} \frac{(xy)^n}{n!}. \quad (13.2.28)$$

在 (13.2.28) 中令 $x = 0$ 得到了 **Bernoulli 数** 的定义:

$$\sum_{i \geq 0} B_i \frac{y^i}{i!} = \frac{y}{e^y - 1}. \quad (13.2.29)$$

利用 $e^y - 1 = \sum_{i \geq 1} y^i / i!$ 的 Taylor 级数得到

$$y = (e^y - 1) \sum_{i \geq 0} B_i \frac{y^i}{i!} = \sum_{i \geq 1} \left[\sum_{0 \leq j \leq i-1} \frac{B_j}{(i-j)!} \right] y^i$$

从而

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad b_i(x) = \sum_{0 \leq j \leq i} \binom{i}{j} B_j x^{i-j}. \quad (13.2.30)$$

易证 $B_i = 0, i \geq 3$.

把定义在 $[0, 1)$ 上的函数 $b_i(x)$ 作周期为 1 的周期延拓, 我们就得到了定义在 \mathbb{R} 上的第 i 个 **Bernoulli 函数** $B_i(x)$ (i -th Bernoulli function). 注意到 $B_i(0) = B_i$.

定理13.2.21. (Euler-Maclaurin 求和公式) 对任何非负整数 k 和任意函数 $f \in C^{k+1}([a, b])$, 其中 $a, b \in \mathbb{Z}$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{a < n \leq b} f(n) &= \int_a^b f(x) dx + \sum_{0 \leq i \leq k} \frac{(-1)^{i+1} B_{i+1}}{(i+1)!} [f^{(i)}(b) - f^{(i)}(a)] \\ &\quad + \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \int_a^b B_{k+1}(x) f^{(k+1)}(x) dx. \end{aligned} \quad (13.2.31)$$

证: 在这里只给出 $k=1$ 时的证明. 回顾

$$\sum_{a < n \leq b} f(n) = \int_a^b f(t) d[t] = \int_a^b f(t) dt - \int_a^b f(t) d\langle t \rangle.$$

因为 $b_1(x) = x - \frac{1}{2}$, 所以 $B_1(x) = \langle x \rangle - \frac{1}{2}$ 对任何 $x \in \mathbb{R}$ 都成立从而 $B_1(n) = -\frac{1}{2} = B_1$ 对任何 $n \in \mathbb{Z}$ 都成立. 进一步可证

$$B'_i = iB_{i-1}, \quad B_2(t) \in C(\mathbb{R}), \quad B'_2(t) \text{ 存在 } (t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}), \quad B'_i(t) \text{ 存在 } (i \geq 3).$$

故

$$\begin{aligned} \sum_{a < n \leq b} f(n) &= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(t) dB_1(t) \\ &= \int_a^b f(t) dt - B_1(t)f(t) \Big|_a^b + \int_a^b B_1(t)f'(t) dt \\ &= \int_a^b f(t) dt - B_1[f(b) - f(a)] + \frac{1}{2} \int_a^b f'(t) dB_2(t) \\ &= \int_a^b f(t) dt - B_1[f(b) - f(a)] + \frac{1}{2} \left\{ B_2[f'(b) - f'(a)] - \int_a^b B_2(t)f''(t) dt \right\}. \end{aligned}$$

这里用到了 $B_2(n) = B_2, \forall n \in \mathbb{Z}$. \square

性质13.2.22. 假设 $0 < y < x$ 且 $f \in C^1([y, x])$. 则

$$\sum_{y < n \leq x} f(n) = \int_y^x f(t) dt + \int_y^x \langle t \rangle f'(t) dt - \langle t \rangle f(t) \Big|_y^x. \quad (13.2.32)$$

证: 令 $a = \lfloor y \rfloor$ 和 $b = \lfloor x \rfloor$, 并记

$$I := \int_y^x \langle t \rangle f'(t) dt = \left(\int_{a+1}^b + \int_b^x + \int_y^{a+1} \right) \langle t \rangle f'(t) dt = I_1 + I_2 + I_3.$$

计算可得

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{a+1}^b (t - [t]) f'(t) dt = \sum_{a+1 \leq k \leq b-1} \int_k^{k+1} (t - k) f'(t) dt \\ &= \sum_{a+1 \leq k \leq b-1} \left[t f(t) \Big|_k^{k+1} - \int_k^{k+1} f(t) dt \right] - \sum_{a+1 \leq k \leq b-1} k [f(k+1) - f(k)] \end{aligned}$$

$$= \sum_{a+1 \leq k \leq b-1} f(k+1) - \int_{a+1}^b f(t) dt = \sum_{a+2 \leq k \leq b} f(k) - \int_{a+1}^b f(t) dt.$$

类似地得到

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_b^x (t - [t])f'(t) dt = \int_a^x (t - b)f'(t) dt \\ &= tf(t) \Big|_b^x - \int_b^x f(t) dt - b[f(x) - f(b)] = \langle x \rangle f(x) - \int_b^x f(t) dt, \\ I_3 &= -\langle y \rangle f(y) - \int_y^{a+1} f(t) dt + f(a+1). \end{aligned}$$

加起来有

$$I = \sum_{a+2 \leq k \leq b} f(k) + \langle t \rangle f(t) \Big|_y^x - \int_y^x f(t) dt + f(a+1). \quad \square$$

在 (13.2.32) 中令 $f(t) = 1/t$ 得到

$$\sum_{1 < n \leq x} \frac{1}{n} = \int_1^x \frac{dt}{t} - \int_1^x \frac{\langle t \rangle}{t^2} dt - \frac{\langle x \rangle}{x}$$

即

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} - \ln x = 1 - \int_1^x \frac{\langle t \rangle}{t^2} dt - \frac{\langle x \rangle}{x} \implies (13.2.23).$$

推论13.2.23. 对任意 $n \geq 1$, 有

$$\sum_{m \leq n} \frac{1}{m} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{\theta_n}{60n^4}, \quad (13.2.33)$$

这里常数 $\theta_n \in [0, 1]$.

证: 在 (13.2.31) 中取 $f(t) = 1/t$, $a = 1$, $b = n$, 且 $k = 3$. 计算得到

$$\begin{aligned} \sum_{2 \leq m \leq n} \frac{1}{m} &= \int_1^n \frac{dt}{t} + \frac{-B_1}{1!} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) + \frac{B_2}{2!} \left(-\frac{1}{n^2} + 1 \right) + \frac{-B_3}{3!} \left(\frac{2}{n^3} - \frac{2}{1} \right) \\ &\quad + \frac{B_4}{4!} \left(\frac{-6}{n^4} + 6 \right) + \frac{-1}{4!} \int_1^n B_4(t) \frac{24}{t^5} dt \\ &= \ln n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) - \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n^2} - 1 \right) + \frac{1}{120} \left(\frac{1}{n^4} - 1 \right) - \int_1^n \frac{B_4(t)}{t^5} dt. \end{aligned}$$

即

$$\sum_{m \leq n} \frac{1}{m} - \ln n = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} - \frac{1}{120} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \int_1^n \frac{B_4(t)}{t^5} dt.$$

令 $n \rightarrow +\infty$ 得到

$$\gamma = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} - \frac{1}{120} - \int_1^{\infty} \frac{B_4(t)}{t^5} dt \quad (13.2.34)$$

和

$$\sum_{m \leq n} \frac{1}{m} = \gamma + \ln n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} + \int_n^{\infty} \frac{B_4(t)}{t^5} dt.$$

由于 $|B_4(t)| \leq \frac{1}{30}$, 得到

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m \leq n} \frac{1}{m} - \gamma - \ln n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} \right| &\leq \frac{1}{120n^4} + \int_n^{\infty} \frac{|B_4(t)|}{t^5} dt \\ &\leq \frac{1}{120n^4} + \frac{1}{30} \int_n^{\infty} \frac{dt}{t^5} = \frac{1}{60n^4}. \quad \square \end{aligned}$$

公式 (13.2.34) 可推广到

$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{2 \leq i \leq k} \frac{B_i}{i} - \int_1^{\infty} \frac{B_k(t)}{t^{k+1}} dt, \quad k \geq 0. \quad (13.2.35)$$

§13.3 重积分的变量替换

回顾定积分的变量替换公式

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

这里 $\varphi(t) \in C^1([\alpha, \beta])$ 且单调. 特别地

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi'(t) dt = b - a = [a, b] \text{ 长度,}$$

这里 $a = \varphi(\alpha)$ 和 $b = \varphi(\beta)$.

假设有二重积分的变量替换公式:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\bar{D}} f(x(u, v), y(u, v)) \left[? \right] du dv.$$

如果上述公式成立并取 $f \equiv 1$, 得到

$$\iint_{\bar{D}} \left[? \right] du dv = \iint_D dx dy = |D|.$$

§13.3.1 二重积分的变量替换

几何直观性. 假设

- (i) $D \subset \mathbf{R}^2$ 是有界可求面积的闭区域, $\mathbf{T}: D \rightarrow \Omega$ 是 C^1 -微分同胚 (即 \mathbf{T} 是 C^1 且逆映射存在并也是 C^1) 且 $\Omega = \mathbf{T}(D)$. 记 $\mathbf{T}(u, v) := (x(u, v), y(u, v))$.

(ii) \mathbf{T} 的 Jacobi 矩阵

$$\mathbf{Jac}(\mathbf{T}) := \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix}, \quad \det(\mathbf{T}) := |\mathbf{Jac}(\mathbf{T})|$$

对任意 $(u, v) \in D$ 都是非奇异的. 因此 $\mathcal{J}_{\mathbf{T}} := |\det(\mathbf{T})|$ 在 D 上总是正的.

$\forall (u_0, v_0) \in D$ 且 $\Delta u, \Delta v \ll 1$, 考虑 Ω 中的 4 个点:

$$\begin{aligned} P_1 &= (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)) = (x_0, y_0), \\ P_2 &= (x(u_0 + \Delta u, v_0), y(u_0 + \Delta u, v_0)) \\ &\approx (x_0 + x_u(u_0, v_0)\Delta u, y_0 + x_v(u_0, v_0)\Delta u), \\ P_3 &= (x(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v), y(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)), \\ P_4 &= (x(u_0, v_0 + \Delta v), y(u_0, v_0 + \Delta v)). \end{aligned}$$

“长方形” $P_1P_2P_3P_4$ 的面积近似为

$$\begin{vmatrix} x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} \Delta u \Delta v = \mathcal{J}_{\mathbf{T}}(u_0, v_0) \Delta u \Delta v.$$

从而

$$\iint_D f(x(u, v), y(u, v)) \mathcal{J}_{\mathbf{T}}(u, v) du dv \quad “=” \quad \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy.$$

等价地

$$\iint_{\mathbf{T}(D)} f(x, y) dx dy \quad “=” \quad \iint_D (f \circ \mathbf{T}) \mathcal{J}_{\mathbf{T}}(u, v) du dv$$

or

$$\iint_{\mathbf{T}(D)} f \quad “=” \quad \int_D (f \circ \mathbf{T}) \mathcal{J}_{\mathbf{T}}$$

定理13.3.1. (二重积分变量替换) 假设 $D \subset \mathbf{R}^2$ 是具有分段光滑边界 ∂D 的有界闭区域, 并假设 $D \subset \tilde{D}$, 这里 \tilde{D} 是 \mathbf{R}^2 中的区域. 假设 $\mathbf{T}: \tilde{D} \rightarrow \tilde{\Omega} = \mathbf{T}(\tilde{D})$ 是 C^1 -微分同胚并满足 $\mathcal{J}_{\mathbf{T}}$ 在 \tilde{D} 上处处大于 0. 则

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_D f(x(u, v), y(u, v)) \mathcal{J}_{\mathbf{T}}(u, v) du dv \quad (13.3.1)$$

or

$$\iint_{\mathbf{T}(D)} f = \iint_D (f \circ \mathbf{T}) \mathcal{J}_{\mathbf{T}}. \quad (13.3.2)$$

证: 因为 D 有界故存在闭矩形 $\square := [a, b] \times [c, d]$ 包含 D . 把 $[a, b]$ 和 $[c, d]$ 分成等长的 2^n 个子区间,

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_M = b, \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_M = d, \quad M := 2^n.$$

记

$$\square_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad 1 \leq i, j \leq M$$

并令

$$A_n := \{\square_{ij} : \square_{ij} \subset D\}, \quad B_n := \{\square_{ij} : \square_{ij} \cap D \neq \emptyset\}, \quad C_n := B_n \setminus \text{Int}(A_n).$$

注意到

$$\cdots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \cdots \subset D \subset \cdots \subset B_{n+1} \subset B_n \subset \cdots$$

和

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |A_n| = |D| = \lim_{n \rightarrow \infty} |B_n|$$

这是因为 D 是可求面积的. 选择充分大的 $n \gg 1$ 使得 $B_n \subset \tilde{D}$. 首先考虑两类特殊的 \mathbf{T} :

(i) 情形 1: $\mathbf{T}(u, v) = (u, y(u, v))$,

(ii) 情形 2: $\mathbf{T}(u, v) := (x(u, v), v)$.

步骤 1: 假设 \mathbf{T} 是情形 1 或情形 2. 此时对任意 $\square \in B_n$, 有

$$|\mathbf{T}(\square)| = \mathcal{J}_{\mathbf{T}}(\bar{u}, \bar{v})|\square|$$

其中 $(\bar{u}, \bar{v}) \in \square$. 不妨假设 \mathbf{T} 是情形 1, 即, $\mathbf{T}(u, v) = (u, y(u, v))$ 其中 y 是 C^1 的. 在 U 上有 $\mathcal{J}_{\mathbf{T}} > 0$ 从而

$$0 < \mathcal{J}_{\mathbf{T}} = \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \right| = \left| \frac{\partial y}{\partial v} \right|.$$

不失一般性不妨假设 $\frac{\partial y}{\partial v} > 0$ 在 U 上. 如果 $\square = [a_{\square}, b_{\square}] \times [c_{\square}, d_{\square}]$, 则 $y(u, \cdot)$ 对固定的 $u \in [a_{\square}, b_{\square}]$ 是递增的. 因此

$$\mathbf{T}(\square) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a_{\square} \leq x \leq b_{\square}, y(x, c_{\square}) \leq y \leq y(x, d_{\square}) \right\}$$

这是 x -型区域. 利用定积分第一中值定理计算得到

$$\begin{aligned} |\mathbf{T}(\square)| &= \int_{a_{\square}}^{b_{\square}} dx \int_{y(x, c_{\square})}^{y(x, d_{\square})} dy = \int_{a_{\square}}^{b_{\square}} [y(x, d_{\square}) - y(x, c_{\square})] dx \\ &= [y(\bar{x}, d_{\square}) - y(\bar{x}, c_{\square})] (b_{\square} - a_{\square}) \end{aligned}$$

这里 $\bar{x} \in [a_{\square}, b_{\square}]$. 根据中值定理得到

$$|\mathbf{T}(\square)| = \frac{\partial y}{\partial v}(\bar{u}, \bar{v})(d_{\square} - c_{\square})(b_{\square} - a_{\square}) = \mathcal{J}_{\mathbf{T}}(\bar{u}, \bar{v})|\square|$$

这里 $\bar{v} \in [c_{\square}, d_{\square}]$.

步骤 2: 假设 \mathbf{T} 是情形 1 或情形 2. 如果 $f \in C(\Omega)$, 则

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_D f \circ \mathbf{T}(u, v) \mathcal{J}_{\mathbf{T}}(u, v) du dv.$$

记 $H := \max_{\Omega} |f|$. 因为存在自然数 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $B_n \subset \tilde{D}$ 对任何 $n \geq N$ 都成立, 所以 $\max_{B_n} \mathcal{J}_{\mathbf{T}} \leq K$ 对某个 $K > 0$ (和 n 无关) 和任何 $n \geq N$ 都成立. 步骤 1 推出 $|\mathbf{T}(C_n)| \leq K|C_n|$ 对任何 $n \geq N$ 都成立, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathbf{T}(C_n)| = 0$. 记 $D_{ij} := D \cap \square_{ij}$. 对任意 $(u_{ij}, v_{ij}) \in \square_{ij}$ 令 $\xi_{ij} = x(u_{ij}, v_{ij})$ 和 $\eta_{ij} = y(u_{ij}, v_{ij})$. 此时

$$\sum_{D_{ij}} f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) |\mathbf{T}(D_{ij})| = \left(\sum_{D_{ij} \subset A_n} + \sum_{D_{ij} \subset D \setminus \text{Int}(A_n)} \right) f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) |\mathbf{T}(D_{ij})| = I + J.$$

若 $D_{ij} \subset A_n$ 则 $D_{ij} = \square_{ij}$ 且

$$|\mathbf{T}(\square_{ij})| = \mathcal{J}_{\mathbf{T}}(\bar{u}_{ij}, \bar{v}_{ij}) |\square_{ij}|$$

这里 $(\bar{u}_{ij}, \bar{v}_{ij}) \in \square_{ij}$. 故

$$\begin{aligned} I &= \sum_{\square_{ij} \subset A_n} f(\bar{\xi}_{ij}, \bar{\eta}_{ij}) |\mathbf{T}(\square_{ij})| = \sum_{\square_{ij} \subset A_n} f(\bar{\xi}_{ij}, \bar{\eta}_{ij}) \mathcal{J}_{\mathbf{T}}(\bar{u}_{ij}, \bar{v}_{ij}) |\square_{ij}| \\ &= \sum_{\square_{ij} \subset A_n} f \circ \mathbf{T}(\bar{u}_{ij}, \bar{v}_{ij}) \mathcal{J}_{\mathbf{T}}(\bar{u}_{ij}, \bar{v}_{ij}) |\square_{ij}|. \end{aligned}$$

若 $D_{ij} \subset D \setminus \text{Int}(A_n)$ 取任意 $(\bar{u}_{ij}, \bar{v}_{ij}) \in D_{ij}$ 从而

$$\begin{aligned} J &= \sum_{D_{ij} \subset D \setminus \text{Int}(A_n)} f(\bar{\xi}_{ij}, \bar{\eta}_{ij}) |\mathbf{T}(D_{ij})| \\ &= \sum_{D_{ij} \subset D \setminus \text{Int}(A_n)} f \circ \mathbf{T}(\bar{u}_{ij}, \bar{v}_{ij}) \mathcal{J}_{\mathbf{T}}(\bar{u}_{ij}, \bar{v}_{ij}) |D_{ij}| \\ &+ \sum_{D_{ij} \subset D \setminus \text{Int}(A_n)} [f(\bar{\xi}_{ij}, \bar{\eta}_{ij}) |\mathbf{T}(D_{ij})| - f \circ \mathbf{T}(\bar{u}_{ij}, \bar{v}_{ij}) \mathcal{J}_{\mathbf{T}}(\bar{u}_{ij}, \bar{v}_{ij}) |D_{ij}|]. \end{aligned}$$

因为 $D \setminus \text{Int}(A_n) \subset C_n$, 所以

$$\begin{aligned} \left| \sum_{D_{ij} \subset D \setminus \text{Int}(A_n)} f(\bar{\xi}_{ij}, \bar{\eta}_{ij}) |\mathbf{T}(D_{ij})| \right| &\leq H \sum_{D_{ij} \subset D \setminus \text{Int}(A_n)} |\mathbf{T}(D_{ij})| \\ &\leq H |\mathbf{T}(C_n)| \leq HK |C_n| \end{aligned}$$

和

$$\left| \sum_{D_{ij} \subset D \setminus \text{Int}(A_n)} f \circ \mathbf{T}(\bar{u}_{ij}, \bar{v}_{ij}) \mathcal{J}_{\mathbf{T}}(\bar{u}_{ij}, \bar{v}_{ij}) |D_{ij}| \right| \leq HK |C_n|.$$

即得到

$$\left| \sum_{D_{ij} \subset D \setminus \text{Int}(A_n)} [f(\bar{\xi}_{ij}, \bar{\eta}_{ij}) |\mathbf{T}(D_{ij})| - f \circ \mathbf{T}(\bar{u}_{ij}, \bar{v}_{ij}) \mathcal{J}_{\mathbf{T}}(\bar{u}_{ij}, \bar{v}_{ij}) |D_{ij}|] \right| \leq 2HK|C_n| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

由于 f 在 Ω 上可积, 我们得到

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy &\leftarrow \sum_{D_{ij}} f(\bar{\xi}_{ij}, \bar{\eta}_{ij}) |\mathbf{T}(D_{ij})| \rightarrow \sum_{D_{ij}} f \circ \mathbf{T}(\bar{u}_{ij}, \bar{v}_{ij}) \mathcal{J}_{\mathbf{T}}(\bar{u}_{ij}, \bar{v}_{ij}) |D_{ij}| \\ &\rightarrow \iint_D f \circ \mathbf{T}(u, v) \mathcal{J}_{\mathbf{T}}(u, v) du dv. \end{aligned}$$

步骤 3: 在任给 $(u_0, v_0) \in U$ 的某个邻域内有 $\mathbf{T} = \mathbf{T}_2 \circ \mathbf{T}_1$, 这里 $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ 都是 C^1 -微分同胚且 \mathbf{T}_i 是情形 1 或情形 2. 因为 $\mathcal{J}_{\mathbf{T}}(u_0, v_0) = |\det(\mathbf{T})(u_0, v_0)| > 0$, 故 x_u, y_u, x_v, y_v 中至少有一个在 (u_0, v_0) 处非零. 不妨假设 $\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) \neq 0$. 考虑映射 $\mathbf{T}(u, v) = (x(u, v), y(u, v)), (u, v) \in U$, 和

$$\mathbf{T}_1(u, v) := (x(u, v), v)$$

这是情形 2 中的映射. 因为在 (u_0, v_0) 处

$$\det(\mathbf{T}_1) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \neq 0$$

根据隐函数定理, 定理 12.4.6, 存在邻域 U_0, Ω_0 满足 $U \supset U_0 \ni (u_0, v_0), \Omega \supset \Omega_0 \ni (x(u_0, v_0), v_0), g \in C^1(\Omega_0)$, 且映射

$$\mathbf{T}_1 : D_0 \rightarrow \Omega_0, \quad (u, v) \mapsto (\zeta, \eta)$$

是 C^1 -微分同胚的, 并且进一步有, $\mathbf{T}_1^{-1}(\zeta, \eta) = (g(\zeta, \eta), \eta)$. 特别地, 我们有

$$g(x(u, v), v) = u$$

对任何 $(u, v) \in U_0$ 都成立. 定义

$$\mathbf{T}_2(\zeta, \eta) := (\zeta, y(g(\zeta, \eta), \eta))$$

这是情形 1 中的映射. 故得到

$$\mathbf{T}_2 \circ \mathbf{T}_1(u, v) = \mathbf{T}_2(x(u, v), v) = (x(u, v), y(g(x(u, v), v), v)) = (x(u, v), y(u, v))$$

对任何 $(u, v) \in U_0$ 都成立.

步骤 4: 证明 (13.3.1). 步骤 3 意味着对任何 $(u, v) \in D$, 存在领域 $D_\delta(u, v)$ (其中 δ 依赖于 (u, v)) 使得 $\mathbf{T} = \mathbf{T}_2 \circ \mathbf{T}_1$ 在 $D_\delta(u, v)$ 上成立, 这里 $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ 是上

述定义的映射. 由于 $(D_{\delta/2}(u, v))_{(u, v) \in D}$ 是 D 的开覆盖而且 D 是紧的 (因为 D 是 \mathbf{R}^2 中的有界闭集), 故存在 D 的有限子覆盖 $(D_{\delta_i/2}(u_i, v_i))_{1 \leq i \leq N}$, $N \in \mathbf{N}$. 令 $\delta := \min_{1 \leq i \leq N} \delta_i/2$. 选择 n 充分大使得对任意矩形 $\square_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ 都有 $\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2} < \delta$. 对任意 $\square_{ij} \cap \text{Int}(D) \neq \emptyset$, 可找到自然数 $1 \leq k \leq N$ 满足 $D_{ij} := \square_{ij} \cap D \subset \square_{ij} \subset D_{\delta_k}(u_k, v_k)$. 从而在 D_{ij} 内有 $\mathbf{T} = \mathbf{T}_2^{ij} \circ \mathbf{T}_1^{ij}$. 记

$$\mathbf{T}_1^{ij}(u, v) := (\zeta(u, v), \eta(u, v)), \quad \mathbf{T}_2^{ij}(u, v) := (x(\zeta, \eta), y(\zeta, \eta)).$$

步骤 2 推出

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy &= \sum_{1 \leq i, j \leq M} \iint_{\mathbf{T}(D_{ij})} f(x, y) dx dy \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq M} \iint_{\mathbf{T}_2^{ij}(\mathbf{T}_1^{ij}(D_{ij}))} f(x, y) dx dy \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq M} \iint_{\mathbf{T}_1^{ij}(D_{ij})} f \circ \mathbf{T}_2^{ij}(\zeta, \eta) \mathcal{J}_{\mathbf{T}_2^{ij}}(\zeta, \eta) d\zeta d\eta \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq M} \iint_{D_{ij}} f \circ \mathbf{T}_2^{ij} \circ \mathbf{T}_1^{ij}(u, v) \mathcal{J}_{\mathbf{T}_2^{ij} \circ \mathbf{T}_1^{ij}}(u, v) \mathcal{J}_{\mathbf{T}_1^{ij}}(u, v) dudv. \end{aligned}$$

根据链式法则得到

$$\mathcal{J}_{\mathbf{T}}(u, v) = \mathcal{J}_{\mathbf{T}_2^{ij} \circ \mathbf{T}_1^{ij}}(u, v) = \left(\mathcal{J}_{\mathbf{T}_2^{ij}} \circ \mathbf{T}_1^{ij}(u, v) \right) \mathcal{J}_{\mathbf{T}_1^{ij}}(u, v)$$

从而

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy &= \sum_{1 \leq i, j \leq M} \iint_{D_{ij}} f \circ \mathbf{T}(u, v) \mathcal{J}_{\mathbf{T}}(u, v) dudv \\ &= \iint_{\mathbf{T}} f \circ \mathbf{T}(u, v) \mathcal{J}_{\mathbf{T}}(u, v) dudv. \quad \square \end{aligned}$$

§13.3.2 n 重积分的变量替换

定理13.3.1 可推广到 n 为情形.

定理13.3.2. (n 重积分变量替换) 假设 $U, V \subset \mathbf{R}^n$ 是开集且 $\mathbf{T}: U \rightarrow V$ 是 C^1 -微分同胚满足 $\mathbf{T}(x) = y$. 对任何具有分段光滑边界的有界闭区域 $D \subset U$ 和任何 $f \in C(\mathbf{T}(D))$ 有

$$\int_{\mathbf{T}(D)} f(y) dy = \int_D f \circ \mathbf{T}(x) \mathcal{J}_{\mathbf{T}}(x) dx. \quad (13.3.3)$$

考虑 2 维极坐标(polar coordinates) 变换

$$\begin{aligned} \mathbf{T}: [0, R] \times [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{D}_R^2 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\} \\ (r, \theta) &\longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta), \end{aligned} \quad (13.3.4)$$

此时

$$\mathcal{J}_{\mathbf{T}} = \left| \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} \right| = r.$$

但 $\mathbf{T}(\{0\} \times [0, 2\pi]) = \{(0, 0)\}$, 因此定理13.3.1 不适用. 但只要先把原点和 x 正轴去掉 (考虑 $\epsilon \leq r \leq R$ 和 $\epsilon \leq \theta \leq 2\pi - \theta$), 再应用定理13.3.1, 最后令 $\epsilon \rightarrow 0+$.

- 如果原点在区域 D 外且 D 可表示成

$$D = \{(r, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \mid \varphi(\theta) \leq r \leq \psi(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\},$$

则 (13.3.1) 可化简为

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\varphi(\theta)}^{\psi(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr. \quad (13.3.5)$$

- 如果原点包含在区域 D 内, 此时

$$D = \{(r, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \mid 0 \leq r \leq \psi(\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

则 (13.3.1) 可化简为

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\psi(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr. \quad (13.3.6)$$

- 如果原点在 D 的边界上, 此时

$$D = \{(r, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \mid 0 \leq r \leq \psi(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\},$$

则 (13.3.1) 可化简为

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_0^{\psi(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr. \quad (13.3.7)$$

例13.3.3. 计算二重积分

$$I := \iint_{\Omega} dx dy, \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

解: 考虑区域 $D = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. 则得到

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr = 2\pi \int_0^1 r dr = \pi. \quad \square$$

考虑 3 维柱面坐标(cylinder coordinates) 变换

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ (r, \theta, z) &\longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, z), \end{aligned} \quad (13.3.8)$$

此时

$$\mathcal{J}_{\mathbf{T}}(r, \theta, z) = r.$$

例13.3.4. 计算三重积分

$$I := \iiint_{\Omega} dx dy dz, \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq z \leq 25 - x^2 - y^2\}.$$

解: 令 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$, 这里 $0 \leq r \leq 5$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, 且 $D = \{(r, \theta, z) : 0 \leq r \leq 5, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 25 - r^2\}$. 则得到

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D r dr d\theta dz = \int_0^5 r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{25-r^2} dz = 2\pi \int_0^5 r(25-r^2) dr \\ &= \pi \int_0^5 (25-r^2) dr^2 = -\frac{\pi}{2} (r^2-25)^2 \Big|_0^5 = \frac{625}{2} \pi. \quad \square \end{aligned}$$

3 维球面坐标(spherical coordinates) 定义为

$$x = r \sin \varphi \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \varphi \quad (13.3.9)$$

这里 $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, 和 $0 \leq \theta \leq 2\pi$. 定义映射 \mathbf{T} 为

$$\mathbf{T}(r, \varphi, \theta) = (r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) \quad (13.3.10)$$

这里 $\mathcal{J}_{\mathbf{T}}(r, \varphi, \theta) = r^2 \sin \varphi$.

例13.3.5. 计算三重积分

$$I := \iiint_{\Omega} dx dy dz, \quad \Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

这里 $a, b, c > 0$.

解: 令 $x = ar \sin \varphi \cos \theta$, $y = br \sin \varphi \sin \theta$, 和 $z = cr \cos \varphi$. 则得到

$$I = \int_0^1 dr \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} abc r^2 \sin \varphi d\theta = \frac{abc}{3} 2\pi \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi = \frac{4\pi}{3} abc. \quad \square$$

一般地引入 n 维球面坐标 (nD spherical coordinates):

$$\begin{aligned} x^1 &= r \cos \varphi_1, \\ x^2 &= r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ x_3 &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3, \\ &\dots\dots\dots \\ x^{n-1} &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1}, \\ x^n &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1}, \end{aligned} \quad (13.3.11)$$

这里 $0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-2} \leq \pi$, 和 $0 \leq \varphi_{n-1} \leq 2\pi$. 定义映射 \mathbf{T} 为

$$\mathbf{T}(r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}) = (x^1, x^2, \dots, x^n) \quad (13.3.12)$$

根据 (13.3.11) 得到

$$\mathcal{J}_{\mathbf{T}}(r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}) = r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2}.$$

例13.3.6. 计算 n 重积分

$$I := \int_{\mathbb{B}_R^n(\mathbf{0})} dx, \quad R > 0.$$

解: 利用 (13.3.11) 得到

$$\begin{aligned} I &= \int_0^R dr \int_0^\pi d\varphi_1 \cdots \int_0^\pi d\varphi_{n-2} \int_0^{2\pi} r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} d\varphi_{n-1} \\ &= \frac{2\pi R^n}{n} \prod_{1 \leq i \leq n-2} \int_0^\pi \sin^{n-1-i} \varphi_i d\varphi_i. \end{aligned}$$

对定积分

$$J_k := \int_0^\pi \sin^k \varphi d\varphi = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^k \varphi d\varphi$$

我们已证

$$J_k = \begin{cases} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \pi, & k = 2m, \\ \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} 2, & k = 2m+1. \end{cases}$$

故 $I = (2\pi)^k R^{2k} / (2k)!!$ ($n = 2k$) 和 $I = 2(2\pi)^k R^{2k+1} / (2k+1)!!$ ($n = 2k+1$).

□

例13.3.7. 证明不等式

$$2\pi(\sqrt{17}-4) \leq I := \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{\sqrt{16 + \sin^2 x + \sin^2 y}} \leq \frac{\pi}{4}.$$

证: 令

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

则

$$\begin{aligned} I &\leq \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{1}{4} dx dy = \frac{\pi}{4}, \\ I &\geq \int_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{16 + x^2 + y^2} = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} \frac{rd\theta}{\sqrt{16 + r^2}} \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{rdr}{\sqrt{16 + r^2}} = 2\pi \sqrt{16 + r^2} \Big|_0^1 = 2\pi(\sqrt{17}-4). \quad \square \end{aligned}$$

练习13.3.8. 如果 $f \in C([-1, 1])$, 证明

$$\iint_{|x|+|y|\leq 1} f(x+y) dx dy = \int_{-1}^1 f(u) du.$$

例13.3.9. (1) 计算二重积分

$$I_A := \iint_{x^2+y^2\leq A^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy, \quad A > 0. \quad (13.3.13)$$

解: 令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, 0 \leq r \leq A$, 和 $0 \leq \theta \leq 2\pi$. 得到

$$I_A = \int_0^A dr \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\theta = 2\pi \int_0^A r e^{-r^2} dr = \pi (1 - e^{-A^2}).$$

考虑

$$\left(\int_{-A}^A e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_{-A \leq x, y \leq A} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

由于 $\mathbb{B}_{\sqrt{2}A}^2(\mathbf{0}) \supset \square_A = [-A, A] \times [-A, A] \supset \mathbb{B}_A^2(\mathbf{0})$, 故

$$\sqrt{\pi} (1 - e^{-A^2})^{1/2} = I_A^{1/2} \leq \int_{-A}^A e^{-x^2} dx \leq I_{\sqrt{2}A}^{1/2} = \sqrt{\pi} (1 - e^{-2A^2})^{1/2}.$$

令 $A \rightarrow \infty$ 得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = 1. \quad (13.3.14)$$

一般地我们可证

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\pi^{n/2}} e^{-|x|^2} dx = 1. \quad (13.3.15)$$

(2) 考虑二次型

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x^i x^j = \mathbf{x} A \mathbf{x}^T, \quad \mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n,$$

这里 $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ 是正定 $n \times n$ 矩阵. 计算 n 重积分

$$I_A = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathbf{x} A \mathbf{x}^T} dx \quad (13.3.16)$$

这里 A 是正定 $n \times n$ 矩阵.

解: 存在正交矩阵 $Q \in \mathbf{O}(n)$ 满足

$$A = Q \Lambda Q^T, \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

这里 $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ 是 A 的特征根. 因此

$$\begin{aligned} I_A &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathbf{x} Q \Lambda (xQ)^T} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathbf{y} \Lambda \mathbf{y}^T} d\mathbf{y} \\ &= \prod_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \sqrt{\pi} \right) = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det(A)}}. \quad \square \end{aligned}$$

(3) 计算反常积分

$$I_{a,b,c} = \int_{\mathbb{R}} e^{-(ax^2+2bx+c)} dx, \quad a > 0, b, c \in \mathbb{R}. \quad (13.3.17)$$

解: 作变量替换得到

$$\begin{aligned} I_{a,b,c} &= \int_{\mathbb{R}} e^{-a[(x+\frac{b}{a})^2+\frac{ac-b^2}{a^2}]} dx = e^{\frac{b^2-ac}{a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-a(x+\frac{b}{a})^2} dx \\ &= e^{\frac{b^2-ac}{a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = e^{-\frac{\det(A^*)}{a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \end{aligned}$$

这里 A^* 是矩阵 $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$. \square

一般情形下考虑 n 重积分

$$I_{a_{ij},b_i,c} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}x^i x^j + 2\sum_{1 \leq i \leq n} b_i x^i + c)} dx \quad (13.3.18)$$

这里 $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ 是正定地, $b_1, \dots, b_n, c \in \mathbb{R}$. 记

$$\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n), \quad \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n),$$

从而得到

$$I_{a_{ij},b_i,c} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(\mathbf{x}A\mathbf{x}^T + 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{x} + c)} d\mathbf{x}.$$

解: 和之前一样有 $A = Q\Lambda Q^T$, 这里 $Q \in \mathbf{O}(n)$ 和 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 且 $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$. 故

$$\begin{aligned} \mathbf{x}A\mathbf{x}^T + 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{x} + c &= (\mathbf{x}Q)\Lambda(\mathbf{x}Q)^T + 2\mathbf{b}\mathbf{x}^T + c \\ &= \mathbf{y}\Lambda\mathbf{y}^T + 2\mathbf{b} \cdot (Q^{-1})^T \mathbf{y}^T + c = \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i (y^i)^2 + 2 \sum_{1 \leq i \leq n} \tilde{b}_i y^i + c \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \left(y^i + \frac{\tilde{b}_i}{\lambda_i} \right)^2 + \left(c - \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\tilde{b}_i^2}{\lambda_i} \right) \end{aligned}$$

这里 $\mathbf{y} = \mathbf{x}Q = (y^1, \dots, y^n)$ 和 $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b}(Q^{-1})^T = \mathbf{b}(Q^T)^{-1} = (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n)$. 另一方面对矩阵

$$A^* = \begin{bmatrix} A & \mathbf{b}^T \\ \mathbf{b} & c \end{bmatrix}$$

其行列式为

$$\begin{aligned} \det(A^*) &= \det \begin{bmatrix} A & \mathbf{b}^T \\ 0 & c - \mathbf{b}A^{-1}\mathbf{b}^T \end{bmatrix} \\ &= (c - \mathbf{b}A^{-1}\mathbf{b}^T) \det(A) = \left\{ c - \mathbf{b} \left[(Q^T)^{-1} \Lambda^{-1} Q^{-1} \right] \mathbf{b}^T \right\} \det(A) \end{aligned}$$

$$= (c - \tilde{\mathbf{b}}\Lambda^{-1}\tilde{\mathbf{b}}^T) \det(A) = \left(c - \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\tilde{b}_i^2}{\lambda_i} \right) \det(A).$$

最后得到

$$\mathbf{x}A\mathbf{x}^T + 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{x} + c = \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \left(y^i + \frac{\tilde{b}_i}{\lambda_i} \right)^2 + \frac{\det(A^*)}{\det(A)}$$

这立即推出 $I_{a_{ij}, b_i, c} = \sqrt{\pi^n / \det(A)} \exp[-\det(A^*) / \det(A)]$. \square

(4) 假设函数 $f(r)$ 在 $r=0$ 处可导且 $f(0)=0$, 考虑区域

$$\Omega_t := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2\}, \quad t > 0.$$

求极限

$$I = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^4} \iiint_{\Omega_t} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz =: \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{I_t}{t^4}.$$

解: 考虑映射 $\mathbf{T}(x, y, z) = (x, y, r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$. 则得到

$$\mathcal{J}_{\mathbf{T}} = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} / r$$

且

$$\begin{aligned} I_t &= \int_0^t \iint_{r^2 - t^2 \leq x^2 + y^2 \leq r^2} f(r) \frac{r^2 - (x^2 + y^2)}{r} dr dx dy \\ &= \int_0^t \frac{f(r)}{r} dr \iint_{r^2 - t^2 \leq x^2 + y^2 \leq r^2} \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)} dx dy \\ &= \int_0^t \frac{f(r)}{r} \cdot \frac{2}{3} \pi t^3 dr = \frac{2\pi}{3} t^3 \int_0^t \frac{f(r)}{r} dr \end{aligned}$$

故

$$I = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2\pi}{3} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{f(r)}{r} dr = \frac{2\pi}{3} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} = \frac{2\pi}{3} f'(0). \quad \square$$

§13.4 反常二重积分

如果在 (13.3.13) 中令 $A \rightarrow \infty$ 得到

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \iint_{x^2 + y^2 \leq A^2} e^{-(x^2 + y^2)} dx dy = \pi.$$

从而可以“定义”

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2 + y^2)} dx dy$$

为如下极限

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \iint_{x^2 + y^2 \leq A^2} e^{-(x^2 + y^2)} dx dy.$$

上述例子启发我们如何定义反常二重积分.

§13.4.1 无界区域上的反常二重积分

假设 $D \subset \mathbf{R}^2$ 是无界区域且边界 ∂D 是由有限条光滑曲线所构成. 考虑定义在 D 上的有界函数 f 使得在 D 中的任何可求面积的子区域上是可积的.

定义13.4.1. 函数 f 在 D 上的反常二重积分记为

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{d(\Gamma) \rightarrow \infty} \iint_{D_\Gamma} f(x, y) dx dy$$

其中 $d(\Gamma) := d(\Gamma, \partial D)$, Γ 是 D 中的任何曲线满足 $|\Gamma| = 0$ 并从 D 中切出有界区域 D_Γ . 称函数 f 在 D 上是可积的或反常二重积分是收敛的如果上述极限存在且和 Γ 无关. 否则的话称反常二重积分是发散的.

引理13.4.2. 假设二元函数 $f(x, y)$ 在 D 上是非负的且 $(D_n)_{n \geq 1}$ 是 D 中的递增区域列并满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\Gamma_n) = \infty$, 这里 $(\Gamma_n)_{n \geq 1}$ 是 D 中的曲线列满足 $|\Gamma_n| = 0$ 且每个 Γ_n 切出一个有界区域 D_n . 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

收敛当且仅当

$$\left\{ \iint_{D_n} f(x, y) dx dy \right\}_{n \geq 1}$$

收敛. 此时

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy. \quad (13.4.1)$$

证: 一个方向显然成立. 假设二重积分收敛. 任给 Γ 和 D_Γ 如上, 则存在 $N \in \mathbf{N}$ 使得 $D_\Gamma \subset D_n$ 对任何 $n \gg N$ 都成立. 由于 f 是非负的, 得到

$$\iint_{D_\Gamma} f(x, y) dx dy \leq \iint_{D_n} f(x, y) dx dy \rightarrow I := \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy.$$

另一方面对 $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N}$ 使得

$$\iint_{D_N} f(x, y) dx dy > I - \epsilon$$

成立. 选择零面积曲线 Γ 满足 $D_\Gamma \supset D_N$ 从而得到

$$\iint_{D_\Gamma} f(x, y) dx dy \geq \iint_{D_N} f(x, y) dx dy > I - \epsilon. \quad \square$$

例13.4.3. 计算反常二重积分

$$I = \iint_{x^2+y^2 \geq a^2} \frac{dx dy}{r^p}, \quad r := \sqrt{x^2 + y^2}, \quad a > 0.$$

解: 考察区域 $D_A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq A\}$. 根据引理13.4.2 得到

$$I = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^A \frac{r dr}{r^p} = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{2-p} r^{2-p} \Big|_0^A.$$

从而反常二重积分当 $p > 2$ 时收敛但是当 $p \leq 2$ 时发散. \square

性质13.4.4. 假设 $D \subset \mathbf{R}^2$ 是无界区域且边界 ∂D 是分段光滑的.

(1) 如果在 D 上 $0 \leq f \leq g$, 则

$$\begin{aligned} \iint_D g(x,y) dx dy \text{ 收敛} &\implies \iint_D f(x,y) dx dy \text{ 收敛}, \\ \iint_D f(x,y) dx dy \text{ 发散} &\implies \iint_D g(x,y) dx dy \text{ 发散}. \end{aligned}$$

(2) f 在 D 上收敛若 $|f|$ 在 D 上收敛.

定理13.4.5. (1) 考虑区域 $D = \{(r, \theta) : a \leq r < \infty, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$, 这里 $0 \leq \alpha, \beta \leq 2\pi$ 和 $a > 0$.

$$\begin{aligned} |f(x,y)| \leq \frac{M}{r^p} \quad (p > 2) &\implies \iint_D f(x,y) dx dy \text{ 收敛}, \\ |f(x,y)| \geq \frac{m}{r^p} \quad (p \leq 2) &\implies \iint_D f(x,y) dx dy \text{ 收敛}. \end{aligned}$$

(2) 如果 $f \in C([a, \infty) \times [c, \infty))$ 且

$$\int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x,y) dy \quad \text{和} \quad \int_a^\infty dx \int_c^\infty |f(x,y)| dy$$

都存在, 则 f 在 D 上可积且

$$\iint_{[a, \infty) \times [c, \infty)} f(x,y) dx dy = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x,y) dy.$$

(3) 如果 $\mathbf{T}: D \rightarrow \mathbf{T}(D)$ 是 C^1 -微分同胚且, 这里 D 是 \mathbf{R}^2 中的区域, 则

$$\iint_{\mathbf{T}(D)} d(x,y) dx dy = \iint_D f \circ \mathbf{T}(u,v) \mathcal{J}_{\mathbf{T}}(u,v) du dv$$

只要其中一个反常二重积分存在.

例13.4.6. 计算反常二重积分

$$I = \iint_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

这个积分已经在 (13.3.13) 计算过了. 根据定理13.4.5, 得到

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty e^{-r^2} dr = 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2} dr = \pi.$$

直接推论为

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (13.4.2)$$

若令 $u = x^2$ 则

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty u^{-1/2} e^{-u} du = \frac{1}{2} \int_0^\infty u^{\frac{1}{2}-1} e^{-u} du.$$

定义Gamma函数为

$$\Gamma(s) := \int_0^{\infty} u^{s-1} e^{-u} du, \quad s > 0. \quad (13.4.3)$$

注意到 $\Gamma(s)$ 对任何 $s > 0$ 都有定义. 实际上对任何虚部为正的复数 $s \in \mathbf{C}$, 相应的 Gamma 函数 $\Gamma(s)$ 也是定义的 (这里要用到解析函数的延拓性). 计算

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= \int_0^{\infty} u^n e^{-u} du = \int_0^{\infty} -u^n de^{-u} \\ &= - \left[\frac{u^n}{e^u} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} nu^{n-1} e^{-u} du = n\Gamma(n). \end{aligned}$$

即

$$\Gamma(n+1) = n!\Gamma(1) = n!$$

这是因为 $\Gamma(1) = 1$. 更进一步利用分部积分法可证

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad (13.4.4)$$

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad \text{for } s > 0. \quad (13.4.5)$$

作为练习请自证.

§13.4.2 无界函数的反常二重积分

假设 $D \subset \mathbf{R}^2$ 是有界区域且 $P_0 \in D$. 考虑定义在 $D \setminus \{P\}$ 上的函数 f 且满足 f 在 P_0 的任何邻域内都是无界的. 选择一条关于 P_0 的完全包含在 D 内的 Jordan 闭曲线使得 $|\gamma| = 0$ 并记 σ 是这条闭曲线 γ 在 D 内所围成的区域. 假设二重积分

$$\iint_{D \setminus \sigma} f(x, y) dx dy$$

对任意这样的曲线 γ 都存在.

定义13.4.7. 定义无界函数的反常二重积分为

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\rho(\gamma) \rightarrow 0} \iint_{D \setminus \sigma} f(x, y) dx dy.$$

这里 $\rho(\gamma) := \sup_{P \in \gamma} |P - P_0|$. 称二元函数 f 在 D 上是可积的或反常二重积分是收敛的如果上述极限存在且和 γ 无关. 否则的话称反常二重积分是发散的.

例13.4.8. 计算反常二重积分

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \frac{dx dy}{r^p}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad a > 0.$$

解: 根据定义得到

$$I = \lim_{\rho \rightarrow 0} \iint_{\rho^2 \leq x^2+y^2 \leq a^2} \frac{dx dy}{r^p} = \lim_{\rho \rightarrow 0} 2\pi \int_{\rho}^a \frac{r dr}{r^p}.$$

所以 I 仅当 $p < 2$ 时收敛. \square

§13.4.3 应用

引入Beta函数

$$B(p, q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx, \quad p, q > 0. \quad (13.4.6)$$

注意到 $B(p, q)$ 对任意 $p, q > 0$ 都有定义.性质13.4.9. $p, q > 0 \implies$

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (13.4.7)$$

证: 利用

$$\Gamma(p) = 2 \int_0^\infty s^{2p-1} e^{-s^2} ds, \quad \Gamma(q) = 2 \int_0^\infty r^{2q-1} e^{-r^2} dr,$$

得到

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= 4 \iint_{[0, \infty) \times [0, \infty)} s^{2p-1} t^{2q-1} e^{-(s^2+t^2)} ds dt \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2p+2q-2} r dr \\ &= \left(2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta \right) \left(2 \int_0^\infty r^{2(p+q)-1} e^{-r^2} dr \right) = B(p, q)\Gamma(p+q), \end{aligned}$$

这里 $s = r \cos \theta$ 和 $t = r \sin \theta$. \square

作为副产品得到

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta. \quad (13.4.8)$$

例13.4.10. 计算定积分

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx, \quad J = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (13.4.9)$$

解: 实际上利用 (13.4.7) 和 (13.4.8) 得到

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 u^{\frac{n+1}{2}-1} (1-u)^{\frac{1}{2}-1} du = \frac{1}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}. \quad \square$$

§13.4.4 * Poisson核、Hilbert变换和Riesz变换

定义多元函数Poisson核如下

$$P(\mathbf{x}) := \frac{c_n}{(1+|\mathbf{x}|^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

其中常数 c_n 是使得

$$\int_{\mathbb{R}^n} P(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$$

成立.

(1) 利用例13.3.6 和 Gamma 函数性质证明

$$c_n = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}}.$$

(2) 定义

$$P(t, \mathbf{x}) := \frac{1}{t^n} P(\mathbf{x}/t), \quad (t, \mathbf{x}) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n.$$

证明 P 是关于变量 (t, x^1, \dots, x^n) 的调和函数, 即,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} P + \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial^2}{\partial (x^i)^2} P = 0.$$

在 Fourier 级数这章, 我们即将看到 $e^{-2\pi|x|}$ 的 Fourier 变换就是 Poisson 核.

证明 Beta 积分恒等式:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\mathbf{w}}{|\mathbf{x}-\mathbf{w}|^\alpha |\mathbf{y}-\mathbf{w}|^\beta} = \pi^{n/2} \frac{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2}) \Gamma(\frac{n-\beta}{2}) \Gamma(\frac{\alpha+\beta-n}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2}) \Gamma(\frac{\beta}{2}) \Gamma(n-\frac{\alpha+\beta}{2})} |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{n-\alpha-\beta},$$

这里 $0 < \alpha, \beta < n$ 且 $\alpha + \beta > n$.

对两个黎曼可积函数 $f, g \in R(\mathbb{R}^n)$, 定义它们的卷积(convolution)为

$$(f * g)(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}-\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

证明 $f * g \in R(\mathbb{R}^n)$ 并求 $\chi * \chi$, 这里 χ 是单位圆盘 $\mathbb{B}^2(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^2$ 的特征函数.

对 \mathbb{R} 上的 f 定义其截断 Hilbert 变换(truncated Hilbert transform)为

$$\mathbf{H}_\epsilon(f)(x) := \frac{1}{\pi} \int_{|y| \geq \epsilon} \frac{f(x-y)}{y} dy = \frac{1}{\pi} \int_{|x-y| \geq \epsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy.$$

为了方便起见, 定义 Cauchy 主值积分(Cauchy principal value integral)如下

$$\text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-y)}{y} dy := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|y| \geq \epsilon} \frac{f(x-y)}{y} dy.$$

因此 f 的 Hilbert 变换(Hilbert transform) 定义为

$$\mathbf{H}(f)(x) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathbf{H}_\epsilon(f)(x) = \frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-y)}{y} dy.$$

证明 $[a, b]$ 的特征函数 $\chi_{[a,b]}$ 的 Hilbert 变换为

$$\mathbf{H}(\chi_{[a,b]})(x) = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{x-a}{x-b} \right|.$$

对每个 $1 \leq i \leq n$, 定义多元

函数 f 的第 i 个 Riesz 变换 (i -th Riesz transform) 为

$$\mathbf{R}_i(f)(x) := \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \mathbf{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x^i - y^i}{|x - y|^{n+1}} f(y) dy,$$

这里 Cauchy 主值积分 $\mathbf{p.v.}$ 的定义和一元情形相同.

求多元函数 $f(x) = e^{-|x|^2}$ 的第 i 个 Riesz 变换.

给定 $s > 0$. 定义多元函数 f 的 Riesz 势变换 (Riesz potential) 为

$$\mathbf{I}_s(f)(x) := \frac{1}{2^s \pi^{n/2}} \frac{\Gamma(\frac{n-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|y|^{n-s}} f(x-y) dy.$$

多元函数 $f(x) = e^{-|x|^2}$ 的 Riesz 势变换.

§13.5 * 微分形式

对平面上任何两个向量 $\mathbf{a} = (a^1, a^2)$ and $\mathbf{b} = (b^1, b^2)$, 定义外积为

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} := \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} = a^1 b^2 - a^2 b^1.$$

显然外积满足

- (1) $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$,
- (2) $\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = 0$,
- (3) \mathbb{R}^2 和外积及数乘构成了 \mathbb{R} 上的一个向量空间.
- (4) 如果 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 是 \mathbb{R}^2 的一组基, 则

$$\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$$

这里 $\mathbf{a}_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{12}\mathbf{e}_2$ 和 $\mathbf{a}_2 = a_{21}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2$.

§13.5.1 * 微分形式和外积

考虑区域 $U \subset \mathbb{R}^n$. 回顾

$$df = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i, \quad f \in C^1(U). \quad (13.5.1)$$

定义

$$\Lambda^1(U) := \text{由 } dx^1, \dots, dx^n \text{ 生成} = \left\{ \sum_{1 \leq i \leq n} a_i(x) dx^i \right\} \quad (13.5.2)$$

这里 $a_i(\mathbf{x})$ 是 U 上的函数. 易证 $(\Lambda^1(U), +)$ 是 \mathbb{R} 上的向量空间且

$$\dim \Lambda^1(U) = n.$$

形式上定义外积 \wedge 为满足如下条件

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (13.5.3)$$

实际上外积来自张量积². 易见 $dx^i \wedge dx^i = 0, 1 \leq i \leq n$. 定义

$$\begin{aligned} \Lambda^2(U) &:= \text{由 } dx^i \wedge dx^j \text{ 生成 } (1 \leq i, j \leq n) \\ &= \text{由 } dx^i \wedge dx^j \text{ 生成 } (1 \leq i < j \leq n). \end{aligned} \quad (13.5.4)$$

从而得到 $\dim \Lambda^2(U) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

同理可定义 k -形式(k -forms) 所在的空间

$$\begin{aligned} \Lambda^k(U) &:= \text{由 } dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \text{ 生成 } (1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n) \\ &= \text{由 } dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \text{ 生成 } (1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n) \quad (13.5.5) \\ &= \left\{ \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k}(\mathbf{x}) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \right\}. \end{aligned}$$

同样可得 $\dim \Lambda^k(U) = \binom{n}{k}$ 且 $\Lambda^k(U) = \{0\}$ 若 $k > n$.

对 $\omega \in \Lambda^i(U)$ 和 $\eta \in \Lambda^j(U)$ 记

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{1 \leq k_1 < \cdots < k_i \leq n} a_{k_1 \dots k_i} dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_i} = \sum_{|I|=i} a_I dx^I, \\ \eta &= \sum_{1 \leq \ell_1 < \cdots < \ell_j \leq n} b_{\ell_1 \dots \ell_j} dx^{\ell_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\ell_j} = \sum_{|J|=j} b_J dx^J. \end{aligned}$$

其中 $I: k_1 < \cdots < k_i$ 和 $J: \ell_1 < \cdots < \ell_j$ 都是 $\{1, \dots, n\}$ 中的有序指标集, a_I, b_J 是 U 上的函数, 且 $dx^I := dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_i}$ (类似可定义 dx^J). 此时定义外积(wedge product) 为

$$\omega \wedge \eta := \sum_{|I|=i, |J|=j} a_I b_J dx^I \wedge dx^J \in \Lambda^{i+j}(U). \quad (13.5.6)$$

对 U 上的函数 f 定义

$$f\omega := \sum_{|I|=i} (fa_I) dx^I. \quad (13.5.7)$$

²具体定义可参见我个人主页上的微分流形课的讲义.

定理13.5.1. (1) $\omega \in \Lambda^p(U)$ 和 $\eta \in \Lambda^q(U)$ ($p+q > n$) $\implies \omega \wedge \eta = 0$.

(2) $\omega \in \Lambda^p(U)$ 和 $\eta \in \Lambda^q(U)$ $\implies \omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega$.

(3) $\omega \in \Lambda^p(U)$ 且 p 是奇数 $\implies \omega \wedge \omega = 0$.

(4) $\omega, \eta, \sigma \implies$

$(\omega + \eta) \wedge \sigma = \omega \wedge \sigma + \eta \wedge \sigma, \sigma \wedge (\omega + \eta) = \sigma \wedge \omega + \sigma \wedge \eta, (\omega \wedge \eta) \wedge \sigma = \omega \wedge (\eta \wedge \sigma)$.

回到定理13.3.1, 其中

$$\mathbf{T}(u, v) = (x(u, v), y(u, v)).$$

因为 $dx = x_u du + x_v dv$ 和 $dy = y_u du + y_v dv$, 所以

$$dx \wedge dy = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} du \wedge dv = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du \wedge dv.$$

若把 $dx \wedge dy$ 看成是“正”面积元, 则 $\partial(x, y)/\partial(u, v) = \mathcal{J}_{\mathbf{T}}$ 从而 (13.4.1) 等价于

$$\iint_{\mathbf{T}(D)} f(x, y) dx \wedge dy = \iint_D f \circ \mathbf{T}(u, v) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du \wedge dv. \quad (13.5.8)$$

§13.5.2 * 上同调群

考虑 $\Lambda^k(U)$ 中的子集:

$$\Lambda_{\infty}^k(U) := \left\{ \omega \in \Lambda^k(U) \text{ 满足 } a_{i_1 \dots i_k} \in C^{\infty}(U) \right\}. \quad (13.5.9)$$

定义外微分算子(**exterior differential**)

$$\mathbf{d} : \Lambda_{\infty}^k(U) \longrightarrow \Lambda_{\infty}^{k+1}(U) \quad (13.5.10)$$

为

$$\mathbf{d} \left(\sum_{|I|=k} a_I(x) dx^I \right) := \sum_{|I|=k} da_I(x) \wedge dx^I = \sum_{|I|=k, 1 \leq j \leq n} \frac{\partial a_I}{\partial x^j}(x) dx^j \wedge dx^I.$$

比如对任何光滑函数 f 有 $\mathbf{d}f = df$ (通常的全微分), 而对 1-形式有

$$\mathbf{d} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i dx^i \right) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial a_j}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j.$$

因为易证 $\mathbf{d}^2 = 0$ 所以我们得到复形(**complex**) $(\Lambda^{\bullet}(U), \mathbf{d})$:

$$\dots \xrightarrow{\mathbf{d}} \Lambda_{\infty}^k(U) \xrightarrow{\mathbf{d}} \Lambda_{\infty}^{k+1}(U) \xrightarrow{\mathbf{d}} \dots$$

定义 U 的 k 阶上同调群(**k-th cohomology group**) 为

$$H^k(U) := \frac{\text{Ker}(\mathbf{d}|_{\Lambda_{\infty}^k(U)})}{\text{Im}(\mathbf{d}|_{\Lambda_{\infty}^{k-1}(U)})}. \quad (13.5.11)$$

称 $\omega \in \Lambda_{\infty}^k(U)$ 是闭的(**closed**) 如果 $\mathbf{d}\omega = 0$, 是正合的(**exact**) 如果 $\omega = \mathbf{d}\eta$ 对某个 $\eta \in \Lambda_{\infty}^{k-1}(U)$ 成立. 显然正合微分形式必是闭的.

例13.5.2. 考虑 \mathbf{R}^2 上的 1-形式

$$\alpha = [2x + y \cos(xy)] dx + [x \cos(xy)] dy.$$

如果 $\alpha = df$, 则

$$f_x = 2x + y \cos(xy), \quad f_y = x \cos(xy)$$

从而得到

$$f(x, y) = x^2 + \sin(xy)$$

差一个加法常数. 因此 α 是正合的.

例13.5.3. 考虑 $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上的 1-形式

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

易证 $d\alpha = 0$ 但是 α 不是正合的. 否则的话若 $\alpha = df$ 对某个光滑函数 f 成立, 则根据下章中的 Stokes 公式得到

$$1 = \int_{\mathbf{S}^1} \alpha = \int_{\mathbf{S}^1} df = \int_{\partial \mathbf{S}^1} f = 0.$$

回忆到区域 $U \subset \mathbf{R}^n$ 称为关于 \mathbf{o} 是星型的如果 $\mathbf{o} \in U$ 且对任意 $\mathbf{x} \in U$ 都有 $\overline{\mathbf{o}\mathbf{x}} \subset U$. 注意到凸区域必是 (关于任意点是) 星型的, 但是反之不一定成立.

对 $\forall k$ -形式 $\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ 定义映射

$$\mathbf{P} : \Lambda_{\infty}^k(U) \longrightarrow \Lambda_{\infty}^{k-1}(U) \quad (13.5.12)$$

为

$$\mathbf{P}\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{1 \leq j \leq k} (-1)^{j-1} \left[\int_0^1 t^{k-1} a_{i_1 \dots i_k}(t\mathbf{x}) dt \right] dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_j}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

则可证

$$(\mathbf{d} \circ \mathbf{P} + \mathbf{P} \circ \mathbf{d})\omega = \omega. \quad (13.5.13)$$

如果 ω 是闭的则 (13.5.13) 告诉我们 $\omega = \mathbf{d}(\mathbf{P}\omega)$ 从而 ω 是正合的. 作为直接推论

$$H^k(U) = 0 \quad (1 \leq k \leq n) \quad \text{对任意星型区域 } U \text{ 都成立.} \quad (13.5.14)$$

练习13.5.4. (1) 验证 (13.5.13).

(2) 证明定理13.5.1.

(3) 证明 $H^0(U) = \mathbb{R}$, 对任何区域 $U \subset \mathbb{R}^n$ 都成立.

(4) 考虑区域 $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z = 0\}$. 证明不存在函数 F 满足

$$\mathbf{grad}(F) = f,$$

这里

$$f(x, y, z) := \left(\frac{-2xz}{z^2 + (x^2 + y^2 - 1)^2}, \frac{-2yz}{z^2 + (x^2 + y^2 - 1)^2}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{z^2 + (x^2 + y^2 - 1)^2} \right).$$

(提示: 考虑曲线 $\gamma(t) = (\sqrt{1 + \cos t}, 0, \sin t)$, $-\pi \leq t \leq \pi$, 并计算 $\frac{d}{dt}F(\gamma(t))$.)

§13.6 重积分的应用

本节给出下章需要用到的曲面面积的计算.

§13.6.1 曲面面积

曲面面积. 假设曲面为

$$\Sigma : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), \quad (u, v) \in D,$$

或写成向量值函数

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D,$$

这里 D 是具有光滑或分段光滑边界 ∂D 的有界闭区域, $\mathbf{r} : D \rightarrow \Sigma$ 是单的, $x, y, z \in C^1$, 且 Jacobi 矩阵

$$\mathbf{Jac}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix} \quad (13.6.1)$$

是满秩的.

(1) 仿照之前的几何直观性, $\forall (u_0, v_0) \in D$ 且 $\Delta u, \Delta v \ll 1$, 考虑 Σ 中的 4 个点:

$$\begin{aligned} P_1 &= \mathbf{r}(u_0, v_0) = \mathbf{r}_0, \\ P_2 &= \mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) \approx \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_u(u_0, v_0)\Delta u, \\ P_3 &= \mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v), \\ P_4 &= \mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) \approx \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_v(u_0, v_0)\Delta v. \end{aligned}$$

则这 4 个点围成的面积

$$\Delta S \approx \left| \overrightarrow{P_1 P_2} \times \overrightarrow{P_2 P_4} \right| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|(u_0, v_0) \Delta u \Delta v.$$

故

$$dS = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv. \quad (13.6.2)$$

(2) 由此得到光滑曲面的面积

$$S = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv. \quad (13.6.3)$$

定理13.6.1. 在上述假设条件下, 曲面 Σ 的面积为

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv, \quad (13.6.4)$$

这里

$$\begin{aligned} E &:= \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \\ F &= \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \\ G &= \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2, \end{aligned} \quad (13.6.5)$$

是曲面的 Gauss 系数.

证: 根据

$$\mathbf{r}_u = (x_u, y_u, z_u), \quad \mathbf{r}_v = (x_v, y_v, z_v)$$

得到

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right).$$

直接计算可得

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 = EG - F^2. \quad \square$$

如果曲面 Σ 的方程为 $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, 则

$$\mathbf{r} = (x, y, f(x, y)).$$

因此得到

$$\mathbf{r}_x = (1, 0, f_x), \quad \mathbf{r}_y = (0, 1, f_y)$$

和

$$E = 1 + f_x^2, \quad F = f_x f_y, \quad G = 1 + f_y^2, \quad EG - F^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2.$$

此时 (13.6.4) 变成

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy = \iint_D \sqrt{1 + |\mathbf{grad}(f)|^2} dx dy. \quad (13.6.6)$$

假设曲面 Σ 的方程为 $H(x, y, z) = 0$, $H \in C^1$, 且 $H_z \neq 0$, Σ 在 xy 平面上的投影为 D . 此时根据隐函数定理得到 $z = f(x, y)$ 且

$$f_x = -\frac{H_x}{H_z}, \quad f_y = -\frac{H_y}{H_z}.$$

利用 (13.6.6) 得到

$$S = \iint_D \frac{|\mathbf{grad}(H)|}{|H_z|} dx dy. \quad (13.6.7)$$

例13.6.2. (1) 求曲面 $z = 1 - x^2 - y^2$ 在 xoy 平面上方部分的面积.

解: 计算得到

$$\begin{aligned} S &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1 + |\mathbf{grad}(f)|^2} dx dy, \quad f(x, y) := 1 - x^2 - y^2 \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} r dr \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^4 \sqrt{1+t} dt = \frac{3\pi}{8} (5\sqrt{5} - 1). \quad \square \end{aligned}$$

(2) 计算球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 被柱面 $x^2 + y^2 \leq ax$ 所截出的曲面的面积.

解: 根据对称性得到

$$\begin{aligned} S &= 4 \iint_{x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq ax} \frac{|\mathbf{grad}(H)|}{|H_z|} dx dy, \quad H := x^2 + y^2 + z^2 - a^2 \\ &= 4 \iint_{x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq ax} \frac{2a}{2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= 4a \iint_{x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq ax} \frac{dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \\ &= 4a \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \frac{r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = 4a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right). \quad \square \end{aligned}$$

§13.6.2 * 极小曲面

利用 (13.6.6) 来推出极小曲面方程(minimal surface equation). 引入如下记号. 对向量值函数 $\mathbf{F}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ 定义其散度(divergence)为

$$\mathbf{div}(\mathbf{F}) := u_x + v_y.$$

这样二元函数 $f(x, y)$ 的 Laplace 算子可写成

$$\Delta f = f_{xx}^2 + f_{yy}^2 = \mathbf{div}(\mathbf{grad}(f)).$$

为了方便我们把 (13.6.6) 中的面积显示地表示为 $S = S(f)$. 极小曲面是指在所有固定边界值的 C^1 二元函数中找到使 $S(f)$ 为最小的 f . 现在固定二元函数 f 并作小扰动, 即考虑二元函数 $f + \epsilon h$. 因为函数 f 和 $f + \epsilon h$ 具有固定的边界值, 所以 $h|_{\partial D} = 0$. 计算

$$\begin{aligned} S(f + \epsilon h) &= \iint_D \sqrt{1 + |\mathbf{grad}(f + \epsilon h)|^2} dudv \\ &= \iint_D \sqrt{1 + |\mathbf{grad}(f)|^2 + 2\epsilon \langle \mathbf{grad}(f), \mathbf{grad}(h) \rangle + \epsilon^2 |\mathbf{grad}(h)|^2} dudv \\ &= \iint_D \left(\sqrt{1 + |\mathbf{grad}(f)|^2} + \frac{2\epsilon \langle \mathbf{grad}(f), \mathbf{grad}(h) \rangle + \epsilon^2 |\mathbf{grad}(h)|^2}{2\sqrt{1 + |\mathbf{grad}(f)|^2}} + o(\epsilon^2) \right) dudv \\ &= S(f) + \epsilon \iint_D \frac{\langle \mathbf{grad}(f), \mathbf{grad}(h) \rangle}{\sqrt{1 + |\mathbf{grad}(f)|^2}} dudv + o(\epsilon). \end{aligned}$$

如果 f 是使 $S(f)$ 达到极小, 则

$$S'_h(f) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{S(f + \epsilon h) - S(f)}{\epsilon} = 0, \quad \forall h \in C^1(D) \text{ 且 } h|_{\partial D} = 0$$

即

$$0 = \iint_D \frac{\langle \mathbf{grad}(f), \mathbf{grad}(h) \rangle}{\sqrt{1 + |\mathbf{grad}(f)|^2}} dudv = \iint_D -h \mathbf{div} \left(\frac{\mathbf{grad}(f)}{\sqrt{1 + |\mathbf{grad}(f)|^2}} \right) dudv.$$

这里最后一步用到了 Stokes 公式或散度公式. 最后得到极小曲面方程

$$0 = \mathbf{div} \left(\frac{\mathbf{grad}(f)}{\sqrt{1 + |\mathbf{grad}(f)|^2}} \right). \quad (13.6.8)$$

练习13.6.3. 验证 (a) $f(x, y) = \tan^{-1}(y/x)$, (b) $f(x, y) = \cosh^{-1} \sqrt{x^2 + y^2}$, (c) $f(x, y) = \ln(\cos y / \cos x)$ 都满足极小曲面方程 (13.6.8).

§13.7 第一型曲线积分和曲面积分

本节引入第一型曲线和曲面积分.

§13.7.1 第一型曲线积分

假设 $L \subset \mathbb{R}^3$ 是一条可求长的连续曲线 (定义域为某个区间 $I \subset \mathbb{R}$), 起点和终点分别为 A 和 B (为了简便, 也记作 s_L 和 e_L). L 的分割 \mathbf{T} 是指 L 上的有序有限点列³

$$A = P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow \cdots \rightarrow P_{n-1} \rightarrow P_n = B.$$

³但是这些 L 上的点在 I 上的原像不一定是有序的, 这是因为 L 有可能是自相交的或者是闭的.

令

$$\Delta s_i := |\widehat{P_{i-1}P_i}|, \quad \|T\| := \max_{1 \leq i \leq n} \Delta s_i.$$

定义13.7.1. 假设 L 和 T 如上定义, f 是 L 上的有界函数. 任取 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \widehat{P_{i-1}P_i}$ 并考虑有限和

$$S(f, T, (\xi, \eta, \zeta)) := \sum_{1 \leq i \leq n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i.$$

如果 $\|T\| \rightarrow 0$ 时, $S(f, T, (\xi, \eta, \zeta))$ 存在极限且极限和分割 T 及点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 无关, 称该极限

$$\int_L f ds \equiv \int_L f(x, y, z) ds := \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{1 \leq i \leq n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i \quad (13.7.1)$$

为函数 f 在曲线 L 上的**第一型曲线积分**(type I curve integral). 此时称 f 为被积函数而 L 称为积分路径.

如果取函数 $f \equiv 1$ 则得到曲线的长度

$$\int_L ds = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{1 \leq i \leq n} \Delta s_i = |L|.$$

从而可把 ds 看成曲线上的弧微元.

如果 A 和 B 重合, 即 L 是闭曲线, 我们使用如下记号

$$\oint_L f ds = \oint_L f(x, y, z) ds.$$

如果 $L \subset \mathbb{R}^3$ 落在某个平面内 (比如落在和 xoy 坐标面平行的平面内), 此时我们得到了平面曲线的第一型曲线积分的定义,

$$\int_L f ds \equiv \int_L f(x, y) ds := \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{1 \leq i \leq n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i \quad (13.7.2)$$

如果 \mathbb{R}^3 中两条可求长的连续曲线 L_1 和 L_2 , 满足 $e_{L_1} = s_{L_2}$, 则可定义 $L_1 + L_2$ 使得新的曲线也是可求长的和连续的 (即把这两条曲线首尾拼接起来).

性质13.7.2. (1) **(被积函数线性)** 如果函数 f, g 在 L 上的第一型曲线积分都存在, 则对任意常数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 函数 $\alpha f + \beta g$ 在 L 上的第一型曲线积分也存在且

$$\int_L (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \int_L f ds + \beta \int_L g ds. \quad (13.7.3)$$

(2) **(路径可加性)** 如果函数 f 在 L_1 和 L_2 上的第一型曲线积分都存在且 $e_{L_1} = s_{L_2}$, 则其在 $L_1 + L_2$ 上的第一型曲线积分也存在且

$$\int_{L_1+L_2} f ds = \int_{L_1} f ds + \int_{L_2} f ds. \quad (13.7.4)$$

定理13.7.3. (第一型曲线积分的计算公式) 假设 L 是分段光滑曲线

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

且函数 f 在 L 上连续. 则 f 在 L 上的第一型曲线积分存在且

$$\int_L f ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt. \quad (13.7.5)$$

若把曲线 L 写成向量形式 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, 则 (13.7.5) 可记成

$$\int_L f ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt. \quad (13.7.6)$$

在给出证明之前, 首先对定理中的符号做些说明. L 是分段光滑曲线是指

$$L = L_1 + L_2 + \cdots + L_k, \quad L_i \in C^1([\alpha_i, \beta_i]) \quad (1 \leq i \leq k),$$

这里曲线 $+$ 的定义如上, 且

$$\alpha = \alpha_0 < \beta_0 = \alpha_1 < \beta_1 = \alpha_2 < \cdots < \beta_{k-1} = \alpha_k < \beta_k = \beta.$$

根据定积分可知

$$s_i = |C_i| = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} |\mathbf{r}'(t)| dt$$

从而得到

$$s = \sum_{1 \leq i \leq k} s_i = \sum_{1 \leq i \leq k} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

故 L 是可求长连续曲线. (13.7.5) 或 (13.7.6) 的积分定义为

$$\int_L f ds := \sum_{1 \leq i \leq k} \int_{L_i} f ds.$$

根据性质 13.7.2 (2), 只要对每个 L_i 证明即可, 换句话说, 我们可以事先假设 L 是光滑曲线.

证: 根据上述说明, 不失一般性不妨假设 L 是光滑曲线. 前面已证

$$ds = |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

利用积分的变量替换得到

$$\int_L f ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\mathbf{r}(t)) \frac{ds}{dt} dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt. \quad \square$$

作为直接推论得到了平面曲线的第一型曲线积分的计算公式: 假设 L 是分段光滑曲线

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

且函数 f 在 L 上连续. 则 f 在 L 上的第一型曲线积分存在且

$$\int_L f ds = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt. \quad (13.7.7)$$

若把曲线 L 写成向量形式 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, 则 (13.7.7) 可记成

$$\int_L f ds = \int_\alpha^\beta f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt. \quad (13.7.8)$$

特别地,

- 如果 $\mathbf{r}(x) = (x, y(x))$, $a \leq x \leq b$, 则

$$\int_L f ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx. \quad (13.7.9)$$

- 如果 $\mathbf{r}(t) = (r(t) \cos t, r(t) \sin t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, 则

$$\int_L f ds = \int_\alpha^\beta f(r(t) \cos t, r(t) \sin t) \sqrt{r(t)^2 + r'(t)^2} dt. \quad (13.7.10)$$

例13.7.4. (1) 计算

$$I := \int_L \sin \sqrt{x^2 + y^2} ds,$$

其中 L 为由圆周 $x^2 + y^2 = a^2$, 直线 $y = x$ 及 x 轴在第一象限所围图形的边界.

(2) 计算

$$I := \int_L |x| ds,$$

其中 L 是双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

(3) 计算

$$I := \int_L (x^2 + 2y + z) ds,$$

其中 L 是由曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 和 $x + y + z = 0$ 所确定的曲线.

(4) 计算

$$I := \int_L \sqrt{1 - x^2 - y^2} ds, \quad L: x^2 + y^2 = x.$$

解: 令 $x = \frac{1}{2}(1 + \cos t)$ 和 $y = \frac{1}{2} \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. 则

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = \int_0^\pi \sin \frac{t}{2} dt = 2. \quad \square$$

(5) 计算

$$I = \int_\Gamma (x + y)^2 ds,$$

其中 $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1\}$.

解: 定义 $\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ 和 $\Gamma_2 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1\}$. 从而得到

$$I_1 := \int_{\Gamma_1} (x+y)^2 ds = \int_{\Gamma_1} (x^2 + y^2 + 2xy) ds = \int_{\Gamma_1} ds + 2 \int_{\Gamma_1} xy ds = \pi,$$

$$I_2 := \int_{\Gamma_2} (x+y)^2 ds = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

故 $I = I_1 + I_2 = \frac{2}{3} + \pi$. \square

(6) (第一型曲线积分的中值定理): 假设函数 $f(x, y)$ 在光滑曲线 $L : x = x(t), y = y(t)$ 上连续, $\alpha \leq t \leq \beta$, 则存在 $(x_0, y_0) \in L$ 满足

$$\int_L f(x, y) ds = f(x_0, y_0) |L|.$$

证: 根据 (13.7.7) 得到

$$\int_L f ds = \int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt, \quad F(t) := f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}.$$

定积分的 (广义) 第一中值定理告诉我们

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt = f(x(t_0), y(t_0)) \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = f(x_0, y_0) |L|$$

其中 $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$. \square

§13.7.2 第一型曲面积分

假设曲面 Σ 是可求面积的连续曲面. Σ 上的分割 T 是指用坐标曲线网将 Σ 分成的 n 个小曲面 $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$. 令

$$\Delta S_i := |\Sigma_i|, \quad \|T\| := \max_{1 \leq i \leq n} \Delta S_i.$$

定义13.7.5. 假设 Σ 和 T 如上定义, f 是 Σ 上的有界函数. 任取 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Sigma_i$ 并考虑有线和

$$S(f, T, (\xi, \eta, \zeta)) := \sum_{1 \leq i \leq n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i.$$

如果 $\|T\| \rightarrow 0$ 时, $S(f, T, (\xi, \eta, \zeta))$ 存在极限且极限和分割 T 及点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 无关, 称该极限

$$\iint_{\Sigma} f dS \equiv \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS := \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{1 \leq i \leq n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i \quad (13.7.11)$$

为函数 f 在曲面 Σ 上的第一型曲面积分 (type I surface integral). 此时称 f 为被积函数而 Σ 称为积分曲面.

如果取函数 $f \equiv 1$ 则得到曲面的面积

$$\iint_{\Sigma} dS = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{1 \leq i \leq n} \Delta S_i = |\Sigma|.$$

从而可把 dS 看成曲面的面积微元.

类似定理13.7.3 可得到

定理13.7.6. (第一型曲面积分的计算公式) 假设曲面 Σ 是由参数方程给出:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in D,$$

或记为向量形式 $\mathbf{r}(u, v)$. 这里 D 是 uv 平面上具有段光滑边界的有界闭区域, $\mathbf{r}: D \rightarrow \Sigma$ 是单的且 C^1 的, 且Jacobi 矩阵 (13.6.1) 是满秩的. 此时对任何连续函数 $f \in C(\Sigma)$, f 在 Σ 上的第一型曲面积分存在且

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} f dS &= \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv \\ &= \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|(u, v) du dv. \end{aligned} \quad (13.7.12)$$

其中 E, F, G 是 (13.6.5) 中定义的曲面Gauss 系数.

如果 $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, z(x, y))$, 则

$$\iint_{\Sigma} f dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + |\nabla z|^2} dx dy. \quad (13.7.13)$$

例13.7.7. (1) 计算

$$I := \iint_S (x^2 + y^2 - z^2 + 2x - 1) dS,$$

其中 S 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被平面 $z = 1$ 所截的下半部分.

(2) 计算

$$I := \iint_{\Sigma} x^2 z dS,$$

其中 $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$.

解: 计算可得

$$\begin{aligned} I &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 \sqrt{1-x^2-y^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2-y^2} + \frac{y^2}{1-x^2-y^2}} dx dy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 dx dy = \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{\pi}{4}. \quad \square \end{aligned}$$

(3) 证明Poisson 公式:

$$\iint_{\Sigma} f(ax + by + cz) dS = 2\pi \int_{-1}^1 f(w \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) dw,$$

其中 $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

解: 令 $k = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. 考察变换 $w = (ax + by + cz)/k$ 和新的 uvw 坐标轴使得原点和原来的 xyz 坐标轴重合且 $ax + by + cz = 0$ 和 w 轴垂直. 从而 u, v 落在平面 $ax + by + cz = 0$ 内. 但是球 Σ 是完全对称的, 故在坐标变换 $(x, y, z) \mapsto (u, v, w)$ 下, Σ 变成 $\Sigma' = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 | u^2 + v^2 + w^2 = 1\}$, 从而

$$I := \iint_{\Sigma} f(ax + by + cz) dS = \iint_{\Sigma'} f(kw) dS'.$$

作变量替换 $u = \sqrt{1 - w^2} \cos \theta$, $v = \sqrt{1 - w^2} \sin \theta$, $w = w$, 这里 $|w| \leq 1$ 且 $0 \leq \theta \leq 2\pi$. 即得到

$$\mathbf{r}(\theta, w) = (u, v, w) = (\sqrt{1 - w^2} \cos \theta, \sqrt{1 - w^2} \sin \theta, w).$$

计算得到

$$\mathbf{r}_{\theta} = \sqrt{1 - w^2}(-\sin \theta, \cos \theta, 0), \quad \mathbf{r}_w = \left(-\frac{w \cos \theta}{\sqrt{1 - w^2}}, -\frac{w \sin \theta}{\sqrt{1 - w^2}}, 1 \right).$$

故

$$\mathbf{r}_{\theta} \cdot \mathbf{r}_{\theta} = 1 - w^2, \quad \mathbf{r}_{\theta} \cdot \mathbf{r}_w = 0, \quad \mathbf{r}_w \cdot \mathbf{r}_w = \frac{1}{1 - w^2}.$$

根据 (13.7.12) 得到

$$\iint_{\Sigma} f(ax + by + cz) dS = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 f(kw) dw = 2\pi \int_{-1}^1 f(kw) dw. \quad \square$$

(4) 令 Σ_r 为以 $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ 为中心 $r > 0$ 为半径的球面, 并假设 $u(\mathbf{P}) = u(x, y, z) \in C^2(\mathbb{R}^3)$, 则

$$\Delta u(\mathbf{P}_0) = 6 \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{I_r(u, \mathbf{P}_0) - u(\mathbf{P}_0)}{r^2}.$$

这里

$$I_r(u, \mathbf{P}_0) := \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\Sigma_r} u(x, y, z) dS.$$

解: 作 Taylor 展开得到

$$\begin{aligned} u(\mathbf{P}) &= u(\mathbf{P}_0) + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq 2} \frac{u^{\alpha}(\mathbf{P}_0)}{\alpha!} (\mathbf{P} - \mathbf{P}_0)^{\alpha} + o(|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|^2) \\ &= u(\mathbf{P}_0) + u_x(\mathbf{P}_0)(x - x_0) + u_y(\mathbf{P}_0)(y - y_0) + u_z(\mathbf{P}_0)(z - z_0) \\ &\quad + u_{xy}(\mathbf{P}_0)(x - x_0)(y - y_0) + u_{yz}(\mathbf{P}_0)(y - y_0)(z - z_0) + u_{zx}(\mathbf{P}_0)(z - z_0)(x - x_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} u_{xx}(\mathbf{P}_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{2} u_{yy}(\mathbf{P}_0)(y - y_0)^2 + \frac{1}{2} u_{zz}(\mathbf{P}_0)(z - z_0)^2 + o(\rho^2) \end{aligned}$$

这里 $\rho = |\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|$. 利用球对称性可知

$$\iint_{\Sigma_r} [u(\mathbf{P}) - u(\mathbf{P}_0)] dS = \frac{1}{2} \Delta u(\mathbf{P}_0) \cdot \frac{r^2}{3} 4\pi r^2 + o(r^4) = \frac{r^2}{6} |\Sigma_r| \Delta u(\mathbf{P}_0) + o(r^4),$$

这里用到了等式

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_r} (x-x_0)^2 dS \iint_{\Sigma_r} (y-y_0)^2 dS &= \iint_{\Sigma_r} (z-z_0)^2 dS \\ &= \frac{1}{3} \iint_{\Sigma_r} [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2] dS = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi}{3} r^4. \end{aligned}$$

从而得到

$$I_r(u, \mathbf{P}_0) - u(\mathbf{P}_0) = \frac{r^2}{6} \Delta u(\mathbf{P}_0) + o(r^4). \quad \square$$

§13.8 第二型曲线积分和曲面积分

第二型曲线积分和定义域的方向有关, 如果方向相反则相应的积分变号.

§13.8.1 第二型曲线积分

假设 $L \subset \mathbb{R}^3$ 是定向的可求长的连续曲线, 即给定起点 $s_L = A$ 和终点 $e_L = B$ 的可求长的连续曲线. 在 L 上每点处取单位切向量

$$\boldsymbol{\tau} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma),$$

使得其与 L 的定向一致.

定义13.8.1. 假设 L 和 $\boldsymbol{\tau}$ 为如上定义, $F = (P, Q, R)$ 是 L 上的向量值函数. 定义函数 F 沿着曲线 L 的第二型曲线积分(type II curve integral) 为

$$\int_L \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} ds := \int_L [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] ds. \quad (13.8.1)$$

在第一型曲线积分中, 已经知道 ds 是 L 的弧微元. 定义弧微元向量

$$d\mathbf{s} := \boldsymbol{\tau} ds = (dx, dy, dz).$$

从而 (13.8.1) 可记成

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz, \quad (13.8.2)$$

也称为微分 1- 形式(differential 1-form) $\omega := Pdx + Qdy + Rdz$ 在 L 上的第二型曲线积分,

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_L \omega. \quad (13.8.3)$$

若取 $F = f\boldsymbol{\tau}$, 则 F 在 L 上的第二型曲线积分等于 f 在 L 上的第一型曲线积分.

如果 A 和 B 重合, 即 L 是闭曲线, 我们使用如下记号

$$\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \oint_L \mathbf{F} \cdot ds.$$

特别地, 如果 L 为 xoy 平面的定向光滑曲线, 则

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_L [P(x, y) \cos \alpha + Q(x, y) \sin \alpha] ds. \quad (13.8.4)$$

其中 α 是定向曲线 L 和 x 正轴的夹角.

性质13.8.2. (1) **(反向性)** 假设向量值函数 $F = (P, Q, R)$ 在 L 上的第二型曲线积分存在, 则

$$\int_{-L} P dx + Q dy + R dz = - \int_L P dx + Q dy + R dz, \quad (13.8.5)$$

这里 $-L$ 表示曲线 L 的反向曲线.

(2) **(路径可加性)** 如果向量值函数 $F = (P, Q, R)$ 在 L_1 和 L_2 上的第二型曲线积分都存在且 $e_{L_1} = s_{L_2}$, 则其在 $L_1 + L_2$ 上的第二型曲线积分也存在且

$$\int_{L_1+L_2} P dx + Q dy + R dz = \sum_{1 \leq i \leq 2} \int_{L_i} P dx + Q dy + R dz. \quad (13.8.6)$$

(3) **(被积函数线性)** 如果向量值函数 $F_1 = (P_1, Q_1, R_1), F_2 = (P_2, Q_2, R_2)$ 在 L 上的第二型曲线积分都存在, 则对任何常数 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, 向量值函数 $c_1 F_1 + c_2 F_2$ 在 L 上的第二型曲线积分也存在且

$$\begin{aligned} & \int_L (c_1 P_1 + c_2 P_2) dx + (c_1 Q_1 + c_2 Q_2) dy + (c_1 R_1 + c_2 R_2) dz \\ &= \sum_{1 \leq i \leq 2} c_i \left(\int_L P_i dx + Q_i dy + R_i dz \right). \end{aligned} \quad (13.8.7)$$

现在假设 L 是定向的光滑曲线⁴:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [a, b],$$

或写成向量形式 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, 此时曲线 L 可求长且切向量为

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}.$$

定理13.8.3. (第二型曲线积分的计算公式) 假设曲线 L 如上定义, 且向量值函数 $F = (P, Q, R)$ 在 L 上连续. 则

$$\int_L P dx + Q dy + R dz = \int_a^b F(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt. \quad (13.8.8)$$

⁴注意到, 此时 $[a, b]$ 不一定是通常意义下的闭区间, 这是因为 a 对应起点 s_L 而 b 对应终点 e_L .

证: 根据积分变量替换得到

$$\int_L \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt. \quad \square$$

类似地, 如果 L 为平面 xoy 上地光滑曲线:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \leq t \leq b,$$

或写成向量形式 $\mathbf{r}(t)$, 则

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt. \quad (13.8.9)$$

如果 $\mathbf{r}(x) = (x, y(x))$, $a \leq x \leq b$, 则

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)] dx. \quad (13.8.10)$$

例13.8.4. (1) 计算第二型曲线积分

$$I := \int_L 2xy dx + x^2 dy,$$

其中 L 为以 $O = (0, 0)$ 为起点而以 $B = (1, 1)$ 为终点的曲线, 具体路径分别为 (a) 抛物线 $y = x^2$; (b) 抛物线 $x = y^2$; (c) 折线段 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ 其中 $A = (1, 0)$.

(2) 计算

$$I := \oint_C (z - y) dx + (x - z) dy + (x - y) dz,$$

其中 C 是两个曲面 $x^2 + y^2 = 1$ 和 $x - y + z = 2$ 的交线, 且从 z 正轴往 z 负轴看 C 的方向是顺时针的.

(3) 计算

$$I := \int_L -y dx + x dy,$$

其中 $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$.

解: 令 $x = \cos t$ 和 $y = \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$, 得到

$$I = \int_0^\pi [-\sin t(-\sin t) + \cos t \cdot \cos t] dt = \pi. \quad \square$$

(4) 计算

$$I := \int_L (x^2 - y^2) dx - 2xy dy,$$

其中 $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = x^\alpha, \alpha > 0, 0 \leq x \leq 1\}$.

解: 令 $x = t$ 和 $y = t^\alpha$, $0 \leq t \leq 1$. 则

$$I = \int_0^1 (t^2 - t^{2\alpha}) dt - \int_0^1 2\alpha t^{1+\alpha} t^{\alpha-1} dt = \int_0^1 (t^2 - t^{2\alpha} - 2\alpha t^{2\alpha}) dt$$

$$= \int_0^1 [t^2 - (1+2\alpha)t^{2\alpha}] dt = \frac{-1}{3} t^{2\alpha+1} \Big|_0^1 = -\frac{2}{3}. \quad \square$$

(5) 计算

$$I := \int_L x dx + y dy + z dz,$$

其中 $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$.

解: 令 \mathbf{n} 表示 S^2 的法向量. 则

$$I = \int_L (x, y, z) \cdot \boldsymbol{\tau} ds = \int_L \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} ds = 0. \quad \square$$

(6) 计算

$$I := \int_L x dy - y dx,$$

其中 $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^{2n+1} + y^{2n+1} = ax^n y^n, x, y \geq 0\}$.

解: 利用极坐标 $x = r \cos \theta$ 和 $y = r \sin \theta$ 得到

$$r = \frac{a \cos^n \theta \sin^n \theta}{\cos^{2n+1} \theta + \sin^{2n+1} \theta},$$

从而

$$x = \frac{a \tan^n \theta}{1 + \tan^{2n+1} \theta}, \quad y = \frac{a \tan^{n+1} \theta}{1 + \tan^{2n+1} \theta}.$$

再令 $t = \tan \theta$ 得到

$$x = \frac{at^n}{1+t^{2n+1}}, \quad y = \frac{at^{n+1}}{1+t^{2n+1}} = tx.$$

因为

$$dy = x dt + t dx, \quad x dy = x^2 dt - y dx, \quad x dy - y dx = x^2 dt.$$

故

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{a^2 t^{2n}}{(1+t^{2n+1})^2} dt = \frac{a^2}{2n+1} \int_0^{+\infty} \frac{dt^{2n+1}}{(1+t^{2n+1})^2} = \frac{a^2}{2n+1}. \quad \square$$

§13.8.2 第二型曲面积分

首先引入曲面的定向.

定义13.8.5. 假设 Σ 是光滑曲面, P_0 是 Σ 上的任意给定的点. 过 P_0 点可做两个方向相反的法线, 我们指定其中一个方向并记为 \mathbf{n}_{P_0} . 任取过 P_0 点的且完全包含在 Σ 内的光滑闭曲线 Γ_0 . 称曲面 Σ 是**可定向的(orientable)**或者是**定向曲面(oriented surface)**, 如果 Γ_0 上的任意点 P 的法线 \mathbf{n}_P 是连续变化地从 \mathbf{n}_{P_0} 出发绕着 Γ_0 一周后最终回到 \mathbf{n}_{P_0} .

存在不可定向的曲面, 比如Möbius带(Möbius band).

假设定向曲面 Σ 由参数方程给出:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in D,$$

或写成向量形式 $\mathbf{r}(u, v)$. 这里 D 是 uv 平面上具有分段光滑边界的有界闭区域, $\mathbf{r}: D \rightarrow \Sigma$ 是单的且 C^1 的, 且 Jacobi 矩阵 (13.6.1) 是满秩的. 此时曲面 Σ 的法向量可表示为

$$\pm \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \pm \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right),$$

这里 \pm 表示曲面上每个点都有方向相反的两个法向量. 从而得到单位法向量

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \pm \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right), \quad (13.8.11)$$

其中

$$EG - F^2 = \left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right]^2.$$

特别地, 若 $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, z(x, y))$, 则

$$\mathbf{n} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} (-z_x, -z_y, 1). \quad (13.8.12)$$

此时若取 $+$ 号, 即表示 \mathbf{n} 在 z 轴上的投影永远是正的 (对应曲面位于 z 正轴的部分).

定义13.8.6. 假设 Σ 和 $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 如上定义, $F = (P, Q, R)$ 是 Σ 上的向量值函数. 定义函数 F 沿着曲面 Σ 的第二型曲面积分(type II surface integral) 为

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS := \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS. \quad (13.8.13)$$

在第一型曲面积分中, 已经知道 dS 是 Σ 的面积微元. 定义面积微元向量

$$d\mathbf{S} := \mathbf{n} dS = (dydz, dzdx, dxdy).$$

从而 (13.8.13) 可记成

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy. \quad (13.8.14)$$

性质13.8.7. (1)(反向性) 假设向量值函数 $F = (P, Q, R)$ 在 Σ 上的第二型曲面积分存在, 则

$$\iint_{-\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy = - \iint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy, \quad (13.8.15)$$

这里 $-\Sigma$ 表示曲面 Σ 的反向曲面.

(2) (路径可加性) 如果向量值函数 $F = (P, Q, R)$ 在 Σ_1 和 Σ_2 上的第二型曲面积分都存在且 Σ_1 与 Σ_2 定向相同, 则其在 $\Sigma_1 + \Sigma_2$ 上的第二型曲线积分也存在且

$$\iint_{\Sigma_1 + \Sigma_2} Pdydz + Qdzdx + Rxdy = \sum_{1 \leq i \leq 2} \iint_{\Sigma_i} Pdydz + Qdzdx + Rxdy. \quad (13.8.16)$$

(3) (被积函数线性) 如果向量值函数 $F_1 = (P_1, Q_1, R_1), F_2 = (P_2, Q_2, R_2)$ 在 Σ 上的第二型曲面积分都存在, 则对任何常数 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, 向量值函数 $c_1F_1 + c_2F_2$ 在 L 上的第二型曲面积分也存在且

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} (c_1P_1 + c_2P_2)dydz + (c_1Q_1 + c_2Q_2)dzdx + (c_1R_1 + c_2R_2)xdy \\ &= \sum_{1 \leq i \leq 2} c_i \left(\iint_{\Sigma} P_i dydz + Q_i dzdx + R_i xdy \right). \end{aligned} \quad (13.8.17)$$

定理13.8.8. (第二型曲线积分的计算公式) 假设定向的光滑曲面 Σ 是由参数方程给出:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in D,$$

或记为向量形式 $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, 这里 D 是 uv 平面上具有分段光滑边界的有界闭区域, $\mathbf{r}: D \rightarrow \Sigma$ 是单的且 C^1 的, 且Jacobi矩阵 (13.6.1) 是满秩的. 此时对任何连续的向量值函数 $F = (P, Q, R) \in C(\Sigma)$, F 在 Σ 上的第二型曲面积分存在且

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rxdy = \pm \iint_D \left[P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right. \\ & \left. + Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + R(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] dudv. \end{aligned} \quad (13.8.18)$$

证: 根据定理 13.7.6 得到

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \pm \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} dS = \pm \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v dudv. \quad \square$$

如果 $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, z(x, y)), (x, y) \in D$, 其中 D 是 xy 平面上具有分段光滑边界的有界闭区域, 则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_D R(x, y, z(x, y)) dx dy. \quad (13.8.19)$$

注意到 (13.8.19) 右端是二重积分, 当曲面的定向为朝着 z 正轴则积分号前取+, 当曲面的定向为朝着 z 负轴则积分号前取-.

如果在计算

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz$$

中 Σ 的方程可表示为 $\mathbf{r}(y, z) = (x(y, z), y, z)$, $(y, z) \in D$, 其中 D 是 yz 平面上具有分段光滑边界的有界闭区域. 此时

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz = \pm \iint_D P(x(y, z), y, z) dydz. \quad (13.8.20)$$

当曲面的定向为朝着 x 正轴则积分号前取 $+$, 当曲面的定向为朝着 x 负轴则积分号前取 $-$.

另一方面如果 $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, z(x, y))$, $(x, y) \in D$, 其中 D 是 xy 平面上具有分段光滑边界的有界闭区域, 则作变量替换

$$dydz = \cos \alpha dS = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} \cdot \cos \gamma dS, \quad \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ z_x & z_y \end{vmatrix} = -z_x$$

从而得到

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz = \iint_{\Sigma} P(x, y, z) (-z_x) dxdy = \mp \iint_D P(x, y, z(x, y)) z_x dxdy. \quad (13.8.21)$$

曲面的定向为朝着 z 正轴则积分号前取 $-$, 当曲面的定向为朝着 z 负轴则积分号前取 $+$.

例13.8.9. (1) 计算

$$I := \iint_{\Sigma} xyz dxdy,$$

其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧在第一、第五卦限的部分.

(2) 计算

$$I := \iint_S x dydz + y dzdx + z dxdy,$$

其中 S 是椭球面 $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ 的外侧.

(3) 计算

$$I := \iint_S (x^2 + x) dydz + \sqrt{z} dxdy,$$

其中 S 为抛物面 $z = (x^2 + y^2)/2$ 在 $z = 0$ 和 $z = 2$ 之间的部分, 定向取下侧.

(4) 计算

$$I := \iint_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy,$$

其中 $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^3/c^2 = 1, z \geq 0\}$. 这里 $a, b, c > 0$.

解: 令

$$x = a \sin \varphi \cos \theta, \quad y = b \sin \varphi \sin \theta, \quad z = c \cos \varphi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

则得到

$$I = abc \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\pi} (a^2 \sin^5 \varphi \cos^4 \theta + b^2 \sin^5 \varphi \sin^4 \theta + c^2 \sin \varphi \cos^4 \varphi) d\theta.$$

利用Beta函数的基本性质(见(13.4.7))

$$\begin{aligned} I &= abc \left[a^2 B\left(3, \frac{1}{2}\right) B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) + b^2 B\left(3, \frac{1}{2}\right) B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) + c^2 \pi B\left(\frac{5}{2}, 1\right) \right] \\ &= abc(a^2 + b^2 + c^2) \frac{\pi \Gamma(5/2)}{\Gamma(7/2)} = \frac{2\pi}{5} abc(a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

(5) 计算

$$I := \iint_{\Sigma} f(x) dydz + g(y) dx dz + h(z) dx dy,$$

其中 $f, g, h \in C([0, +\infty))$ 且 Σ 是长方体 $[0, a] \times [0, b] \times [0, c]$ 的表面外侧.

解: 对积分

$$\iint_{\Sigma} f(x) dydz$$

来说, 只有在两个表面 $\Sigma_0 = \{0\} \times [0, b] \times [0, c]$ 和 $\Sigma_a := \{a\} \times [0, b] \times [0, c]$ 上的积分是有贡献的. 故

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} f(x) dydz &= \iint_{\Sigma_1} f(0) dydz + \iint_{\Sigma_a} f(a) dydz \\ &= -f(0) \iint_{0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c} dydz + f(a) \iint_{0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c} dydz = [f(z) - f(0)]bc. \end{aligned}$$

同理得到

$$\iint_{\Sigma} g(y) dz dx = [g(b) - g(0)]cz, \quad \iint_{\Sigma} h(z) dx dy = [h(c) - h(0)]ab.$$

相加得到

$$I = abc \left[\frac{f(a) - f(0)}{a} + \frac{g(b) - g(0)}{b} + \frac{h(c) - h(0)}{c} \right]. \quad \square$$

(6) 计算

$$I := \iint_{\Sigma} [f(x, y, z) + x] dydz + [2f(x, y, z) + y] dz dx + [f(x, y, z) + z] dx dy,$$

其中 Σ 是 $x - y + z = 1$ 位于第四象限的上侧且 $f \in C(\Sigma)$.

解: 考虑向量值函数

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (f(x, y, z) + x, 2f(x, y, z) + y, f(x, y, z) + z)$$

和单位法向量

$$\mathbf{n} := \frac{(1, -1, 1)}{\sqrt{3}}.$$

则第二型曲面积分可写成

$$I = \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (x - y + z) dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}. \quad \square$$

§13.9 Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式

在这节中我们把一元函数 $f(x)$ 的 Newton-Leibniz 公式

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

推广到高维情形.

§13.9.1 Green 公式

曲线 $L \subset \mathbb{R}^2$, $r(t) = (x(t), y(t))$ ($\alpha \leq t \leq \beta$), 称为 **Jordan 曲线(Jordan curve)** 如果 $r(\alpha) = r(\beta)$ 且 $r(t_1) \neq r(t_2)$ 对任何 $t_1 \neq t_2$ ($t_1, t_2 \in (\alpha, \beta)$) 都成立.

给定区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 并令

$$\Omega(D, p) := \{f \in C([0, 1], D) | f(0) = f(1) = p\},$$

这里 $p \in D$ 且 $C([0, 1], D)$ 表示 $[0, 1]$ 到 D 的所有连续映射. 显然常值映射

$$c_p : [0, 1] \rightarrow D, \quad s \mapsto p,$$

属于 $\Omega(D, p)$. 映射 f 和 g 是**同伦的(homotopic)**, 记为 $f \sim g$, 如果存在连续映射

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D, \quad (s, t) \mapsto H(s, t),$$

满足条件

$$H(s, 0) = f(s), \quad H(s, 1) = g(s), \quad f(0) = g(0) = H(0, t) = H(1, t) = f(1) = g(1).$$

练习13.9.1. 证明 \sim 是 $\Omega(D, p)$ 上的等价关系.

根据练习13.9.1 令

$$[f] := \{g \in \Omega(D, p) | g \sim f\}$$

为 f 的等价类并定义 D 在 p 处的**基本群(fundamental group)** 为

$$\pi_1(D, p) := \{[f] | f \in \Omega(D, p)\}. \quad (13.9.1)$$

任取 $f, g \in \Omega(D, p)$ 定义 $f * g$ 为

$$(f * g)(s) := \begin{cases} f(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ g(1 - 2s), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

在 $\Omega(D, p)$ 中引入乘法:

$$[f] \cdot [g] := [f * g].$$

练习13.9.2. 验证上述乘法 \cdot 的定义不依赖代表元的选取. 从而 $(\pi_1(D, p), \cdot)$ 构成一个群而且单位元是 $[c_p]$.

称区域 D 是**单连通的(simply-connected)** 如果 $\pi_1(D, p) = \{[c_p]\}$, 即如果 $f \sim c_p$ 对任何 $f \in \Omega(D, p)$ 都成立.

给定区域 $D \subset \mathbb{R}^2$, 它的边界 $\partial\Omega$ 是平面曲线从而有两个方向. 定义 ∂D 的正向如下: 如果沿着 ∂D 走一圈 D 总是在左边. 这个正向也称为**诱导定向(induced orientation)**.

定理13.9.3. (Green 公式) 假设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是由有限条光滑或分段光滑的 Jordan 曲线所围成的区域, 并取定 ∂D 的正向. 对任何 $P, Q \in C^1(D)$, 有

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (13.9.2)$$

证: (1) 首先对区域

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(y) \leq x \leq \psi(y), c \leq y \leq d \right\}$$

完成证明. 计算得到

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} Q dy &= \int_{\widehat{AB}} Q(x, y) dy + \int_{\widehat{BC}} Q(x, y) dy + \int_{\widehat{CE}} Q(x, y) dy + \int_{\widehat{EA}} Q(x, y) dy \\ &= \int_c^d Q(\psi(y), y) dy - \int_c^d Q(\varphi(y), y) dy = \int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy, \end{aligned}$$

这里

$$A = (\varphi(c), c), \quad B = (\psi(c), c), \quad C = (\psi(d), d), \quad D = (\varphi(d), d).$$

同理对区域

$$\tilde{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \tilde{\varphi}(x) \leq y \leq \tilde{\psi}(x) \right\}$$

得到

$$\int_{\partial \tilde{D}} P dx = - \iint_{\tilde{D}} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

如果区域 D 可写成

$$\begin{aligned} D &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(y) \leq x \leq \psi(y), c \leq y \leq d \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \tilde{\varphi}(x) \leq y \leq \tilde{\psi}(x) \right\} \end{aligned}$$

则得到

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

(2) (D 单连通的) 接下来假设区域 D 可分割成有限多个形如

$$D_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(y) \leq x \leq \psi(y), c \leq y \leq d\}$$

的子区域. 根据积分区域的可加性, 区域 D 上的二重积分等于子区域 D_y 上的二重积分的和. 公式 (13.9.2) 对每个子区域都成立. 但是相邻两个子区域在它们的公共边界上诱导出相反的定向, 所以边界 ∂D 上的二重积分的总体贡献为零, 从而此时 (13.9.2) 也成立.

如果 D 可分割成有限多个形如 $D_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \tilde{\varphi}(x) \leq y \leq \tilde{\psi}(x)\}$ 的子区域, 同理可证公式 (13.9.2) 也成立.

(3) (D 是一般区域) 如果区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 包含子区域 D' , 则 $D \setminus D'$ 诱导出 $\partial(D \setminus D')$ 上的自然定向. 沿着包含在 D 中的线把 $D \setminus D'$ 割成单连通区域, 此时两条割线的定向互为相反. 利用之前的证明可知 (13.9.2) 也成立.

如果区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 包含有限多个子区域, 对每个子区域作如上类似的分割, 同理也可证明 (13.9.2) 成立. \square

假设边界 ∂D 是光滑曲线:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

如果令 $\boldsymbol{\tau}$ 为 ∂D 正向的单位切向量, 即

$$\boldsymbol{\tau} \equiv \boldsymbol{\tau}(t) := \frac{(x'(t), y'(t))}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}},$$

则

$$dx = x'(t) dt = \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

若令 $(\boldsymbol{\tau}, x)$ 为 $\boldsymbol{\tau}$ 和 x 正轴的夹角, 则得到

$$\cos(\boldsymbol{\tau}, x) = \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}.$$

因此

$$dx = \cos(\boldsymbol{\tau}, x) ds.$$

类似地令 $(\boldsymbol{\tau}, y)$ 为 $\boldsymbol{\tau}$ 和 y 正轴的夹角, 则得到

$$\cos(\boldsymbol{\tau}, y) = \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$$

和

$$dy = \cos(\boldsymbol{\tau}, y) ds.$$

另一方面令 \mathbf{n} 为 ∂D 的 (外) 单位法向量, 则

$$\cos(\boldsymbol{\tau}, x) = -\cos(\mathbf{n}, y), \quad \cos(\boldsymbol{\tau}, y) = \cos(\mathbf{n}, x).$$

如果 $F, G \in C^1(D)$, 则根据定理13.9.3 得到

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) dx dy &= \int_{\partial D} F dy - G dx \\ &= \int_{\partial D} [F \cos(\boldsymbol{\tau}, y) - G \cos(\boldsymbol{\tau}, x)] ds = \int_{\partial D} [F \cos(\mathbf{n}, x) + G \cos(\mathbf{n}, y)] ds. \end{aligned} \quad (13.9.3)$$

注13.9.4. (1) 如果 $f \in C^1([a, b])$, 对区域 $D := [a, b] \times [0, 1]$ 应用定理13.9.3 得到

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x) dx &= \int_0^1 dy \int_a^b f'(x) dx = \iint_D f'(x) dx dy \\ &= \int_{\partial D} f(x) dy = \int_0^1 f(b) dy + \int_1^0 f(a) dy = f(b) - f(a). \end{aligned}$$

即得到 Newton - Leibniz 公式.

(2) 如果 D 是单连通区域且边界 ∂D 是光滑的, 则

$$|D| = \iint_D dx dy = \int_{\partial D} x dy = - \int_{\partial D} y dx = \frac{1}{2} \left(\int_{\partial D} x dy - y dx \right). \quad (13.9.4)$$

例13.9.5. (1) 求

$$x = a \cos^3 t, \quad y = b \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

所围成区域的面积.

(2) 求

$$I := \int_L [e^x \sin y - b(x + y)] dx + (e^x \cos y - ax) dy,$$

其中 a, b 为正常数, L 为从点 $A = (2a, 0)$ 沿着曲线 $y = \sqrt{2ax - x^2}$ 到点 $O = (0, 0)$ 的弧.

(3) 计算曲线积分

$$I := \oint_L \frac{(yx^3 + e^y)dx + (xy^3 + xe^y - 2y)dy}{9x^2 + 4y^2},$$

其中 L 是椭圆 $x^2/4 + y^2/9 = 1$, 且沿顺时针方向.

(4) 计算

$$I := \int_L 2xy dx + (x^2 - y^2) dy,$$

这里 L 是从 $A = (0, 0)$ 到 $B = (1, 0)$ 的任何位于 x 轴上方的光滑曲线.

解: 连接 A 和 B 得到闭区域 D . 则得到

$$-I + \int_{\vec{AB}} 2xy dx + (x^2 - y^2) dy = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy = 0,$$

这里 $P = 2xy$ 和 $Q = x^2 - y^2$. 故 $I = 0$. \square

(5) 设 L 是以 (x_0, y_0) 为圆心半径为 r 的圆周, L 所围的区域记为 D . 假设 $\mathbf{F} = (P, Q) \in C^1$. 求

$$I := \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{|D|} \oint_L \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$$

其中 \mathbf{n} 是 L 的外法线方向.

解: 根据 (13.9.3) 得到

$$\begin{aligned} I &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{|D|} \oint_L \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{|D|} \oint_L [P \cos(\mathbf{n}, x) + Q \cos(\mathbf{n}, y)] ds \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{|D|} \oint_L \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = P_x(x_0, y_0) + Q_y(x_0, y_0). \quad \square \end{aligned}$$

(6) 假设 L 是平面中一条简单光滑闭曲线, 记所围区域为 D 而 \mathbf{n} 为 L 上的单位外法向量. 对固定点 $P_0 := (x_0, y_0) \notin L$, 令 \mathbf{r} 为向量 $\overrightarrow{P_0 P}$ 其中 $P = (x, y) \in L$. 计算

$$I := \int_L \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} ds, \quad r := |\mathbf{r}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

解: 因为 $\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} / r$ 所以如果 P_0 在 D 外面则得到

$$\begin{aligned} I &= \int_L \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^2} ds = \int_L \left(\frac{x - x_0}{r^2}, \frac{y - y_0}{r^2} \right) \cdot \mathbf{n} ds \\ &= \int_L \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x - x_0}{r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y - y_0}{r^2} \right) \right) dx dy \\ &= \int_L \left(\frac{r^2 - (x - x_0)2(x - x_0)}{r^4} + \frac{r^2 - (y - y_0)2(y - y_0)}{r^4} \right) dx dy = 0. \end{aligned}$$

如果 P_0 在 D 内部, 取 $\epsilon > 0$ 充分小使得 $B^2(P_0, \epsilon) \subset D$. 根据 Green 公式得到

$$I = \iint_{\partial B^2(P_0, \epsilon)} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^2} ds$$

此时 $\partial B^2(P_0, \epsilon)$ 的定向和 L 的定向相反. 故

$$I = \frac{1}{\epsilon^2} \iint_{\partial B^2(P_0, \epsilon)} \epsilon ds = 2\pi. \quad \square$$

(7) 假设 L 是从 $A = (1, 0)$ 到 $B = (0, 2)$ 且位于第一象限内的简单光滑曲线, \mathbf{n} 是 L 上的方单位法向量且指向原点, r 是 L 上的点到原点的距离. 计算

$$I := \int_L \frac{\partial \ln r}{\partial \mathbf{n}} ds.$$

解: 考虑曲线段

$$L_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = \epsilon, x, y \geq 0\},$$

和 L_1 (从 B 到 $(0, \epsilon)$ 的直线段) 和 L_3 (从 $(\epsilon, 0)$ 到 A 的直线段). 记这些曲线段构成闭曲线 C , 而把所围的区域记为 D . 利用公式 (13.9.3) 并注意到 I 中的 \mathbf{n} 是内单位法向量, 得到

$$\int_C \frac{\partial \ln r}{\partial \mathbf{n}} ds = \iint_D [((\ln r)_x)_x + ((\ln r)_y)_y] dx dy = \iint_D \Delta \ln r dx dy = 0.$$

在 L_1 和 L_2 上 $\mathbf{grad}(\ln r)$ 和 \mathbf{n} 垂直, 所以得到

$$I = \int_{L_2} \frac{\partial \ln r}{\partial \mathbf{n}} ds = \int_{L_2} \left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2} \right) \cdot \left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{y}{\epsilon} \right) ds = \frac{1}{\epsilon} \int_{L_2} ds = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

(8) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq a^2\}$ ($a \geq 0$), $f(x, y) \in C^1(D)$, 且 $f|_{\partial D} = 0$.

证明

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \frac{\pi a^2}{3} \max_D |\mathbf{grad}(f)|.$$

证: 利用 Green 公式和 $f|_{\partial D} = 0$ 得到

$$\iint_D [f(x, y) + y f_y(x, y)] dx dy = \iint_D (y f)_y dx dy = \int_{\partial D} (-y f(x, y)) dx = 0.$$

同理可得

$$\iint_D [f(x, y) + x f_x(x, y)] dx dy = 0.$$

因此

$$\begin{aligned} \left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| &= \left| -\frac{1}{2} \iint_D (x f_x(x, y) + y f_y(x, y)) dx dy \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{f_x^2 + f_y^2} dx dy \leq \frac{1}{2} \max_D |\mathbf{grad}(f)| \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \max_D |\mathbf{grad}(f)| \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 dr = \frac{\pi a^3}{3} \max_D |\mathbf{grad}(f)|. \quad \square \end{aligned}$$

(9) (Poincaré 不等式) 假设 D 是有由简单光滑闭曲线 L 围成的区域, $f \in C^1(\bar{D})$, $f|_L = 0$. 证明

$$\iint_D f^2(x, y) dx dy \leq \left(\max_{(x, y) \in D} (x^2 + y^2) \right) \iint_D |\mathbf{grad}(f)|^2 dx dy.$$

证: 利用 (8) 中的公式得到

$$\begin{aligned} \iint_D f^2(x, y) dx dy &= -\frac{1}{2} \iint_D [x(f^2)_x(x, y) + y(f^2)_y(x, y)] dx dy \\ &= -\iint_D [x f(x, y) f_x(x, y) + y f(x, y) f_y(x, y)] dx dy \\ &\leq \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} |f(x, y)| |\mathbf{grad}(f)|(x, y) dx dy \\ &\leq \left(\max_{(x, y) \in D} \sqrt{x^2 + y^2} \right) \iint_D |f| |\mathbf{grad}(f)| dx dy \\ &\leq \left(\max_{(x, y) \in D} \sqrt{x^2 + y^2} \right) \left(\iint_D f^2(x, y) dx dy \right)^{1/2} \left(\iint_D |\mathbf{grad}(f)|^2 dx dy \right)^{1/2}. \quad \square \end{aligned}$$

§13.9.2 曲线积分的路径无关性

例13.9.5 (4) 告诉我们曲线积分和曲线 L 无关. 这样的性质称为曲线积分的路径无关性.

定理13.9.6. (Green 定理) (1) 假设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是区域且 $P, Q \in C(D)$. 则下列命题等价:

(a) 对 D 内任意分段光滑曲线 L , 曲线积分

$$\int_L Pdx + Qdy$$

与路径 L 无关, 只与 L 的起点和终点有关;

(b) $Pdx + Qdy$ 在 D 上是正合的, 即存在 $U \in C^1(D)$, 使得 $dU = Pdx + Qdy$, 这时称 U 为微分形式 $Pdx + Qdy$ 的原函数;

(c) 沿着 D 内任意分段光滑闭曲线 L , 有

$$\oint_L Pdx + Qdy = 0.$$

(2) 如果进一步假设 $P, Q \in C^1(D)$, 则上述等价的 (a), (b), (c) 可推出

(d) 在 D 内处处成立

$$Q_x = P_y. \quad (13.9.5)$$

(3) 如果 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是单连通的且 $P, Q \in C^1(D)$, 则 (a), (b), (c), (d) 互相等价.

证: (1) 假设 (a) 成立. 任取 $(x_0, y_0) \in D$. 则曲线积分

$$U(x, y) := \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy \quad (13.9.6)$$

由 (x, y) 唯一确定. 既然曲线积分和路径无关, 利用定积分第一中值定理得到

$$\begin{aligned} \Delta U &:= U(x + \Delta x, y) - U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x + \Delta x, y)} Pdx + Qdy - \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy \\ &= \int_{(x, y)}^{(x + \Delta x, y)} Pdx + Qdy = \int_x^{x + \Delta x} Pdx = P(\xi, y)\Delta x, \end{aligned}$$

这里 ξ 介于 x 和 $x + \Delta x$ 之间. 故

$$U_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} = P(x, y).$$

同理可证 $U_y = Q(x, y)$. 根据定理12.1.6 原函数 U 必可微且偏导数都是连续的.

反之, 假设 $Pdx + Qdy$ 是正合的, 即存在原函数 U 满足 $dU = Pdx + Qdy$. 对 D 内的任意分段光滑曲线 L , 根据定义, L 是由有限多条光滑曲线所组成. 为了证明曲线积分与路径 L 无关, 不妨假设 L 本身就是光滑的:

$$L: x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b.$$

从而得到

$$\begin{aligned} \int_L Pdx + Qdy &= \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt \\ &= \int_a^b dU(x(t), y(t)) = U(x(t), y(t)) \Big|_a^b = U(x(b), y(b)) - U(x(a), y(a)). \end{aligned}$$

故取曲线积分只和路径的起点和终点有关.

假设 (a) 或 (b), 则直接由上述公式得到 (c). 反之假设 (c) 成立并任取两条封端光滑曲线 L_1 和 L_2 使得 $s_{L_1} = s_{L_2}$ 且 $e_{L_1} = e_{L_2}$. 因为 $L_1 + (-L_2)$ 构成了一个分段光滑闭曲线, 从而得到

$$0 = \oint_{L_1 + (-L_2)} Pdx + Qdy = \left(\int_{L_1} Pdx + Qdy \right) + \left(\int_{-L_2} Pdx + Qdy \right)$$

即

$$\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy.$$

(2) 假设 $P, Q \in C^1(D)$ 且满足 (b). 则得到 $P = U_x$ 和 $Q = U_y$. 因此

$$P_y = U_{xy} = U_{yx} = Q_x$$

这里用到了定理12.1.13.

(3) 利用定理13.9.3. \square

例13.9.7. (1) 求积分

$$I = \int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

(2) 证明 \mathbb{R}^2 上

$$\omega = (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - mx)dy$$

是某个函数的全微分, 并计算积分

$$I := \int_L \omega,$$

其中 L 是从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的任意路径.

(3) 计算

$$I := \oint_L \frac{xdy - ydx}{4x^3 + y^2},$$

其中 L 是以 $(1,0)$ 为中心 R 为半径的圆 ($R \neq 1$), 且取逆时针方向.

(4) 假设 L 为由 $A = (\pi/2, 0)$ 沿着曲线 $y = \frac{\pi}{2} \cos x$ 到 $B = (0, \pi/2)$ 的弧段, 求积分

$$I := \int_L \frac{(3y-x)dx + (y-3x)dy}{(x+y)^3}.$$

(5) 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为不含原点的区域, 考虑 Ω 上的向量函数 $f(r)$, 其中 $r = |r|$ 且 $r = (x, y, z) \in \Omega$. 如果函数 $f(r)$ 在 $r > 0$ 上连续, 则曲线积分

$$\int_L f(r)(x dx + y dy + z dz)$$

和 Ω 内的曲线 L 无关.

证: 注意到

$$f(r)(x dx + y dy + z dz) = rf(r) \left(\frac{x}{r} dx + \frac{y}{r} dy + \frac{z}{r} dz \right) = rf(r) dr.$$

因此 $du = f(r)(x dx + y dy + z dz)$, 其中 u 是 $rf(r)$ 的一个原函数. 根据 Green 定理得到曲线积分和 L 无关. \square

(6) 假设 $f(x, y) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ 且

$$\Delta f + f_x = 0 \quad ((x, y) \neq (0, 0)), \quad 2\pi r f_x \sim x \quad (r \rightarrow 0), \quad 2\pi r f_y \sim y \quad (r \rightarrow 0).$$

证明曲线积分

$$I := \int_{L_R} e^x (-f_y dx + f_x dy)$$

和 R 无关, 其中 $L_R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = R^2\}$.

证: 令

$$P = -e^x f_y, \quad Q = e^x f_x.$$

计算得到

$$P_y - Q_x = -e^x f_{yy} - e^x f_x - e^x f_{xx} = -e^x (\Delta f + f_x) = 0, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

对任意 $r \in (0, R)$ 考察区域 $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$. 利用 Green 公式得到

$$\begin{aligned} I &= \int_{L_r} e^x (-f_y dx + f_x dy) \\ &= \int_0^{2\pi} e^{r \cos \theta} [\sin \theta f_y(r \cos \theta, r \sin \theta) + \cos \theta f_x(r \cos \theta, r \sin \theta)] r d\theta \\ &\rightarrow \int_0^{2\pi} \left[\frac{\sin \theta}{2\pi} \sin \theta + \frac{\cos \theta}{2\pi} \cos \theta \right] d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} = 1. \quad \square \end{aligned}$$

(7) 求 $P, Q \in C^1(\mathbb{R}^2)$ 的关系使得曲线积分

$$I(\alpha, \beta) = \int_L P(x + \alpha, y + \beta) dx + Q(x + \alpha, y + \beta) dy$$

和常数 α, β 无关, 其中 $L \subset \mathbb{R}^3$ 是任意光滑闭曲线.

解: 根据题意

$$\begin{aligned} 0 &= I(\alpha, \beta) - I(0, 0) = \int_L [P(x + \alpha, y + \beta) - P(x, y)] dx + [Q(x + \alpha, y + \beta) - Q(x, y)] dy \\ &= \iint_D [f(x + \alpha, y + \beta) - f(x, y)] dx dy \end{aligned}$$

这里 $f(x, y) := Q_x(x, y) - P_y(x, y)$. 对任意 $(x_0, y_0) \in D$ 和任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 考虑 ($n \gg 1$)

$$D_n := \left\{ (x, y) \in D \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \frac{1}{n^2} \right\} \subset D.$$

利用积分中值定理得到

$$0 = \iint_{D_n} [f(x + \alpha, y + \beta) - f(x, y)] dx dy = \frac{\pi}{n^2} [f(x_n + \alpha, y_n + \beta) - f(x_n, y_n)],$$

这里 $(x_n, y_n) \in D_n$. 连续性推出 $f(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) = f(x_0, y_0)$, 即 $f(x, y) = C$ (常数). 故

$$Q_x - P_y = C.$$

上述条件可写成

$$(Q - Cx)_x - P_y = 0 \quad \text{或} \quad Q_x - (P + Cy)_y = 0.$$

根据Green定理存在 $u \in C^1(D)$ 或者 $v \in C^1(D)$ 满足

$$u_x = P, \quad u_y = Q - Cx, \quad \text{或} \quad v_x = P + Cy, \quad v_y = Q.$$

反之假设这个条件成立, 则得到

$$I(\alpha, \beta) = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy = \iint_D (u_{xy} + C - u_{xy}) dx dy = C|D|.$$

即和 α, β 无关. \square

§13.9.3 Gauss 公式

之前关于单连通区域的定义可推广高维. 区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 称为单连通的如果对任意 $p \in \Omega$ 有

$$f \sim c_p, \quad \forall f \in C([0, 1], \Omega) \text{ 且 } f(0) = f(1) = p,$$

即存在连续映射 $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega, (s, t) \mapsto H(s, t)$, 满足条件

$$H(s, 0) = f(s), \quad H(s, 1) = c_p, \quad f(0) = c_p(0) = H(0, t) = H(1, t) = f(1) = c_p(1),$$

这里 $c_p: s \mapsto p$ 是 $[0, 1]$ 上的常值函数.

定理13.9.8. (Gauss 公式或 Gauss-Ostrogradskii 公式) 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是区域且边界 $\partial\Omega$ 是由分段光滑的定向 (取外侧) 曲面所构成. 如果函数 $P, Q, R \in C^1(\Omega)$, 则

$$\iint_{\partial\Omega} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (13.9.7)$$

证: (1) 首先考虑特殊区域

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in D, \varphi(y, z) \leq x \leq \psi(y, z)\},$$

这里 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是 Ω 在 yz 平面上的投影. 定义定向曲面

$$S_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = \psi(y, z), (y, z) \in D\},$$

$$S_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = \varphi(y, z), (y, z) \in D\}$$

其上的定向是由 Ω 所诱导出来的 (因此 S_1 的定向指向 x 正轴而 S_2 的定向指向 x 负轴). 故

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} P_x dx dy dz &= \iint_D dy dz \int_{\varphi(y,z)}^{\psi(y,z)} P_x dx \\ &= \iint_D [P(\psi(y, z), y, z) - P(\varphi(y, z), y, z)] dy dz \\ &= \iint_{S_1} P dy dz + \iint_{S_2} P dy dz = \iint_{\partial\Omega} P dy dz. \end{aligned}$$

同理如果 $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y), (x, y) \in D\}$, 则

$$\iiint_{\Omega} R_z dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} R dx dy;$$

如果 $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \varphi(z, x) \leq y \leq \psi(z, x), (z, x) \in D\}$, 则

$$\iiint_{\Omega} Q_y dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} Q dz dx.$$

(2) (Ω 是单连通区域) 此时 Ω 可分解成有限个上述三种子区域的并. 在每个子区域上 (13.9.7) 成立, 而在相邻两个子区域的公共边界上, 方向互反的两个曲面积分抵消, 从而第二型曲面积分就等于这些子区域上三重积分的和.

(3) (Ω 是一般区域) 此时用 n 个光滑定向曲面把区域 Ω 分成 $n+1$ 个单连通区域 (这里 n 表示 Ω 的“洞”数目). 注意到此时每个这样的光滑定向曲面把“洞”切开, 得到的相邻边界的定向是相反的. 也就是说新形成的边界对第二型曲面积分没有任何贡献, 故 (13.9.7) 此时也成立. \square

注13.9.9. (1) 如果 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 中的具有光滑边界的有界闭区域, 则其可求体积且体积为

$$|\Omega| = \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} x dy dz = \iint_{\partial\Omega} y dz dx = \iint_{\partial\Omega} z dx dy$$

$$= \frac{1}{3} \iint_{\partial\Omega} x dydz + y dzdx + z dxdy, \quad (13.9.8)$$

这里 $\partial\Omega$ 的定向取外侧.

(2) 假设 $D \subset \mathbb{R}^3$ 是有界光滑闭曲面并任取固定点 $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 \setminus D$. 计算 Gauss 积分

$$I(\xi, \eta, \zeta) := \iint_D \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{|\mathbf{r}|^2} dS \quad (13.9.9)$$

这里 $\mathbf{r} = (x - \xi, y - \eta, z - \zeta)$, \mathbf{n} 是 D 的外法向量.

解: 因为

$$\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \frac{x - \xi}{r} \cos(\mathbf{n}, x) + \frac{y - \eta}{r} \cos(\mathbf{n}, y) + \frac{z - \zeta}{r} \cos(\mathbf{n}, z),$$

这里 $r := |\mathbf{r}|$, 得到

$$I(\xi, \eta, \zeta) = \iint_S \frac{x - \xi}{r^2} dydz + \frac{y - \eta}{r^3} dzdx + \frac{z - \zeta}{r^3} dxdy.$$

令 Ω 是由 D 所围成的区域. 如果 $(\xi, \eta, \zeta) \notin \Omega$, 则

$$I(\xi, \eta, \zeta) = \iiint_{\Omega} \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3|\mathbf{r}|^2}{r^5} \right) dxdydz = 0.$$

如果 $(\xi, \eta, \zeta) \in \Omega$, 则考虑 Ω 内的小球面

$$D_\epsilon := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 = \epsilon^2 \right\}$$

及其所围成的小球 Ω_ϵ . 应用定理 13.9.8 到区域 $\Omega \setminus \Omega_\epsilon$ 得到

$$I(\xi, \eta, \zeta) = \iint_{D_\epsilon} \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS = \iint_{D_{0\epsilon}} \frac{dS}{\epsilon^2} = \frac{1}{\epsilon^2} \cdot 4\pi\epsilon^2 = 4\pi. \quad \square$$

例 13.9.10. (1) 计算积分

$$I := \iint_{\Sigma} (x+1) dydz + (y+1) dzdx + (z+1) dxdy,$$

其中 Σ 为平面 $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$ 和 $z = 0$ 所围区域的边界, 并取定向为外侧.

(2) 求曲面积分

$$I := \iint_S yz dzdx + 2 dxdy,$$

其中 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 外侧在 $z \geq 0$ 的部分 (定向取上侧), 即上半球面.

§13.9.4 Stokes 公式

假设 Σ 是具有分段光滑或光滑边界的光滑定向曲面, 并取定 Σ 的定向. 定义 $\partial\Sigma$ 的正向如下: 沿着 $\partial\Sigma$ 走曲面 Σ 总是在左边. 把这个定向称为边界 $\partial\Omega$ 上的诱导定向(inherited orientation). 即, 边界上每个点沿着曲线 $\partial\Omega$ 的切向量和曲面 Σ 的外法向量构成了一个自然坐标架.

定理13.9.11. (Stokes 公式) 假设 Σ 是光滑定向曲面且边界 $\partial\Sigma$ 为分段光滑闭曲面(取诱导定向). 对任何 $P, Q, R \in C^1(\bar{\Sigma})$, 有

$$\int_{\partial\Sigma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \quad (13.9.10)$$

证: 和之前一样, 不妨假设

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = f(x, y), (x, y) \in D\}.$$

这里 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是由分段光滑的 Jordan 曲线所围成的区域. 利用定理13.9.3 得到

$$\int_{\partial\Sigma} Pdx = \int_{\partial D} P(x, y, f(x, y))dx = - \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} f_y \right) dxdy.$$

另一方面

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial x} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = - \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} f_y \right) dxdy.$$

故

$$\int_{\partial\Sigma} Pdx = \iint_{\Sigma} P_z dzdx - P_y dxdy.$$

同理可证

$$\int_{\partial\Sigma} Qdy = \iint_{\Sigma} Q_x dxdy - Q_z dydz$$

和

$$\int_{\partial\Sigma} Rdz = R_y dydz - R_x dzdx.$$

三式相加得到 (13.9.10). \square

公式 (13.9.10) 也可写成

$$\int_{\partial\Sigma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS. \quad (13.9.11)$$

这里 $\alpha = (\mathbf{n}, x)$, $\beta = (\mathbf{n}, y)$, $\gamma = (\mathbf{n}, z)$.

例13.9.12. (1) 计算积分

$$I := \oint_C (z-y)dx + (x-z)dy + (x-y)dz,$$

其中 C 是两个曲面 $x^2 + y^2 = 1$ 和 $x - y + z = 2$ 的交线从 z 正轴往 z 负轴看, 并取 C 的方向为顺时针.

(2) 计算

$$I := \int_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz,$$

其中 L 是上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($z \geq 0, a > 0$) 和圆柱面 $x^2 + y^2 + ax = 0$ 的交线, 从 z 正轴看下去定向是逆时针的.

定理13.9.13. (1) 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是区域且 $P, Q, R \in C(\Omega)$. 则下列命题等价:

(a) 对 Ω 被的任意分段光滑曲线 L , 曲线积分

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz$$

与路径 L 无关, 只与 L 的起点和终点有关;

(b) $Pdx + Qdy + Rdz$ 在 Ω 内是正合的, 即存在 $U \in C^1(\Omega)$ 使得 $dUPdx + Qdy + Rdz$, 这是称 U 为微分形式 $Pdx + Qdy + Rdz$ 的原函数;

(c) 沿着 Ω 内任意分段光滑闭曲线 L , 有

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

(2) 如果进一步假设 $P, Q, R \in C^1(\Omega)$, 则上述等价的 (a), (b), (c) 可推出

(d) 在 Ω 内处处成立

$$R_y = Q_z, \quad P_z = R_x, \quad Q_x = P_y. \quad (13.9.12)$$

(3) 如果 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是单连通的且 $P, Q, R \in C^1(\Omega)$, 则 (a), (b), (c), (d) 互相等价.

证: 证明和定理13.9.6 类似. \square

例13.9.14. (1) 证明积分

$$I := \int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} x dx + y^2 dy - z^3 dz$$

和路径无关.

(2) 假设函数 $u = u(x, y, z)$ 在光滑定向曲面 S 所围成的区域 Ω 内是 C^2 的. 证明

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = \iiint_{\Omega} \Delta u dx dy dz, \quad (13.9.13)$$

$$\iint_S u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = \iiint_{\Omega} (|\mathbf{grad}(u)|^2 + u \Delta u) dx dy dz, \quad (13.9.14)$$

这里 \mathbf{n} 是曲面的外法向量.

解: 利用定理 13.9.8 得到

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS &= \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \cos \alpha dy dz + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \cos \beta dz dx + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \cos \gamma dx dy \right) \\ &= \iint_S (u_x dy dz + u_y dz dx + u_z dx dy) = \iiint_{\Omega} \Delta u dx dy dz. \end{aligned}$$

同理可得到

$$\begin{aligned} \iint_S u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS &= \iint_S u \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \cos \alpha dy dz + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \cos \beta dz dx + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \cos \gamma dx dy \right) \\ &= \iint_S u (u_x dy dz + u_y dz dx + u_z dx dy) = \iiint_{\Omega} ((uu_x)_x + (uu_y)_y + (uu_z)_z) dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega} (u \Delta u + u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) dx dy dz. \quad \square \end{aligned}$$

§13.9.5 * 流形上的 Stokes 公式

这里只给出高维区域的 Stokes 公式, 对任意流形上的 Stokes 公式可参见之后的章节. 令 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是区域且取 $\omega \in \Lambda_{\infty}^k(U)$ (定义见 (13.5.9)). 外微分算子 (13.5.10) 是指

$$\mathbf{d}\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (d\omega_{i_1 \dots i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \sum_{|I|=k} d\omega_I \wedge dx^I,$$

这里 $\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \sum_{|I|=k} \omega_I dx^I$. 易证 $\mathbf{d}^2 = 0$.

(1) $U \subset \mathbb{R}$: 若 $\omega = f \in \Lambda_{\infty}^0(U)$, 则

$$\mathbf{d}\omega = f'(x) dx.$$

(2) $U \subset \mathbb{R}^2$: 若 $\omega = P dx + Q dy \in \Lambda_{\infty}^1(U)$ 则

$$\mathbf{d}\omega = (Q_z - P_y) dx \wedge dy.$$

(3) $U \subset \mathbb{R}^3$: 若 $\omega = P dx + Q dy + R dz \in \Lambda_{\infty}^1(U)$, 则

$$\mathbf{d}\omega = (R_y - Q_z) dy \wedge dz + (P_z - R_x) dz \wedge dx + (Q_x - P_y) dx \wedge dy.$$

(4) $U \subset \mathbb{R}^3$: 若 $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy \in \Lambda_\infty^2(U)$, 则

$$d\omega = (P_x + Q_y + R_z)dx \wedge dy \wedge dz.$$

定理13.9.15. (Leibniz 公式) 如果 $\omega \in \Lambda_\infty^p(U)$ 和 $\eta \in \Lambda_\infty^q(U)$, 则

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta. \quad (13.9.15)$$

证: 对 $\omega = \sum_{|I|=p} \omega_I dx^I$ 和 $\eta = \sum_{|J|=q} \eta_J dx^J$ 得到

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= \sum_{|I|=p, |J|=q} d(\omega_I \eta_J dx^I \wedge dx^J) \\ &= \sum_{|I|=p, |J|=q} \left[\eta_J (d\omega_I \wedge dx^I) \wedge dx^J + \omega_I d\eta_J \wedge dx^I \wedge dx^J \right] \\ &= d\omega \wedge \eta + \sum_{|I|=p, |J|=q} \omega_I (-1)^{|I|} dx^I \wedge d\eta_J \wedge dx^J \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta. \quad \square \end{aligned}$$

对 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上的 n -形式 $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ 定义积分如下

$$\int_U \omega := \int_U f(x) dx. \quad (13.9.16)$$

从而得到 (暂不考虑假设条件)

• **(Newton-Leibniz 公式):** NW 公式可写成

$$\int_{\partial I} \omega = \int_I d\omega. \quad (13.9.17)$$

• **(Green 公式):** (13.9.2) 可写成

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega. \quad (13.9.18)$$

• **(Gauss 公式):** (13.9.7) 可写成

$$\int_{\partial \Omega} \omega = \int_\Omega d\omega. \quad (13.9.19)$$

• **(Stokes 公式):** (13.9.10) 可写成

$$\int_{\partial \Sigma} \omega = \int_\Sigma d\omega. \quad (13.9.20)$$

一般区域 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上的 Stokes 公式为

$$\int_{\partial U} \omega = \int_U d\omega, \quad \omega \in \Lambda_\infty^{n-1}(U). \quad (13.9.21)$$

这里 U 是光滑定向区域且在其光滑边界 ∂U 上诱导出定向.

§13.10 场论简介

本节引入场(field)的概念及常用的微分算子(differential operators).

§13.10.1 向量场

场是指对每个时间 t 都指定了一个向量值映射. 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是区域.

- (1) **数量场(scalar field)**: t 时刻指定区域 Ω 上的函数 $f(x, y, z, t)$.
- (2) **向量场(vector field)**: t 时刻指定区域 Ω 上的向量值映射 $f(x, y, z, t)$.
- (3) 若场不随时间变化而变化, 则称为**稳定场**, 否者称为**不稳定场**. 一般来说稳定向量场都可以表示称

$$F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)), \quad (x, y, z) \in \Omega. \quad (13.10.1)$$

- (4) 给定 Ω 上的稳定向量场 F . Ω 中的光滑曲线 Γ 称为 F 的**向量线(vector line)** 或**流线**, 如果 Γ 上每点出的切线方向都和 F 一致. 显然流线方程为

$$\frac{x'(t)}{P(\mathbf{r}(t))} = \frac{y'(t)}{Q(\mathbf{r}(t))} = \frac{z'(t)}{R(\mathbf{r}(t))}, \quad (13.10.2)$$

这里 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 是 Γ 的向量表达式. 如果进一步要求

$$\mathbf{r}'(t) = F(\mathbf{r}(t)), \quad t \in I, \quad (13.10.3)$$

这里 $\mathbf{r}(t)$ 是 Γ 的向量表达式, 则称 Γ 是 F 的**积分曲线(integral curve)**.

§13.10.2 数量场的等值面和梯度场

数量场 $f(x, y, z)$ 的等值面为

$$f^{-1}(c) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = c\}, \quad (13.10.4)$$

其中 c 是常数. 注意到等值面有可能为空集, 比如当 $c \notin f(\Omega)$ 时. 若 $f \in C^1(\Omega)$, 定义其**梯度(gradient)**为

$$\mathbf{grad}(f) := (f_x, f_y, f_z),$$

这是以向量场, 称为**梯度场(gradient field)**. 函数 f 沿着方向

$$\mathbf{v} = (\cos(\mathbf{v}, x), \cos(\mathbf{v}, y), \cos(\mathbf{v}, z))$$

的方向导数可表示成 (见 ??)

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{grad}(f) \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{grad}(f)| \cos \theta = |\mathbf{grad}(f)| \cos(\mathbf{grad}f(f), \mathbf{v}),$$

其中 θ 是 ν 和梯度方向的夹角.

等值面 (13.10.4) 上的单位法向量为

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|\mathbf{grad}(f)|} (f_x, f_y, f_z),$$

此时

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = |\mathbf{grad}(f)| \geq 0, \quad \mathbf{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{n}.$$

即函数 f 在一点的梯度和其等值面在该点的单位法向量是平行的, 且这个方向是方向导数取得最大值 $|\mathbf{grad}(f)|$ 的方向.

§13.10.3 向量场的散度

假设 $F = (P, Q, R) \in C(\Omega)$ 且 Σ 是 Ω 中的光滑定向曲面, 则曲面积分

$$\Phi(F, \Sigma) := \iint_{\Sigma} F \cdot \mathbf{n} dS \quad (13.10.5)$$

称为向量场 F 沿着曲面 Σ 的**通量(flux)**. 当 $F \in C^1(\Omega)$ 时, 称

$$\mathbf{div}(F) := P_x + Q_y + R_z \quad (13.10.6)$$

为 F 的**散度(divergence)**. F 称为**无源场(divergence-free field)** 若 $\mathbf{div}(F) = 0$. 用上述公式 Gauss 公式 (13.9.7) 可写成

$$\iint_{\partial\Omega} F \cdot dS = \iiint_{\Omega} \mathbf{div}(F) dV. \quad (13.10.7)$$

性质13.10.1. (1) $\mathbf{div}(\lambda F + \mu G) = \lambda \mathbf{div}(F) + \mu \mathbf{div}(G)$, 这里 λ, μ 是常数.

(2) $\mathbf{div}(fF) = f \mathbf{div}(F) + \mathbf{grad}(f) \cdot F$.

§13.10.4 向量场的旋度

假设 $F = (P, Q, R) \in C(\Omega)$ 且 Γ 是 Ω 中的光滑定向曲线, 则曲线积分

$$\int_{\Gamma} F \cdot \tau ds = \int_{\Gamma} F \cdot ds \quad (13.10.8)$$

称为向量场 F 沿着曲线 Γ 的**环量(circulation)**. 当 $F \in C^1(\Omega)$ 时, 称

$$\mathbf{rot}(F) := \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) \quad (13.10.9)$$

为 F 的**旋度(rotation)**. F 称为**无旋场(rotation-free field)**. 则 Stokes 公式 (13.9.10) 可写成

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{rot}(F) \cdot dS = \int_{\partial\Sigma} F \cdot ds. \quad (13.10.10)$$

性质13.10.2. (1) $\mathbf{rot}(\lambda F + \mu G) = \lambda \mathbf{rot}(F) + \mu \mathbf{rot}(G)$, 这里 λ, μ 是常数.

(2) $\mathbf{rot}(fF) = f \mathbf{rot}(F) + \mathbf{grad}(f) \times F$.

(3) $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}(f)) = \mathbf{0}$.

§13.10.5 管量场和有势场

假设向量场 F 是无源场 (即 $\operatorname{div}(F) = 0$). 对任一向量管, 即用光滑定向曲面 S_1, S_2 截 F 的向量流围成的管状曲面 ($F \cdot \mathbf{n} = 0$). 由此得到一个光滑区域 Ω 且边界 $\partial\Omega$ 是由分段光滑定向曲面 S_1, S_2, S 所构成 (相对 Ω , S_1 和 S_2 的定向是互反的). 根据 Gauss 公式得到

$$0 = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(F) dx dy dz = \iint_{-S_1+S+S_2} F \cdot dS = \iint_{-S_1+S_2} F \cdot dS.$$

从而得到

$$\iint_{S_1} F \cdot dS = \iint_{S_2} F \cdot dS.$$

在流体力学上这个是说流提通过向量管的任意截面的流量是相同的.

假设向量场 F 是无旋场 (即 $\operatorname{rot}(F) = 0$). 根据定理(13.9.13) 可知对单连通区域内的任意分段光滑曲线 L , 曲线积分

$$\int_L F \cdot ds$$

和 L 无关, 且 $Pdx + Qdy + Rdz$ 存在原函数.

假设 $F \in C(\Omega)$.

- (1) 如果存在函数 U 满足 $F = \operatorname{grad}(U)$ 则称向量场 F 是有势场(potential field). 并称 $V := -U$ 为势函数(potential function).
- (2) 如果对任意分段光滑曲线 L , 曲线积分

$$\int_L F \cdot ds$$

和 L 无关, 则称 F 是保守场(conservative field).

定理13.10.3. 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是单连通区域且 $F \in C^1(\Omega)$. 则下列三个命题等价:

- (1) 向量场 F 是保守场;
- (2) 向量场 F 是有势场;
- (3) 向量场 F 是无旋场.

坐标原点处质量为 m 的质点的引力场为

$$F = -\frac{Gmr}{r^3} = -\frac{Gm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z).$$

向量场 F 的一个势函数为 $U = Gm/r$.

§13.10.6 Hamilton 算子

引入 Hamilton 的形式算子

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \equiv (\partial_x, \partial_y, \partial_z) = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (13.10.11)$$

对 $f, P, Q, R \in C^1(\Omega)$ 和 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$, 定义

$$\nabla f := (\partial_x, \partial_y, \partial_z)f = \mathbf{grad}(f), \quad (13.10.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} := (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \cdot (P, Q, R) = \mathbf{div}(\mathbf{F}), \quad (13.10.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{F} := (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \times (P, Q, R) = \mathbf{rot}(\mathbf{F}). \quad (13.10.14)$$

特别地得到

$$\nabla \cdot \nabla f = \mathbf{div}(\mathbf{grad}(f)) = \Delta f. \quad (13.10.15)$$

性质13.10.4. (1) $\mathbf{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{G})$,

(2) $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$.

Gauss 公式 (13.9.7) 可写成

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV, \quad (13.10.16)$$

而 Stokes 公式 (13.9.10) 可写成

$$\int_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (13.10.17)$$

定理13.10.5. (Green 公式) 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是定向区域且边界 $\partial\Omega$ 是光滑定向曲面. 任意 $f, g \in C^2(\Omega)$, 有

$$\iiint_{\Omega} (\nabla f \cdot \nabla g + f \Delta g) dV = \iint_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} dS, \quad (13.10.18)$$

$$\iiint_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f) dV = \iint_{\partial\Omega} \left(f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right) dS. \quad (13.10.19)$$

证: 利用 Gauss 公式 (13.10.16) 得到

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (\nabla f \cdot \nabla g + f \Delta g) dV &= \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (f \nabla g) dV \\ &= \iint_{\partial\Omega} f \nabla g \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} dS. \end{aligned}$$

交换函数 f 和 g 位置, 并结合 (13.10.18) 得到第二个等式. \square

在 (13.10.19) 中取 $g \equiv 1$ 则得到散度公式(**divergence theorem**)

$$\iiint_{\Omega} \Delta f dV = \iint_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dS. \quad (13.10.20)$$

例13.10.6. (1) 假设 L 是平面中的简单光滑闭曲线, 记所围区域为 D , $u(x, y)$ 是 D 上的调和函数. 证明

$$I := \frac{1}{2\pi} \int_L \left[\frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \mathbf{n}} \frac{\ln r}{\epsilon} - \ln r \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \mathbf{n}} \right] ds = u(x, y)$$

这里 $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$.

证明: 因为 $(x, y) \in D$, 所以可以找到 $\epsilon > 0$ 是的 $\mathbb{B}^2((x, y), \epsilon) \subset D$. 利用 (13.10.19) 得到

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial \mathbb{B}^2((x, y), \epsilon)} \left(u \frac{\partial \ln r}{\partial \mathbf{n}} - \ln r \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) ds + \iint_D (u \Delta \ln r - \ln r \Delta u) dS \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\partial \mathbb{B}^2((x, y), \epsilon)} u(\xi, \eta) \frac{ds}{\epsilon} - \ln \epsilon \int_{\partial \mathbb{B}^2((x, y), \epsilon)} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds \right] \\ &= u(\xi', \eta') - \epsilon \ln \epsilon \cdot \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\xi'', \eta'') \rightarrow u(x, y) \end{aligned}$$

当 $\epsilon \rightarrow 0+$.

§13.11 * 调和函数

本节进一步研究调和函数的性质, 并将证明调和函数必光滑.

§13.11.1 * 平均值性质

假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是区域.

定义13.11.1. 任给函数 $u \in C(\Omega)$. 称

(i) u 满足第一类平均值性质(first mean value property) 如果

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial \mathbb{B}^n(\mathbf{x}, r)} u(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (13.11.1)$$

对 \mathbf{x} 的任何球邻域 $\mathbb{B}^n(\mathbf{x}, r) \subset \Omega$ 都成立, 这里 $dS_{\mathbf{y}}$ 表示球面积元.

(ii) u 满足第二类平均值性质(second mean value property) 如果

$$u(\mathbf{x}) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{\mathbb{B}^n(\mathbf{x}, r)} u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (13.11.2)$$

对 \mathbf{x} 的任何球邻域 $\mathbb{B}^n(\mathbf{x}, r) \subset \Omega$ 都成立, 这里 $d\mathbf{y}$ 表示球体积元.

这里 ω_n 表示 \mathbb{R}^n 中单位球面的表面积, ω_n/n 是 \mathbb{R}^n 中单位球的体积.

注13.11.2. 如果 u 满足第一类平均值性质, 则

$$\frac{r^n}{n} u(\mathbf{x}) = \int_0^r u(\mathbf{x}) s^{n-1} ds = \frac{1}{\omega_n} \int_0^r \int_{\partial \mathbb{B}^n(\mathbf{x}, s)} u(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} ds = \frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{B}^n(\mathbf{x}, r)} u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

反之, 如果 u 满足第二类平均值性质则

$$u(\mathbf{x})r^n = \frac{n}{\omega_n} \int_{\mathbb{B}^n(\mathbf{x}, r)} u(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \frac{n}{\omega_n} \int_0^r \int_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{x}, s)} u(\mathbf{y})dS_{\mathbf{y}}ds$$

从而经过求导后得到 (13.11.2).

注13.11.3. 定义13.11.7 等价于如下说法:

(i') u 满足第一类平均值性质如果

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|w|=1} u(\mathbf{x} + r\mathbf{w})dS_{\mathbf{w}} \quad (13.11.3)$$

对任何 \mathbf{x} 的球邻域 $\mathbb{B}^n(\mathbf{x}, r) \subset \Omega$ 都成立.

(ii') u 满足第二类平均值性质如果

$$u(\mathbf{x}) = \frac{n}{\omega_n} \int_{|z|\leq 1} u(\mathbf{x} + rz)dz \quad (13.11.4)$$

对任何 \mathbf{x} 的球邻域 $\mathbb{B}^n(\mathbf{x}, r) \subset \Omega$ 都成立.

根据这点, 称函数 u 满足平均值性质(mean value property)如果 u 满足第一类平均值性质或者第二类平均值性质.

性质13.11.4. (最大值原理) 如果 $u \in C(\bar{\Omega})$ 在 Ω 上满足平均值性质, 则 u 只在边界 $\partial\Omega$ 上达到最大值或最小值, 除非 u 是常数.

证: 仅对最大值情形给出证明. 令

$$\Sigma := \left\{ \mathbf{x} \in \Omega : u(\mathbf{x}) = M := \sup_{\bar{\Omega}} u \right\} \subset \Omega.$$

显然 Σ (在 Ω 中) 是闭的.

对任意 $\mathbf{x}_0 \in \Sigma$, 由于 Ω 是开集, 取 \mathbf{x}_0 的某个闭球 $\bar{\mathbb{B}}^n(\mathbf{x}_0, r) \subset \Omega$ (这里 $r > 0$). 利用平均值性质得到

$$M = u(\mathbf{x}_0) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{\mathbb{B}^n(\mathbf{x}_0, r)} u(\mathbf{y})d\mathbf{y} \leq M \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{\mathbb{B}^n(\mathbf{x}_0, r)} d\mathbf{y} = M.$$

故 $u = M$ 在 $\mathbb{B}^n(\mathbf{x}_0, r)$ 内成立从而 Σ 是开的. 根据连通性知 $\Sigma = \emptyset$ 或 $\Sigma = \Omega$.
□

定义13.11.5. 称函数 $u \in C^2(\Omega)$ 是调和的(harmonic) 如果 $\Delta u = 0$ 在 Ω 内成立.

定理13.11.6. 假设 $u \in C^2(\Omega)$ 在 Ω 内是调和函数. 则 u 在 Ω 内满足平均值性质.

证: 对任何球 $\mathbb{B}^n(\mathbf{x}, r) \subset \Omega$ 和任意 $\rho \in [0, r]$, 有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{B}^n(\mathbf{x}, \rho)} \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\partial \mathbb{B}^n(\mathbf{x}, \rho)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = \rho^{n-1} \int_{|\mathbf{w}|=1} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\mathbf{x} + \rho \mathbf{w}) dS_{\mathbf{w}} \\ &= \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{|\mathbf{w}|=1} u(\mathbf{x} + \rho \mathbf{w}) dS_{\mathbf{w}}. \end{aligned}$$

从而得到

$$u(\mathbf{x}) \omega_n = \int_{|\mathbf{w}|=1} u(\mathbf{w}) dS_{\mathbf{w}} = \int_{|\mathbf{w}|=1} u(\mathbf{x} + r\mathbf{w}) dS_{\mathbf{w}};$$

即 u 满足第一类平均值性质. \square

注13.11.7. 在定义中, 函数 u 不需要是光滑的. 但是下面定理告诉我们满足平均值性质的连续函数必是光滑的且是调和的.

定理13.11.8. 如果 $u \in C(\Omega)$ 在 Ω 内满足平均值性质, 则 u 在 Ω 内必是光滑的且是调和的.

证: 基本想法是利用卷积来提高光滑性. 选择 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, 1))$ 满足

$$\int_{\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, 1)} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$$

和 $\varphi(\mathbf{x}) = \psi(|\mathbf{x}|)$ (即 φ 是径向函数), 即

$$\omega_n \int_0^1 r^{n-1} \psi(r) dr = 1.$$

定义 $\varphi_\epsilon(\mathbf{x}) \doteq \frac{1}{\epsilon^n} \varphi\left(\frac{\mathbf{x}}{\epsilon}\right)$, $\epsilon > 0$. 对任意 $\mathbf{x} \in \Omega$ 和 $\epsilon < \text{dist}(\mathbf{x}, \partial\Omega)$, 得到

$$\begin{aligned} (\varphi_\epsilon * u)(\mathbf{x}) &= \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| < \epsilon} u(\mathbf{y}) \varphi_\epsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{|\mathbf{y}| \leq \epsilon} u(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{y}) \varphi_\epsilon(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{\epsilon^n} \int_{|\mathbf{y}| \leq \epsilon} u(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{y}) \varphi\left(\frac{\mathbf{y}}{\epsilon}\right) d\mathbf{y} = \int_{|\mathbf{y}| \leq 1} u(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \int_0^1 r^{n-1} dr \int_{\partial \mathbb{B}^n(\mathbf{0}, 1)} u(\mathbf{x} + \epsilon r \mathbf{w}) \varphi(r \mathbf{w}) dS_{\mathbf{w}} \\ &= \int_0^1 r^{n-1} \psi(r) dr \int_{\partial \mathbb{B}^n(\mathbf{0}, 1)} u(\mathbf{x} + \epsilon r \mathbf{w}) dS_{\mathbf{w}} = u(\mathbf{x}) \omega_n \int_0^1 r^{n-1} \psi(r) dr = u(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

故得到

$$u = \varphi_\epsilon * u \quad (13.11.5)$$

在 $\Omega_\epsilon = \{\mathbf{y} \in \Omega : \text{dist}(\mathbf{y}, \partial\Omega) > \epsilon\}$ 上成立. 根据 (13.11.5), 我们推出 u 在 Ω 内是光滑的. 利用定理13.11.6 中的公式得到

$$\int_{\mathbb{B}^n(\mathbf{x}, r)} \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \int_{|\mathbf{w}|=1} u(\mathbf{x} + r\mathbf{w}) dS_{\mathbf{w}} = \omega_n r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} (u(\mathbf{x})) = 0$$

对任何 $\mathbb{B}^n(\mathbf{x}, r) \subset \Omega$ 都成立. 则 $\Delta u = 0$ 在 Ω 内成立. \square

注13.11.9. (1) 根据定理13.11.6 和定理13.11.8, 我们推出调和函数是光滑的且满足平均值性质. 因此调和函数满足最大值原理.

(2) 有界区域上的Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ u = \varphi, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上,} \end{cases}$$

这里 $f \in C(\Omega)$ 和 $\varphi \in C(\partial\Omega)$, 若解存在必是唯一的.

(3) 一般来说, 唯一性对无界区域是不成立的. 比如考察如下的Dirichlet 问题:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上,} \end{cases}$$

这里 $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 1\}$. 显然 $u = 0$ 时平凡解. 对 $n = 2$, $u(x) = \ln|x|$ 是一个解; 注意到 $u \rightarrow \infty$ 当 $r \rightarrow \infty$ 时. 对 $n \geq 3$, $u(x) = |x|^{2-n} - 1$ 是一个解; 注意到 $u \rightarrow -1$ 当 $r \rightarrow \infty$ 时. 如果考察上半平面 $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x^n > 0\}$, 则 $u(x) = x^n$ 是无界的非平凡解.

引理13.11.10. 假设 $u \in C(\overline{\mathbb{B}^n(x_0, R)})$ 是调和的, 则

$$|Du(x_0)| \leq \frac{n}{R} \max_{\overline{\mathbb{B}^n(x_0, R)}} |u|. \quad (13.11.6)$$

证: 根据注13.11.9 (1), u 是光滑的且满足 $\Delta(D_i u) = 0$. 因此 $D_i u$ 在 $\mathbb{B}^n(x_0, R)$ 内也是调和的且满足平均值性质. 故

$$D_i u(x_0) = \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{\mathbb{R}^n(x_0, R)} D_i u(y) dy = \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{\partial\mathbb{B}^n(x_0, R)} u(y) \nu_i(y) dS_y$$

从而

$$|Du(x_0)| \leq \frac{n}{\omega_n R^n} \max_{\partial\mathbb{B}^n(x_0, R)} |u| \cdot \omega_n R^{n-1} = \frac{n}{R} \max_{\overline{\mathbb{B}^n(x_0, R)}} |u|. \quad \square$$

引理13.11.11. 如果 $u \in C(\overline{\mathbb{R}^n(x_0, R)})$ 在 $\mathbb{R}^n(x_0, R)$ 内是非负调和的, 则

$$|Du(x_0)| \leq \frac{n}{R} u(x_0). \quad (13.11.7)$$

证: 类似引理13.11.10 的证明, 利用平均值性质得到

$$|Du(x_0)| \leq \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{\partial\mathbb{B}^n(x_0, R)} u(x) dS_y = \frac{n}{R} u(x_0). \quad \square$$

推论13.11.12. \mathbb{R}^n 上有上界或下界的调和函数必是常值函数.

证: 不失一般性不妨假设 u 是 \mathbb{R}^n 上的调和函数且有下界 $-C$, 故 $u + C \geq 0$. 注意到 $u + C$ 仍旧是调和的. 根据引理13.11.10 得到

$$|Du(x)| \leq \frac{n}{R} [u(x_0) + C]$$

对任何 $x \in \mathbb{R}^n$ 都成立. 令 $R \rightarrow \infty$ 推出 $Du \equiv 0$ 在 \mathbb{R}^n 上成立. 故 u 是常数. \square

性质13.11.13. 假设 $u \in C(\overline{\mathbb{B}^n(x_0, R)})$ 在 $\mathbb{B}^n(x_0, R)$ 内调和的. 则

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{n^m e^{m-1} m!}{R^m} \max_{\overline{\mathbb{B}^n(x_0, R)}} |u| \quad (13.11.8)$$

对任意 n 重指标 α , 这里 $|\alpha| = m$, 都成立.

证: 不等式 (13.11.8) 对 $m = 1$ 成立, 这可由引理13.11.10 得到. 假设 (13.11.8) 对 m 成立. 对 $\theta \in (0, 1)$ 定义 $r := (1 - \theta)R \in (0, R)$.

根据引理13.11.10 得到

$$|D^{m+1}u(x_0)| = |D(D^m u)(x_0)| \leq \frac{n}{r} \max_{\overline{\mathbb{B}^n(x_0, R)}} |D^m u|.$$

归纳假设推出

$$\max_{\overline{\mathbb{B}^n(x_0, r)}} |D^m u| \leq \frac{n^m e^{m-1} m!}{(R-r)^m} \max_{\overline{\mathbb{B}^n(x_0, R-r)}} |u| \leq \frac{n^m e^{m-1} m!}{(R-r)^m} \max_{\overline{\mathbb{B}^n(x_0, R)}} |u|$$

从而

$$|D^{m+1}u(x_0)| \leq \frac{n^{m+1} e^{m-1} m!}{r(R-r)^m} \max_{\overline{\mathbb{B}^n(x_0, R)}} |u| \leq \frac{n^{m+1} e^{m-1} m!}{(1-\theta)\theta^m R^{m+1}} \max_{\overline{\mathbb{B}^n(x_0, R)}} |u|.$$

因为 $(1 + \frac{1}{m})^m < e$, 在上述不等式中取 $\theta = \frac{m}{m+1}$ 得到

$$|D^{m+1}u(x_0)| \leq \frac{n^{m+1} e^m (m+1)!}{R^{m+1}} \max_{\overline{\mathbb{B}^n(x_0, R)}} |u|.$$

一般地, 对任意 n 重指标 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 有

$$\begin{aligned} |D^\alpha u(x_0)| &= |D^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} u(x_0)| \leq \prod_{1 \leq i \leq n} \frac{n^{\alpha_i} e^{\alpha_i - 1} \alpha_i!}{R^{\alpha_i}} \max_{\overline{\mathbb{B}^n(x_0, R)}} |u| \\ &= \frac{n^{|\alpha|} e^{|\alpha| - 1}}{R^{|\alpha|}} \left(\prod_{1 \leq i \leq n} \alpha_i! \right) \max_{\overline{\mathbb{B}^n(x_0, R)}} |u| \leq \frac{n^{|\alpha|} e^{|\alpha| - 1} |\alpha|!}{R^{|\alpha|}} \max_{\overline{\mathbb{B}^n(x_0, R)}} |u| \end{aligned}$$

这是因为 $\alpha_1! \cdots \alpha_n! \leq (|\alpha|)!$. \square

定理13.11.14. 调和函数必是实解析的.

证: 假设 u 在 Ω 内是调和的. 固定 $x \in \Omega$ 并取 $\mathbb{B}^n(x, 2R) \subset \Omega$ 和 $h \in \mathbb{R}^n$ 满足 $|h| \leq R$. Taylor 展开告诉我们

$$u(x+h) = u(x) + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m-1} \frac{D^\alpha u(x)}{\alpha!} h^\alpha + R_m(h)$$

这里

$$R_m(h) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{D^\alpha u(x+\theta h)}{\alpha!} h^\alpha, \quad \exists \theta \in (0, 1).$$

因为 $\mathbf{x} + \mathbf{h} \in \mathbb{B}^n(\mathbf{x}, R)$ ($|\mathbf{h}| < R$), 根据性质13.11.13 得到

$$|R_m(\mathbf{h})| \leq \frac{1}{m!} |\mathbf{h}|^m \frac{n^m e^{m-1} m!}{R^m} \max_{\overline{\mathbb{B}^n(\mathbf{x}_0, 2R)}} |u| \leq \left(\frac{|\mathbf{h}| n e}{R} \right)^m \max_{\overline{\mathbb{B}^n(\mathbf{x}_0, 2R)}} |u|.$$

如果取 $|\mathbf{h}| < R/2ne$, 则当 $m \rightarrow \infty$ 时有 $R_m(\mathbf{h}) \rightarrow 0$. \square

定理13.11.15. (Harnack 不等式) 假设 u 在 Ω 内是非负调和的. 则对 Ω 中的任意紧子集 K 存在正常数 $C = C(\Omega, K)$ 使得不等式

$$\frac{1}{C} u(\mathbf{y}) \leq u(\mathbf{x}) \leq C u(\mathbf{y}) \quad (13.11.9)$$

对任何 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ 都成立.

证: 取 $\mathbb{B}^n(\mathbf{x}_0, 4R) \subset \Omega$ 则得到

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{\mathbb{B}^n(\mathbf{x}, R)} u(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \leq \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{\mathbb{B}^n(\mathbf{x}_0, 2R)} u(\mathbf{z}) d\mathbf{z}, \\ u(\mathbf{y}) &= \frac{n}{\omega_n (3R)^n} \int_{\mathbb{B}^n(\mathbf{y}, 3R)} u(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \geq \frac{n}{3^n \omega_n R^n} \int_{\mathbb{B}^n(\mathbf{x}_0, 2R)} u(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \end{aligned}$$

对任何 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{B}^n(\mathbf{x}_0, R)$ 都成立, 这是因为 $\mathbb{B}^n(\mathbf{x}, R) \subset \mathbb{B}^n(\mathbf{x}_0, 2R) \subset \mathbb{B}^n(\mathbf{y}, 3R)$. 因此

$$\frac{1}{3^n} u(\mathbf{y}) \leq u(\mathbf{x}) \leq 3^n u(\mathbf{y}) \quad (13.11.10)$$

对所有 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{B}^n(\mathbf{x}_0, R)$. \square

任给紧子集 K , 取 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N \in K$ 使得 $(\mathbb{B}^n(\mathbf{x}_i, R))_{1 \leq i \leq N}$ 是 K 的开覆盖且 $4R < \text{dist}(K, \partial\Omega)$. 此时我们可以在 (13.11.9) 中取 $C = 3^{nN}$.

假设 u 在 Ω 内是调和的. 利用分部积分法得到

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{y}) \Delta \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\Omega} \Delta u(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 0 \quad (13.11.11)$$

对任何 $\varphi \in C_0^2(\Omega)$ 都成立. Weyl 反过来证明了

如果 (13.11.11) 对任何 $\varphi \in C_0^2(\Omega)$ 都成立, 则 u 必是调和的.

定理13.11.16. (Weyl) 如果 $u \in C(\Omega)$ 且

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{y}) \Delta \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 0$$

对任何 $\varphi \in C_0^2(\Omega)$ 都成立, 则 u 在 Ω 内必是调和的.

证: 根据定理13.11.8, 只要证明 u 在 Ω 内满足平均值性质.

对任意 $\mathbb{B}^n(\mathbf{x}, r) \subset \Omega$ 我们断言都有

$$r \int_{\partial \mathbb{B}^n(\mathbf{x}, r)} u(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = n \int_{\mathbb{B}^n(\mathbf{x}, r)} u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (13.11.12)$$

成立. 若断言成立则得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial \mathbb{B}^n(x,r)} u(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \right) &= \frac{n}{\omega_n} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^n} \int_{\mathbb{B}^n(x,r)} u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) \\ &= \frac{n}{\omega_n} \left(-\frac{n}{r^{n+1}} \int_{\mathbb{B}^n(x,r)} u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \frac{1}{r^n} \int_{\partial \mathbb{B}^n(x,r)} u(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \right) = 0. \end{aligned}$$

这意味着

$$\frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial \mathbb{B}^n(x,r)} u(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = \text{常数}.$$

令 $r \rightarrow 0$ 得到 $u(x)$ 是常数 (根据积分中值定理). 故

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial \mathbb{B}^n(x,r)} u(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}$$

对任意 $\mathbb{B}^n(x,r) \subset \Omega$ 都成立.

为了证明 (13.11.12), 不妨假设 $n \geq 3$ 且 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 令

$$\varphi(\mathbf{y}, r) \doteq \begin{cases} (|\mathbf{y}|^2 - r^2)^n, & |\mathbf{y}| \leq r, \\ 0, & |\mathbf{y}| > r \end{cases}$$

和

$$\varphi_k(\mathbf{y}, r) = (|\mathbf{y}|^2 - r^2)^{n-k} [2(n-k+1)|\mathbf{y}|^2 + n(|\mathbf{y}|^2 - r^2)]$$

(这里 $|\mathbf{y}| \leq r$ 且 $k = 2, 3, \dots, n$). 因为 $n \geq 3$, 所以 $\varphi(\cdot, r) \in C_0^2(\Omega)$ 和

$$\Delta_{\mathbf{y}} \varphi(\mathbf{y}, r) = \begin{cases} 2n\varphi_2(\mathbf{y}, r), & |\mathbf{y}| \leq r, \\ 0, & |\mathbf{y}| > r. \end{cases}$$

根据假设得到

$$\int_{\mathbb{B}^n(\mathbf{0},r)} u(\mathbf{y}) \varphi_2(\mathbf{y}, r) d\mathbf{y} = 0.$$

一般地可以证明

$$\int_{\mathbb{B}^n(\mathbf{0},r)} u(\mathbf{y}) \varphi_k(\mathbf{y}, r) d\mathbf{y} = 0 \quad (13.11.13)$$

对任何 $k = 2, \dots, n$ 都成立. 如果 (13.11.13) 对 k 成立, 则

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{B}^n(\mathbf{0},r)} u(\mathbf{y}) \frac{\partial \varphi_k}{\partial r}(\mathbf{y}, r) d\mathbf{y} + \int_{\partial \mathbb{B}^n(\mathbf{0},r)} u(\mathbf{y}) \varphi_k(\mathbf{y}, r) dS_{\mathbf{y}} \\ &= \int_{\mathbb{B}^n(\mathbf{0},r)} \frac{\partial \varphi_k}{\partial r}(\mathbf{y}, r) d\mathbf{y} \end{aligned}$$

这是因为 $\varphi_k(\mathbf{y}, r) = 0$ 对 $|\mathbf{y}| = r$ 和 $2 \leq k < n$ 成立. 简单计算表明

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_k}{\partial r}(\mathbf{y}, r) &= (n-k)(|\mathbf{y}|^2 - r^2)^{n-k-1} (-2r) [2(n-k+1)|\mathbf{y}|^2 + n(|\mathbf{y}|^2 - r^2)] \\ &+ (|\mathbf{y}|^2 - r^2)^{n-k} (-2nr) = (-2r)(|\mathbf{y}|^2 - r^2)^{n-k-1} [2(n-k)(n-k+1)|\mathbf{y}|^2 \end{aligned}$$

$$+n(n-k+1)(|\mathbf{y}|^2 - r^2)] = (-2r)(n-k+1)\varphi_{k+1}(\mathbf{y}, r).$$

这就证明了 (13.11.13) 对 $k+1$ 也成立. 在 (13.11.13) 中取 $k=n$ 得到

$$0 = \int_{\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, r)} u(\mathbf{y})[(n+2)|\mathbf{y}|^2 - nr^2]d\mathbf{y}$$

从而对 r 微分得到 (13.11.12). \square

定理13.11.16 给出了调和函数的更加广泛的定义. 即称可积函数 $u \in R(\Omega)$ 是调和的, 如果 (13.11.11) 对任何 $\varphi \in C_0^2(\Omega)$ 都成立. 当可积函数是连续时, 根据**定理13.11.16** 得到广义的调和函数定义和之前是一样的.

§13.11.2 * 基本解

首先来寻找径向调和函数 u , 即满足

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \quad u(x) = u(|x - \mathbf{a}|) \quad (13.11.14)$$

其中 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ 是固定地. 令

$$r := |x - \mathbf{a}|, \quad v(r) := u(x). \quad (13.11.15)$$

由于 $D_i u = v'(x^i - a^i)/r$ 和 $\partial r / \partial x^i = (x^i - a^i)/r$, 所以

$$\begin{aligned} \Delta u &= \sum_{1 \leq i \leq n} D_i D_i u \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} \left[v'' \frac{(x^i - a^i)^2}{r^2} + v' \frac{r - (x^i - a^i) \frac{x^i - a^i}{r}}{r^2} \right] = v'' + v' \frac{n-1}{r}. \end{aligned}$$

即

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r) = 0, \quad (13.11.16)$$

从而得到解

$$v(r) = \begin{cases} c_1 + c_2 \ln r, & n = 2, \\ c_3 + c_4 r^{2-n}, & n \geq 3, \end{cases} \quad (13.11.17)$$

这里 $c_i, i = 1, 2, 3, 4$, 都是常数. 为了确定常数 c_i , 引入如下的约束条件

$$\int_{\partial \mathbb{B}_r^n} v'(r) dS = 1, \quad r > 1, \quad \mathbb{B}_r^n := \mathbb{B}^n(\mathbf{0}, r). \quad (13.11.18)$$

因此得到

$$v(r) = \begin{cases} c_1 + \frac{1}{2\pi} \log(r), & n = 2, \\ c_3 + \frac{1}{\omega_n(2-n)} r^{2-n}, & n \geq 3. \end{cases} \quad (13.11.19)$$

对固定的 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ 定义函数

$$\Gamma(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{a} - \mathbf{x}|, & n = 2, \\ \frac{1}{\omega_n(2-n)} |\mathbf{a} - \mathbf{x}|^{2-n}, & n \geq 3, \end{cases} \quad (13.11.20)$$

则 $\Gamma(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ 当 $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ 时是调和的, 即,

$$\Delta_{\mathbf{x}}\Gamma(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{a}, \quad (13.11.21)$$

且在 $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ 处有奇点. 易证

$$\int_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{a}, r)} \frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}_{\mathbf{x}}}(\mathbf{a}, \mathbf{x}) dS_{\mathbf{x}} = 1 \quad (13.11.22)$$

对任何 $r > 0$ 都成立.

定理13.11.17. 假设 Ω 是 \mathbb{R}^n 中的有界区域并假设 $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. 则对任意 $\mathbf{a} \in \Omega$ 有

$$u(\mathbf{a}) = \int_{\Omega} \Gamma(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \Delta u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}) \frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}_{\mathbf{x}}}(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \right) dS_{\mathbf{x}}. \quad (13.11.23)$$

证: 对 u 和 $\Gamma := \Gamma(\mathbf{a}, \cdot)$ 在区域 $\Omega \setminus \mathbb{B}^n(\mathbf{a}, r)$ 上应用 Green 公式, 这里 $r \in (0, \text{dist}(\mathbf{a}, \partial\Omega))$, 得到

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \mathbb{B}^n(\mathbf{a}, r)} (\Gamma \Delta u - u \Delta \Gamma) d\mathbf{x} &= \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}} - u \frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}} \right) dS_{\mathbf{x}} \\ &\quad - \int_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{a}, r)} \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}} - u \frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}} \right) dS_{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

因为在 $\Omega \setminus \mathbb{B}^n(\mathbf{a}, r)$ 上 $\Delta\Gamma = 0$, 故

$$\int_{\Omega} \Gamma \Delta u d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}} - u \frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}} \right) dS_{\mathbf{x}} - \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{a}, r)} \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}} - u \frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}} \right) dS_{\mathbf{x}}.$$

对 $n = 2$, 根据 (13.11.20), 得到

$$\left| \int_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{a}, r)} \Gamma \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}} dS_{\mathbf{x}} \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \log r \int_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{a}, r)} \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}} dS_{\mathbf{x}} \right| \leq |r \ln r| \sup_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{a}, r)} |Du| \rightarrow 0$$

当 $r \rightarrow 0$ 时, 和

$$\int_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{a}, r)} u \frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}} dS_{\mathbf{x}} = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{a}, r)} u dS_{\mathbf{x}} \rightarrow u(\mathbf{a})$$

当 $r \rightarrow 0$ 时.

对 $n \geq 3$, 根据 (13.11.20), 得到

$$\left| \int_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{a}, r)} \Gamma \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}} dS_{\mathbf{x}} \right| = \left| \frac{r^{2-n}}{(2-n)\omega_n} \int_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{a}, r)} \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}} dS_{\mathbf{x}} \right| \leq \frac{r}{n-2} \sup_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{a}, r)} |Du| \rightarrow 0$$

当 $r \rightarrow 0$ 时, 从而

$$\int_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{a}, r)} u \frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}} dS_{\mathbf{x}} = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{a}, r)} u dS_{\mathbf{x}} \rightarrow u(\mathbf{a})$$

当 $r \rightarrow 0$ 时. \square

注13.11.18. (1) 在 (13.11.23) 中令 $u \equiv 1$ 得到

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}_x}(\mathbf{a}, \mathbf{x}) dS_x = 1 \quad (13.11.24)$$

对任何 $\mathbf{a} \in \Omega$ 都成立.

(2) 如果函数 $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 在 Ω 内是调和的, 则

$$u(\mathbf{a}) = - \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}_x}(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}) \frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}_x}(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \right) dS_x \quad (13.11.25)$$

对任何 $\mathbf{a} \in \Omega$ 成立.

(3) 对两个量 A 和 B 符号

$$A \lesssim B$$

表示 $A \leq CB$, 其中 C 是仅依赖于 n 的正常数; 同样符号

$$A \gtrsim B$$

表示 $CA \geq B$, 其中 C 是仅依赖于 n 的正常数. 符号

$$A \sim B$$

表示 $A \lesssim B$ 和 $A \gtrsim B$; 即 $C^{-1}B \leq A \leq CB$, 其中 C 是仅依赖于 n 的正常数.

注13.11.19. 假设 $u \in C(\overline{\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, 1)})$ 在 $\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, 1)$ 内调和. 对任何固定的常数 $0 < r < R < 1$ 选择截断函数 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, R))$ 满足 $\varphi \equiv 1$ 在 $\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, r)$ 内成立且 $0 \leq \varphi \leq 1$. 对 u 和 $\varphi\Gamma \doteq \varphi\Gamma(\mathbf{a}, \cdot)$ 在 $\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, 1) \setminus \mathbb{B}^n(\mathbf{a}, \rho)$, 这里 $\mathbf{a} \in \mathbb{B}^n(\mathbf{0}, r)$, 应用 Green 公式得到 (只要 ρ 足够小)

$$u(\mathbf{a}) = - \int_{r < |\mathbf{x}| < R} u(\mathbf{x}) \Delta_x (\varphi(\mathbf{x}) \Gamma(\mathbf{a}, \mathbf{x})) d\mathbf{x} \quad (13.11.26)$$

对任何 $\mathbf{a} \in \mathbb{B}^n(\mathbf{0}, r)$ 都成立. 由此得到

$$\sup_{\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, 1/2)} |u| \lesssim \|u\|_{L^p(\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, 1))} \quad (p > 1), \quad \sup_{\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, 1/2)} |Du| \lesssim \max_{\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, 1)} |u|. \quad (13.11.27)$$

假设 Ω 是 \mathbb{R}^n 内的有界区域. 假设 $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 是如下 Dirichlet 边界值问题

$$\Delta u = f \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \quad u = \varphi \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上} \quad (13.11.28)$$

的解, 这里 $f \in C(\overline{\Omega})$ 和 $\varphi \in C(\partial\Omega)$. 利用 (13.11.23) 得到

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{\partial\Omega} \varphi(\mathbf{y}) \frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}_y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y - \int_{\partial\Omega} \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}_y}(\mathbf{y}) dS_y.$$

对每个固定的 $\mathbf{x} \in \Omega$ 选择 $\Phi(\mathbf{x}, \cdot) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 满足

$$\Delta_y \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \text{对 } \mathbf{y} \in \Omega, \quad \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{对 } \mathbf{y} \in \partial\Omega. \quad (13.11.29)$$

令

$$G(x, y) := \Gamma(x, y) + \Phi(x, y) \quad (13.11.30)$$

为Green 函数. 注意到Green 函数 $G(x, y)$, 对每个固定的 $x \in \Omega$, 是关于 $y \in \bar{\Omega}$ 的函数. 由于 Φ 是调和的, 所以得到

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy + \int_{\partial\Omega} \varphi(y) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_y}(x, y) dS_y. \quad (13.11.31)$$

根据最大值原理, (13.11.29) 有唯一解.

性质13.11.20. Green 函数 $G(x, y)$ 在 $\Omega \times \Omega$ 内是对称的, 即, $G(x, y) = G(y, x)$ 对任何 $x \neq y \in \Omega$ 都成立

证: 任取 $x_1, x_2 \in \Omega$ 且 $x_1 \neq x_2$. 选择充分小的正数 $r > 0$ 使得 $\mathbb{B}^n(x_1, r) \cap \mathbb{B}^n(x_2, r) = \emptyset$. 令 $G_1(y) := G(x_1, y)$, $G_2(y) := G(x_2, y)$. 断言

$$G_1(x_2) = G_2(x_1). \quad (13.11.32)$$

在 $\Omega \setminus \mathbb{B}^n(x_1, r) \cup \mathbb{B}^n(x_2, r)$ 上应用Green 公式得到

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \setminus \mathbb{B}^n(x_1, r) \cup \mathbb{B}^n(x_2, r)} (G_1(y) \Delta G_2(y) - G_2(y) \Delta G_1(y)) dy \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(G_1(y) \frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{n}_y}(y) - G_2(y) \frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{n}_y}(y) \right) dS_y \\ & \quad - \int_{\partial\mathbb{B}^n(x_1, r)} \left(G_1(y) \frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{n}_y}(y) - G_2(y) \frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{n}_y}(y) \right) dS_y \\ & \quad - \int_{\partial\mathbb{B}^n(x_2, r)} \left(G_1(y) \frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{n}_y}(y) - G_2(y) \frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{n}_y}(y) \right) dS_y. \end{aligned}$$

因为 G_i 是调和的且在 $\partial\Omega$ 为零, 所以得到

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[\int_{\partial\mathbb{B}^n(x_1, r)} \left(G_1(y) \frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{n}_y}(y) - G_2(y) \frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{n}_y}(y) \right) dS_y \right. \\ & \quad \left. + \int_{\partial\mathbb{B}^n(x_2, r)} \left(G_1(y) \frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{n}_y}(y) - G_2(y) \frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{n}_y}(y) \right) dS_y \right] \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[\int_{\partial\mathbb{B}^n(x_1, r)} \left(\Gamma(x_1, y) \frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{n}_y}(y) - G_2(y) \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}_y}(x_1, y) \right) dS_y \right. \\ & \quad \left. + \int_{\partial\mathbb{B}^n(x_2, r)} \left(G_1(y) \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}_y}(x_2, y) - \Gamma(x_2, y) \frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{n}_y}(y) \right) dS_y \right] \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[- \int_{\partial\mathbb{B}^n(x_1, r)} G_2(y) \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}_y}(x_1, y) dS_y + \int_{\partial\mathbb{B}^n(x_2, r)} G_1(y) \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}_y}(x_2, y) dS_y \right] \\ &= -G_2(x_1) + G_1(x_2). \quad \square \end{aligned}$$

性质13.11.21. 对任何 $x, y \in \Omega$, 只要 $x \neq y$, 都有

$$\begin{aligned} 0 &> G(x, y) > \Gamma(x, y), \quad n \geq 3, \\ 0 &> G(x, y) > \Gamma(x, y) - \frac{1}{2\pi} \ln(\text{diam}(\Omega)), \quad n = 2. \end{aligned}$$

证: 固定 $x \in \Omega$ 并令 $G(y) := G(x, y)$. 因为 $\lim_{y \rightarrow x} G(y) = -\infty$, 可以找到 $r > 0$ 使得 $G(y) < 0$ 在 $\mathbb{B}^n(x, r)$ 内成立. 因为 G 在 $\Omega \setminus \mathbb{B}^n(x, r)$ 内是调和的, 根据最大值原理得到 $G < 0$ 在 $\Omega \setminus \mathbb{B}^n(x, r)$ 内成立. 故 $G(y) < 0$ 在 Ω 内成立.

回顾

$$G(x, y) - \Gamma(x, y) = \Phi(x, y)$$

这里 $\Delta_y \Phi(x, y) = 0$ 若 $y \in \Omega$, 和 $\Phi(x, y) = -\Gamma(x, y)$ 若 $y \in \partial\Omega$. 如果 $n \geq 3$,

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} |x-y|^{2-n} > 0$$

若 $y \in \partial\Omega$. 根据最大值原理, $\Phi(x, y) > 0$ 对任何 $y \in \Omega$ 都成立. 如果 $n = 2$, 则有

$$\Phi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \log |x-y| \geq -\frac{1}{2\pi} \ln(\text{diam}(\Omega))$$

若 $y \in \partial\Omega$. 同样根据最大值原理得到 $\Phi(x, y) > -\frac{1}{2\pi} \ln(\text{diam}(\Omega))$ 对任何 $y \in \Omega$ 都成立. \square

性质13.11.22. $\mathbb{B}^n(0, R)$ 的Green 函数由如下所给出.

(i) for $n \geq 3$

$$G(x, y) = \frac{1}{(2-n)\omega_n} \left(|x-y|^{2-n} - \left| \frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}y \right|^{2-n} \right); \quad (13.11.33)$$

(ii) for $n = 2$,

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln |x-y| - \ln \left| \frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}y \right| \right). \quad (13.11.34)$$

推论13.11.23. 假设 G 是 $\mathbb{B}^n(0, r)$ 的Green 函数. 则

$$\frac{\partial G}{\partial n}(x, y) = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R |x-y|^n} := K(x, y) \quad (13.11.35)$$

这里 $x \in \mathbb{B}^n(0, R)$ 和 $y \in \partial\mathbb{B}^n(0, R)$.

由 (13.11.35) 定义的函数 $K(x, y)$, 这里 $x \in \mathbb{B}^n(0, R)$ 和 $y \in \partial\mathbb{B}^n(0, R)$, 称为 $\mathbb{B}^n(0, R)$ 的Poisson 核(Poisson kernel) 且满足

(i) $K(x, y)$ 是光滑的, 如果 $x \neq y$;

- (ii) $K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > 0$ 如果 $|\mathbf{x}| < R$;
 (iii) $\int_{|\mathbf{y}|=R} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = 1$ 如果 $|\mathbf{x}| < R$.

定理13.11.24. (Poisson 积分公式) 对 $\varphi \in C(\partial B^n(\mathbf{0}, R))$, 定义函数 u 如下

$$u(\mathbf{x}) := \begin{cases} \int_{\partial B^n(\mathbf{0}, R)} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}, & |\mathbf{x}| < R, \\ \varphi(\mathbf{x}), & |\mathbf{x}| = R \end{cases} \quad (13.11.36)$$

则 $u \in C(\overline{B^n(\mathbf{0}, R)}) \cap C^\infty(B^n(\mathbf{0}, R))$ 且

$$\Delta u = 0 \text{ 在 } B^n(\mathbf{0}, R) \text{ 内, } u = \varphi \text{ 在 } \partial B^n(\mathbf{0}, R) \text{ 上.}$$

注13.11.25. 在 (13.11.36) 中令 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 得到

$$u(\mathbf{0}) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B^n(\mathbf{0}, R)} \varphi(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}$$

即平均值性质.

引理13.11.26. (Harnack 不等式) 假设 u 在 $B^n(\mathbf{x}_0, R)$ 内调和且 $u \geq 0$. 则

$$\left(\frac{R}{R+r} \right)^{n-2} \frac{R-r}{R+r} u(\mathbf{x}_0) \leq u(\mathbf{x}) \leq \left(\frac{R}{R-r} \right)^{n-2} \frac{R+r}{R-r} u(\mathbf{x}_0) \quad (13.11.37)$$

这里 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < R$.

证: 不失一般性不妨假设 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ 且 $u \in C(\overline{B^n(\mathbf{0}, R)})$. 根据 (13.11.36) 得到

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\omega_n R} \int_{\partial B^n(\mathbf{0}, R)} \frac{R^2 - |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^n} u(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}.$$

因为 $R - |\mathbf{x}| \leq |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \leq R + |\mathbf{x}|$ 对任意 $|\mathbf{y}| = R$ 都成立, 所以得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega_n R} \frac{R - |\mathbf{x}|}{R + |\mathbf{x}|} \left(\frac{1}{R + |\mathbf{x}|} \right)^{n-2} \int_{\partial B^n(\mathbf{0}, R)} u(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ & \leq u(\mathbf{x}) \leq \frac{1}{\omega_n R} \frac{R + |\mathbf{x}|}{R - |\mathbf{x}|} \left(\frac{1}{R - |\mathbf{x}|} \right)^{n-2} \int_{\partial B^n(\mathbf{0}, R)} u(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

根据平均值性质或注13.11.25, 得到所要的不等式. \square

推论13.11.27. 如果 \mathbb{R}^n 上的调和函数 u 是有上界或下界, 则 u 必是常数.

证: 不妨假设 $u \geq 0$ 在 \mathbb{R}^n 内成立. 任取 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 并在 (13.11.37) 中令 $R \rightarrow \infty$, 得到 $u(\mathbf{0}) = u(\mathbf{x})$ 对任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 都成立. \square

定理13.11.28. 假设 u 在 $\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, R) \setminus \{\mathbf{0}\}$ 内调和且满足

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} o(|\ln|x||), & n = 2, \\ o(|x|^{2-n}), & n \geq 3 \end{cases}$$

当 $|x| \rightarrow 0$ 时成立. 则 u 可以在 $\mathbf{0}$ 处定义使得在 $\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, R)$ 内即时调和的又是 C^2 的.

证: 不妨假设 u 在 $0 < |x| \leq R$ 内连续. 考虑 Dirichlet 边界值问题

$$\Delta v = 0 \text{ 在 } \mathbb{B}^n(\mathbf{0}, R) \text{ 内, } v = u \text{ 在 } \partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, R) \text{ 上.}$$

断言 $u = v$ 在 $\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, R) \setminus \{\mathbf{0}\}$ 内成立. 令

$$w := v - u \text{ 在 } \mathbb{B}^n(\mathbf{0}, R) \setminus \{\mathbf{0}\} \text{ 内, } M_r := \max_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, r)} |w|.$$

我们只给出 $n \geq 3$ 时的证明. 因为 $|w(\mathbf{x})| \leq M_r \frac{r^{n-2}}{|x|^{n-2}}$ 在 $\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, r)$ 上成立且 w 在 $\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, R) \setminus \mathbb{B}^n(\mathbf{0}, r)$ 内是调和的, 根据最大值原理得到

$$|w(\mathbf{x})| \leq M_r \frac{r^{n-2}}{|x|^{n-2}}$$

对任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{B}^n(\mathbf{0}, R) \setminus \mathbb{B}^n(\mathbf{0}, r)$ 成立. 故

$$\begin{aligned} |w(\mathbf{x})| &\leq \frac{r^{n-2}}{|x|^{n-2}} \left(\max_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, r)} |v| + \max_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, r)} |u| \right) \\ &\leq \frac{r^{n-2}}{|x|^{n-2}} \max_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, R)} |u| + \frac{r^{n-2}}{|x|^{n-2}} \max_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, r)} |u| = \frac{r^{n-2}}{|x|^{n-2}} \max_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, R)} |u| + \frac{o(1)}{|x|^{n-2}} \end{aligned}$$

对任何 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 都成立. 当 $r \rightarrow 0$ 时, 得到 $w = \mathbf{0}$ 在 $\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, R) \setminus \{\mathbf{0}\}$ 内成立. \square

§13.11.3 * 内梯度估计和 Harnack 估计

这一小节我们将利用最大值原理来得到内梯度估计和 Harnack 不等式. 令 $\mathbb{B}_r^n := \mathbb{B}^n(\mathbf{0}, r)$.

定理13.11.29. 假设 $u \in C^2(\mathbb{B}_1^n) \cap C(\overline{\mathbb{B}_1^n})$ 在 \mathbb{B}_1^n 内是下调和的(subharmonic); 即, $\Delta u \geq 0$. 则

$$\sup_{\mathbb{B}_1^n} u \leq \sup_{\partial\mathbb{B}_1^n} u \quad (13.11.38)$$

证: 对任意 $\epsilon > 0$ 考虑函数 $u_\epsilon(\mathbf{x}) := u(\mathbf{x}) + \epsilon|x|^2$ in \mathbb{B}_1^n . 由于

$$\Delta u_\epsilon = \Delta u + 2n\epsilon \geq 2n\epsilon > 0,$$

利用反证法易证 u_ϵ 不可能在内部取到最大值. 特别地,

$$\sup_{\mathbb{B}_1^n} u \leq \sup_{\mathbb{B}_1^n} u_\epsilon \leq \sup_{\partial\mathbb{B}_1^n} u_\epsilon \leq \sup_{\partial\mathbb{B}_1^n} u + \epsilon.$$

令 $\epsilon \rightarrow 0$ 推出 (13.11.38). \square

注13.11.30. 若把 \mathbb{B}_1^n 换成其它有界区域定理13.11.29 依旧成立.

性质13.11.31. 假设 u 在 \mathbb{B}_1^n 内调和. 则

$$\sup_{\mathbb{B}_{1/2}^n} |\mathbf{D}u| \leq c \cdot \sup_{\partial\mathbb{B}_1^n} |u| \quad (13.11.39)$$

这里 $c = c(n)$ 是仅依赖于 n 的正常数. 特别地对任意 $\alpha \in [0, 1]$ 有不等式

$$|u(x) - u(y)| \leq c|x - y|^\alpha \sup_{\partial\mathbb{B}_1^n} |u| \quad (13.11.40)$$

对任何 $x, y \in \mathbb{B}_{1/2}^n$ 都成立, 这里 $c = c(n, \alpha)$ 是正常数.

证: 因为 $\Delta u = 0$ 在 \mathbb{B}_1^n 内成立, 所以

$$\begin{aligned} \Delta(|\mathbf{D}u|^2) &= \Delta\left(\sum_{1 \leq i \leq n} |D_i u|^2\right) = \sum_{1 \leq j \leq n} \left(2 \sum_{1 \leq i \leq n} D_i u \cdot D_{ij} u\right) \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} |D_{ij} u|^2 + 2 \sum_{1 \leq i, j \leq n} D_i u D_{ij} u \\ &= 2 \sum_{1 \leq i \leq n} D_i u D_i(\Delta u) + 2 \sum_{1 \leq i, j \leq n} |D_{ij} u|^2 = 2 \sum_{1 \leq i, j \leq n} |D_{ij} u|^2. \end{aligned}$$

故 $|\mathbf{D}u|^2$ 是下调和的. 对任意函数 $\varphi \in C_0^1(\mathbb{B}_1^n)$ 有

$$\Delta(\varphi|\mathbf{D}u|^2) = (\Delta\varphi)|\mathbf{D}u|^2 + 4 \sum_{1 \leq i, j \leq n} D_i \varphi D_j u D_{ij} u + 2\varphi \sum_{1 \leq i, j \leq n} (D_{ij} u)^2.$$

取 $\varphi = \eta^2$, 这里 $\eta \in C_0^1(\mathbb{B}_1^n)$ 且 $\eta|_{\mathbb{B}_{1/2}^n} \equiv 1$, 则得到⁵

$$\begin{aligned} \Delta(\eta^2|\mathbf{D}u|^2) &= 2\eta\Delta\eta|\mathbf{D}u|^2 + 2|\mathbf{D}\eta|^2|\mathbf{D}u|^2 + 8\eta \sum_{1 \leq i, j \leq n} D_i \eta D_j u D_{ij} u \\ &\quad + 2\eta^2 \sum_{1 \leq i, j \leq n} (D_{ij} u)^2 \geq (2\eta\Delta\eta - 6|\mathbf{D}\eta|^2)|\mathbf{D}u|^2 \geq -C|\mathbf{D}u|^2, \end{aligned}$$

其中 C 是仅依赖于 η 的正常数. 因为

$$\Delta(u^2) = 2u\Delta u + 2|\mathbf{D}u|^2 = 2|\mathbf{D}u|^2,$$

所以

$$\Delta(\eta^2|\mathbf{D}u|^2 + \alpha u^2) \geq 0$$

这里 α 是仅依赖于 η 的常数. 根据定理13.11.29 得到

$$\sup_{\mathbb{B}_{1/2}^n} |\mathbf{D}u|^2 \leq \alpha \sup_{\partial\mathbb{B}_1^n} |u|^2$$

从而得到 (13.11.39). 显然 (13.11.40) 可从 (13.11.39) 推出. \square

⁵Since

$$\left| 8\eta \sum_{1 \leq i, j \leq n} D_i \eta D_j u D_{ij} u \right| \leq 2\eta^2 \sum_{1 \leq i, j \leq n} (D_{ij} u)^2 + 8|\mathbf{D}\eta|^2|\mathbf{D}u|^2.$$

引理13.11.32. (Harnack 不等式) 假设 u 在 \mathbb{B}_1^n 内是非负调和的. 则

$$\sup_{\mathbb{B}_{1/2}^n} |D \ln u| \leq C \quad (13.11.41)$$

这里 $C = C(n)$ 是仅依赖于 n 的正常数.

证: 不妨假设 $u > 0$ 在 \mathbb{B}_1^n 内成立, 否则考虑函数 $u + \epsilon > 0$. 令 $v := \ln u$. 则

$$\Delta v = \sum_{1 \leq i \leq n} D_i \left(\frac{D_i u}{u} \right) = \frac{\Delta u}{u} - \frac{|Du|^2}{u^2} = -|Dv|^2.$$

若令 $w := |Dv|^2$, 得到

$$\begin{aligned} \Delta w &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} D_i D_i (D_j v D_j v) = 2 \sum_{1 \leq i, j \leq n} D_i (D_j v D_{ij} v) \\ &= 2 \sum_{1 \leq i, j \leq n} (D_{ij} v)^2 + 2 \sum_{1 \leq i, j \leq n} D_j v D_j (D_{ii} v) \\ &= 2 \sum_{1 \leq i, j \leq n} (D_{ij} v)^2 + 2 \sum_{1 \leq j \leq n} D_j v D_j (\Delta v) = 2 \sum_{1 \leq i, j \leq n} (D_{ij} v)^2 - 2 \sum_{1 \leq i \leq n} D_i v D_i w. \end{aligned}$$

因为

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} (D_{ij} v)^2 \geq \sum_{1 \leq i \leq n} (D_{ii} v)^2 \geq \frac{1}{n} (\Delta v)^2 = \frac{|Dv|^4}{n} = \frac{w^2}{n},$$

所以

$$\Delta w + 2 \sum_{1 \leq i \leq n} D_i v D_i w \geq \frac{2}{n} w^2.$$

取定非负函数 $\varphi \in C_0^1(\mathbb{B}_1^n)$ 得到

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi w) + 2 \sum_{1 \leq i \leq n} D_i v D_i(\varphi w) &= 2\varphi \sum_{1 \leq i, j \leq n} (D_{ij} v)^2 + 4 \sum_{1 \leq i, j \leq n} D_i \varphi D_j v D_{ij} v \\ + 2w \sum_{1 \leq i \leq n} D_i \varphi D_i v + (\Delta \varphi) w &\geq 2\varphi \sum_{1 \leq i, j \leq n} (D_{ij} v)^2 - 2|D\varphi| |Dv|^3 - |\Delta \varphi| |Dv|^2 \\ &\quad - 4 \left[\frac{\varphi}{4} \sum_{1 \leq i, j \leq n} (D_{ij} v)^2 + \frac{|D\varphi|^2}{\varphi} |Dv|^2 \right] \\ &= \varphi \sum_{1 \leq i, j \leq n} (D_{ij} v)^2 - 2|D\varphi| |Dv|^3 - \left(|\Delta \varphi| + 4 \frac{|D\varphi|^2}{\varphi} \right) |Dv|^2. \end{aligned}$$

根据

$$D\varphi = 4\eta^3 D\eta, \quad \Delta \varphi = 12\eta^2 |D\eta|^2 + 4\eta^3 \Delta \eta,$$

得到

$$\Delta(\varphi w) + 2 \sum_{1 \leq i \leq n} D_i v D_i(\eta^4 w) \geq \frac{1}{n} \eta^4 |Dv|^4 - 8\eta^3 |D\eta| |Dv|^3$$

$$-4\eta^2(\eta\Delta\eta + 19|D\eta|^2)|Dv|^2 \geq \frac{1}{n}\eta^4|Dv|^4 - C\eta^3|Dv|^3 - C\eta^2|Dv|^2$$

这里 C 是仅依赖于 n 和 η 的正常数. 利用 Hölder 不等式得到

$$\Delta(\varphi w) + 2 \sum_{1 \leq i \leq n} D_i v D_i(\eta^4 w) \geq \frac{3}{4n}\eta^4 w^2 - (nC^2 + C)\eta^2 w \geq \frac{1}{2n}\eta^4 w^2 - C_1$$

这里 C 也是仅依赖于 n 和 η 的正常数.

假设 $\eta^4 w$ 在 $x_0 \in \mathbb{B}_1^n$ 取到最大值. 则 $D(\eta^4 w) = 0$ 且 $\Delta(\eta^4 w) \leq 0$ 在 x_0 处成立. 从而

$$\eta^4 w^2(x_0) \leq C_2$$

对某个仅依赖于 n 和 η 的正常数 C_2 成立. 若 $w(x_0) \geq 1$, 则 $\eta^4 w(x_0) \leq C_2$; 若 $w(x_0) \leq 1$, 则 $\eta^4 w(x_0) \leq \eta^4(x_0)$. 无论哪一种情形都有

$$\eta^4 w \leq C_3$$

在 \mathbb{B}_1^n 内成立, 这里 C_3 是仅依赖于 n 和 η 的正常数. \square

对流形上的非负调和函数 $\Delta u = 0$ 也有类似的估计, 即 **Cheng-Yau 估计 (Cheng-Yau estimate)**. 我们甚至还可以考虑热方程 $\partial_t u = \Delta u$ 非负解的 Harnack 估计, 即 **Li-Yau 估计 (Li-Yau estimate)** 和 **Hamilton 估计 (Hamilton estimate)**. 这两个估计在 Perelman 证明 **Poincaré 猜想 (Poincaré conjecture)** 中起了至关重要的作用.

推论13.11.33. 假设函数 u 在 \mathbb{B}_1^n 内是非负调和的. 则

$$\frac{1}{C}u(x_2) \leq u(x_1) \leq Cu(x_2) \quad (13.11.42)$$

对任意 $x_1, x_2 \in \mathbb{B}_{1/2}^n$ 都成立, 这里 $C > 1$ 是仅依赖于 n 的正常数.

证: 不妨假设 $u > 0$ 在 \mathbb{B}_1^n 内成立. 对任何 $x_1, x_2 \in \mathbb{B}_{1/2}^n$ 有

$$\ln \frac{u(x_1)}{u(x_2)} \leq |x_1 - x_2| \int_0^1 |D \ln u(tx_2 + (1-t)x_1)| dt \leq C|x_1 - x_2| \leq C$$

这是因为 $tx_2 + (1-t)x_1 \in \mathbb{B}_{1/2}^n$. \square

性质13.11.34. (Hopf 引理) 假设 $u \in C(\overline{\mathbb{B}_1^n})$ 在 \mathbb{B}_1^n 内是调和的. 如果 $u(x) < u(x_0)$ 对任何 $x \in \mathbb{B}_1^n$ 和某个 $x_0 \in \partial\mathbb{B}_1^n$ 成立, 则

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x_0) \geq C[u(x_0) - u(\mathbf{0})] \quad (13.11.43)$$

这里 C 是仅依赖于 n 的正常数.

证: 定义

$$v(\mathbf{x}) := e^{-\alpha|\mathbf{x}|^2} - e^{-\alpha}.$$

当 $\alpha \geq 2n + 1$ 时有

$$\Delta v(\mathbf{x}) = e^{-\alpha|\mathbf{x}|^2}(4\alpha^2|\mathbf{x}|^2 - 2\alpha n) > 0$$

对任何 $|\mathbf{x}| \geq \frac{1}{2}$ 都成立. 因此对每个固定的 α , 函数 v 在区域 $A := \mathbb{B}_1^n \setminus \mathbb{B}_{1/2}^n$ 内是下调和的. 定义

$$h_\epsilon(\mathbf{x}) := u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}_0) + \epsilon v(\mathbf{x})$$

这里 $\epsilon > 0$. 这仍旧是下调和函数, $\Delta h_\epsilon \geq 0$. 注意到 $h_\epsilon \leq 0$ 在 $\partial\mathbb{B}_1^n$ 上成立且 $h_\epsilon(\mathbf{x}_0) = 0$. 由于 $u(\mathbf{x}) < u(\mathbf{x}_0)$ 对 $|\mathbf{x}| = \frac{1}{2}$ 成立, 我们不妨取 $\epsilon > 0$ 足够小使得 $h_\epsilon(\mathbf{x}) < 0$ 对 $|\mathbf{x}| = \frac{1}{2}$ 成立. 从定理13.11.29 得到 h_ϵ 在 $\mathbf{x}_0 \in A$ 处取到最大值. 这就意味着

$$\frac{\partial h_\epsilon}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}_0) \geq 0 \text{ 或者 } \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}_0) \geq -\epsilon \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}_0) = 2\alpha\epsilon e^{-\alpha} > 0.$$

令

$$w(\mathbf{x}) := u(\mathbf{x}_0) - u(\mathbf{x}) > 0.$$

因为 w 在 \mathbb{B}_1^n 内是调和的, 所以从推论13.11.33 得到

$$\inf_{\mathbb{B}_{1/2}^n} w \geq C(n)w(\mathbf{0}) \text{ 或者 } \max_{\mathbb{B}_{1/2}^n} u \leq u(\mathbf{x}_0) - C(n)[u(\mathbf{x}_0) - u(\mathbf{0})]$$

这里 $C(n)$ 是仅依赖 n 的正常数. 若取

$$\epsilon := \delta C(n)[u(\mathbf{x}_0) - u(\mathbf{0})]$$

只要 δ 足够小, 我们得到 $h_\epsilon(\mathbf{x}) < 0$ 当 $|\mathbf{x}| = \frac{1}{2}$ 时成立. 故

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}_0) = 2\alpha e^{-\alpha} \delta C(n)[u(\mathbf{x}_0) - u(\mathbf{0})].$$

最后我们取 $C = 2\alpha e^{-\alpha} \delta C(n)$. \square

称函数 $u \in C^\alpha(\bar{D})$, 这里 D 是有界区域, 如果

$$\|u\|_{C^\alpha(\bar{D})} := \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bar{D}, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}} \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\alpha} < +\infty.$$

引理13.11.35. (整体 Hölder 连续性) 假设 $u \in C(\bar{\mathbb{B}}_1^n)$ 在 \mathbb{B}_1^n 内是调和的且 $u = \varphi$ 在 $\partial\mathbb{B}_1^n$ 上成立. 如果 $\varphi \in C^\alpha(\partial\mathbb{B}_1^n)$ 这里 $\alpha \in (0, 1)$, 则 $u \in C^{\alpha/2}(\bar{\mathbb{B}}_1^n)$. 更进一步有

$$\|u\|_{C^{\alpha/2}(\bar{\mathbb{B}}_1^n)} \leq C \|\varphi\|_{C^\alpha(\partial\mathbb{B}_1^n)} \quad (13.11.44)$$

这里 C 是仅依赖于 n 和 α 的正常数.

证: 根据定理13.11.29 可知 $\inf_{\partial\mathbb{B}_1^n} \varphi \leq u \leq \sup_{\partial\mathbb{B}_1^n} \varphi$ 在 \mathbb{B}_1^n 内成立. 断言不等式

$$\sup_{x \in \mathbb{B}_1^n} \frac{|u(x) - u(x_0)|}{|x - x_0|^{\alpha/2}} \leq 2^{\alpha/2} \sup_{\partial\mathbb{B}_1^n} \frac{|\varphi(x) - \varphi(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha} \quad (13.11.45)$$

对任何 $x_0 \in \partial\mathbb{B}_1^n$ 都成立. 令

$$K := \sup_{\partial\mathbb{B}_1^n} \frac{|\varphi(x) - \varphi(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha}$$

并假设 $x_0 := (-1, 0, \dots, 0) \in \partial\mathbb{B}_1^n$. 则 $|x - x_0|^2 = 2(1 + x^1)$, $x := (x^1, \dots, x^n)$. 从而得到

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \leq K|x - x_0|^\alpha = K2^{\alpha/2}(1 + x^1)^{\alpha/2} =: v(x).$$

利用

$$\Delta v(x) = K2^{\alpha/2} \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\alpha}{2} - 1\right) (1 + x^1)^{\frac{\alpha}{2}-2} < 0 = \Delta u(x),$$

得到 $\Delta[u(x) - u(x_0) - v(x)] \geq 0$ 且

$$u(x) - u(x_0) - v(x) \leq \sup_{\partial\mathbb{B}_1^n} [\varphi(x) - \varphi(x_0) - v(x)] \leq 0$$

这里用到了定理13.11.29. 因此

$$u(x) - u(x_0) \leq v(x) = K2^{\alpha/2}(1 + x^1)^{\alpha/2} \leq K2^{\alpha/2}|x - x_0|^{\alpha/2}$$

对任何 $x \in \mathbb{B}_1^n$ 都成立. 类似地可得到 $-[u(x) - u(x_0)] \leq K2^{\alpha/2}|x - x_0|^{\alpha/2}$. 这就证明了 (13.11.45).

对任意 $x, y \in \mathbb{B}_1^n$, 引入

$$d_x = \text{dist}(x, \partial\mathbb{B}_1^n), \quad d_y = \text{dist}(y, \partial\mathbb{B}_1^n).$$

假设 $d_y \leq d_x$ 并取 $x_0, y_0 \in \partial\mathbb{B}_1^n$ 满足

$$|x - x_0| = d_x, \quad |y - y_0| = d_y.$$

如果 $|x - y| \leq \frac{d_x}{2}$, 则得到 $y \in \overline{\mathbb{B}^n}(x, d_x/2) \subset \mathbb{B}^n(x, d_x) \subset \mathbb{B}_1^n$. 根据性质13.11.31 和 (13.11.45) 推出

$$\begin{aligned} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\alpha/2}} &\leq C|x - y|^{\alpha/2} \sup_{\partial\mathbb{B}^n(x, d_x)} |u(x) - u(x_0)| \\ &\leq C(d_x/2)^{\alpha/2} d_x^{\alpha/2} \cdot \sup_{\mathbb{B}_1^n} \frac{|u(x) - u(x_0)|}{|x - x_0|^{\alpha/2}} \leq C d_x^\alpha \|\varphi\|_{C^\alpha(\partial\mathbb{B}_1^n)}. \end{aligned}$$

如果 $d_y \leq d_x \leq 2|x - y|$, 则

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq |u(x) - u(x_0)| + |u(x_0) - u(y_0)| + |u(y_0) - u(y)| \\ &\leq (2^{\alpha/2} d_x^{\alpha/2} + 2^{\alpha/2} d_y^{\alpha/2} + |x_0 - y_0|^{\alpha/2}) \|\varphi\|_{C^\alpha(\partial\mathbb{B}_1^n)} \end{aligned}$$

by (13.11.45). 但是, $|x_0 - y_0| \leq d_x + d_y + |x - y| \leq 5|x - y|$ 推出

$$|u(x) - u(y)| \leq (2^\alpha + 2^\alpha + 5^{\alpha/2})|x - y|^{\alpha/2} \|\varphi\|_{C^\alpha(\partial\mathbb{B}_1)}.$$

即 $\|u\|_{C^{\alpha/2}(\mathbb{B}_1^n)} \leq C(n, \alpha) \|\varphi\|_{C^\alpha(\partial\mathbb{B}_1^n)}$. \square

§13.11.4 * 能量方法

假设 $a_{ij} \in C(\mathbb{B}^n)$ ($\mathbb{B}^n := \mathbb{B}^n(\mathbf{0}, 1)$) 且不等式

$$\lambda|\xi|^2 \leq a_{ij}(x)\xi^i\xi^j \leq \Lambda|\xi|^2 \quad (13.11.46)$$

对任何 $x \in \mathbb{B}^n$ 和 $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n$ 都成立, 这里 λ, Λ 是正常数. 考察下面偏微分方程的弱解(weak solution) $u \in C^1(\mathbb{B}^n)$

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} D_j(a_{ij}D_i u) = 0. \quad (13.11.47)$$

即 u 满足等式

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \int_{\mathbb{B}^n} a_{ij}D_i u D_j \varphi = 0 \quad (13.11.48)$$

对任何 $\varphi \in C_0^1(\mathbb{B}^n)$ (即 φ 在 \mathbb{B}^n 上是连续的且在边界上取零) 都成立. 注意到调和函数满足 (13.11.47) (这里 $a_{ij} = \delta_{ij}$).

引理13.11.36. (Caccioppoli 不等式) 假设函数 $u \in C^1(\mathbb{B}^n)$ 满足

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \int_{\mathbb{B}^n} a_{ij}D_i u D_j \varphi = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^1(\mathbb{B}^n).$$

则对任意 $\eta \in C_0^1(\mathbb{B}^n)$ 有

$$\int_{\mathbb{B}^n} \eta^2 |Du|^2 \leq C \int_{\mathbb{B}^n} |D\eta|^2 u^2 \quad (13.11.49)$$

这里 C 是仅依赖于 λ 和 Λ 的正常数.

证: 对任何 $\eta \in C_0^1(\mathbb{B}^n)$ 令 $\varphi := \eta^2 u$. 根据 (13.11.48), 得到

$$0 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \int_{\mathbb{B}^n} a_{ij}D_i u (2\eta u D_j \eta + \eta^2 D_j u)$$

从而

$$\lambda \int_{\mathbb{B}^n} \eta^2 |Du|^2 \leq 2\Lambda \int_{\mathbb{B}^n} |\eta| |u| |Du| |D\eta| \leq \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{B}^n} \eta^2 |Du|^2 + \frac{2\Lambda^2}{\lambda} \int_{\mathbb{B}^n} |D\eta|^2 u^2.$$

这里 $C = 4\Lambda^2/\lambda^2$. \square

推论13.11.37. 假设 u 满足引理?? 中的条件. 则对任何 $0 \leq r < R \leq 1$ 有

$$\int_{\mathbb{B}_r^n} |Du|^2 \leq \frac{C}{(R-r)^2} \int_{\mathbb{B}_R^n} u^2 \quad (13.11.50)$$

这里 C 是仅依赖于 λ 和 Λ 的正常数.

证: 取 $\eta \in C_0^1(\mathbb{B}^n)$ 满足 $\eta \equiv 1$ 在 \mathbb{B}_r^n 内, $\eta \equiv 0$ 在 \mathbb{B}_R^n 外, 且 $|\mathbf{D}\eta| \leq \frac{1}{R-r}$. 则得到

$$\int_{\mathbb{B}_r^n} |\mathbf{D}u|^2 \leq \frac{C}{(R-r)^2} \int_{\mathbb{B}_R^n} u^2$$

根据 (13.11.49). \square

Poincaré 不等式是说

$$\int_{\mathbb{B}_R^n} u^2 \leq C(n)R^2 \int_{\mathbb{B}_R^n} |\mathbf{D}u|^2, \quad u \in C_0^1(\mathbb{B}_R^n).$$

等价的不等式是说

$$\int_{\mathbb{B}_R^n} (u-a)^2 \leq C(n)R^2 \int_{\mathbb{B}_R^n} |\mathbf{D}u|^2, \quad u \in C^1(\mathbb{B}_R^n)$$

其中 $a := \int_{\mathbb{B}_R^n} u / |\mathbb{B}_R^n|$.

推论13.11.38. 假设 u 满足引理 13.11.36 中的条件. 则对任何 $0 < R \leq 1$ 有

$$\int_{\mathbb{B}_{R/2}^n} u^2 \leq \theta \int_{\mathbb{B}_R^n} u^2, \quad \int_{\mathbb{B}_{R/2}^n} |\mathbf{D}u|^2 \leq \theta \int_{\mathbb{B}_R^n} |\mathbf{D}u|^2 \quad (13.11.51)$$

这里 θ 是仅依赖于 n, λ, Λ 的正常数.

证: 在 (13.11.49) 中取 $\eta \in C_0^1(\mathbb{B}_R^n)$ 满足 $\eta|_{\mathbb{B}_{R/2}^n} \equiv 1$ 和 $|\mathbf{D}\eta| \leq \frac{2}{R}$, 得到

$$\int_{\mathbb{B}_R^n} |\mathbf{D}(\eta u)|^2 = \int_{\mathbb{B}_R^n} (\eta^2 |\mathbf{D}u|^2 + |\mathbf{D}\eta|^2 u^2) \leq C \int_{\mathbb{B}_R^n} |\mathbf{D}\eta|^2 u^2 \leq \frac{C}{R^2} \int_{\mathbb{B}_R^n \setminus \mathbb{B}_{R/2}^n} u^2$$

这里 C 是仅依赖于 λ, Λ 的正常数. 根据 Poincaré 不等式得到

$$\int_{\mathbb{B}_{R/2}^n} u^2 \leq \int_{\mathbb{B}_R^n} (\eta u)^2 \leq C(n)R^2 \frac{C}{R^2} \int_{\mathbb{B}_R^n \setminus \mathbb{B}_{R/2}^n} u^2 = C_1 \int_{\mathbb{B}_R^n \setminus \mathbb{B}_{R/2}^n} u^2$$

这里 C_1 是仅依赖于 n, λ, Λ 的正常数. 即

$$\int_{\mathbb{B}_{R/2}^n} u^2 \leq \frac{C_1}{1+C_1} \int_{\mathbb{B}_{R/2}^n} u^2.$$

因为 $u-a$ 满足 (13.11.48), 所以

$$\int_{\mathbb{B}_R^n} \eta^2 |\mathbf{D}u|^2 \leq C \int_{\mathbb{B}_R^n} |\mathbf{D}\eta|^2 (u-a)^2 \leq \frac{C}{R^2} \int_{\mathbb{B}_R^n \setminus \mathbb{B}_{R/2}^n} (u-a)^2.$$

利用 Poincaré 不等式推出

$$\int_{\mathbb{B}_{R/2}^n} |\mathbf{D}u|^2 \leq \frac{C}{R^2} C(n)R^2 \int_{\mathbb{B}_R^n \setminus \mathbb{B}_{R/2}^n} |\mathbf{D}u|^2 = C_2 \int_{\mathbb{B}_R^n \setminus \mathbb{B}_{R/2}^n} |\mathbf{D}u|^2$$

这里 C_2 是仅依赖于 n, λ, Λ 的正常数. 特别地

$$\int_{\mathbb{B}_{R/2}^n} |\mathbf{D}u|^2 \leq \frac{C_2}{1+C_2} \int_{\mathbb{B}_{R/2}^n} |\mathbf{D}u|^2.$$

最后取 $\theta := \max\{\frac{C_1}{1+C_1}, \frac{C_2}{1+C_2}\}$ 得到 (13.11.51). \square

注13.11.39. 推论 13.11.38 意味着 \mathbb{R}^n 上具有有限 L^2 -范数 (即 u^2 是可积的) 的调和函数 u 必为零.

注13.11.40. 假设 u 满足引理 13.11.36 中的条件. 则对任何 $0 < \rho < r \leq 1$, 有

$$\int_{\mathbb{B}_\rho^n} u^2 \leq C \left(\frac{\rho}{r}\right)^\mu \int_{\mathbb{B}_r^n} u^2, \quad \int_{\mathbb{B}_\rho^n} |Du|^2 \leq C \left(\frac{\rho}{r}\right)^\mu \int_{\mathbb{B}_r^n} |Du|^2 \quad (13.11.52)$$

这里 C, μ 是仅依赖于 n, λ, Λ 的正常数.

引理13.11.41. 假设 $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ 是正定常数值矩阵并满足不等式

$$\lambda |\zeta|^2 \leq a_{ij} \zeta^i \zeta^j \leq \Lambda |\zeta|^2$$

对任意 $\zeta \in \mathbb{R}^n$ 都成立, 这里 $0 < \lambda < \Lambda$ 是正常数. 假设 $u \in C^1(\mathbb{B}_1^n)$ 满足

$$\int_{\mathbb{B}_1} a_{ij} D_i u D_j \varphi = 0, \quad \varphi \in C_0^1(\mathbb{B}_1^n).$$

则对任何 $0 < \rho \leq r$, 有

$$\int_{\mathbb{B}_\rho^n} u^2 \leq C \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int_{\mathbb{B}_r^n} u^2, \quad \int_{\mathbb{B}_\rho^n} |u - \underline{u}_\rho|^2 \leq C \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \int_{\mathbb{B}_r^n} |u - \underline{u}_r|^2 \quad (13.11.53)$$

这里 $C = C(\lambda, \Lambda)$ 是正常数且 \underline{u}_r 表示 u 在 \mathbb{B}_r^n 上的平均值.

证: 不妨假设 $r = 1$ 和 $\rho \in (0, 1/2]$. 首先断言

$$|u|_{L^\infty(\mathbb{B}_{1/2}^n)}^2 + |Du|_{L^\infty(\mathbb{B}_{1/2}^n)}^2 \leq c(\lambda, \Lambda) \int_{\mathbb{B}_1^n} u^2. \quad (13.11.54)$$

从 (13.11.54) 得到

$$\int_{\mathbb{B}_\rho^n} u^2 \leq C_1 \rho^n |u|_{L^\infty(\mathbb{B}_{1/2}^n)}^2 \leq C_2 \rho^n \int_{\mathbb{B}_1^n} u^2$$

和

$$\int_{\mathbb{B}_\rho^n} |u - \underline{u}_\rho|^2 \leq \int_{\mathbb{B}_\rho^n} 4\rho^2 |Du|_{L^\infty(\mathbb{B}_{1/2}^n)}^2 \leq C_3 \rho^{n+2} |Du|_{L^\infty(\mathbb{B}_{1/2}^n)}^2 \leq C_4 \rho^{n+2} \int_{\mathbb{B}_1^n} u^2.$$

因为 $u - \underline{u}_1$ 也满足 (13.11.48), 所以

$$\int_{\mathbb{B}_\rho^n} |u - \underline{u}_\rho|^2 \leq C_4 \rho^{n+2} \int_{\mathbb{B}_1^n} |u - \underline{u}_1|^2.$$

现在只要证明不等式 (13.11.54) 即可. 利用旋转不妨假设 $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ 是对角矩阵 $\text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. 因此 u 满足

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i D_{ii} u = 0,$$

这里 $0 < \lambda \leq \lambda_i \leq \Lambda, i = 1, \dots, n$. 则存在 $r_0 := r_0(\lambda, \Lambda) \in (0, 1/2)$ 使得对任何 $x_0 \in \mathbb{B}_{1/2}^n$ 矩形体

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{|x^i - x_0^i|}{\sqrt{\lambda_i}} < r_0, i = 1, \dots, n \right\}$$

包含在 \mathbb{B}_1^n 内. 考虑坐标变换

$$x^i \mapsto y^i := \frac{x^i}{\sqrt{\lambda_i}}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

并记 $v(y) := u(x)$. 则 v 在椭球体 $\{y \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \lambda_i (y^i)^2 < 1\}$ 内是调和的. 在球 $\{y \in \mathbb{R}^n : |y - y_0| < r_0\}$ 内, 内梯度估计推出

$$|v(y_0)|^2 + |Dv(y_0)|^2 \leq C(\lambda, \Lambda) \int_{\mathbb{B}_{r_0}^n(y_0)} v^2 \leq C(\lambda, \Lambda) \int_{\{y \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \lambda_i (y^i)^2 < 1\}} v^2.$$

即

$$|u(x_0)|^2 + |Du(x_0)|^2 \leq C(\lambda, \Lambda) \int_{\mathbb{B}_1^n} u^2.$$

由于 x_0 是 $\mathbb{B}_{1/2}^n$ 内的任意点, 不等式 (13.11.54) 立即得到. \square

§13.12 * Navier-Stokes 方程简介

Navier-Stokes 方程是用来描述流水的运动方程.

§13.12.1 * 有界区域上的流体

§13.12.2 * 外面区域上的流体

§13.12.3 * 无界区域上的流体

§13.13 参考文献

1. Koblitz, Neal. *Introduction to elliptic curves and modular forms*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics 97, Springer-Verlag, New York, 1993. x+248 pp. ISBN: 0-387-97966-2
2. 布鲁斯·C. 伯恩特 (Bruce C. Berndt) 主编: *拉玛努金笔记*(第 2, 3, 4 卷), 哈尔滨工业大学出版社, 2019.
3. 徐森林, 薛春华 编著: *数学分析*, 清华大学出版社, 2005.
4. 张福保, 薛金美, 潮小李 主编: *数学分析讲义*, 科学出版社, 2019.
5. 梅加强 编著: *数学分析*, 高等教育出版社, 2015.
6. 邓建平 编: *微积分 I 和 II*, 科学出版社, 2019.

7. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis I*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+574 pp. ISBN: 3-540-40386-8
8. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis II*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xvi+681 pp. ISBN: 3-540-40633-6
9. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis I*, Translated from the 1988 German original by Gary Brookfield, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. xiv+426 pp. ISBN: 3-7643-7153-6
10. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis II*, Translated from the 1999 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. xii+400 pp. ISBN: 978-3-7643-7472-3; 3-7643-7472-3
11. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis III*, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. xii+468 pp. ISBN: 978-3-7643-7479-2; 3-7643-7479-2
12. 菲赫金哥尔茨 著 (徐献瑜, 冷生明, 梁文骐 译; 郭思旭 校): 微积分学教程 (第一、二、三卷), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.
13. 吉米多维奇 著 (李荣涑, 李植 译): 数学分析习题集 (根据 2010 年俄文版翻译), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.
14. 汪林 著: 数学分析中的问题和反例, 现代数学基础 56, 高等教育出版社, 2015.
15. 裴礼文 编著: 数学分析中的典型问题与方法 (第二版), 高等教育出版社, 2015.
16. 朱尧辰 编著: 数学分析例选通过范例学技巧, 哈尔滨工业大学出版社, 2013.
17. 周民强 编著: 数学分析习题演练 (第一、二、三册), 科学出版社, 2018.
18. 李逸 编著: 数学分析讲义, 上海交通大学数学分析课讲义, 未出版, 2016.

第十四章 多变量级数理论

Euler, Leibniz, Bernoulli 家族: “porro hoc argumentandi genus, etsi Metaphysicum magis quam Mathematicum videatur, tamen firmum est: et alioqui Canonum Verae Metaphysicae major est usus in Mathesi, in Analysis, in ipsa Geometria, quam vulgo putatur”

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}, \quad 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = -1.$$

§14.1 函数项级数和函数列

在第六章我们研究了数项级数的基本性质, 和多元函数一样, 现在将数项级数扩充到多变量级数, 即函数项级数.

§14.1.1 收敛域

假设 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ 是定义在 $X \subset \mathbb{R}$ 上的一列函数. 我们将其称为定义在 X 上的**函数列(sequence of functions)**, 并把其和

$$\sum_{n \geq 1} f_n(x), \quad x \in X,$$

称为定义在 X 上的**函数项级数(series of functions)**.

定义14.1.1. (1) 假设 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$, $x \in X$, 为一函数列. 定义

$$D := \{x \in X \mid \{f_n(x)\}_{n \geq 1} \text{ 收敛}\} \subset X. \quad (14.1.1)$$

我们把点 $x \in D$ 称为函数列 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ 的**收敛点(convergent point)** 而把点集 D 称为函数列的**收敛域(domain of convergence)**.

对每个 $x \in D$, 定义

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x). \quad (14.1.2)$$

这样得到了函数列 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ 的**极限函数(limit function)** $f(x)$. 此时我们也称函数列 $f_n(x)$ **逐点收敛(pointwisely converges)** 到函数 $f(x)$.

(2) 假设 $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$, $x \in X$, 为一函数项级数. 定义

$$D := \left\{ x \in X \mid \sum_{n \geq 1} f_n(x) \text{ 收敛} \right\} \subset X. \quad (14.1.3)$$

我们把点 $x \in D$ 称为函数项级数 $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ 的**收敛点(convergent point)** 而把点集 D 称为函数项级数的**收敛域(domain of convergence)**. 如果进一步要

求, 我们可引入绝对收敛域(domain of absolute convergence) D_a 和条件收敛域(domain of condition convergence) D_c :

$$D_a := \left\{ x \in X \mid \sum_{n \geq 1} |f_n(x)| \text{ 收敛} \right\}, \quad D_c := D \setminus D_a.$$

对每个 $x \in D$, 定义

$$S(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x), \quad S_n(x) := \sum_{1 \leq k \leq n} f_k(x). \quad (14.1.4)$$

这样得到了函数项级数 $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ 的和函数(sum function) $S(x)$. 此时我们也称函数项级数 $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ 逐点收敛(pointwisely converges) 到函数 $S(x)$.

例14.1.2. (1) 求下列函数列数的收敛域:

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}, \quad f_n(x) = (1-x)x^n, \quad f_n(x) = \frac{x^2 + 2nx}{n}.$$

解: (a) 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$, 所以收敛域是 \mathbb{R} 且极限函数为 $f \equiv 0$.

(b) 因为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n$ 收敛如果 $|x| < 1$, 所以当 $-1 < x < 1$ 时得到函数列收敛且极限函数为 $f \equiv 0$. 另一方面, $f_n(1) \equiv 0$, 因此收敛域为 $(-1, 1]$ 且极限函数为 $f \equiv 0$.

(c) 因为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 2x$, 故收敛域为 \mathbb{R} 且极限函数为 $f(x) = 2x$. \square

(2) 求下列函数项级数的收敛域 (包括条件收敛域和绝对收敛域):

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq 1} x^n, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{1-x^n}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{1+x^{2n}}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{2^n + x^n}{1+(3x)^n} \quad (x \neq -1/3) \\ & \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{(x^2+1) \cdots (x^2+n)}, \quad \sum_{n \geq 1} n \left(x + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \sum_{n \geq 1} \left(\cos \frac{\pi x}{n}\right)^{n^3} \\ & \sum_{n \geq 1} \ln \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^x}\right] \quad (x > 0), \quad \sum_{n \geq 2} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^x \quad (x > 0) \\ & \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n+a^n} \quad (a \geq 0), \quad \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{e^{nx}}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{n3^{2n}}{2^n} x^n (1-x)^n. \end{aligned}$$

解: (a) 之前已证明该级数收敛当且仅当 $|x| < 1$, 且和函数为 $x/(1-x)$. 故 $D = D_a = (-1, 1)$.

(b) 根据 $|\frac{x^n}{n}| \leq |x|^n$ 可知当 $|x| < 1$ 时级数收敛; 而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n/n \neq 0$ 当 $|x| > 1$ 时, 所以收敛区域包含 $(-1, 1)$. 下面考虑临界点 $x = \pm 1$. 显然当 $x = -1$ 时级数收敛. 因此收敛域为 $[-1, 1)$. 即 $D_a = (-1, 1)$ 和 $D_c = \{-1\}$.

(c) 首先注意到公共定义域为 $X = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. 任意 $x \in (-1, 1)$ 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1-x^n}{1-x^{n+1}} \right| |x| = |x| < 1.$$

根据比式判别法此时级数绝对收敛. 但对任意 $|x| > 1$ 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |x^n / (1-x^n)| = 1 \neq 0$$

故此时级数发散. 因此 $D = D_a = (-1, 1)$.

(d) 根据不等式 $|x^n / (1+x^{2n})| \leq |x|^n$ 得到 $(-1, 1) \subset D_c$. 根据不等式

$$\left| \frac{x^n}{1+x^{2n}} \right| = \left| \frac{1}{x^n + \frac{1}{x^n}} \right| \leq \frac{1}{|x|^n},$$

可知 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \subset D_c$. 而当 $x = \pm 1$ 时, 由于 $|f_n(x)| = 1/2$, 所以此时级数发散. 因此 $D = D_a = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

(e) 当 $x = 0$ 时, $f_n(x) = 2^n$, 故此时级数发散. 当 $x \neq 0$ 时,

$$f_n(x) = \frac{(2/3x)^n + 1/3^n}{1 + (1/3x)^n},$$

所以当 $|x| > 2/3$ 时级数绝对收敛. 而当 $x = \pm 2/3$ 时, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \neq 0$. 故 $D = D_a = (-\infty, -3/2) \cup (2/3, +\infty)$.

(f) 计算得到

$$\frac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)} = \frac{x^2 + n + 1}{n + 1} = 1 + \frac{x^2}{n + 1} = 1 + \frac{x^2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

根据 Gauss 判别法得到 $D_a = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. 但是 $f_n(\pm 1) = \frac{1}{n+1}$, 所以 $D = D_a$.

(g) 当 $x = 0$ 时, $f_n(x) = n/n^n$; 利用根式判别法可知此时级数绝对收敛. 当 $x \neq 0$ 时

$$\left| n \left(x + \frac{1}{n} \right)^n \right| = n |x|^n \left| 1 + \frac{1}{nx} \right|^n \sim n |x|^n e^{1/x}.$$

根据根式判别法可知当 $0 < |x| < 1$ 时级数绝对收敛, 而利用收敛级数的必要条件可知当 $|x| \geq 1$ 时级数发散. 故 $D = D_a = (-1, 1)$.

(h) 计算得到

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{|f_n(x)|} &= \left[1 - \left(1 - \cos \frac{\pi x}{n} \right) \right]^{n^2} = \exp \left\{ n^2 \ln \left[1 - \left(1 - \cos \frac{\pi x}{n} \right) \right] \right\} \\ &\sim \exp \left[-n^2 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{n} \right) \right] \sim \exp \left(-n^2 \cdot 2 \sin^2 \frac{\pi x}{2n} \right) \sim e^{-\pi^2 x^2 / 2}, \quad n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

因此 $D = D_a = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

(i) 根据 Taylor 公式得到

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x} + O\left(\frac{1}{2n^{2x}}\right), \quad n \rightarrow +\infty.$$

因为级数 $\sum_{n \geq 1} (-1)^n/n^x$ 当 $x > 0$ 时条件收敛, 而级数 $\sum_{n \geq 1} 1/2n^{2x}$ 当 $2x > 1$ 时绝对收敛当 $2x \leq 1$ 时发散. 故 $D = D_a = (1/2, +\infty)$.

(j) 因为函数 $\ln t/t, t > 0$, 当 $t > e$ 时是单调递减, 所以根据积分判别法考虑下列反常积分

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\ln t}{t}\right)^x dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{s}{e^s}\right)^x e^s ds = \int_0^{+\infty} \frac{s^x}{e^{s(x-1)}} ds$$

的敛散性. 显然只当 $x > 1$ 时反常积分收敛. 故 $D = D_a = (1, +\infty)$.

(k) 当 $0 \leq a \leq 1$ 时计算得到

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n+a^n}} = |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+a^n}} = |x|,$$

所以当 $-1 < x < 1$ 时级数绝对收敛. 当 $|x| > 1$ 时 $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x)| \neq 0$, 故此时级数发散. 当 $x = 1$ 时, 由于

$$\frac{1}{n+a^n} \geq \frac{1}{n+1},$$

此时级数也发散. 显然当 $x = -1$ 时, 级数条件收敛. 故

$$0 \leq a \leq 1 \implies D_a(-1, 1), \quad D_c = \{-1\}.$$

下面假设 $a > 1$. 此时

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n+a^n} = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{x}{a}\right)^n \frac{1}{1+n/a^n}.$$

当 $|x| < a$ 时级数绝对收敛, 而当 $|x| > a$ 时级数发散. 当 $x = \pm a$ 时, $|f_n(x)| \rightarrow 1$, 故此时级数发散. 因此

$$a > 1 \implies D = D_a = (-a, a).$$

(l) 当 $x > 0$ 时由于 $|\sin(nx)/e^{nx}| \leq 1/e^{nx}$, 故此时级数绝对收敛. 当 $x = 0$ 时显然绝对收敛. 当 $x < 0$ 时我们证明此时级数发散. 若 $x = -k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, 则此时 $f_n(x) = 0$; 若 $x \neq -k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, 则 $|f_n(x)| \rightarrow +\infty$ 如果 $k \notin \mathbb{Q}$, 和 $|f_n(x)| \rightarrow 0$ 如果 $k \in \mathbb{Q}$. 因此 $D = D_a = [0, +\infty)$.

(m) 计算得到

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 2 \sin x = 2 \sin x.$$

故当 $|\sin x| < 1/2$ 时级数绝对收敛, 而当 $|\sin x| > 1/2$ 时级数发散. 当 $|\sin x| = 1/2$ 时级数绝对收敛. 因此 $D = D_a = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq 2 \sin x \leq 1\}$.

(n) 当 $x = 0$ 或 1 时级数绝对收敛. 如果 $x \neq 0, 1$, 因为

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{9}{2} \cdot x(1-x) = x(1-x),$$

所以当 $|x(1-x)| = 2/9$ 时级数绝对收敛, 而当 $|x(1-x)| > 2/9$ 时发散. 如果 $|x(1-x)| = 2/9$ 则级数变为 $\sum_{n \geq 1} (-1)^n n$, 显然发散. 故

$$D = D_a = \left(-\frac{\sqrt{17}-4}{6}, \frac{1}{3} \right) \cup \left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{17}+3}{6} \right).$$

§14.1.2 函数列和函数项级数的基本问题与一致收敛

在定理6.3.9的证明中, 我们验证了“求和与求极限可以相交换”, 当然是在某些假设条件下; 在例6.3.13中我们还没有验证“求和与求积分是否可以相交换”; 在定理6.4.9的证明中, 我们还没有验证“求和与求导数是否可以相交换”.

这三个“相交换”问题可以系统地归结如下.

(1) 假设 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ 是一函数列, D 为其收敛域, 并假设极限函数为 $f(x)$. 不妨假设 D 包含闭区间 $[a, b]$.

(1.1) $f_n(x) \in C([a, b]) \stackrel{???}{\implies} f(x) \in C([a, b])$, 即,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x).$$

(1.2) $f_n(x) \in R([a, b]) \stackrel{???}{\implies} f(x) \in R([a, b])$ 且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx.$$

(1.3) $f_n(x) \in D([a, b]) \stackrel{???}{\implies} f(x) \in D([a, b])$ 且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

(2) 假设 $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ 是一函数项级数, D 为其收敛域, 并假设和函数为 $S(x)$. 不妨假设 D 包含闭区间 $[a, b]$.

(2.1) $f_n(x) \in C([a, b]) \stackrel{???}{\implies} S(x) \in C([a, b])$, 即,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n \geq 1} f_n(x) = \sum_{n \geq 1} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x).$$

(2.2) $f_n(x) \in R([a, b]) \stackrel{???}{\implies} S(x) \in R([a, b])$ 且

$$\sum_{n \geq 1} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \sum_{n \geq 1} f_n(x) dx.$$

(2.3) $f_n(x) \in D([a, b]) \implies S(x) \in D([a, b])$ 且

$$\sum_{n \geq 1} \frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n \geq 1} f_n(x).$$

下面例子告诉我们一般情况下上述“相交换”不成立.

例14.1.3. (1) 考虑 $f_n(x) = x^n, 0 \leq x \leq 1$. 则

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

此时

$$\lim_{x \rightarrow 1} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0 \neq 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow 1} f_n(x).$$

(2) 考虑函数 $f_n(x) = nx(1-x^2)^n, 0 \leq x \leq 1$. 则

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0, \quad x \in [0, 1].$$

此时

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2} \int_0^1 (1-x^2)^n dx^2 = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx.$$

(3) 考虑 $f_n(x) = x^n, 0 \leq x \leq 1$. 则 $f_n(x) \in D([0, 1])$ 但 $f(x) \notin D([0, 1])$.

例14.1.4. (1) (求和与求极限不可交换) 考虑 $f_n(x) = x^{2(n+1)} - x^{2n}, -1 \leq x \leq 1$. 则

$$S_n(x) = \sum_{1 \leq k \leq n} f_k(x) = x^{2(n+1)} - x^2, \quad S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 1, \\ 0, & x = -1, \\ -x^2, & x \in (-1, 1). \end{cases}$$

此时

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n \geq 1} f_n(x) = -1 \neq 0 = \sum_{n \geq 1} \lim_{x \rightarrow 1} f_n(x).$$

(2) (求和与求积分不可交换) 考虑函数

$$f_n(x) = nx(1-x^2)^n - (n-1)x(1-x^2)^{n-1}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

则

$$S_n(x) = \sum_{1 \leq k \leq n} f_k(x) = nx(1-x^2)^n, \quad S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = 0, \quad x \in [0, 1].$$

此时

$$\sum_{n \geq 1} \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} \right) = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 \sum_{n \geq 1} f_n(x) dx.$$

(3) (求和与求导数不可交换) 考虑 $f_n = x^n - x^{n-1}$, $x \in [0, 1]$. 则

$$\sum_{n \geq 1} f_n(x) = 0, \quad x \in [0, 1] \implies \left(\sum_{n \geq 1} f_n(x) \right)' = 0, \quad x \in [0, 1].$$

但是

$$\sum_{n \geq 1} f_n'(x) = 1 + \sum_{n \geq 2} [nx^{n-1} - (n-1)x^{n-2}] = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ +\infty, & x = 1. \end{cases}$$

为使上述三个“相交换”可以实现, 下面引入一致收敛的概念.

定义14.1.5. (1) 假设函数列 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ 和函数 $f(x)$ 都是定义在 $D \subset \mathbb{R}$ 上. 称函数列 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ 在 D 上一致收敛(**uniformly converges**)到 $f(x)$, 如果 $\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N \forall x \in D$, 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

此时记为

$$f_n(x) \Rightarrow_D f(x), \quad n \rightarrow +\infty \quad \text{或} \quad f_n(x) \Rightarrow f(x).$$

(2) 假设函数项级数 $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ 和函数 $S(x)$ 都是定义在 $D \subset \mathbb{R}$ 上. 称函数项级数 $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ 在 D 上一致收敛(**uniformly converges**)到 $S(x)$, 如果部分和函数列 $\{S_n(x)\}_{n \geq 1}$ 在 D 上一致收敛到 $S(x)$. 此时记为

$$\sum_{n \geq 1} f_n(x) \Rightarrow_D S(x), \quad n \rightarrow +\infty \quad \text{或} \quad \sum_{n \geq 1} f_n(x) \Rightarrow S(x).$$

注14.1.6. (1) $f_n(x) \not\Rightarrow f(x) \iff \exists \epsilon_0 > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n > N \exists x_0 \in D$ 满足 $|f_n(x_0) - f(x_0)| \geq \epsilon_0$.

同样, $\sum_{n \geq 1} f_n(x) \not\Rightarrow S(x) \iff \exists \epsilon_0 > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n > N \exists x_0 \in D$ 满足

$$\left| \sum_{1 \leq k \leq n} f_k(x_0) - S(x_0) \right| = |S_n(x_0) - S(x_0)| \geq \epsilon_0.$$

(2) 显然函数列或函数项级数的一致收敛蕴含了逐点收敛. 但是反之则不一定成立. 比如考察函数列 $f_n(x) = (x^2 + 2nx)/n$, $n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$. 则其极限函数为 $f(x) = 2x$. 但是

$$|f_n(-2n) - f(-2n)| = |0 + 4n| = 4n \rightarrow +\infty.$$

(3) 假设函数列 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ 在 D 上逐点收敛到函数 $f(x)$, 且对任意 $x \in D$ 有

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0,$$

则 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$. 证明是显然的.

(4) 讲一致收敛必须要事先指明所给的区域 $D \subset \mathbb{R}$. 不如 (2) 中的例子在 $D = \mathbb{R}$ 上不是一致收敛, 但是根据 (3) 其在任意给定的有界区间上是一致收敛的.

上述注 (4) 给出了如下概念: 称函数列 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ 在 D 上是内闭一致收敛到 $f(x)$, 如果对任意给定的闭区间 $[a, b] \subset D$, 函数列 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ 在 $[a, b]$ 上是一致收敛到 $f(x)$.

例14.1.7. (1) 考察下列函数列在指定区间上的一致收敛性:

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad f_n(x) = x^n, \quad x \in [0, 1); \quad f_n(x) = n^2xe^{-n^2x^2}, \quad x > 0.$$

解: (a) 极限函数为 $f(x) \equiv 0$, 故

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|x|}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n}.$$

因此函数列 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ 一致收敛到 $f(x) = 0$.

(b) 极限函数为 $f(x) \equiv 0, x \in [0, 1)$, 故

$$|f_n(x) - f(x)| = |x|^n.$$

若取 $x_n = \frac{n-1}{n} \rightarrow 1$ 则得到 $|f_n(x_n) - f(x_n)| = (1 - 1/n)^n \rightarrow 1/e \neq 0$. 因此不是一致收敛的.

然而函数列是内闭一致收敛的, 这是因为对任意 $[a, b] \rightarrow [0, 1)$ 必有

$$|f_n(x) - f(x)| = |x|^n \leq b^n \rightarrow 0.$$

(c) 极限函数为 $f(x) = 0, x > 0$, 故

$$|f_n(x) - f(x)| = n^2xe^{-n^2x^2}.$$

若取 $x_n = 1/\sqrt{2n} \rightarrow 0$ 则得到 $|f_n(x_n) - f(x_n)| = ne^{-1/2}/\sqrt{2} \rightarrow +\infty$. 因此不是一致收敛的.

然而函数列是内闭一致收敛的, 这是因为对任意 $[a, b] \rightarrow (0, +\infty)$ 必有

$$|f_n(x) - f(x)| = n^2xe^{-n^2x^2} \leq n^2ae^{-n^2a^2} \rightarrow 0.$$

(2) 考察下列函数项级数在指定区间上的一致收敛性:

§14.1.3 一致收敛的判别法

最简单也是最主要的判别法是

定理14.1.8. (Cauchy 判别法) (1) $f_n(x) \rightrightarrows_D f(x) \iff \forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in D$ 有

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \epsilon.$$

(2) $\sum_{n \geq 1} f_n(x) \rightrightarrows_D S(x) \iff \forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in D$ 有

$$\left| \sum_{n+1 \leq k \leq n+p} f_k(x) \right| < \epsilon.$$

证: (1) \implies : $\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N \forall x \in D$ 有 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon/2$. 因此

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

\impliedby : Fix $x \in D$. 则数列 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ 收敛到某个数. 这样就得到函数 $f(x)$ 使得函数列 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ 逐点收敛到 $f(x)$. 令 $p \rightarrow +\infty$ 得到 $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$. 即 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$.

(2) 这是因为 $\sum_{n+1 \leq k \leq n+p} f_k(x) = S_{n+p}(x) - S_n(x)$. \square

推论14.1.9. (1) 函数项级数 $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ 在 D 上一致收敛 $\implies \{f_n(x)\}_{n \geq 1} \rightrightarrows_D 0$.

(2) $f_n(x) \rightrightarrows_D f(x) \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)|) = 0$.

(3) 函数项级数 $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ 一致收敛 \iff

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_D |S_n(x) - S(x)| \right) = 0.$$

(4) 假设 $f_n(x) \in C([a, b])$ 且函数项级数 $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ 在 $D = (a, b)$ 内一致收敛. 则数项级数 $\sum_{n \geq 1} f_n(a)$ 和 $\sum_{n \geq 1} f_n(b)$ 收敛, 且函数项级数 $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛.

(5) $f_n(x) \rightrightarrows_D f(x) \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = 0, \forall \{x_n\}_{n \geq 1} \subset D$.

(6) $\sum_{n \geq 1} f_n(x) \rightrightarrows_D S(x) \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} |S_n(x_n) - S(x_n)| = 0, \forall \{x_n\}_{n \geq 1} \subset D$.

证: (1) 假设函数列 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ 在 D 上一致收敛, 则 $\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N \forall p \in \mathbb{N}$ 有

$$\left| \sum_{n+1 \leq k \leq n+p} f_k(x) \right| < \epsilon.$$

特别地取 $p = 1$ 得到 $f_n(x) \rightrightarrows_D 0$.

(2) 显然.

(3) 显然.

(4) 因为函数项级数 $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ 在 (a, b) 内一致收敛, 所以 $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in (a, b)$ 有

$$\left| \sum_{n+1 \leq k \leq n+p} f_k(x) \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

对上述 $\epsilon > 0, n > N$ 和 $p \in \mathbb{N}, \exists \delta = \delta(\epsilon, n, p) > 0$ 只要 $a \leq x < a + \delta$ 有

$$|f_k(x) - f_k(a)| < \frac{\epsilon}{2p}, \quad n+1 \leq k \leq n+p.$$

从而得到

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n+1 \leq k \leq n+p} f_n(a) \right| &\leq \left| \sum_{n+1 \leq k \leq n+p} [f_k(x) - f_k(a)] \right| + \left| \sum_{n+1 \leq k \leq n+p} f_k(x) \right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2p} \cdot p = \epsilon. \end{aligned}$$

(5) 假设 $f_n(x) \rightrightarrows_D f(x)$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)|) = 0$. 故对任意 $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset D$ 有

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow +\infty.$$

反之, 假设 $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$. $\exists \epsilon_0 > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n > N \exists \xi \in D$ 使得 $|f_n(\xi) - f(\xi)| \geq \epsilon_0$. 因此 \exists 严格递增数列 $\{n_k\}_{k \geq 1} \exists \xi_k \in D$ 满足 $|f_{n_k}(\xi_k) - f(\xi_k)| \geq \epsilon_0$. 这就产生了矛盾.

(6) 证明和 (5) 几乎一样. \square

例14.1.10. (1) 研究下列函数列的一致收敛性:

$$f_n(x) = (1-x)x^n, \quad x \in [0, 1]; \quad f_n(x) = \frac{n+x^2}{nx}, \quad x \in (0, 1),$$

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx}, \quad x \in (0, 1); \quad f_n(x) = x^n e^{-n^2 x}, \quad x \geq 0; \quad f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$f_n(x) = \frac{nx}{n^2 + (n+2)x}, \quad x > 0; \quad f_n(x) = \sin \frac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}, \quad x \in [0, 1-\delta] \text{ 或 } [1-\delta, 1+\delta] \text{ 或 } [1+\delta, +\infty) \quad (0 < \delta < 1);$$

$$f_n(x) = \frac{x(\ln n)^\alpha}{n^x}, \quad n \geq 2, x \geq 0; \quad f_n(x) = nx(1-x^2)^n, \quad x \in [0, 1];$$

$$f_1 \in R([a, b]), \quad f_{n+1}(x) := \int_a^x f_n(t) dt, \quad n \geq 1 \implies f_n(x) \rightrightarrows_{[a, b]} 0$$

解: (a) 极限函数为 $f(x) = 0, x \in [0, 1]$. 则

$$\sup_{x \in [0, 1]} (|f_n(x) - f(x)|) = \sup_{x \in [0, 1]} (1-x)x^n = (1-x)x^n \Big|_{x=\frac{n}{1+n}} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \rightarrow 0$$

当 $n \rightarrow +\infty$ 时. 故 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ 一致收敛到 $f(x) = 0$.

(b) 极限函数为 $f(x) = 1/x, x \in (0, 1)$. 则

$$\sup_{x \in (0,1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in (0,1)} \frac{x}{n} = \frac{1}{n} \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow +\infty.$$

故 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ 一致收敛到 $f(x) = 1/x$.

(c) 极限函数为 $f(x) = 0$. 则

$$\sup_{x \in (0,1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in (0,1)} \frac{1}{1+nx} \geq \frac{1}{1+n \cdot (1/n)} = \frac{1}{2}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

故 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ 不一致收敛到 $f(x) = 0$.

(d) 极限函数为 $f(x) = 0$. 则

$$\sup_{x \geq 0} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \geq 0} \frac{x^n}{e^{n^2x}} = \frac{1}{n^n e^n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty,$$

这是因为函数 $F(x) = x^n e^{-n^2x}$ 的导数为

$$F'(x) = nx^{n-1}e^{-n^2x} - n^2x^n e^{-n^2x} = nx^{n-1}e^{-n^2x}(1-nx)$$

从未 $F_{\max} = F(1/n) = n^{-n}e^{-n}$. 因此 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ 一致收敛到 $f(x) = 0$.

(e) 极限函数为 $f(x) = |x|$. 则

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| \right| = \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|} \leq \frac{1/n^2}{1/n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

故 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ 一致收敛到 $f(x) = |x|$.

(f) 极限函数为 $f(x) = 0$. 若取 $x_n = n$ 得到

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{nx_n}{n^2 + (n+2)x_n} = \frac{n^2}{2n^2 + 2n} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

故 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ 不一致收敛到 $f(x) = 0$.

(g) 极限函数为 $f(x) \equiv 0, x \in \mathbb{R}$. 若取 $x_n = n\pi/2$ 得到

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left| \sin \frac{\pi}{2} \right| = 1.$$

故 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ 不一致收敛到 $f(x) = 0$.

(h) 极限函数为

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ \frac{1}{2}, & x = 1, \\ 1, & x > 1, \end{cases}$$

如果 $D = [0, 1 - \delta]$ 则

$$\sup_{[0, 1 - \delta]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{[0, 1 - \delta]} \frac{x^n}{1 + x^n} \leq (1 - \delta)^n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

此时 $\{f_n(x)\}_{n \geq 0} \Rightarrow_{[0, 1 - \delta]} 0$.

如果 $D = [1 - \delta, 1 + \delta]$ 则取 $x_n = \sqrt[n]{2} \in (1, 1 + \delta)$, 只要 $n > \ln 2 / \ln(2 + \delta)$, 得到

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left| \frac{x_n^n}{1 + x_n^n} - 1 \right| = \frac{1}{1 + x_n^n} = \frac{1}{1 + 2} = \frac{1}{3}.$$

此时 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1} \not\Rightarrow_{[1 - \delta, 1 + \delta]} f(x)$.

如果 $D = [1 + \delta, +\infty)$, 则得到

$$\sup_{x \in [1 + \delta, +\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \geq 1 + \delta} \frac{1}{1 + x^n} \leq \frac{1}{1 + (1 + \delta)^n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

此时 $\{f_n(x)\}_{n \geq 0} \Rightarrow_{[0, 1 - \delta]} 1$.

(i) 极限函数为 $f(x) \equiv 0, x \geq 0$. 则

$$\sup_{x \geq 0} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \geq 0} \frac{x(\ln n)^\alpha}{n^x} = \frac{\frac{1}{\ln n}(\ln n)^\alpha}{n^{\frac{1}{\ln n}}} = \frac{(\ln n)^{\alpha-1}}{n^{\frac{1}{\ln n}}} = \frac{1}{e}(\ln n)^{\alpha-1}.$$

故 $\alpha < 1$ 时函数列一致收敛, 而当 $\alpha \geq 1$ 时函数列不一致收敛.

(j) 极限函数为 $f(x) = 0$. 则

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} nx(1 - x^2)^n \geq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \rightarrow 1 \neq 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

故 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ 不一致收敛到 $f(x) = 0$.

(k) 因为 f_1 在 $[a, b]$ 上可积, 则根据定理 5.3.4 可知 $|f_1(x)| \leq M$, 对任意 $x \in [a, b]$ 都成立. 计算得到

$$\begin{aligned} |f_2(x)| &\leq \int_a^x |f_1(t)| dt \leq M(x - a), \\ |f_3(x)| &\leq \int_a^x |f_2(t)| dt \leq M \int_a^x (t - a) dt \\ &= \frac{M}{2} (t - a)^2 \Big|_a^x = \frac{M}{2} (x - a)^2. \end{aligned}$$

一般地得到

$$|f_n(x)| \leq \frac{M}{(n-1)!} (x - a)^{n-1} \leq \frac{M(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

故函数列 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ 一致收敛到 $f(x) = 0$.

(2) 研究下列函数项级数的一致收敛性:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n}}{2^{nx}}, \quad x > 0; \quad \sum_{n \geq 1} e^{-nx}, \quad x > 0; \quad \sum_{n \geq 1} \frac{x^3}{(1+x^3)^n}, \quad x > 0;$$

$$\sum_{n \geq 1} a_n \text{ 收敛} \iff \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n!} \int_0^x t^n e^{-t} dt \text{ 在 } [0, +\infty) \text{ 上一致收敛,}$$

解: (a) 因为若取 $x_n = 1/n$,

$$|f_n(x_n)| = \sqrt{n} 2^{-n \frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{n}}{2} \geq \frac{1}{2},$$

所以根据推论14.1.9 可知 $\sum_{n \geq 1} f_n(x) \not\rightarrow 0$.

(b) 因为 $f_n(1/n) = 1/e$, 所以通项不是一致收敛到 0. 故级数 $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 不一致收敛的.

(c) 取 $x_n = 1/\sqrt[3]{n}$ 得到

$$\sum_{1 \leq k \leq N} f_k(x_k) = \sum_{1 \leq k \leq N} \frac{\frac{1}{n}}{(1 + \frac{1}{n})^k} \implies \sum_{n+1 \leq k \leq 2n} f_k(x_k) \geq \frac{1}{n} \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^{2n}} \geq \frac{1}{e^2}.$$

所以级数 $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛的.

(d) 令

$$f_n(x) := \frac{a_n}{n!} \int_0^x t^n e^{-t} dt.$$

则得到

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{a_1}{1!} \int_0^x t e^{-t} dt = \frac{a_1}{1!} \left[-\int_0^x t d e^{-t} \right] = a_1 \left[-x e^{-x} + \int_0^x e^{-t} dt \right] \\ &= a_1 [-x e^{-x} + 1 - e^{-x}] = a_1 [1 - (1+x)e^{-x}]. \end{aligned}$$

一般地可得到

$$f_n(x) = a_n \left[1 - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} \right) e^{-x} \right] =: a_n b_n(x).$$

因为 $b_n(x)$ 是一致有界, 根据 Abel 判别法, $\sum_{n \geq 1} a_n$ 收敛推出 $\sum_{n \geq 1} f_n(x) = \sum_{n \geq 1} a_n b_n(x)$ 一致收敛. 反之, 函数项级数 $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ 一致收敛意味着 $\forall \epsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \forall x > 0$ 有

$$\left| \sum_{n+1 \leq k \leq n+p} u_n(x) \right| < \epsilon.$$

让 $x \rightarrow +\infty$ 得到 $f_n(x) \rightarrow a_n$ 从而

$$\left| \sum_{n+1 \leq k \leq n+p} a_n \right| \leq \epsilon \implies \sum_{n \geq 1} a_n \text{ 收敛. } \square$$

下面介绍三种实用的一致收敛判别法, Weierstrass 判别法、Abel 判别法和 Dirichlet 判别法.

定理14.1.11. (Weierstrass 判别法) 假设 $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ 是以函数项级数, D 是其收敛域. 如果存在收敛的正项级数 $\sum_{n \geq 1} M_n$ 满足

$$|f_n(x)| \leq M_n, \quad n \geq 1, \quad x \in D, \quad (14.1.5)$$

则函数项级数 $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ 在 D 上是一致收敛的.

证: $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \forall p \in \mathbb{N}$ 有

$$\left| \sum_{n+1 \leq k \leq n+p} M_k \right| < \epsilon.$$

故得到

$$\left| \sum_{n+1 \leq k \leq n+p} f_n(x) \right| \leq \sum_{n+1 \leq k \leq n+p} |f_n(x)| \leq \sum_{n+1 \leq k \leq n+p} M_k < \epsilon. \quad \square$$

显然 (14.1.5) 中 n 可以取充分大的数, 这并不影响结论本身. 在假设条件 (14.1.5) 下, 上述证明不仅表明函数项级数 $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ 一致收敛, 而且也证明了函数项级数 $\sum_{n \geq 1} |f_n(x)|$ 也一致收敛. 因此我们可以引入函数项级数绝对收敛的概念, 为了进行比较, 我们把函数项级数 $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ 的逐点收敛和一致收敛也放在一起:

$$\begin{aligned} \text{逐点收敛} &\iff \sum_{n \geq 1} f_n(x) \text{ 对每个 } x \in D \text{ 都收敛,} \\ \text{一致收敛} &\iff \text{部分和函数列 } \{S_n(x)\}_{n \geq 1} \text{ 一致收敛,} \\ \text{绝对收敛} &\iff \sum_{n \geq 1} |f_n(x)| \text{ 对每个 } x \in D \text{ 都收敛,} \\ \text{绝对一致收敛} &\iff \sum_{n \geq 1} |f_n(x)| \text{ 一致收敛.} \end{aligned}$$

运用上述术语, 定理14.1.11 的结论可加强为函数项级数 $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ 在 D 上是绝对一致收敛的.

定理14.1.12. (Abel 和 Dirichlet 一致收敛判别法) 给定函数项级数 $\sum_{n \geq 1} a_n(x)$ 和 $\sum_{n \geq 1} b_n(x)$, $x \in D$.

- (1) **(Abel)** 假设函数列 $\{a_n(x)\}$ 在 D 上是一致有界 (即存在与 n, x 均无关的正常数 M 使得 $|a_n(x)| \leq M$ 对任意 $n \geq 1$ 和任意 $x \in D$ 都成立) 和逐点单调的 (即对每个 $x \in D$ 数列 $\{a_n(x)\}_{n \geq 1}$ 都是单调的), 而函数项级数 $\sum_{n \geq 1} b_n(x)$ 在 D 上是一致收敛的,

(2) **(Dirichlet)** 假设函数列 $\{a_n(x)\}_{n \geq 1}$ 在 D 上是一致收敛到 0 和逐点单调的, 而函数项级数 $\sum_{n \geq 1} b_n(x)$ 的部分和函数列在 D 上是一致有界的,

则函数项级数 $\sum_{n \geq 1} a_n(x)b_n(x)$ 在 D 上是一致收敛的.

证: 如果收敛域 D 是单点集, 上述定理就是定理 6.3.4. 对一般的点集 D 证明方法也是一样的.

(1) 函数项级数 $\sum_{n \geq 1} b_n(x)$ 一致收敛推出 $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in D$ 有

$$\left| \sum_{n+1 \leq k \leq n+p} u_k(x) \right| < \epsilon.$$

根据 Abel 引理, 引理 6.3.3, 得到

$$\left| \sum_{n+1 \leq k \leq n+p} a_n(x)b_n(x) \right| \leq \epsilon (|a_{n+1}(x)| + 2|a_{n+p}(x)|) \leq 3M\epsilon.$$

(2) 函数列 $\{a_n(x)\}_{n \geq 1} \Rightarrow 0$ 意味着 $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \forall x \in D$ 有 $|a_n(x)| < \epsilon$. 因为部分和 $B_n(x) = \sum_{1 \leq k \leq n} b_k(x)$ 一致有界, 所以 $|B_n(x)| \leq M$ 对任意 $n \geq 1$ 和任意 $x \in D$ 都成立, 这里 M 是和 n, x 均无关的正常数. 根据 Abel 引理, 引理 6.3.3, 得到

$$\left| \sum_{n+1 \leq k \leq n+p} a_k(x)b_k(x) \right| \leq 2M (|a_{k+1}(x)| + 2|a_{n+p}(x)|) \leq 6M\epsilon. \quad \square$$

例 14.1.13. 研究如下函数项级数的一致连续性:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad \sum_{n \geq 1} \frac{nx}{1+n^5x^2}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\sum_{n \geq 1} x^\alpha e^{-nx}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n (x+n)^n}{n^{n+\alpha}}, \quad \alpha > 0, \quad x \in [0, 1];$$

$$\frac{1}{1+x} - \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(x+n-1)(x+n)}, \quad x \in [0, 1]; \quad \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n}}{2^{nx}}, \quad x \in (\delta, +\infty), \quad \delta > 0;$$

$$\sum_{n \geq 1} \left(1 - \cos \frac{x}{n}\right), \quad x \in [-\delta, \delta], \quad \delta > 0;$$

$$\sum_{n \geq 1} t^n (\sin(n\theta))^k, \quad t \in (0, 1), \quad k \geq 0, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin x \cdot \sin(nx)}{\sqrt{n+x}}, \quad x \in [0, 1];$$

$$\sum_{n \geq 1} a_n \text{ 收敛} \implies \sum_{n \geq 1} a_n x^n \text{ 在 } [0, 1] \text{ 上一致收敛};$$

$$a_n \text{ 单调趋于 } 0 \implies \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx) \text{ 和 } \sum_{n \geq 1} a_n \sin(nx) \text{ 在 } (0, 2\pi) \text{ 内闭一致收敛};$$

解: (a) 因为 $|\sin(nx)/n^2| \leq 1/n^2$, 所以是绝对一致收敛.

(b) 因为 $|\cos(nx)/n^2| \leq 1/n^2$, 所以是绝对一致收敛.

(c) 利用平均值不等式得到

$$\left| \frac{nx}{1+n^5x^2} \right| = \left| \frac{1}{2n^{3/2}} \cdot \frac{2n^{5/2}x}{1+n^5x^2} \right| \leq \frac{1}{2n^{3/2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

因此是绝对一致收敛.

(d) 因为函数 $x^\alpha e^{-nx}$ 在 $x = \alpha/n$ 处取到最大值, 所以

$$\sum_{n \geq 1} f_n(x) \leq \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha^\alpha e^{-\alpha}}{n^\alpha}, \quad x > 0.$$

当 $\alpha > 1$ 时, 函数项级数一致收敛. 当 $0 < \alpha \leq 1$ 时,

$$\sum_{n+1 \leq k \leq 2n} f_n(1/n) = \sum_{n+1 \leq k \leq 2n} \frac{1}{n^\alpha} e^{-k/n} \geq \sum_{n+1 \leq k \leq 2n} \frac{1}{e^{2n^\alpha}} = n^{1-\alpha} e^{-2} \geq e^{-2}.$$

故此时函数项级数在 $(0, +\infty)$ 上不是一致收敛.

(e) 对原函数项级数重新组合得到

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \cdot \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n =: \sum_{n \geq 1} b_n(x) a_n(x).$$

因为 $\sum_{n \geq 1} b_n(x)$ 一致收敛, 而函数列 $\{a_n(x)\}$ 逐点单调趋于 e^x 且一致有上界 e , 所以根据 Abel 判别法可知函数项级数 $\sum_{n \geq 1} a_n(x) b_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是一致收敛的.

(f) 因为

$$\left| \frac{1}{(x+n-1)(x+n)} \right| < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

所以函数项级数是一致收敛的.

(g) 对任意 $\delta > 0$ 和任意 $n \geq 1$ 有

$$|f_n(x)| = \frac{\sqrt{n}}{2^{nx}} \leq \frac{\sqrt{n}}{2^{n\delta}} =: M_n.$$

因为

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M_{n+1}}{M_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} 2^{-\delta} = 2^{-\delta} < 1,$$

所以根据比式判别法可知函数项级数一致收敛.

(h) 因为

$$|f_n(x)| = \left| 1 - \cos \frac{x}{n} \right| = \left| 2 \sin^2 \frac{x}{2n} \right| \leq 2 \left(\frac{x}{2n} \right)^2 \leq \frac{\delta^2}{2n^2},$$

所以函数项级数一致收敛.

(i) 因为部分和 $S_n(x) = \sum_{1 \leq m \leq n} t^m (\sin(m\theta))^k$ 满足

$$S_{n+p}(x) - S_n(x) \leq \sum_{n+1 \leq k \leq n+p} t^k.$$

但是级数 $\sum_{n \geq 1} t^n$ 当 $0 < t < 1$ 时是收敛的, 因此函数项级数一致收敛.

(j) 根据 (l) 中的恒等式得到

$$\left| \sin x \sum_{1 \leq k \leq n} \sin(kx) \right| = \left| \cos \frac{x}{2} \right| \left| \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x - \sin \frac{x}{2} \right| \leq 2.$$

另一方面函数列 $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n+x}} \right\}_{n \geq 1}$ 是逐点单调的和一致收敛到 0, 故利用 Dirichlet 判别法可知原函数项级数一致收敛.

(k) 因为函数列 $\{x^n\}_{n \geq 1}$ 是逐点单调且一致有界, 根据 Abel 判别法可知原函数项级数一致收敛.

(l) 任取闭区间 $[\delta, 2\pi - \delta]$, 这里 $0 < \delta < \pi$, 则得到

$$\left| \sum_{1 \leq k \leq n} \cos(kx) \right| = \frac{|\sin((n+1/2)x) - \sin(x/2)|}{2|\sin(x/2)|} \leq \frac{1}{\sin(\delta/2)}$$

和

$$\left| \sum_{1 \leq k \leq n} \sin(kx) \right| = \frac{|\cos((n+1/2)x) - \cos(x/2)|}{2|\sin(x/2)|} \leq \frac{1}{\sin(\delta/2)}$$

根据 Dirichlet 判别法可知这两个函数项级数都是内闭一致收敛. \square

§14.2 一致收敛级数的性质

本小节的主要目的是回答 §14.1.2 中提到的“三个相交换”的可行性.

§14.2.1 连续性

这个性质是说, 一致收敛的连续函数列 (或者, 连续函数项级数) 的极限函数 (或者, 和函数) 也是连续的.

定理14.2.1. (连续性) 假设函数列 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛到 $f(x)$, 且 $f_n(x) \in C([a, b]) \implies f(x) \in C([a, b])$.

证: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ 推出 $\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} \forall x \in [a, b]$ 有 $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon/3$. 固定 $x_0 \in [a, b]$, 得到 $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon/3$. 根据函数 $f_n(x)$ 的连续性可知 $\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \forall x \in [a, b]$ 只要满足 $|x - x_0| < \delta$ 有 $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon/3$. 最后得到

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon.$$

即 $f(x)$ 在 x_0 处连续. \square

注14.2.2. (1) 定理14.2.1的函数项级数版本如下: 假设函数项级数 $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛到 $S(x)$, 且 $f_n(x) \in C([a, b])$, 则 $S(x) \in C([a, b])$.

(2) 根据定理14.2.1得到: 如果 $f_n(x) \Rightarrow_{[a, b]} f(x)$, $f_n(x) \in C([a, b])$, 则 $\forall x_0 \in [a, b]$ 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x). \quad (14.2.1)$$

根据(1)得到: 如果 $\sum_{n \geq 1} f_n(x) \Rightarrow_{[a, b]} S(x)$, $f_n(x) \in C([a, b])$, 则 $\forall x_0 \in [a, b]$ 有

$$\sum_{n \geq 1} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n \geq 1} f_n(x). \quad (14.2.2)$$

(3) 如果函数列 $f_n(x) \rightarrow_{[a, b]} f(x)$ 逐点收敛, $f_n(x) \in C([a, b])$, 但是 $f(x) \notin C([a, b]) \implies f_n(x) \not\Rightarrow_{[a, b]} f(x)$. 对函数项级数也要类似的结论: 如果函数项级数 $\sum_{n \geq 1} f_n(x) \rightarrow S(x)$ 逐点收敛, $f_n(x) \in C([a, b])$, 但是 $S(x) \notin C([a, b]) \implies \sum_{n \geq 1} f_n(x) \not\Rightarrow S(x)$.

(4) 显然把定理14.2.1中的闭区间 $[a, b]$ 换成其收敛域 D 结论也成立.

(5) 一致收敛不是极限函数或和函数连续的必要条件: $\exists f_n(x) \in C(D)$, $f_n(x) \rightarrow_D f(x)$, $f(x) \in C(D)$, 但是 $f_n(x) \not\Rightarrow_D f(x)$. 比如

$$f_n(x) = \frac{2n\sqrt{x}}{1+n^2x}, \quad f(x) \equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

但是 $f_n(1/n^2) = 1 \rightarrow 0$.

(6) 函数列或函数项级数每项连续也不是极限函数或和函数连续的必要条件: $\exists f_n(x) \Rightarrow_D f(x)$, $f(x) \in C(D)$, 但是 $f_n(x) \notin C(D)$. 比如

$$f_n(x) = \frac{1}{n}D(x), \quad f(x) \equiv 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

这里 $D(x)$ 是 Dirichlet 函数.

定理14.2.3. (Dini 定理) (1) 假设函数列 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ 在 $[a, b]$ 上逐点收敛到 $f(x)$, $f_n(x), f(x) \in C([a, b])$, 且 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ 在 $[a, b]$ 上是逐点单调的 $\implies f_n(x) \Rightarrow_{[a, b]} f(x)$.

(2) 假设函数项级数 $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上逐点收敛到 $S(x)$, $f_n(x), S(x) \in C([a, b])$, $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上非负 $\implies \sum_{n \geq 1} f_n(x) \Rightarrow_{[a, b]} S(x)$.

证: (1) 不妨假设 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ 在 $[a, b]$ 上是逐点单调递减的. 令 $g_n(x) := |f_n(x) - f(x)|$, 则对任给 $x \in [a, b]$, $g_n(x)$ 都是单调递减趋于 0. $\forall \epsilon > 0 \forall x \in [a, b] \exists n_x \in \mathbb{N}$ 满足 $0 \leq g_{n_x}(x) < \epsilon$. 根据函数 $g_{n_x}(x)$ 的连续性, 存在区间 $I_x = (x - \delta_x, x + \delta_x) \subset [a, b]$ 使得 $0 \leq g_{n_x}(y) < \epsilon, \forall y \in I_x$. 因为闭区间 $[a, b]$ 是紧的, 所以存在 $x_1, \dots, x_m \in [a, b]$ 使得

$$[a, b] = \bigcup_{1 \leq i \leq m} I_{x_i}.$$

记 $N = \max_{1 \leq i \leq m} n_{x_i}$. $\forall n > N \forall x \in [a, b]$ (不妨假设 $x \in I_{x_i}$) 我们得到

$$|f_n(x) - f(x)| = g_n(x) \leq g_{n_{x_i}}(x) < \epsilon.$$

故 $f_n(x) \Rightarrow_{[a,b]} g(x)$.

(2) 记 $S_n(x) := \sum_{1 \leq k \leq n} f_k(x)$. 则 $S_n(x) \in C([a, b])$ 且函数列 $\{S_n(x)\}_{n \geq 1}$ 在 $[a, b]$ 上逐点收敛到 $S(x) \in C([a, b])$. 因为

$$S_{n+1}(x) - S_n(x) = f_{n+1}(x) \geq 0,$$

所以根据 (1) 可知 $S_n(x) \Rightarrow_{[a,b]} S(x)$. \square

例14.2.4. (1) $\sum_{n \geq 2} \frac{\sin(nx)}{\ln n}$ 和 $\sum_{n \geq 2} \frac{\cos(nx)}{\ln n}$ 在 $(0, 2\pi)$ 上连续.

(2) 研究下列函数项级数的连续性:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x + (-1)^n n}{n^2 + x^2}, \quad |x| \leq a; \quad \sum_{n \geq 1} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n, \quad |x| < 1.$$

解: (a) 因为

$$f_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2} + \frac{(-1)^n n}{n^2 + x^2} = \frac{n^2}{n^2 + x^2} \cdot \frac{x}{n^2} + \frac{n^2}{n^2 + x^2} \cdot \frac{(-1)^n}{n},$$

根据 Abel 判别法可知函数项级数一致收敛从而和函数是连续的.

(b) 只要证明函数项级数在 $(-1, 1)$ 内闭一致收敛. 如果 $|x| \leq r < 1$, 则得到

$$\left|x + \frac{1}{n}\right|^n \leq \left(r + \frac{1}{n}\right)^n,$$

所以在 $[-r, r]$ 上一致收敛, 从而在 $(-1, 1)$ 内闭一致收敛.

(3) 函数列 $\{x^n\}_{n \geq 1}$ 在 $(-1, 1]$ 上不一致收敛. 这是因为极限函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1, 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

不连续.

(4) 求下列极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n n^x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{2^n} \sin \frac{n\pi x}{2}.$$

解: (a) 因为

$$\frac{1}{2^n n^x} \leq \frac{1}{2^n}, \quad x \in [0, 1],$$

所以函数项级数在 $[0, 1]$ 上一致收敛且和函数也是收敛的. 故

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n n^x} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} = 1.$$

(b) 因为

$$\left| \frac{x^n}{2^n} \sin \frac{n\pi x}{2} \right| \leq \left(\frac{3}{4} \right)^n, \quad x \in [0, 3/2],$$

所以函数项级数一致收敛且和函数也是收敛的. 故

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{2^n} \sin \frac{n\pi x}{2} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} \sin \frac{n\pi}{2} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}} = -2 \sum_{n \geq 1} \left(\frac{-1}{4} \right)^n = \frac{2}{5}.$$

§14.2.2 可积性

这个性质是说, 一致收敛的连续函数列 (或者, 连续函数项级数) 的极限函数 (或者, 和函数) 是可积的, 且求极限 (或者, 求和) 和求积分可相交换. 显然可积性已经蕴含在定理14.2.1中, 这是因为闭区间上连续函数必是可积函数.

定理14.2.5. (可积性) 假设函数列 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛到 $f(x)$, 且 $f_n(x) \in C([a, b]) \implies f \in R([a, b])$ 和

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (14.2.3)$$

进一步得到函数列

$$\left\{ \int_a^x f_n(t) dt \right\}_{n \geq 1}$$

在 $[a, b]$ 上一致收敛到函数

$$\int_a^x f(t) dt.$$

证: 我们只要证明 (14.2.3) 即可. 计算得到

$$\left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)] dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq (b-a) \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)|.$$

一致连续性推出 (14.2.3). 把上限 b 换成 x 就得到第二个结论. \square

注14.2.6. (1) 定理14.2.5的函数项级数版本如下: 假设函数项级数 $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛到 $S(x)$, 且 $f_n(x) \in C([a, b]) \implies S(x) \in R([a, b])$ 和

$$\sum_{n \geq 1} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \sum_{n \geq 1} f_n(x) dx. \quad (14.2.4)$$

进一步得到函数项级数

$$\sum_{n \geq 1} \int_a^x f_n(t) dt$$

在 $[a, b]$ 上一致收敛到函数

$$\int_a^x \sum_{n \geq 1} f_n(t) dt = \int_a^x S(t) dt.$$

(2) 从定理14.2.5的证明过程中可以得到: 假设函数列 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛到 $f(x)$, 且 $f_n(x) \in R([a, b]) \implies f \in R([a, b])$ 和 (14.2.3) 成立.

(3) 同样可把 (1) 中的条件减弱为每项可积: 假设函数项级数 $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛到 $S(x)$, 且 $f_n(x) \in C([a, b]) \implies S(x) \in R([a, b])$ 和 (14.2.4) 成立.

定理14.2.7. (1) 假设函数列 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛到 $f(x)$, 且 $f_n(x) \in R([a, b]) \implies f \in R([a, b])$ 和 (14.2.3) 成立.

(2) 假设函数项级数 $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛到 $S(x)$, 且 $f_n(x) \in C([a, b]) \implies S(x) \in R([a, b])$ 和 (14.2.4) 成立.

证: 只给出 (1) 的证明. 根据一致收敛性, $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall x \in [a, b]$ 有 $|f_N(x) - f(x)| < \epsilon$. 因为 $f_N(x) \in R([a, b])$, 所以 $\exists \delta > 0 \forall [a, b]$ 的分割

$$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b,$$

只要 $\|T\| < \delta$ 就有

$$\sum_{1 \leq i \leq m} \omega_i(f_N, T) \Delta x_i < \epsilon, \quad \omega_i(f_N, T) := \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f_N - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f_N.$$

故

$$\sum_{1 \leq i \leq m} \left(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} |f_N(x') - f_N(x'')| \right) \Delta x_i < \epsilon.$$

从而 $\forall x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]$ 有

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x'')| &\leq |f(x') - f_N(x')| + |f_N(x') - f_N(x'')| + |f(x'') - f_N(x'')| \\ &< 2\epsilon + |f_N(x') - f_N(x'')| \end{aligned}$$

和

$$\sum_{1 \leq i \leq m} \omega_i(f, T) \Delta x_i \leq \epsilon + 2\epsilon(b-a) = [1 + 2(b-a)]\epsilon.$$

这表明 $f(x) \in R([a, b])$. 令 $g_n(x) := f_n(x) - f(x)$, 得到

$$g_n(x) \rightrightarrows_{[a, b]} 0, \quad g_n(x) \in R([a, b]), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [a, b]} |g_n(x)| = 0.$$

从而利用积分不等式得到

$$\left| \int_a^b g_n(x) dx \right| \leq \int_a^b |g_n(x)| dx \leq (b-a) \sup_{x \in [a, b]} |g_n(x)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

因此

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b g_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx. \quad \square \end{aligned}$$

例14.2.8. (1) 证明

$$\arctan x = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}, \quad |x| < 1. \quad (14.2.5)$$

证: 因为

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n \geq 0} (-1)^n t^{2n} dt = \int_0^x \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} t^{2n-2} dt,$$

所以只要证明函数项级数 $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} x^{2n-2}$ 在 $(-1, 1)$ 内闭一致收敛, 即证明在 $[-1+\delta, 1-\delta]$ 上一致收敛, $0 < \delta < 1$. 但是

$$\left| (-1)^{n-1} x^{2n-2} \right| = |x|^{2n-2} \leq (1-\delta)^{2n-2},$$

故一致收敛. \square

(2) 证明

$$\ln(1+x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad |x| < 1. \quad (14.2.6)$$

证: 因为

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} t^{n-1} dt,$$

所以只要证明函数项级数 $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} x^{n-1}$ 在 $(-1, 1)$ 内闭一致收敛, 即证明在 $[-1+\delta, 1-\delta]$ 上一致收敛, $0 < \delta < 1$, 显然这是对的.

公式 (14.2.6) 的一个直接推论是

$$\ln 2 = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

§14.2.3 可导性

这个性质是说, 若把一致收敛性搬到函数列或函数项级数的每项上, 则极限 (或者, 求和) 和求导数可相交换. 具体陈述如下

定理14.2.9. 假设函数列 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ 在 $[a, b]$ 上逐点收敛到 $f(x)$, $f'_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛, 且 $f(x) \in C^1([a, b]) \implies f_n(x) \in C^1([a, b])$ 且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) = \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f'(x). \quad (14.2.7)$$

证: 令 $f'_n(x) \rightrightarrows_{[a, b]} g(x)$. 根据定理14.2.1 和定理14.2.5 知 $g(x) \in C([a, b])$ 且

$$\int_a^x g(t) dt = \int_a^x \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^x f'_n(t) dt = f(x) - f(a).$$

因此 $f'(x)$ 存在且 $f'(x) = g(x) \in C([a, b])$. \square

注14.2.10. (1) 定理14.2.9的函数项级数版本如下: 假设函数项级数 $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上逐点收敛到 $S(x)$, $f'_n(x) \in C^1([a, b])$, $\sum_{n \geq 1} f'_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛 $\implies S(x) \in C^1([a, b])$ 且

$$\sum_{n \geq 1} f'_n(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n \geq 1} f_n(x) = S'(x). \quad (14.2.8)$$

(2) 定理14.2.9中的假设条件推出函数列 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛到 $f(x)$, 这可从定理14.2.5得到.

同理, 在(1)中的假设条件下, 得到函数项级数 $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛到 $S(x)$.

例14.2.11. (1) 证明函数 $S(x) = \sum_{n \geq 1} \sin(nx)/n^3$ 在 \mathbb{R} 上连续可微.

证: 因为函数 $f_n(x) = \sin(nx)/n^3 \in C^1(\mathbb{R})$ 且 $f'_n(x) = \cos(nx)/n^2 \leq 1/n^2$, 所以根据定理14.2.9可知函数 $S(x) \in C^1(\mathbb{R})$ 且

$$S'(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

(2) 证明

$$\sum_{n \geq 1} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1. \quad (14.2.9)$$

证: 因为

$$\sum_{n \geq 1} nx^n = x \sum_{n \geq 1} (x^n)',$$

故只要证明 $\sum_{n \geq 1} x^n$ 满足定理14.2.9中的条件. 显然函数项级数 $\sum_{n \geq 1} x^n$ 在 $(-1, 1)$ 上逐点收敛到 $S(x) = (1-x)^{-1}$, $f'_n(x) = nx^{n-1} \in C^1((-1, 1))$, 且 $\sum_{n \geq 1} f'_n(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内闭一致收敛 (当 $|x| \leq r < 1$ 时, $f'_{n+1}(x)/f'_n(x) = \frac{n+1}{n}|x| \leq \frac{n+1}{n}r \rightarrow r < 1$).

作为本节结束, 我们来研究其它的题目.

例14.2.12. 研究如下函数列或函数项级数的一致收敛性:

(1) $\sum_{n \geq 1} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $x \in \mathbb{R}$.

解: 和函数为

$$S(x) = x^2 \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1, \quad x \neq 0,$$

从而

$$S(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

和函数不连续, 所以函数项级数不是一致收敛的.

(2) $\sum_{n \geq 1} ne^{-nx}$, $x \in (0, +\infty)$ 和 $x \in [\delta, +\infty)$ ($\delta > 0$).

解: 因为 $u_n(1/n) = n/e \rightarrow +\infty$, 所以函数项级数在 $(0, +\infty)$ 上不是一致收敛的. 当 $x \geq \delta$ 时,

$$\sum_{n \geq 1} ne^{-nx} \leq \sum_{n \geq 1} \frac{n}{e^{n\delta}} \leq \sum_{n \geq 1} \frac{n}{\frac{1}{3!}(n\delta)^3} = \frac{6}{\delta^3} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}.$$

故此时函数项级数一致收敛且和函数 $S(x) \leq \pi^2/\delta^3$.

(3) $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$, $x \in [0, a]$ ($a > 0$) 和 $x \in [0, +\infty)$.

解: 计算得到

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

由于 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ 逐点单调递增, 根据定理14.2.3 可知函数列在 $[0, a]$ 上一致收敛到 e^x . 然而,

$$|f_n(n) - f(n)| = |2^n - e^n| \rightarrow +\infty$$

告诉我们函数列在 $(0, +\infty)$ 不是一致收敛的.

(4) $f(x) \in C([0, 1])$, $f(1) = 0$, $g_n(x) := x^n f(x) \implies$ 函数列 $g_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是一致收敛的.

证: 计算得到

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ f(1) = 0, & x = 1. \end{cases}$$

故 $g(x) \equiv 0$, $x \in [0, 1]$. 因为 $\{g_n(x)\}_{n \geq 1}$ 逐点单调递减, 所以根据定理14.2.3 可知函数列在 $[0, 1]$ 上一致收敛到 0.

(5) $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ 且 $f^{(n)}(x) \rightrightarrows_{\mathbb{R}} \varphi(x) \implies \varphi(x) = Ce^x$.

证: 因为 $(f^{(n)}(x))' \rightrightarrows \varphi(x)$, 所以

$$\varphi'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{(n+1)}(x) = \varphi(x) \implies (e^{-x}\varphi(x))' = 0.$$

即 $e^{-x}\varphi(x) = C$.

(6) Riemann ζ 函数 $\zeta(x) = \sum_{n \geq 1} 1/n^x$ 在 $(1, +\infty)$ 内是光滑的.

证: 我们已证 $\zeta(x)$ 当 $x > 1$ 时收敛. 对 $\forall [a, b] \subset (1, +\infty)$ 有

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x} \leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^a}, \quad a > 1,$$

所以 $\sum_{n \geq 1} 1/n^x$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛且 $\zeta(x) \in C([a, b])$. 根据 $[a, b]$ 的任意性可知 $\zeta(x) \in C((1, +\infty))$. 对上述 $x \in [a, b] \subset (1, +\infty)$ 有

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n^x} \right)' = \sum_{n \geq 1} \frac{-\ln n}{n^x}, \quad \frac{\ln n}{n^x} \leq \frac{\ln n}{n^a} \leq \frac{1}{n^{a+\epsilon}}, \quad n \gg 1, \exists \epsilon > 0.$$

因此函数项级数 $\sum_{n \geq 1} (1/n^x)'$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛且 $\zeta'(x) \in C([a, b])$, 从而 $\zeta(x) \in C'((1, +\infty))$. 持续这个步骤得到 $\zeta(x) \in C^\infty((1, +\infty))$ 且

$$\zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n \geq 1} \frac{(\ln n)^k}{n^x}.$$

例14.2.13. (1) 计算定积分

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} S(x) dx, \quad S(x) := \sum_{n \geq 1} ne^{-nx}.$$

解: 记 $f_n(x) = ne^{-nx}$, $x \in [\ln 2, \ln 3]$. 则 $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ 在 $[\ln 2, \ln 3]$ 上一致收敛从而得到

$$\begin{aligned} \int_{\ln 2}^{\ln 3} S(x) dx &= \sum_{n \geq 1} \int_{\ln 2}^{\ln 3} ne^{-nx} dx \\ &= \sum_{n \geq 1} (-e^{-nx}) \Big|_{\ln 2}^{\ln 3} = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(2) 证明函数项级数

$$\sum_{n \geq 1} \left[nxe^{-nx^2} - (n-1)xe^{-(n-1)x^2} \right]$$

满足

$$\int_a^b \sum_{n \geq 1} f_n(x) dx \neq \sum_{n \geq 1} \int_a^b f_n(x) dx.$$

证: 和函数为 $S(x) \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$, 从而得到

$$\int_0^1 S(x) dx = 0.$$

但是另一方面,

$$\int_0^1 \left[nxe^{-nx^2} - (n-1)xe^{-(n-1)x^2} \right] dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-nx^2} + \frac{1}{2}e^{-(n-1)x^2} \right]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-n} + \frac{1}{2}e^{-(n-1)}$$

和

$$\sum_{n \geq 1} \int_0^1 f_n(x) dx = \sum_{n \geq 1} -\frac{1}{2} (e^{-n} - e^{-(n-1)}) = \frac{1}{2} \neq 0.$$

§14.2.4 常微分方程基本定理

函数项级数的直接应用是用来证明常微分方程解的存在性.

定理14.2.14. 假设 $x_0 \in \mathbb{R}$, $F(t, x)$ 在 $(0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ 附近连续, 且

$$|F(t, x) - F(t, x')| \leq L|x - x'|, \quad \exists L > 0.$$

则存在唯一的函数 $x(t)$ 在 $t = 0$ 附近满足

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad x(0) = x_0. \quad (14.2.10)$$

证: 微分方程 (14.2.10) 等价于积分方程

$$x(t) = x_0 + \int_0^t F(s, x(s)) ds.$$

定义

$$x_0(t) := x_0, \quad x_1(t) := x_0 + \int_0^t F(s, x_0) ds$$

和

$$x_k(t) := x_0 + \int_0^t F(s, x_{k-1}(s)) ds, \quad k \geq 1.$$

则得到

$$|x_k(t) - x_{k-1}(t)| \leq \int_0^t |F(s, x_{k-1}(s)) - F(s, x_{k-2}(s))| ds \leq L \int_0^t |x_{k-1}(s) - x_{k-2}(s)| ds.$$

对 $k = 1, 2, 3$ 分别得到

$$|x_1(t) - x_0| \leq \int_0^t |F(s, x_0)| ds \leq Mt,$$

$$|x_2(t) - x_1(t)| \leq L \int_0^t |x_1(s) - x_0(s)| ds \leq L \int_0^t Ms ds = LM \frac{t^2}{2},$$

$$|x_3(t) - x_2(t)| \leq L \int_0^t |x_2(s) - x_1(s)| ds \leq L \cdot LM \cdot \frac{1}{2} \int_0^t s^2 ds = \frac{ML^2}{3!} t^3.$$

这里 M 是二元函数 $F(t, x)$ 在 $(0, x_0)$ 附近的最大值. 一般地可证

$$|x_k(t) - x_{k-1}(t)| \leq \frac{ML^{k-1}}{k!} t^k, \quad k \geq 1.$$

考虑函数项级数

$$\sum_{k \geq 0} u_k(t), \quad u_0(t) := x_0, \quad u_k(t) := x_k(t) - x_{k-1}(t), \quad k \geq 1.$$

对任意 n , 任意 $p \in \mathbb{N}$, 和任意充分小的 t 有

$$\left| \sum_{n+1 \leq k \leq n+p} u_k(t) \right| \leq \sum_{n+1 \leq k \leq n+p} |u_k(t)| \leq \sum_{n+1 \leq k \leq n+p} \frac{M(Lt)^k}{L \cdot k!} \leq \frac{M}{L} \cdot \frac{(Lt)^{n+1}}{1 - Lt},$$

所以当 $t \leq 1/2L$ 时,

$$\left| \sum_{n+1 \leq k \leq n+p} u_k(t) \right| \leq \frac{M}{L} \cdot \frac{1}{2^n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

故函数项级数 $\sum_{n \geq 1} u_n(t)$ 在 0 附近是一致收敛的, 从而函数列 $\{x_n(t)\}_{n \geq 1}$ 在 0 附近是一致收敛的, 和函数列 $\{F(t, x_n(t))\}_{n \geq 1}$ 也在 0 附近是一致收敛的. 若把极限函数记为 $x(t)$ 则得到

$$|x_n(t) - x_0| \leq \sum_{1 \leq k \leq n} |x_k(t) - x_{k-1}(t)| \leq \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{M(Lt)^k}{L k!} \leq \frac{M}{L} e^{Lt} \leq \frac{M}{L} e, \quad t \leq \frac{1}{2},$$

和

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n(t) = x_0 + \int_0^t \lim_{n \rightarrow +\infty} F(s, x_{n-1}(s)) ds = x_0 + \int_0^t F(s, x(s)) ds. \quad \square$$

§14.3 幂级数

回顾 Taylor 公式 (4.7.2), (4.7.4, 或 (4.7.8, 在适当的条件下函数 $f(x)$ 可分解成

$$f(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + r_n(x)$$

其中 $r_n(x)$ 是余项. 一个很自然的问题是: 当 $n \rightarrow +\infty$, 是否成立 $f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$? 之前的定理 4.7.13 已经给出了部分答案.

本节我们来系统地研究级数展开问题, 并来回答注 4.7.12 (3) 中提到的几个初等函数的级数展开.

首先给出幂级数(power series)的定义:

$$\sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n \quad \text{或} \quad \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

§14.3.1 幂级数收敛域

我们已经知道函数项级数 $\sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n$ 在 $[0, 1]$ 上不一致收敛到 $(1+x)^{-1}$. 若令 $a_n := (-1)^n$ 则得到

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1} = 1.$$

下面证明函数项级数 $\sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n$ 在 $(-1, 1)$ 内绝对收敛. 事实上, $\forall x \in (-1, 1)$ 有

$$\sum_{n \geq 0} |(-1)^n x^n| = \sum_{n \geq 0} |x|^n = \frac{1}{1 - |x|} < +\infty.$$

但是这个函数项级数在端点处 $x = \pm 1$ 是发散的.

定理14.3.1. (Cauchy-Hadamard) 给定幂级数 $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, 并令

$$\rho := \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \quad (14.3.1)$$

则

- (1) $\rho > 0 \implies$ 幂级数在 $(-\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho})$ 内绝对收敛, 而在 $(-\infty, -\frac{1}{\rho}) \cup (\frac{1}{\rho}, +\infty)$ 内发散. 幂级数在端点 $x = \pm 1/\rho$ 处的敛散性无法判断.
- (2) $\rho = 0 \implies$ 幂级数在 \mathbb{R} 上绝对收敛.
- (3) $\rho = +\infty \implies$ 幂级数只在 $x = 0$ 处绝对收敛.

证: 利用根式判别法可知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \rho |x| \begin{cases} < 1, & |x| < \frac{1}{\rho}, \\ > 1, & |x| > \frac{1}{\rho}. \end{cases}$$

故完成证明. \square

注14.3.2. (1) 作平移得到: 幂级数 $\sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n$ 在 $|x - x_0| < 1/\rho$ 内绝对收敛, 而在 $|x - x_0| > 1/\rho$ 上发散. 在端点 $|x - x_0| = 1/\rho$ 处的敛散性无法判断, 必须具体问题具体分析.

(2) 称 $r := 1/\rho$ 为幂级数的**收敛半径(radius of convergence)**, 把相应的区间 $(-r, r)$ 称为**收敛区间(interval of convergence)**. 要注意记号, 如果 $\rho = 0$ 则收敛半径为 $r = +\infty$ 和收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$; 当 $\rho = +\infty$ 时, 收敛半径为 $r = 0$ 和收敛区间此时仅为一点 $\{0\}$.

(3) 因为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_{n+1}/a_n| = a$ 存在可推出 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$. 故此时收敛半径为 $r = 1/a$.

(4) **定理14.3.1** 对一般级数不一定成立. 比如考察级数

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nx)}{n}.$$

根据例14.1.13知道, 上述级数在 $(0, 2\pi)$ 内条件收敛. 利用周期性, 易知上述级数在 $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ 上条件收敛, 且在 $2\pi\mathbb{Z}$ 处发散. 而根据 (14.3.1) 得到 $\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|1/n|} = 1$; 如果利用**定理14.3.1** 则在 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ 内发散, 矛盾!

(5) 在研究幂级数的收敛域时, 除了利用 (14.3.1) 求出收敛区间外, 不要忘记检查幂级数在收敛半径端点处的敛散性.

例14.3.3. 求下列幂级数的收敛域:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(x-1)^n}{n}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(x-1)^n}{n^2}, \quad \sum_{n \geq 1} n(x-1)^n, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{2^n + (-1)^n}{n(n+2)} x^n,$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(2n)!}{(n!)^2} (x-1)^{2n-1}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(x-1)^n}{2^n n}, \\
& \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{\ln(1+n)}{n} x^{n-1}, \quad \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^p} \quad (p > 0), \\
& \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n x^n, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n-1} \left(\frac{x-2}{2}\right)^n, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n + \sqrt{n}} x^n, \\
& \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{(n+2)3^n}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x-1)^n, \quad \sum_{n \geq 1} n 2^{2n} x^n (1-x)^n, \\
& \sum_{n \geq 1} \sin \frac{1}{3n} \left(\frac{3+x}{3-2x}\right)^n, \quad \sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx}, \\
& \sum_{n \geq 1} \frac{1^n + 2^n + \cdots + 2020^n}{n^2} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n, \quad \sum_{n \geq 1} \left[\frac{1}{n^2} + (-1)^n + \sin n\right] x^n, \\
& \sum_{n \geq 1} \left[\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{4n}\right] x^n, \quad \sum_{n \geq 1} \left(\frac{a^n}{n^2} + \frac{b^n}{n^2}\right) x^n \quad (a, b > 0), \\
& \sum_{n \geq 0} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}, \quad \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}, \quad \sum_{n \geq 0} n^{n^2} x^{n^3}, \\
& \sum_{n \geq 0} \frac{x^{n^2}}{2^n}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n|x|^n}.
\end{aligned}$$

解: (1) $\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} 1/\sqrt[n]{n} = 1$, 故收敛区间为 $|x-1| < 1$ 即 $0 < x < 2$. 下面检查端点处的敛散性. 如果 $x=0$, 则级数变为 $\sum_{n \geq 1} (-1)^n/n$ 收敛, 当 $x=2$, 则级数变为 $\sum_{n \geq 1} 1/n$ 发散. 因此收敛域为 $[0, 2)$.

(2) 和 (1) 一样, 收敛区间为 $(0, 2)$. 如果 $x=0$, 则级数变为 $\sum_{n \geq 1} (-1)^n/n^2$ 收敛, 当 $x=2$, 则级数变为 $\sum_{n \geq 1} 1/n^2$ 收敛. 因此收敛域为 $[0, 2]$.

(3) 和 (1) 一样, 收敛区间为 $(0, 2)$. 如果 $x=0$, 则级数变为 $\sum_{n \geq 1} (-1)^n/n$ 收敛, 当 $x=2$, 则级数变为 $\sum_{n \geq 1} n$ 发散. 因此收敛域为 $(0, 2)$.

(4) 收敛半径为

$$\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n + (-1)^n}{n(n+2)}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^n + (-1)^n} = 2,$$

所以收敛区间为 $(-1/2, 1/2)$. 当 $x = \pm 1/2$ 时

$$\left| \frac{2^n + (-1)^n}{n(n+2)} \left(\pm \frac{1}{2}\right)^n \right| \leq \frac{2^n + 1}{2^n} \frac{1}{n(n+2)} \leq \frac{2}{n(n+2)} \leq \frac{2}{n^2},$$

故此时也收敛. 因此收敛域为 $[-1/2, 1/2]$.

(5) 因为

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}} = 1,$$

所以收敛区间为 $(-1, 1)$. 当 $x = \pm 1$ 时因为 $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \rightarrow +\infty$, 故此时级数发散. 因此收敛域为 $(-1, 1)$.

(6) 将级数写成

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(2n)!}{(n!)^2} [(x-1)^2]^{n-1}.$$

因为

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+2)! / ((n+1)!)^2}{(2n)! / (n!)^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(2n+1)}{n+1} = 4,$$

所以收敛区间为 $|(x-1)^2| \leq 1/4$, 即为 $(1/2, 3/2)$. 当 $x = 1/2$ 或 $x = 3/2$ 时级数变成

$$\pm 2 \sum_{n \geq 1} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}, \quad a_n := \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2};$$

此时

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2n+2}{2n+1} = 1 + \frac{1}{2n+1} = 1 + \frac{1/2}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

根据 Gauss 判别法可知级数发散. 最后得到收敛域为 $(1/2, 3/2)$.

(7) 因为

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n n}} = \frac{1}{2},$$

所以收敛区间为 $|x-1| < 2$ 即 $-1 < x < 3$. 当 $x = -1$ 时级数 $\sum_{n \geq 1} (-1)^n / n$ 收敛, 而当 $x = 3$ 时级数 $\sum_{n \geq 1} 1/n$ 发散, 所以收敛域为 $[-1, 3)$.

(8) 因为

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}\right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2n-1}} = 1,$$

所以收敛区间为 $(-1, 1)$. 当 $x = \pm 1$ 时级数 $\pm \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} / (2n-1)$ 都是收敛, 因此收敛域为 $[-1, 1]$.

(9) 因为

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln(2+n)}{n+1}}{\frac{\ln(1+n)}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \ln(2+n)}{(n+1) \ln(1+n)} = 1,$$

所以收敛区间为 $(-1, 1)$. 当 $x = -1$ 时, 级数变成

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{\ln(1+n)}{n}.$$

由于函数 $f(x) := \frac{\ln(1+x)}{x}$ 满足

$$f'(x) = \frac{x - (1+x) \ln(1+x)}{x^2(1+x)} \leq 0,$$

根据 Leibniz 判别法可知 $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{\ln(1+n)}{n}$ 收敛.

当 $x = 1$ 时, 级数变成

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(1+n)}{n} =: \sum_{n \geq 1} f(n), \quad f(n) \text{ 非负且单调递减.}$$

因为

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \geq \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} dx = \frac{1}{2} \ln^2(1+x) \Big|_1^{+\infty} = +\infty,$$

所以利用积分判别法可知级数发散. 因此收敛域为 $[-1, 1)$.

(10) 因为

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p} \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right)^p = ',$$

所以收敛区间为 $(-1, 1)$. 当 $x = -1$ 时级数变成

$$- \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p},$$

故仅当 $p > 1$ 时收敛. 当 $x = 1$ 时级数变成

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p},$$

故对任意 $p > 0$ 都收敛. 最后得到收敛域为 $[-1, 1]$ 若 $p > 1$, 和 $(-1, 1]$ 若 $0 < p \leq 1$.

(11) 因为

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{n+1}{e} \right)^{n+1} \Big/ \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 1,$$

所以收敛区间为 $(-1, 1)$. 当 $x = 1$ 时级数变成

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n;$$

利用公式 $n! \sim \sqrt{2\pi n} (n/e)^n$ 得到

$$\frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}},$$

故此时级数发散. 当 $x = -1$ 时级数变成

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n, \quad a_n := \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n.$$

因为 $a_{n+1}/a_n = (1+1/n)^n/e < 1$ 且 $a_n \rightarrow 0$, 所以根据 Leibniz 判别法此时级数收敛. 最后得到收敛域为 $[-1, 1)$.

(12) 因为

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{(2n-1)2^n} \right|} = \frac{1}{2},$$

所以收敛区间为 $|(x-2)/2| < 2$, 即 $0 < x < 4$. 当 $x = 0$ 时级数变成 $\sum_{n \geq 1} (-1)^n / (2n+1)$, 故收敛. 当 $x = 4$ 时级数变成 $\sum_{n \geq 1} 1/(2n-1)$, 故发散. 最后得到收敛域为 $[0, 4)$.

(13) 因为

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n + \sqrt{n}} \right|} = 1,$$

所以收敛区间为 $(-1, 1)$. 当 $x = -1$ 时级数变成 $\sum_{n \geq 1} -1/(n + \sqrt{n})$, 故发散. 当 $x = 1$ 时级数变成 $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1}/(n + \sqrt{n})$, 故收敛. 最后得到收敛域为 $(-1, 1]$.

(14) 因为

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n(n+2)}} = \frac{1}{3},$$

所以收敛区间为 $(-3, 3)$. 当 $x = -3$ 时级数变成 $\sum_{n \geq 1} (-1)^n / (n+2)$, 故收敛. 当 $x = 3$ 时级数变成 $\sum_{n \geq 1} 1/(n+2)$, 故发散. 最后得到收敛域为 $[-3, 3)$.

(15) 因为

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + (-2)^n}{n}} = 3,$$

所以收敛区间为 $|x-1| < 1/3$, 即 $2/3 < x < 4/3$. 当 $x = 2/3$ 时级数变成

$$\sum_{n \geq 1} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \left[1 + \left(-\frac{2}{3} \right)^n \right],$$

故收敛. 当 $x = 4/3$ 时级数变成

$$\sum_{n \geq 1} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \frac{1}{3^n} = \sum_{n \geq 1} \left[\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n(3/2)^n} \right],$$

故发散. 最后得到收敛域为 $[2/3, 4/3)$.

(16) 因为

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n2^{2n}} = 4,$$

所以收敛区间为 $|x(1-x)| < 1/4$, 即

$$\frac{1}{2} < x < \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{1-\sqrt{2}}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

当 $x = 1/2$ 时级数变成 $\sum_{n \geq 1} n$, 故发散. 当 $x = (1 \pm \sqrt{2})/2$ 时级数变成 $\sum_{n \geq 1} (-1)^n n 2^n$, 故发散. 最后得到收敛域为

$$\frac{1}{2} < x < \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{1-\sqrt{2}}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

(17) 因为

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{3(n+1)}}{\sin \frac{1}{3n}} = 1,$$

所以收敛区间为 $-1 < (3+x)/(3-2x) < 1$, 即 $x < 0$ 或 $x > 6$. 当 $x = 0$ 时级数变成 $\sum_{n \geq 1} \sin \frac{1}{3n} \sim \sum_{n \geq 1} \frac{1}{3n}$, 故发散. 当 $x = 6$ 时级数变成 $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \sin \frac{1}{3n}$, 故收敛. 最后得到收敛域为 $(-\infty, 0) \cup [6, +\infty)$.

(18) 因为

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx}} = \frac{1}{e^{1+x}},$$

所以当 $x > -1$ 时级数收敛, 而当 $x < -1$ 时级数发散. 当 $x = -1$ 时级数变成

$$\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^n = \sum_{n \geq 1} \left[\frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}\right]^n.$$

利用例6.2.9 (3) 中的渐近展开得到

$$\left[\frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}\right]^n = \left[\frac{e}{e^{1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})}}\right]^n = e^{\frac{1}{2} + o(1)},$$

故此时发散. 最后得到收敛域为 $(-1, +\infty)$.

(19) 因为, 利用例2.2.4 (1),

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1^n + \cdots + 2020^n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1^n + \cdots + 50^n} = \max\{1, \dots, 2020\} = 2020,$$

所以收敛区间为 $|(1-x)/(1+x)| < 1/2020$, 即 $2019/2021 < x < 2021/2019$.

当 $x = 2019/2021$ 或 $x = 2021/2019$ 时级数变成

$$\sum_{n \geq 1} (\pm 1)^n \frac{1^n + \cdots + 2020^n}{2020^n n^2}.$$

由于

$$\frac{1^n + \cdots + 2020^n}{2020^n n^2} = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{(k/2020)^n}{n^2} \leq \frac{2020}{n^2},$$

可知此时级数收敛. 最后得到收敛域为 $[2019/2021, 2021/2019]$.

(20) 因为

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2} + (-1)^n + \sin n} = 1,$$

所以收敛区间为 $(-1, 1)$. 当 $x = \pm 1$ 时级数变成

$$\sum_{n \geq 1} \left[\frac{1}{n^2} + (-1)^n + \sin b\right] (-1)^n,$$

故发散. 最后得到收敛域为 $(-1, 1)$.

(21) 因为

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{4n} + \frac{(-1)^n}{n}} = \frac{4}{4} = 1,$$

所以收敛区间为 $(-1, 1)$. 当 $x = -1$ 时级数变成

$$\sum_{n \geq 1} \left[\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{4^n} \right] (-1)^n = \sum_{n \geq 1} \left[\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{4^n} \right],$$

故发散. 当 $x = 1$ 时级数变成

$$\sum_{n \geq 1} \left[\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{4^n} \right],$$

故收敛. 最后得到收敛域为 $(-1, 1]$.

(22) 因为

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\},$$

所以收敛区间为 $-\min\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\} < x < \min\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\}$. 显然当 $x = \pm \min\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\}$ 时级数收敛. 最后得到收敛域为 $[-\min\{1/a, 1/b\}, \min\{1/a, 1/b\}]$.

(23) 因为

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{2n-1}{2^n}} = \frac{1}{2},$$

所以收敛区间为 $|x^2| < 2$, 即 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$. 当 $x = \pm\sqrt{2}$ 时级数为 $\sum_{n \geq 0} (n - \frac{1}{2})$, 故发散. 最后得到收敛域为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

(24) 级数可写成

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n-1)(2n-1)!} (x^{2-1/n})^n = \sum_{k \geq 0} a_k x^k,$$

其中

$$a_k := \begin{cases} \frac{1}{(2n-1)(2n-1)!}, & k = 2n-1, \\ 0, & k \neq 2n-1. \end{cases}$$

因为

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k!}} = 0,$$

所以收敛区间为 \mathbb{R} .

(25) 级数可写成

$$\sum_{n \geq 0} n^{n^2} x^{n^3} = \sum_{k \geq 0} a_k x^k,$$

这里

$$a_k = \begin{cases} n^{n^2}, & k = n^3, \\ 0, & k \neq n^3. \end{cases}$$

因为

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n^3]{n^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

所以收敛区间为 $(-1, 1)$. 当 $x = \pm 1$ 时级数变成 $\sum_{n \geq 0} (\pm 1)^{n^3} n^{n^2}$, 故发散. 最后得到了收敛域为 $(-1, 1)$.

(26) 级数可写成

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x^{n^2}}{2^n} = \sum_{k \geq 0} a_k x^k,$$

其中

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & k = n^2, \\ 0, & k \neq n^2. \end{cases}$$

因为

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n^2]{\frac{1}{2^n}} = 1,$$

所以收敛区间为 $(-1, 1)$. 当 $x = \pm 1$ 时级数变成 $\sum_{n \geq 0} (\pm 1)^n / 2^n$, 故收敛. 最后得到收敛域为 $[-1, 1]$.

(27) 因为 $x = 0$, 级数无定义. 当 $x > 0$ 时级数为 $\sum_{n \geq 1} 1/n$, 故发散. 当 $x < 0$ 时级数为 $\sum_{n \geq 1} (-1)^n / n$, 故收敛. 最后得到收敛域为 $(-\infty, 0)$.

§14.3.2 幂级数基本性质

由于幂级数是特殊的函数项级数, 我们自然要问什么时候幂级数具有连续性、可积性和可导性. 我们将证明上述三个性质在幂级数的收敛区间内成立.

定理14.3.4. (Abel 第一定理) (1) 如果幂级数 $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ 在 $x_1 \neq 0$ 处收敛, 则其在 $(-|x_1|, |x_1|)$ 内绝对收敛.

(2) 如果幂级数 $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ 在 x_1 处发散, 则其在 $(-\infty, -|x_1|) \cup (|x_1|, +\infty)$ 内发散.

证: (1) 因为级数 $\sum_{n \geq 0} a_n x_1^n$ 收敛, 所以 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n x_1^n = 0$. 从而得到数列 $\{a_n x_1^n\}_{n \geq 0}$ 有界, 即存在正数 $M > 0$ 满足 $|a_n x_1^n| \leq M$. 对任意 $|x| < |x_1|$ 有

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \cdot \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{x_1} \right|^n.$$

由于 $\sum_{n \geq 0} M(|x|/|x_1|)^n$ 收敛, 故幂级数 $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ 绝对收敛.

(2) 如果幂级数 $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ 在 x_0 处收敛, 这里 $|x_0| > |x_1|$, 则根据 (1) 幂级数 $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ 在 $(-|x_0|, |x_0|)$ 内绝对收敛. 特别地, $\sum_{n \geq 0} a_n x_1^n$ 收敛, 矛盾. \square

定理14.3.5. (Abel 第二定理) 幂级数 $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ 在其收敛区内闭一致收敛. 如果幂级数 $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ 进一步在 $x = r$ (或者, 在 $x = -r$) 处收敛, 则其在任意闭区间 $[a, r] \subset (-r, r)$ (或者, 任意闭区间 $[-r, b] \subset (-r, r)$) 从而在 $(-r, r]$ (或者, $[-r, r)$) 内闭一致收敛.

证: 任取闭区间 $[a, b] \subset (-r, r)$, 并令 $x_1 := \max\{|a|, |b|\}$. 则得到

$$|a_n x^n| \leq |a_n x_1^n|, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, b].$$

因为 $\sum_{n \geq 0} a_n |x_1|^n$ 收敛, 所以幂级数 $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛.

(2) 现在假设 $\sum_{n \geq 0} a_n r^n$ 收敛, 则对任意 $x \in [0, r]$ 有

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} a_n r^n \left(\frac{x}{r}\right)^n.$$

因为 $(x/r)^n$ 逐点单调递减且一致有上界 1, 根据 Abel 判别法知幂级数在 $[0, r]$ 上一致收敛. 特别地, 当 $a \geq 0$ 时幂级数在 $[a, r]$ 上一致收敛. 当 $-r < a < 0$ 时, 根据 (1) 得到幂级数 $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ 在 $[a, 0]$ 上一致收敛. 因此幂级数在 $[a, r]$ 上一致收敛. \square

性质14.3.6. 幂级数

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n, \quad \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}, \quad \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1},$$

都有一样的收敛区间, 但是它们可能会有不同的收敛域.

证: 因为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 所以三个幂级数收敛半径都一样. 考虑幂级数

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}.$$

该幂级数的收敛域为 $[-1, 1]$, 而幂级数 $\sum_{n \geq 1} (x^n/n^2)'$ 的收敛域为 $(-1, 1)$, 再次求导后的幂级数 $\sum_{n \geq 1} (x^n/n^2)''$ 的收敛域为 $(-1, 1)$. \square

定理14.3.7. (Abel 第三定理) 如果幂级数 $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ 的收敛半径为 r , 则其和函数在 $(-r, r)$ 内连续. 如果幂级数 $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ 在 $x = r$ (或者, $x = -r$) 处收敛, 则其和函数在 $x = r$ (或者, $x = -r$) 左 (或者, 右) 连续.

证: 根据定理14.3.5和注14.2.2 (1), 可知幂级数在 $(-r, r)$ 内闭连续从而在 $(-r, r)$ 内连续. 单侧收敛推出单侧连续也是利用定理14.3.5. \square

定理14.3.8. (幂级数的可积性和可导性) 假设幂级数 $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ 的收敛半径为 $r \neq 0$, 且记

$$f(x) := \sum_{n \geq 0} a_n x^n, \quad x \in (-r, r).$$

则

(1) (逐项积分) 对任意 $-r < a < b < r$ 有

$$\int_a^b \sum_{n \geq 0} a_n x^n dx = \sum_{n \geq 0} \int_a^b a_n x^n dx, \quad (14.3.2)$$

特别地得到

$$\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x \sum_{n \geq 0} a_n t^n dt, \quad |x| < r. \quad (14.3.3)$$

根据性质14.3.6可知逐项积分后得到的幂级数 $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 和原幂级数 $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ 具有相同的收敛半径.

(2) (逐项求导) 对任意 $x \in (-r, r)$ 有

$$f'(x) = \sum_{n \geq 0} (a_n x^n)' = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}, \quad (14.3.4)$$

特别地得到

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n \geq k} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}, \quad f^{(k)}(0) = k! a_k. \quad (14.3.5)$$

根据性质14.3.6可知逐项求导后得到的幂级数 $\sum_{n \geq 0} n a_n x^{n-1}$ 和原幂级数 $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ 具有相同的收敛半径.

证: (1) 根据定理14.3.5 幂级数在收敛区间内闭一致收敛, 故利用注14.2.6 (1) 推出 (14.3.2).

(2) 根据定理14.3.5 和性质14.3.6 可知幂级数在其收敛区间内可任意次求导, 从而利用注14.2.10 (1) 推出 (14.3.4) 和 (14.3.5). \square

注14.3.9. (1) 对幂级数来说, 逐项积分后收敛域一般会变大, 而逐项求导后收敛域一般会变小. 比如考察性质14.3.6 证明过程中的例子.

(2) 定理14.3.8 可用来求一些函数的幂级数展开或恒等式.

例14.3.10. (1) 证明

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} (n+1)x^n &= \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1; \quad \sum_{n \geq 1} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^3}, \quad |x| < 1; \\ \sum_{n \geq 2} \frac{(n-1)n(n+1)}{6} x^{n-2} &= \frac{1}{(1-x)^4}, \quad |x| < 1; \quad \sum_{n \geq 1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1; \\ \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} &= \arctan x, \quad |x| < 1; \quad \sum_{n \geq 2} \frac{2n+1}{n!} 2^n = 5e^2, \quad \sum_{n \geq 0} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

证: (a) 因为幂级数

$$\sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$$

的收敛区间为 $(-1, 1)$, 所以在收敛区间内逐项求导得到

$$\sum_{n \geq 0} (n+1)x^n = \left(\sum_{n \geq 0} x^{n+1} \right)' = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

(b) 根据 (a) 得到

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1} = \left(\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (n+1)x^n \right)' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1-x)^2} \right)' = \frac{1}{(1-x)^3}.$$

(c) 对 (b) 继续求导得到

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 2} \frac{(n-1)n(n+1)}{6} x^{n-2} &= \left(\frac{1}{6} \sum_{n \geq 1} n(n+1)x^{n-1} \right)' \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{(1-x)^3} \right)' = \frac{1}{(1-x)^4}. \end{aligned}$$

(d) 幂级数 $\sum_{n \geq 1} x^{2n-1}/(2n-1)$ 的收敛半径为 $r=1$. 任意 $x \in (-1, 1)$ 得到

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \sum_{n \geq 1} \int_0^x t^{2n-2} dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

(e) 幂级数的收敛半径为 $r=1$, 故对任意 $x \in (-1, 1)$ 得到

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \int_0^x t^{2n-2} dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x.$$

(f) 因为

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(2n+3)/(n+1)!}{(2n+1)/n!} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \frac{2n+3}{2n+1} = 0,$$

所以幂级数 $\sum_{n \geq 1} (2n+1)x^{2n}/n!$ 的收敛区间为 \mathbb{R} . 令

$$f(x) := \sum_{n \geq 1} \frac{2n+1}{n!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

逐步积分得到

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n \geq 1} \frac{2n+1}{n!} \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n \geq 1} \frac{x^{2n+1}}{n!} = x \sum_{n \geq 1} \frac{(x^2)^n}{n!} = x(e^{x^2} - 1).$$

两边求导可得

$$f(x) = (2x^2 + 1)e^{x^2} - 1, \implies S(2) = 5e^2 - 1 \implies \sum_{n \geq 0} \frac{2n+1}{n!} 2^n = 5e^2.$$

(g) 因为

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{((n+1)!)^2}{(2n+3)!} \bigg/ \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)} = \frac{1}{4}.$$

所以幂级数 $\sum_{n \geq 0} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ 的收敛区间为 $(-4, 4)$. 令

$$f(x) := \sum_{n \geq 0} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^{2n}, \quad |x| < 4.$$

逐步求导得到

$$f'(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^{2n} \implies \left(2 - \frac{x^2}{2}\right) f'(x) = 2 + \frac{x}{2} f(x).$$

即得到

$$f'(x) - \frac{x}{4-x^2} f(x) = \frac{4}{4-x^2} \implies f(x) = \frac{4}{\sqrt{4-x^2}} \left(\arcsin \frac{x}{2} + C\right).$$

根据 $f(0) = 0$, 得到 $C = 0$ 从而 $f(x) = \frac{4}{\sqrt{4-x^2}} \arcsin \frac{x}{2}$. 故 $f(1) = 2\pi/3\sqrt{3}$.

(2) Bessel 函数

$$B_0(x) := \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

满足

$$xB_0''(x) + B_0'(x) + xB_0(x) = 0.$$

证: 因为幂级数的收敛半径为 $+\infty$, 所以逐项求导得到

$$B_0'(x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{2n}{(n!)^2 2^{2n}} x^{2n-1}, \quad B_0''(x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{2n(2n-1)}{(n!)^2 2^{2n}} x^{2n-2}.$$

此时易得到所要满足的常微分方程.

(3) 证明函数

$$f(x) := \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2 \ln(1+n)}$$

满足 $f \in C([-1, 1])$, $x = -1$ 处可导, 在 $x = 1$ 处不可导且 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = +\infty$.

证: 因为

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)^2 \ln(2+n)} \bigg/ \frac{1}{n^2 \ln(1+n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \ln(1+n)}{(n+1)^2 \ln(2+n)} = 1,$$

所以幂级数收敛区间为 $(-1, 1)$. 当 $x = \pm 1$ 时级数

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(\pm 1)^n}{n^2 \ln(1+n)} \quad \text{满足} \quad \left| \frac{(\pm 1)^n}{n^2 \ln(1+n)} \right| \leq \frac{1}{n^2 \ln 2},$$

故收敛域为 $[-1, 1]$ 从而幂级数 $\sum_{n \geq 1} x^n / n^2 \ln(1+n)$ 在 $[-1, 1]$ 上一致收敛. 因此 $f(x) \in C([-1, 1])$ 和

$$f'(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^{n-1}}{n \ln(1+n)}, \quad |x| < 1.$$

但是 $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln(1+n)}$ 根据 Leibniz 判别法知是收敛的. 利用定理 14.3.7 得到

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \sum_{n \geq 1} \frac{x^{n-1}}{n \ln(1+n)} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln(1+n)}.$$

但是级数 $\sum_{n \geq 1} 1/n \ln(1+n)$ 是发散的, 这是因为反常积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(1+t)} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t) \ln(1+t)} = \ln \ln(1+t) \Big|_1^{+\infty} = +\infty.$$

故 $f'(1)$ 不存在.

(4) 如果 $a_1 = a_2 = 1$ 且 $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, 则

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^{n-1} = \frac{1}{1-x-x^2}, \quad |x| < \frac{1}{2}.$$

证: 易知 $a_n > 0$ 且 a_n 递增. 若 $|x| < 1/2$, 则

$$\left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} |x| < \frac{2a_n}{a_n} \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

故幂级数 $\sum_{n \geq 1} a_n x^{n-1}$ 在区间 $(-1/2, 1/2)$ 内收敛. 若令 $f(x) := \sum_{n \geq 1} a_n x^{n-1}$ 则得到

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x + \sum_{n \geq 3} a_n x^{n-1} = 1 + x + \sum_{n \geq 3} (a_{n-1} + a_{n-2}) x^{n-1} \\ &= 1 + x + x \sum_{n \geq 3} a_{n-1} x^{n-2} + x^2 \sum_{n \geq 3} a_{n-2} x^{n-3} \\ &= 1 + x \left(1 + \sum_{n \geq 2} a_n x^{n-1} \right) + x^2 \sum_{n \geq 1} a_n x^{n-1} = 1 + x f(x) + x^2 f(x) \end{aligned}$$

所以, 利用推论 14.3.11,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x-x^2} = \frac{-1}{x^2+x-1} = \frac{-1}{\left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{x}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + 1\right)\left(\frac{x}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} + 1\right)} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \left(\frac{x}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)^n \cdot \sum_{n \geq 0} (-1)^n \left(\frac{x}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right)^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \left[\sum_{i+j=n} (-1)^i \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^i (-1)^j \left(\frac{2}{1-\sqrt{5}}\right)^j \right] x^n \end{aligned}$$

和

$$a_n = \sum_{i+j=n-1} \sum_{i+j=n} (-1)^i \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^i (-1)^j \left(\frac{2}{1-\sqrt{5}}\right)^j, \quad n \geq 1.$$

(5) 如果 $a_n \geq 0$, 级数 $\sum_{n \geq 0} a_n$ 发散, 且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{a_1 + \cdots + a_n} = 0,$$

则 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

证: 因为 $\sum_{n \geq 0} a_n$ 发散, 所以根据定理14.3.4 幂级数 $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ 在 $|x| > 1$ 内发散, 故 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \geq 1$. 令 $A_n := \sum_{1 \leq k \leq n} a_k$. 根据

$$\frac{a_n}{A_n} = \frac{A_n - A_{n-1}}{A_n} = 1 - \frac{A_{n-1}}{A_n} \rightarrow 0,$$

因此 $A_{n-1}/A_n \rightarrow 1$ 且 $A_n \rightarrow +\infty$. 所以 $\sqrt[n]{A_n} \rightarrow 1$. 从

$$\sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{A_n} \rightarrow 1 \implies \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq 1.$$

(6) 若幂级数 $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ 的收敛区间为 $(-r, r)$, 级数 $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}$ 收敛, 则

$$\int_0^r f(x) dx := \lim_{x \rightarrow r-} \int_0^x f(t) dt = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}.$$

特别地

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \int_0^1 \frac{1}{x} \ln \frac{1}{1-x} dx.$$

证: 根据定理14.3.7 和定理14.3.8 得到

$$\begin{aligned} \int_0^r f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow r-} \left(\sum_{n \geq 0} \int_0^x a_n t^n dt \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow r-} \left(\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}. \quad \square \end{aligned}$$

推论14.3.11. (1) (幂级数乘法) 假设 $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ 和 $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ 收敛半径分别为 r_a 和 r_b , 则

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n \cdot \sum_{n \geq 0} b_n x^n = \sum_{n \geq 0} c_n x^n, \quad |x| < r := \min\{r_a, r_b\}, \quad (14.3.6)$$

这里 $c_n := \sum_{i+j=n} a_i b_j$.

(2) (幂级数除法) 假设幂级数 $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ 的收敛区间为 $(-r, r)$, 其中 $r > 0$ 且 $a_0 \neq 0$, 则存在 $r' > 0$ 和幂级数 $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ 使得其在 $(-r', r')$ 内收敛且满足

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n \cdot \sum_{n \geq 0} b_n x^n \equiv 1, \quad x \in (-r', r').$$

证: (1) 利用定理14.3.1.

(2) 不妨假设 $a_0 = 1$. 递推定义

$$b_0 := 1, \quad b_n := - \sum_{0 \leq k \leq n-1} a_{n-k} b_k \quad (n \geq 1).$$

则得到

$$c_n := \sum_{i+j=n} a_i b_j = 1, \quad n \geq 0.$$

下证幂级数 $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ 有正的收敛半径. 因为幂级数 $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ 在 $(-r, r)$ 内收敛, 所以级数 $\sum_{n \geq 0} a_n (r/2)^n$ 收敛. 故存在正数 $M > 0$ 满足

$$\left| a_n \left(\frac{r}{2} \right)^n \right| \leq M, \quad \forall n \geq 0.$$

则得到

$$\left| b_n \left(\frac{r}{2} \right)^n \right| \leq \sum_{0 \leq k \leq n-1} \left| a_{n-k} \left(\frac{r}{2} \right)^{n-k} \right| \left| b_k \left(\frac{r}{2} \right)^k \right| \leq M \sum_{0 \leq k \leq n-1} \left| b_k \left(\frac{r}{2} \right)^k \right|;$$

前面几项不等式为

$$\left| b_1 \left(\frac{r}{2} \right) \right| \leq M, \quad \left| b_2 \left(\frac{r}{2} \right)^2 \right| \leq M \left[b_0 + \left| b_1 \left(\frac{r}{2} \right) \right| \right] \leq M(1+M) \leq (1+M)^2.$$

利用归纳法可得

$$\left| b_n \left(\frac{r}{2} \right)^n \right| \leq (1+M)^n, \quad n \geq 0.$$

因此我们可以取 $r_0 := r/2(1+M) \in (0, r/2)$. 最后令 $r' := \min\{r, r/2(1+M)\}$ 并利用 (1). \square

§14.3.3 Taylor 级数再探和初等函数的幂级数展开

假设幂级数 $\sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n$ 收敛区间为 $(x_0 - r, x_0 + r)$, 则定理14.3.8 告诉我们和函数 $f(x) := \sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n$ 在区间 $(x_0 - r, x_0 + r)$ 内是光滑的且

$$f^{(k)}(x_0) = k! a_k, \quad k \geq 0.$$

故此时

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

这样我们就得到了之前定义的 **Taylor 级数** (4.7.30).

一般地, 光滑函数 $f(x)$ 和其 Taylor 级数的关系用如下记号表示:

$$f(x) \sim \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = P_\infty(x; x_0, f). \quad (14.3.7)$$

当 $x_0 = 0$ 得到了 **Maclaurin 级数** (Maclaurin series).

注14.3.12. (1) 给定光滑函数 $f(x) \in C^\infty((x_0 - r, x_0 + r))$, 则其 Taylor 级数 $\sum_{n \geq 0} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n/n!$ 不一定收敛. 比如考察函数项级数

$$f(x) := \sum_{n \geq 0} \frac{\sin(2^n x)}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) := \frac{\sin(2^n x)}{n!}.$$

由于 $|u_n(x)| \leq 1/n!$, 函数项级数 $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ 在 \mathbb{R} 上一致收敛. 又因为

$$|u'_n(x)| = \left| \frac{2^n \cos(2^n x)}{n!} \right| \leq \frac{2^n}{n!},$$

故函数项级数 $\sum_{n \geq 0} u'_n(x)$ 在 \mathbb{R} 上也是一致收敛的. 因此得到

$$f'(x) = \sum_{n \geq 0} u'_n(x).$$

类似地可证明

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n \geq 0} u_n^{(k)}(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{2^{kn} \sin(2^n x + \frac{k\pi}{2})}{n!}$$

从而

$$f(x) \sim \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} e^{2^k} \sin \frac{k\pi}{2} x^k.$$

但是

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{\left| \frac{1}{k!} \sin \frac{k\pi}{2} \right| e^{2^k}} \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{\frac{e^{2^k}}{k^k}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} e^{2^k/k} = +\infty.$$

因此收敛区间仅是一点 $x = 0$, 即函数项级数 $\sum_{k \geq 0} \sin \frac{k\pi}{2} e^{2^k} x^k/k!$ 仅在 $x = 0$ 处收敛.

(2) Taylor 级数收敛 $\nRightarrow f(x) = \sum_{n \geq 0} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n/n!$. 反例见注4.7.12 (2).

如何保证光滑函数的 Taylor 级数就是该函数本身? 已经有定理4.7.13. 除此之外, 我们再来介绍两个有效的判别法.

定理14.3.13. (1) $f \in C^\infty((x_0 - r, x_0 + r))$ 且积分型余项

$$r_n(x) := \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty,$$

则

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < r. \quad (14.3.8)$$

(2) $f \in C^\infty((x_0 - r, x_0 + r))$ 且存在正数 > 0 满足 $|f^{(n)}(x)| \leq M^n$ 对任意 $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, 则 (14.3.8) 成立.

(3) (**Bernstein**) $f \in C^\infty([a, b])$ 且 $f^{(n)}(x) \geq 0$, 则对任意 $x, x_0 \in (a, b)$ 只要 $|x - x_0| < b - x_0$ 就有 (14.3.8) 成立.

证: (1) 根据定理5.4.21 得到

$$f(x) = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + r_n(x).$$

如果 $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n(x) = 0$, 得到 (14.3.8).

(2) 参见定理4.7.13.

(3) 令 $M = f(b) - f(a)$. 利用 $f', f'' \geq 0$ 对任意 $x \in (a, b)$ 得到

$$M \geq f(b) - f(x) = (b - x)f'(\xi_x) \geq (b - a)f'(x), \quad \xi_x \text{ 是介于 } b \text{ 和 } x \text{ 之间.}$$

利用 Taylor 公式展开到二阶得到, η_x 是介于 b 和 x 之间,

$$M \geq f(b) - f(x) = f'(x)(b - x) + \frac{f''(\eta_x)}{2}(b - x)^2 \geq \frac{f''(x)}{2}(b - x)^2.$$

一般地就得到

$$0 \leq f^{(n)}(x) \leq \frac{n!M}{(b - x)^n}, \quad x \in (a, b), \quad n \geq 1.$$

如果 $x > x_0$ 则根据定理5.4.21 得到

$$\begin{aligned} 0 \leq r_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt \leq (n + 1)M \int_{x_0}^x \frac{(x - t)^n}{(b - t)^{n+1}} dt \\ &\leq \frac{(n + 1)M}{b - x} \int_{x_0}^x \left(\frac{x - t}{b - t}\right)^n dt \leq \frac{(n + 1)M}{b - x} \left(\frac{x - x_0}{b - x_0}\right)^n (x - x_0) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

如果 $x < x_0$ 且 $x_0 - x < b - x_0$ 则根据定理5.4.21 得到

$$\begin{aligned} |r_n(x)| &= \frac{1}{n!} \left| \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt \right| \leq \frac{1}{n!} \int_x^{x_0} f^{(n+1)}(t)(t - x)^n dt \\ &\leq \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n!} \int_x^{x_0} (t - x)^n dt \leq \frac{1}{n!} \cdot \frac{(n + 1)!M}{(b - x_0)^{n+1}} \cdot \frac{(x_0 - x)^{n+1}}{n + 1} \\ &\leq M \left(\frac{x_0 - x}{b - x_0}\right)^{n+1} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

根据 (1) 得到所求的结论. \square

例14.3.14. (1) 初等函数的 Taylor 级数展开 (参见注4.7.12 (3)):

$$e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\sin x = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \cos x = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad -1 < x \leq 1,$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad -1 < x < 1,$$

$$\arcsin x = x + \sum_{n \geq 1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1}, \quad |x| < 1,$$

$$\arctan x = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}, \quad |x| \leq 1.$$

证: (a) 因为 $f(x) = e^x$ 满足 $f^{(n)}(x) = e^x \geq 0$.

(b) 因为 $f(x) = \sin x$ 满足 $f^{(n)}(x) = \sin(x + n\pi/2) \in [-1, 1]$.

(c) 类似于 (b).

(d) 因为 $f(x) = \ln(1+x)$ 满足 $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}/(1+x)^n$. 对任意 $r \in (0, 1)$ 和任意 $x \in (-r, r)$ 得到 $1+x \in (1-r, 1+r)$. 从而 $|f^{(n)}(x)| \leq 1/(1-r)^n$.

(e) 根据 Taylor 公式得到

$$(1+x)^\alpha = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{\alpha}{k} x^k + r_n(x),$$

这里

$$\begin{aligned} r_n(x) &:= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\theta x) (1-\theta)^n x^{n+1} \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n)}{n!} x^{n+1} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n (1+\theta x)^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

当 $x > -1$ 时

$$1+\theta x \geq 1-\theta > 0 \implies 0 \leq \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n \leq 1.$$

因此 $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n(x) = 0$.

(f) 计算可知

$$\begin{aligned} \arcsin x &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x (1-t^2)^{-1/2} dt \\ &= \int_0^x \left[\sum_{n \geq 0} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1) \cdots (-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} (-t^2)^n \right] dt \\ &= \int_0^x \left[\sum_{n \geq 0} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n} \right] dt \quad (\text{幂级数收敛区间为 } (-1, 1)) \end{aligned}$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n \geq 0} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1}$$

其中约定 $(-1)!! = 0!! \equiv 1$.

(g) 计算得到

$$\begin{aligned} \arctan x &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x (1+t^2)^{-1} dt = \int_0^x \left[\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n n!}{n!} t^{2n} \right] dt \\ &= \int_0^x \left[\sum_{n \geq 0} (-1)^n t^{2n} \right] dt = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \left(\int_0^x t^{2n} dt \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}. \end{aligned}$$

(2) (例4.7.15 (1)) 考虑函数

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots} = 1 + \cdots.$$

因为幂级数 $\sum_{n \geq 1} x^n/n!$ 的收敛区间为 \mathbb{R} , 所以根据推论14.3.11 (2) 得到

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \implies x = x \cdot \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(n+1)!} \cdot \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

根据 Taylor 展开的唯一性得到

$$1 = \sum_{n \geq 0} \left[\sum_{i+j=n} \frac{a_j}{(i+1)!} \right] x^n = a_0 + \sum_{n \geq 1} \left[\sum_{i+j=n} \frac{a_j}{(i+1)!} \right] x^n$$

从而得到

$$a_0 = 1, \quad 0 = \sum_{i+j=n} \frac{a_j}{(i+1)!} \quad (n \geq 1).$$

前面几项为

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{12}, \quad a_3 = 0, \quad \cdots.$$

一般地可证明

$$a_{2k+1} = 0, \quad k \geq 1.$$

实际上,

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = f(x) = \frac{x}{e^x - 1}, \quad f(-x) = \frac{-x}{e^{-x} - 1} = \frac{x}{e^x - 1} e^x = f(x) e^x.$$

故得到

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n x^n = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \cdot \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \left[\sum_{i+j=n} \frac{a_i}{j!} \right] x^n$$

所以有

$$a_n = (-1)^n \sum_{i+j=n} \frac{a_i}{j!} = (-1)^n \sum_{0 \leq i \leq n} \frac{a_i}{(n-i)!}, \quad n \geq 0.$$

最后推出

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (-1)^{n+1} \sum_{0 \leq i \leq n+1} \frac{a_i}{(n+1-i)!} = (-1)^{n+1} \left[\sum_{0 \leq i \leq n} \frac{a_i}{(n+1-i)!} + a_{n+1} \right] \\ &= (-1)^{n+1} a_{n+1} \end{aligned}$$

因此导致 $a_{n+1} = 0$ 如果 n 为偶数. 这样我们可以把 $x/(e^x - 1)$ 写成

$$\begin{aligned} \frac{x}{e^x - 1} &= \sum_{n \geq 0} a_n x^n = 1 + \sum_{n \geq 1} a_n x^n = 1 + \sum_{n \geq 1} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n \geq 0} a_{2n+1} x^{2n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \sum_{n \geq 1} a_{2n} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + \dots \end{aligned}$$

和 (4.7.32) 比较得到

$$a_n = \frac{b_n}{n!}, \quad a_{2n} = \frac{(-1)^{n-1} B_n}{(2n)!}, \quad n \geq 1. \quad (14.3.9)$$

(3) 求幂级数

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n, \quad a_n := \int_0^n e^{Ct^\alpha n^{-\beta}} dt, \quad C > 0, \alpha > \beta \geq 0$$

的收敛区间.

解: 观察到

$$a_n \leq e^{Cn^{\alpha-\beta}} \int_0^n dt = ne^{Cn^{\alpha-\beta}}$$

和

$$a_n \geq \int_{n-1}^n e^{Ct^\alpha n^{-\beta}} dt \geq e^{C(n-1)^\alpha n^{-\beta}} \int_{n-1}^n dt = e^{C(n-1)^\alpha n^{-\beta}}.$$

两边求 n 次根得到

$$e^{C(\frac{n-1}{n})^\alpha n^{\alpha-\beta-1}} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq e^{Cn^{\alpha-\beta-1}} \sqrt[n]{n}, \quad n \geq 2,$$

从而推出

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} 1, & \alpha - \beta - 1 < 0, \\ e^C, & \alpha - \beta - 1 = 0, \\ +\infty, & \alpha - \beta - 1 > 0. \end{cases}$$

故当 $\alpha - \beta < 1$ 时收敛区间为 $(-1, 1)$, 当 $\alpha - \beta = 1$ 时收敛区间为 $(-e^{-C}, e^{-C})$, 而当 $\alpha - \beta > 1$ 时收敛区间仅为单点集 $\{0\}$.

(4) 求函数

$$e^{e^x} = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

Taylor 级数的前 4 项, a_0, a_1, a_2, a_3 . 一般地可证明

$$\frac{e/C^n}{(\ln n)^n} \leq a_n \leq \frac{e^n}{(\ln n)^n}, \quad n \geq 2, \quad \exists C \geq e.$$

解: 令 $f(x) := e^{e^x}$. 则得到

$$f(0) = e, \quad f'(x) = e^{e^x} e^x, \quad f'(0) = e,$$

$$f''(x) = e^{e^x} (e^x)^2 + e^{e^x} e^x = e^{e^x} (e^{2x} + e^x), \quad f''(0) = 2e,$$

$$f'''(x) = e^{e^x} (e^{3x} + e^{2x} + 2e^{2x} + e^x) = e^{e^x} (e^{3x} + 3e^{2x} + e^x), \quad f'''(0) = 5e.$$

故 $a_0 = e, a_1 = e, a_3 = 5e/6$. 若记 $y = x$ 则

$$e^y = \sum_{n \geq 0} a_n (\ln y)^n \implies a_n (\ln n)^n \leq e^n \implies a_n \leq \frac{e^n}{(\ln n)^n}.$$

(5) 求幂级数

$$\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n, \quad \sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)^{-1} x^n$$

的收敛域.

解: 令

$$a_n := 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \gamma + \ln n.$$

则得到

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \frac{\gamma + \ln(n+1) + o(1)}{\gamma + \ln n + o(1)} = 1 \implies \text{收敛区间为 } (-1, 1).$$

但是 $a_n \rightarrow +\infty$, 第一个幂级数的收敛域为 $(-1, 1)$.

对第二个幂级数令

$$b_n := \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)^{-1} = \frac{1}{a_n} \implies \text{收敛区间为 } (-1, 1).$$

当 $x = -1$ 时级数变成 $\sum_{n \geq 1} (-1)^n / a_n$, 利用 Leibniz 判别法可知此时是收敛的. 当 $x = 1$ 时级数变成 $\sum_{n \geq 1} 1/a_n$. 根据积分不等式推出

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \int_1^n \frac{dx}{x} < 1 + \ln n < 2 \ln n, \quad n > e.$$

因此

$$\sum_{n \geq 3} \frac{1}{a_n} > \frac{1}{2} \sum_{n \geq 3} \frac{1}{\ln n},$$

故此时级数发散. 第二个幂级数的收敛域为 $[-1, 1)$.

(6) 假设 $a_0 = 1, a_1 = -7, a_2 = -1, a_3 = -43$, 且满足递推

$$a_{n+2} + c_1 a_{n+1} + c_2 a_n = 0, \quad n \geq 0,$$

这里 c_1, c_2 是常数. 求 a_n 通项和幂级数 $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ 的收敛区间.

解: 令

$$f(x) := \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

则推出

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n \geq 0} (a_{n+2} + c_1 a_{n+1} + c_2 a_n) x^{n+2} \\ &= [f(x) - a_0 - a_1 x] + c_1 x [f(x) - a_0] + c_2 x^2 f(x) \\ &= (c_2 x^2 + c_1 x + 1) f(x) - (a_0 c_1 + a_1) x - a_0. \end{aligned}$$

即

$$f(x) = \frac{a_0 + (a_1 + c_1 a_0) x}{c_2 x^2 + c_1 x + 1}, \quad c_2 x^2 + c_1 x + 1 \neq 0.$$

已知条件告诉我们

$$-43 - c_1 - 7c_2 = 0 = -1 - 7c_1 + c_2 \implies c_1 = -1, c_2 = -6, f(x) = \frac{1 - 8x}{1 - x - 6x^2}.$$

进一步得到

$$f(x) = \frac{2}{1+2x} - \frac{1}{1-3x} = 2 \sum_{n \geq 0} (-1)^n 2^n x^n - \sum_{n \geq 0} 3^n x^n = \sum_{n \geq 0} [(-1)^n 2^{n+1} - 3^n] x^n,$$

因为共同的收敛区间为 $(-1/3, 1/3)$.

(7) 定义Laguerre 多项式为

$$L_n(x) := \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}), \quad n \geq 0.$$

证明

$$L_n(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} \frac{(-x)^k}{k!}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-ax} L_n(x) dx = \frac{(\alpha - 1)^n}{\alpha^{n+1}}.$$

证: 事实上

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \frac{e^x}{n!} \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} (x^n)^{(k)} (e^{-x})^{(n-k)} \\ &= \frac{e^x}{n!} \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} n(n-1) \cdots (n-k+1) x^{n-k} (-1)^{n-k} e^{-x} \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} \frac{(-x)^{n-k}}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

特别地得到

$$\frac{1}{\alpha} = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n(x) dx, \quad 0 < \alpha < 1.$$

(8) 假设 $a_0, a_1 > 0$ 且

$$a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

求幂级数 $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, $|x| > 1$.

解: 易知 $a_n > 0$ 且单调递增. 注意到

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{a_n}{n^2} &= \frac{a_n}{(n+1)^2} + \frac{2a_{n-1}}{(n+1)^3} - \frac{a_n}{n^2} \\ &\leq \frac{a_n}{(n+1)^2} + \frac{2a_n}{(n+1)^3} - \frac{a_n}{n^2} = -\frac{3n+1}{n^2(n+1)^3} a_n \leq 0. \end{aligned}$$

故 $\{a_n/n^2\}_{n \geq 1}$ 单调递减从而极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n/n^2$ 存在. 令

$$f(x) := \sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n^2} \cdot n^2 x^n;$$

因为幂级数 $\sum_{n \geq 0} n^2 x^n$ 收敛域为 $(-1, 1)$, 所以幂级数 $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ 的收敛域至少为 $(-1, 1)$. 求导得到

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} = a_1 + \sum_{n \geq 1} (n+1) a_{n+1} x^n \\ &= a_1 + \sum_{n \geq 1} (n a_n + a_n + 2 a_{n-1}) x^n = a_1 + x f'(x) + f(x) - a_0 + 2x f(x). \end{aligned}$$

从而得到常微分方程

$$(1-x)f'(x) - (1+2x)f(x) = a_1 - a_0, \quad f(0) = a_0.$$

这个方程的相应的齐次方程为

$$(1-x)y' - (1+2x)y = 0 \implies y = c(1-x)^{-3} e^{-2x}.$$

故令

$$f(x) = c(x)(1-x)^{-3} e^{-2x}$$

得到

$$c(x) = \frac{a_1 - a_0}{4} (2x^2 - 6x + 5) e^{2x} + \lambda$$

和

$$f(x) = \frac{g(x)}{(1-x)^3}, \quad g(x) := \frac{a_1 - a_0}{4} (2x^2 - 6x + 5) + \lambda e^{-2x}.$$

根据 $f(0) = a_0$ 推出 $\lambda = (9a_0 - 5a_1)/4$.

(9) 因为

$$x \coth x = x \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = x \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = x \left(1 + \frac{2}{e^{2x} - 1} \right) = x + \frac{2x}{e^{2x} - 1},$$

所以根据 (4.7.32) 或 (14.3.9) 得到

$$x \coth x = 1 + \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!} x^{2n}. \quad (14.3.10)$$

另一方面类似 (6.4.4) 或 (6.4.28) 可以证明

$$\sinh x = x \prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right), \quad \cosh x = \prod_{n \geq 1} \left[1 + \frac{x^2}{\left(\frac{2n-1}{2} \pi\right)^2} \right]. \quad (14.3.11)$$

求导得到

$$\coth x = \frac{1}{x} + \sum_{n \geq 1} \frac{2x}{x^2 + n^2 \pi^2}, \quad \frac{1}{\sinh x} = \frac{1}{x} + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{2x}{x^2 + n^2 \pi^2}. \quad (14.3.12)$$

根据 (6.4.4) 或 (6.4.28) 得到

$$\ln |\sin x| = \ln |x| + \sum_{n \geq 1} \ln \left| 1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right|, \quad x \neq \pi \mathbb{Z}$$

和 (因为 $1/\sin x = (\cot(x/2) + \tan(x/2))/2$)

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n \geq 1} \frac{2x}{x^2 - n^2 \pi^2}, \quad \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{2x}{x^2 + n^2 \pi^2}. \quad (14.3.13)$$

利用 Riemann zeta 函数从 (14.3.12) 和 (14.3.13) 推出

$$\pi x \cdot \coth \pi x = 1 + 2 \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \zeta(2n) x^{2n}, \quad \pi x \cdot \cot x = 1 - 2 \sum_{n \geq 1} \zeta(2n) x^{2n}, \quad (14.3.14)$$

这里 $|x| < 1$. 比较 (14.3.10) 和 (14.3.14) 得到

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n} B_n}{2(2n)!}, \quad n \geq 1. \quad (14.3.15)$$

特别地我们有

$$\pi x \cdot \coth \pi x = 1 + \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n} B_n}{(2n)!} x^{2n}, \quad \pi x \cdot \cot \pi x = 1 - \sum_{n \geq 1} \frac{(2\pi)^{2n} B_n}{(2n)!} x^{2n}. \quad (14.3.16)$$

利用恒等式 $\tan x = \cot x - 2 \cot(2x)$ 得到

$$\tan x = \sum_{n \geq 1} \frac{2^{2n} (2^{2n} - 1) B_n}{(2n)!} x^{2n-1} = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \cdots, \quad |x| < \frac{\pi}{2}. \quad (14.3.17)$$

§14.4 * Tauberian 理论简介

本节来回答本章一开始提到的两个级数的“和”，

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}, \quad 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = -1.$$

本节部分内容取自如下两本名著:

- Hardy, G. H. *Divergent series*. Oxford, at the Clarendon Press, 1949. xvi+396 pp.
- Korevaar, Jacob. *Tauberian theory. A century of developments*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **329**, Springer-Verlag, Berlin, 2004, xvi+483 pp. ISBN; 3-540-21058-X

§14.4.1 * 发散级数

最早系统地研究无穷级数的数学家Newton和Leibniz曾尝试着使用发散级数,他们发现发散级数非常有用而且总是可以(不严格地)导出非常重要的结论,而这些重要的结论可以独立的用其它方法来证明.

首先回顾下通常收敛级数求和满足如下性质(这里级数的通项可以是复数):

- (S1) 如果 $\sum_{n \geq 0} a_n = S$, 则对任意 $k \in \mathbf{C}$ 都有 $\sum_{n \geq 0} ka_n = kS$;
- (S2) 如果 $\sum_{n \geq 0} a_n = S$ 和 $\sum_{n \geq 0} b_n = T$, 则 $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) = S + T$;
- (S3) 如果 $S = \sum_{n \geq 0} a_n$ 则 $\sum_{n \geq 1} a_n = S - a_0$, 且反之亦对.

上述三条性质我们抽象出来做成所谓的“公理”.

一个发散级数的某些计算. 我们知道幂级数

$$\sum_{n \geq 0} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}, \quad (14.4.1)$$

的收敛域是 $(-1, 1)$. 但是如果从(14.4.1)的右边函数 $(1-x)^{-1}$ 出发, 只要 $x \neq 1$ 时该函数均有意义. 这样一个很自然的问题是若 $|x| > 1$ 时, (14.4.1)的左边级数能否“定义”. 当然这种定义不是通常意义下级数的定义(此时通常意义下的级数是发散的), 即通常意义下的求和. 假设可以在“某种意义”下定义(14.4.1)中左边的级数并把它的“和”记为 S . 那么形式上就有

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = 1 + x(1 + x + x^2 + \cdots) = 1 + xS.$$

注意在这里我们已经假设在“某种意义”下的求和满足上述公理. 此时得到在“某种意义”下求出来的和就等于 $(1-x)^{-1}$, $x \neq 1$.

(1) 假设 (14.4.1) 在“某种意义”对任何 $x \neq 1$ 都成立. 把 $x = e^{\sqrt{-1}\theta}$, $0 < \theta < 2\pi$, 带入 (14.4.1),

$$1 + e^{\sqrt{-1}\theta} + e^{2\sqrt{-1}\theta} + \dots = \frac{1}{1 - e^{\sqrt{-1}\theta}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-1}}{2} \cot \frac{\theta}{2}, \quad (14.4.2)$$

从而得到

$$\sum_{n \geq 1} \cos n\theta = -\frac{1}{2}, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad (14.4.3)$$

$$\sum_{n \geq 1} \sin n\theta = \frac{1}{2} \cot \frac{\theta}{2}, \quad 0 < \theta < 2\pi. \quad (14.4.4)$$

作变换 $\theta \rightarrow \theta + \pi$ 得到

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n \cos n\theta = -\frac{1}{2}, \quad -\pi < \theta < \pi, \quad (14.4.5)$$

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n \sin n\theta = -\frac{1}{2} \tan \frac{\theta}{2}, \quad -\pi < \theta < \pi. \quad (14.4.6)$$

在 (14.4.5) 中令 $\theta = 0$ 得到

$$1 - 1 + 1 - \dots = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} = \frac{1}{2}. \quad (14.4.7)$$

如果“某种意义”下的求和满足公理 (S1) - (S3), 则立即得到

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - S \implies S = \frac{1}{2}.$$

(2) 对 (14.4.5) 和 (14.4.6) 关于 θ 求多次导数得到 $(-\pi < \theta < \pi)$

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} n^{2k} \cos n\theta = 0, \quad k \geq 1, \quad (14.4.8)$$

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} n^{2k+1} \sin n\theta = 0, \quad k \geq 0, \quad (14.4.9)$$

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^k + n - 1 n^{2k} \sin n\theta = \left(\frac{1}{2} \tan \frac{\theta}{2}\right)^{(2k)}, \quad k \geq 0, \quad (14.4.10)$$

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{k+n-1} n^{2k+1} \cos n\theta = \left(\frac{1}{2} \tan \frac{\theta}{2}\right)^{(2k+1)}, \quad k \geq 0. \quad (14.4.11)$$

在 (14.4.8) 和 (14.4.11) 中令 $\theta = 0$ 和在 (14.4.9) 中令 $\theta = \pi/2$ 分别得到

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} n^{2k} = 0, \quad k \geq 1, \quad (14.4.12)$$

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} n^{2k+1} = (-1)^k \frac{2^{2k+2} - 1}{2k+2} B_{k+1}, \quad k \geq 0 \quad (14.4.13)$$

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} (2n-1)^{2k+1} = 0, \quad k \geq 0, \quad (14.4.14)$$

在这里用到了 $\frac{1}{2} \tan \frac{\theta}{2}$ 的 Taylor 级数 (14.3.17)

$$\frac{1}{2} \tan \frac{\theta}{2} = \sum_{k \geq 0} \frac{2^{2k+2} - 1}{(2k+2)!} B_{k+1} \theta^{2k+1},$$

类似地, 从级数

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} e^{\sqrt{-1}(2n-1)\theta} = \frac{e^{\sqrt{-1}\theta}}{1 + e^{2\sqrt{-1}\theta}} = \frac{1}{2} \sec \theta, \quad (14.4.15)$$

并利用 (4.7.33), 这里 E_k 是 Euler 常数,

$$\sec \theta = \frac{2e^x}{e^{2x} + 1} = 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{E_k}{(2k)!} x^{2k},$$

得到 (14.4.14) 和

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} (2n-1)^{2k} = \frac{(-1)^k}{2} E_k, \quad k \geq 1. \quad (14.4.16)$$

在 (14.4.13) 中令 $k=0$ 得到

$$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots = \frac{1}{4}. \quad (14.4.17)$$

如果“某种意义”下的求和满足公理 (S1) - (S3), 则立即得到

$$\begin{aligned} S &= 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots = 1 + (-2 + 3 - 4 + \cdots) = 1 - (2 - 3 + 4 - \cdots) \\ &= 1 - (1 - 1 + 1 - \cdots) - (1 - 2 + 3 - \cdots) = 1 - \frac{1}{2} - S \implies S = \end{aligned}$$

(3) 对 (14.4.5) 积分得到

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{\sin n\theta}{n} = \frac{\theta}{2}, \quad |\theta| < \pi. \quad (14.4.18)$$

根据 Abel 判别法可知, 上述级数在通常意义下是收敛的. 对 (14.4.18) 再次积分得到 (显然级数对任意 θ 都成立, 因为绝对一致收敛)

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{1 - \cos n\theta}{n^2} = \frac{\theta^2}{4}, \quad |\theta| \leq \pi. \quad (14.4.19)$$

特别地取 $\theta = \pi$ 得到

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \quad (14.4.20)$$

由于

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)^2} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2},$$

我们得到

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad (14.4.21)$$

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad (14.4.22)$$

从而 (14.4.19) 变成

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{\cos n\theta}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\theta^2}{4}, \quad |\theta| \leq \pi. \quad (14.4.23)$$

(4) 利用 (14.4.7) 和 (14.4.12), 我们可以从形式上推导出 (14.4.19):

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{1 - \cos n\theta}{n^2} &= \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{(n\theta)^{2k+2}}{(2k+2)!} \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k \theta^{2k+2}}{(2k+2)!} \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} n^{2k} = \frac{\theta^2}{2} (1 - 1 + 1 - \cdots) = \frac{\theta^2}{4}. \end{aligned}$$

上述“形式推导”可以推广如下. 假设幂级数

$$f(\theta) = \sum_{n \geq 0} a_n \theta^{2n}$$

对任意 θ 都收敛, 即它的收敛区间为 \mathbb{R} . 则形式上推导出

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{f(n\theta)}{n^2} &= \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \sum_{k \geq 0} a_k (n\theta)^{2k} \\ &= \sum_{k \geq 0} a_k \theta^{2k} \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} n^{2k-2} = a_0 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + a_1 \theta^2 \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \\ &= \frac{\pi^2}{12} a_0 + \frac{\theta^2}{2} a_1. \end{aligned} \quad (14.4.24)$$

然而上述公式一般来说是不对的, 比如取 $f(\theta) = e^{-\theta^2}$, 此时

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{e^{-n^2 \theta^2}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\theta^2}{2},$$

对任意 θ 不一定成立. 但是对相当一大类函数公式 (14.4.24) 是对的, 比如对 **Bessel函数**¹ (参见注14.3.9 (2))

$$J_0(\theta) := \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{[(2n)!!]^2} \theta^{2n} = 1 - \frac{\theta^2}{2^2} + \frac{\theta^4}{2^2 \cdot 4^2} - \cdots,$$

¹ k 阶 Bessel 函数定义为

$$J_k(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}, \quad k \geq 0.$$

就有

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{J_0(n\theta)}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\theta^2}{8}, \quad |\theta| < \pi. \quad (14.4.25)$$

(5) 根据 (14.4.4) 得到

$$\sum_{n \geq 1} \cos n\theta \cdot \sin n\phi = \frac{1}{4} \left[\cot \frac{\phi + \theta}{2} + \cot \frac{\phi - \theta}{2} \right] = \frac{1}{2} \frac{\sin \phi}{\cos \theta - \cos \phi}$$

和

$$\frac{\cos m\theta - \cos m\phi}{\cos \theta - \cos \phi} = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{\sin n\phi}{\sin \phi} \cos n\theta (\cos m\theta - \cos m\phi), \quad m \geq 1.$$

两边积分得到

$$\int_0^\pi \frac{\cos m\theta - \cos m\phi}{\cos \theta - \cos \phi} d\theta = \pi \frac{\sin m\phi}{\sin \phi}. \quad (14.4.26)$$

当然公式 (14.4.26) 可以用其它方法独立得到.

(6) 从 (14.4.4) 和 (14.4.6) 推出

$$\sum_{n \geq 1} \sin[(2n-1)\theta] = \frac{1}{2} \csc \theta, \quad \sum_{n \geq 1} \sin[(2n)\theta] = \frac{1}{2} \cot \theta.$$

由于

$$\int_0^{\pi/2} \theta \sin[(2n-1)\theta] d\theta = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}, \quad \int_0^{\pi/2} \theta \sin(2n\theta) d\theta = \frac{(-1)^{n-1}}{4n} \pi,$$

所以得到

$$\int_0^{\pi/1} \frac{\theta}{\sin \theta} d\theta = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}, \quad (14.4.27)$$

$$\int_0^{\pi/2} \theta \cot \theta d\theta = \frac{\ln 2}{2} \pi. \quad (14.4.28)$$

当然这两个公式可由其它方法独立得到.

目前为止, 上述公式中只有 (14.4.18) – (14.4.23), (14.4.25) – (14.4.28) 是正确的. 其它公式我们希望在“某种意义”下是正确的.

§14.4.2 * 级数求和的一般定义

本小节我们给出级数求和的一般定义. 给定数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$, 若在意义 P 下可定义求和 $\sum_{n \geq 0} a_n = S$, 则称级数 $\sum_{n \geq 0} a_n$ 是 P -求和的或 S 是 $\sum_{n \geq 0} a_n$ 的 P -和, 并记作

$$\sum_{n \geq 0} a_n =_P S.$$

同时也称 S 是部分和 S_n 的 P - 极限并记作

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n =_P S.$$

如果“意义 P ”就是“通常意义”则上述定义回归到级数收敛的原始定义上来. 下面我们给出其它意义下的级数和.

(1) **Cesàro (C, 1)- 和**. 如果 $S_n := \sum_{0 \leq k \leq n} a_k$ 且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{0 \leq k \leq n} S_k = S, \quad (14.4.29)$$

则称 S 是 $\sum_{n \geq 1} a_n$ 的 $(C, 1)$ - 和并记作

$$\sum_{n \geq 0} a_n =_C S.$$

D. Bernoulli 在 1771 年使用 $(C, 1)$ - 和来研究某类特殊的级数, 之后 **Leibniz** 在 1713 年用该求和方法来研究发散级数 $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$. 当然 **D. Bernoulli** 和 **Leibniz** 都没有给出 $(C, 1)$ - 和的定义 (或许他们早就知道定义了). **Frobenius** 在 1880 年和 **Hölder** 在 1882 年也隐约地使用 $(C, 1)$ - 和, 直到 1890 年, **Cesàro** 在他发表的关于级数乘法的论文中第一次给出 $(C, 1)$ - 和的确切定义.

(2) **Abel A- 和**. 假设幂级数 $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ 在 $|x| < 1$ 内收敛并假设和函数 $f(x)$ 满足

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = S, \quad (14.4.30)$$

则称 S 是 $\sum_{n \geq 1} a_n$ 的 **A- 和**并记作

$$\sum_{n \geq 0} a_n =_A S.$$

A- 和也成为 **P- 和**, 这是因为 **Poisson** 在研究 Fourier 级数求和时使用过. 当然这个求和方法可追溯到 **Euler** 和 **Leibniz**. 这个方法之所以被称为 **A- 和**主要是因为该方法依赖于 **Abel** 关于幂级数的连续性的定理, 即定理 14.3.7.

(3) **Euler (E, 1)- 和**. 假设幂级数 $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ 对充分小的 x 收敛, 并记

$$x = \frac{y}{1-y}, \quad y = \frac{x}{1+x}. \quad (14.4.31)$$

当 x 和 y 充分小时得到展开

$$xf(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+1} = \sum_{n \geq 0} a_n \left(\frac{y}{1-y} \right)^{n+1} = \sum_{n \geq 0} a_n \sum_{k \geq 0} \binom{n+k}{k} y^{n+k+1}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n \geq 0} a_n \sum_{k \geq n} \binom{k}{k-n} y^{k+1} = \sum_{k \geq 0} y^{k+1} \sum_{0 \leq n \leq k} \binom{k}{k-n} a_n \\
&= \sum_{k \geq 0} y^{k+1} \sum_{0 \leq n \leq k} \binom{k}{n} a_n = \sum_{k \geq 0} b_k y^{k+1},
\end{aligned}$$

其中

$$b_0 = a_0, \quad b_k = \sum_{0 \leq n \leq k} \binom{k}{n} a_n. \quad (14.4.32)$$

因为当 $y = 1/2$ 时 $x = 1$, 所以称 S 是 $\sum_{n \geq 1} a_n$ 的 $(E, 1)$ -和并记作

$$\sum_{n \geq 0} a_n = \mathbf{E} S$$

如果

$$\sum_{k \geq 0} \frac{b_k}{2^{k+1}} = S \quad (14.4.33)$$

成立.

$(E, 1)$ -和方法来自“Euler 变换”, 这个变换可以把收敛速度较慢的级数转换成收敛速度很快的级数.

(4) Borel B-和. 假设幂级数 $\sum_{n \geq 0} S_n x^n / n!$ 对任意 x 都收敛且函数

$$F(x) := e^{-x} \sum_{n \geq 0} \frac{S_n}{n!} x^n \rightarrow S, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (14.4.34)$$

则称 S 是 $\sum_{n \geq 1} a_n$ 的 **B-和**并记作

$$\sum_{n \geq 0} a_n = \mathbf{B} S.$$

这个求和方法是 **Borel** 在 1899 年给出的.

(5) Hutton (H, 1)-和. 令 $S_n^{(0)} := S_n$ ($n \geq 0$), $S_{-1}^{(k)} = S_{-2}^{(k)} := 0$ ($k \geq 0$), 和递推定义

$$S_n^{(k)} := \frac{1}{2} S_{n-1}^{(k-1)} + \frac{1}{2} S_n^{(k-1)}, \quad n \geq 0.$$

计算易得

$$S_n^{(1)} = \frac{1}{2} S_{n-1} + \frac{1}{2} S_n, \quad S_n^{(2)} = \frac{1}{2} S_{n-2} + \frac{1}{4} S_{n-1} + \frac{1}{4} S_n, \quad n \geq 0.$$

如果

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n^{(k)} = S, \quad (14.4.35)$$

则称 S 是 $\sum_{n \geq 1} a_n$ 的 (H, k) -和并记作

$$\sum_{n \geq 0} a_n = \mathbf{H}, k S.$$

这个求和方法是Hutton在1812年给出的.

可以证明 (C,1)-和, A-和, 以及 (E,1)-和都满足公理 (S1) – (S3). 具体细节可参考本节一开始提到的Hardy的名著.

例14.4.1. (1) 考虑 (通常意义下的) 发散级数

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

则部分和为

$$S_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 偶数,} \\ 0, & n \text{ 奇数.} \end{cases}$$

因此 (14.4.29) 的极限为 $\frac{1}{2}$. 同理可证, 因为 $\sum_{n \geq 0} (-x)^n = (1+x)^{-1}$, (14.4.30) 可给出 $\frac{1}{2}$. 从 (14.4.32) 得到 $b_0 = 1$ 和 $b_k = 0$ ($k \geq 1$), 故 (14.4.33) 也给出 $\frac{1}{2}$. 但是 (14.4.34) 给出了 $F(x) = e^{-x}e^{-x} = e^{-2x} \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty$. 而 (14.4.35) 同样又给出了 $S_n^{(1)} = \frac{1}{2}, n \geq 0$.

	(C,1)	A	(E,1)	B	(H,1)	(H,2)
$\sum_{n \geq 0} (-1)^n$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	\nexists

(2) 考虑 (通常意义下的) 发散级数

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n (n+1) = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots$$

类似地可计算得到

	(C,1)	A	(E,1)	B	(H,1)	(H,2)
$\sum_{n \geq 0} (-1)^n (n+1)$	\nexists	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	\nexists	$\frac{1}{4}$

(3) 考虑 (通常意义下的) 发散级数

$$\sum_{n \geq 0} (n+1) = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

类似地可计算得到

	(C,1)	A	(E,1)	B	(H,1)	(H,2)
$\sum_{n \geq 0} (n+1)$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$

练习14.4.2. 完成例14.4.1中剩下例子的计算.

§14.4.3 * 求和的正则性问题

给出上述几个关于 P - 求和的例子后, 一个很自然的问题就是: 如果级数 $\sum_{n \geq 1} a_n$ 本身就是收敛的话, 那对这个级数的 P - 求和就是通常意义下的求和. 这就是所谓的求和的正则性问题, 如果某个 P - 求和是正则的, 则这个求和方法就是把对收敛级数求和推广到发散级数求和. 在上节我们已经看到对发散级数做些运算往往会得到意想不到的结果, 当然为了使运算过程合理化, 我们需要对发散级数的求和进行新的定义.

可以证明上述提到的四种求和方法都是正则的, 具体细节可参考本节一开始提到的两本名著.

§14.4.4 * Tauberian 理论

求和的正则性告诉我们, 收敛级数的 P - 求和就是普通意义下的求和. 反之, 就是著名的 Tauberian 问题 (1897), 即, 可 P - 求和的级数什么时候可在普通意义下收敛?. 用数学语言可表示为

$$\sum_{n \geq 0} a_n \text{ 是 } P\text{-可求和的} \implies \sum_{n \geq 0} a_n \text{ 是收敛的.} \quad (14.4.36)$$

为了回答上述问题, Tauber 引入了 Tauberian 条件, 即关于通项 a_n 的条件, 简记为 $T\{a_n\}$. Tauber 给出的定理可简单概括为

定理14.4.3. (Tauber, 1897) 级数的 Tauberian 定理可表述为

$$\sum_{n \geq 0} a_n \text{ 是 } P\text{-可求和的且满足条件 } T\{a_n\} \implies \sum_{n \geq 0} a_n \text{ 是收敛的.} \quad (14.4.37)$$

当然对不同的 P - 求和, 条件 $T\{a_n\}$ 是不相同的.

定理14.4.4. (Cesàro 求和的 Tauber 型定理; Hardy, 1910; Laudau, 1910) 考虑 Hardy 条件

$$|na_n| \leq C,$$

或者 Laudau 条件

$$na_n \geq -C.$$

则有

$$\sum_{n \geq 0} a_n \text{ 是 } (C, 1)\text{-可求和的且满足条件 } T\{a_n\} \implies \sum_{n \geq 0} a_n \text{ 是收敛的.}$$

Hardy 在 1910 年提出了如下猜想: 定理14.4.4 中的 Hardy 条件是否也适用于 Abel 求和? Littlewood 在 1911 年证实了 Hardy 的猜想.

定理14.4.5. (Abel 求和的 Tauber 型定理; Tauber, 1897; Hardy-Littlewood, 1911; Hardy-Littlewood, 1914) 考虑 Tauber 条件

$$na_n \rightarrow 0,$$

或者 Hardy 条件

$$|na_n| \leq C,$$

或者 Hardy-Littlewood-Laudau 条件

$$na_n \geq -C.$$

则有

$$\sum_{n \geq 0} a_n \text{ 是 A-可求和的且满足条件 } T\{a_n\} \implies \sum_{n \geq 0} a_n \text{ 是收敛的.}$$

除此之外, Hardy 和 Littlewood 还给出了这样的结论: 如果 $\sum_{n \geq 0} a_n$ 是可 Abel 求和的且部分和满足 $S_n \geq -C$, 则 $\sum_{n \geq 0} a_n$ 是可 Cesàro 可求和的.

定理14.4.6. (Borel 求和的 Tauber 型定理; Hardy-Littlewood, 1916; Schmidt, 1925) 考虑 Hardy-Littlewood 条件

$$|\sqrt{na_n}| \leq C,$$

或者 Schmidt 条件

$$\sqrt{na_n} \geq -C.$$

则有

$$\sum_{n \geq 0} a_n \text{ 是 B-可求和的且满足条件 } T\{a_n\} \implies \sum_{n \geq 0} a_n \text{ 是收敛的.}$$

在 Hardy-Littlewood 条件下, Hardy 和 Littlewood 在 1943 年给出了上述定理的另一个证明.

§14.5 参考文献

1. Koblitz, Neal. *Introduction to elliptic curves and modular forms*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics 97, Springer-Verlag, New York, 1993. x+248 pp. ISBN: 0-387-97966-2
2. 布鲁斯·C. 伯恩特 (Bruce C. Berndt) 主编: 拉玛努金笔记(第 2, 3, 4 卷), 哈尔滨工业大学出版社, 2019.
3. Hardy, G. H. *Divergent series*, Oxford, at the Clarendon Press, 1949. xvi+396 pp.

4. Korevaar, Jacob. *Tauberian theory. A century of developments*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **329**, Springer-Verlag, Berlin, 2004, xvi+483 pp. ISBN: 3-540-21058-X
5. 徐森林, 薛春华编著: *数学分析*, 清华大学出版社, 2005.
6. 张福保, 薛金美, 潮小李 主编: *数学分析讲义*, 科学出版社, 2019.
7. 梅加强 编著: *数学分析*, 高等教育出版社, 2015.
8. 邓建平 编: *微积分 I 和 II*, 科学出版社, 2019.
9. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis I*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+574 pp. ISBN: 3-540-40386-8
10. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis II*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xvi+681 pp. ISBN: 3-540-40633-6
11. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis I*, Translated from the 1988 German original by Gary Brookfield, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. xiv+426 pp. ISBN: 3-7643-7153-6
12. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis II*, Translated from the 1999 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. xii+400 pp. ISBN: 978-3-7643-7472-3; 3-7643-7472-3
13. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis III*, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. xii+468 pp. ISBN: 978-3-7643-7479-2; 3-7643-7479-2
14. 菲赫金哥尔茨 著 (徐献瑜, 冷生明, 梁文琪 译; 郭思旭 校): *微积分学教程* (第一、二、三卷), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.
15. 吉米多维奇 著 (李荣涑, 李植 译): *数学分析习题集* (根据 2010 年俄文版翻译), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.
16. 汪林 著: *数学分析中的问题和反例*, 现代数学基础 **56**, 高等教育出版社, 2015.
17. 裴礼文 编著: *数学分析中的典型问题与方法* (第二版), 高等教育出版社, 2015.
18. 朱尧辰 编著: *数学分析例选通过范例学技巧*, 哈尔滨工业大学出版社, 2013.

19. 周民强 编著: 数学分析习题演练 (第一、二、三册), 科学出版社, 2018.
20. 李逸 编著: 数学分析讲义, 上海交通大学数学分析课讲义, 未出版, 2016.

第十五章 含参变量积分

Ramanujan 不等式,

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} \left(\frac{x}{e}\right)^x \left(8x^3 + 4x^2 + x + \frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{6}} &< \Gamma(x+1) \\ &< \sqrt{\pi} \left(\frac{x}{e}\right)^x \left(8x^3 + 4x^2 + x + \frac{1}{30}\right)^{\frac{1}{6}}, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

稍微精确的不等式以征求问题解的形式由 Ramanujan 于 1916 年发表在印度数学会期刊上, 而上述精确的不等式则出现在 Ramanujan 遗失的笔记中 (见本章的参考文献). 完整的证明则分别由 Karatsuba 在 2001 年给出 ($x \geq 1$) 和 Alzer 在 2003 年给出 ($0 \leq x \leq 1$).

在第三节我们将给出 Ramanujan 不等式.

§15.1 含参变量定积分

给定多元函数 $f(x, y)$, $(x, y) \in X \times Y \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, 其中 X, Y 都是区域. 如果对任意给定的 $y \in Y$, 函数 $f(x, y)$ 在 X 上可积或广义可积, 则得到定积分或反常积分

$$I(y) := \int_X f(x, y) dx, \quad y \in Y, \quad (15.1.1)$$

并称为含参变量积分(integral depending on parameters).

例 15.1.1. 考虑反常积分

$$I := \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

在例 5.5.18 (1) 已经证明上述反常积分是条件收敛的. 在例 14.3.14 (1) 我们得到了 $\sin x/x$ 的幂级数展开

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-x^2)^n}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

为了求出 I 的值, 我们观察到 $\sin x/x$ 当 $x \rightarrow 0+$ 时趋于 1, 而当 $x \rightarrow +\infty$ 时趋于 0. 但是当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $\sin x/x$ 的收敛到 0 的速度不够快, 为此我们乘以因子 e^{-ax} 而考虑含参变量积分

$$I(\alpha) := \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx, \quad \alpha \geq 0.$$

当 $\alpha > 0$ 时作形式上的求导 (即暂且不考虑求积分和求导是否可以交换)

$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} (-e^{-ax} \sin x) dx = \frac{e^{-ax}(\alpha \sin x + \cos x)}{1 + \alpha^2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{-1}{1 + \alpha^2}.$$

从而得到 (这里假设函数 $I(\alpha) \in C([0, +\infty))$)

$$I(\alpha) = -\tan^{-1} \alpha + I(0), \quad \alpha > 0.$$

因为

$$|I(\alpha)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow +\infty.$$

最后得到 $I(0) = \pi/2$.

上述推导有两个问题没有解决, 即

$$\frac{d}{d\alpha} \int_0^{+\infty} ??? = ??? \int_0^{+\infty} \frac{d}{d\alpha}, \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} ??? = ??? \int_0^{+\infty} \lim_{\alpha \rightarrow 0+} .$$

本节和下节就来回答这些问题.

§15.1.1 含参变量定积分的定义

假设二元函数 $f(x, y)$ 定义在闭矩形 $D := [a, b] \times [c, d]$ 上, 且对任意 $y \in [c, d]$, 函数 $f(\cdot, x) \in R([a, b])$. 定义函数

$$I(y) := \int_a^b f(x, y) dx, \quad c \leq y \leq d. \quad (15.1.2)$$

如果

$$a \leq \varphi(y), \psi(y) \leq b, \quad \forall y \in [c, d],$$

则定义函数

$$J(y) := \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx, \quad c \leq y \leq d. \quad (15.1.3)$$

§15.1.2 含参变量定积分的基本性质

和函数项级数一样, 含参变量定积分也具有求积分和求极限、求积分、求导数相交换的性质.

定理15.1.2. (基本性质) (1) (连续性定理) $f \in C(D) \implies I(y) \in C([c, d])$. 作为推论得到

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx. \quad (15.1.4)$$

(2) (积分顺序可交换定理) $f \in C(D) \implies$

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx. \quad (15.1.5)$$

(3) (积分号下求导定理) $f, f_y \in C(D) \implies I(y) \in D([a, b])$ 且

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b f_y(x, y) dx. \quad (15.1.6)$$

(4) $f \in C(D)$, $\varphi, \psi \in C([c, d]) \implies J(y) \in C([c, d])$.

(5) $f, f_y \in C(D)$, $\varphi, \psi \in D([c, d]) \implies J(y) \in D([c, d])$ 且

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx &= \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f_y(x, y) dx \\ &\quad + \psi'(y)f(\psi(y), y) - \varphi'(y)f(\varphi(y), y). \end{aligned} \quad (15.1.7)$$

证: (1) 因为 $f(x, y) \in C(D)$, 所以 $f(x, y)$ 在 D 上是一致连续的. 对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 对任意 $(x, y + \Delta y), (x, y) \in D$ 只要 $|\Delta y| < \delta$ 就有

$$|f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| < \epsilon.$$

给定 $y_0 \in [c, d]$. 对任意 $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ 得到

$$|I(y) - I(y_0)| \leq \int_a^b |f(x, y) - f(x, y_0)| dx < (b - a)\epsilon.$$

故 I 在 y_0 处连续.

(2) 根据定理13.2.1 得到.

(3) 给定 $y_0 \in [c, d]$. 我们得到

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = I'(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{I(y + \Delta y) - I(y)}{\Delta y}$$

和

$$\begin{aligned} &\frac{I(y + \Delta y) - I(y)}{\Delta y} - \int_a^b f_y(x, y) dx \\ &= \int_a^b \left[\frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} - f_y(x, y) \right] dx \\ &= \int_a^b [f_y(x, y + \theta \Delta y) - f_y(x, y)] dx, \quad \exists \theta = \theta(y, \Delta y) \in [0, 1]. \end{aligned}$$

因为 f_y 在 $[a, b]$ 上是连续的, 所以其在 $[a, b]$ 上必一致连续的. 因此对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 只要 $|y_1 - y_2| < \delta$ 就有

$$|f_x(x, y_1) - f_x(x, y_2)| < \epsilon.$$

因为 $|(y + \theta \Delta y) - y| = |\theta \Delta y| \leq |\Delta y|$, 所以只有 $|\Delta y| < \delta$ 就得到

$$\left| \frac{I(y + \Delta y) - I(y)}{\Delta y} - \int_a^b f_y(x, y) dx \right| < (b - a)\epsilon.$$

即得到 (15.1.6).

(4) 在 (15.1.3) 中作替换 $x = \varphi(y) + [\psi(y) - \varphi(y)]t$ 得到

$$I(y) = \int_0^1 f(\varphi(y) + (\psi(y) - \varphi(y))t, y) [\psi(y) - \varphi(y)] dt.$$

根据 (1) 得到 $J(y) \in C([c, d])$.

(5) 令 $u := \varphi(y), v := \psi(y)$. 考虑积分

$$J(y) = \int_u^v f(x, y) dx =: \Phi(y, u, v).$$

则 $\Phi_v = f(v, y), \Phi_u = -f(u, y)$, 和

$$\Phi_y = \int_u^v f_y(x, y) dx.$$

因此

$$\begin{aligned} J'(y) &= \frac{\partial}{\partial y} \Phi(y, u, v) = \Phi_y + \Phi_u u' + \Phi_v v' \\ &= \int_u^v f_y(x, y) dx + f(v, y) \psi'(y) - f(u, y) \varphi'(y). \end{aligned}$$

这就得到了 (15.1.7). \square

推论15.1.3. (Hadamard 引理) 如果 $f \in C^1(I)$, 这里 $I \subset \mathbb{R}$ 是包含 $x_0 \in \mathbb{R}$ 的开区间, 则

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0) \quad (15.1.8)$$

在 x_0 附近成立, 其中函数 φ 是连续的且满足 $\varphi(x_0) = f'(x_0)$.

证: 根据微积分基本定理得到

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \left[\int_0^1 f'(x_0 + th) dt \right] h$$

这里 h 充分小来保证 $x_0 + h \in I$. 如果定义函数

$$\varphi(x) := \int_0^1 f'(x_0 + t(x - x_0)) dt$$

则定理15.1.2 (1) 告诉我们 φ 是连续的且满足 $\varphi(x_0) = f'(x_0)$. \square

注15.1.4. (1) 定理15.1.2 (3) 不能直接推广到反常积分, 比如考察函数

$$F(a) := \int_0^\infty e^{-ax} dx, \quad a > 0.$$

计算得到 $F(a) = 1/a$ 和 $F'(a) = -1/a^2$. 但是

$$\int_0^\infty \frac{d}{dx} e^{-ax} dx = \int_0^\infty -ae^{-ax} dx = -1.$$

此时求积分和求导数不能交换的原因是上述含参变量积分不是一致收敛的, 具体定义以及相关内容在下一小节给出.

(2) 同样可证, 如果 $f \in C(D)$ 且 $f_x \in C(D)$ 则

$$\frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d f_x(x, y) dy. \quad (15.1.9)$$

(3) 我们可以把定理15.1.2 做如下的推广. 假设 $f(x, y) \in C(D)$, 这里 $D = [a, b] \times [c, d]$, $h(y) \in R([c, d])$, 令

$$F(x) := \int_c^d f(x, y)h(y)dy.$$

则

- $f(x, y) \in C(D)$ 和 $h(y) \in R([c, d]) \implies F(x) \in C([a, b])$ 且

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_c^d f(x, y)h(y)dy = \int_c^d \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)h(y)dy.$$

- $f(x, y) \in C(D)$ 和 $h(y) \in R([c, d]) \implies$

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)h(y)dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)h(y)dx \right] dy.$$

- $f(x, y), f_y(x, y) \in C(D)$ 和 $h(y) \in R([a, b]) \implies$

$$\frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y)h(y)dy = \int_c^d f_x(x, y)h(y)dy.$$

例15.1.5. 求下列极限、导数或积分:

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^2 x^2 \cos(tx) dx, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2 \cos \alpha x}, \quad \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (0 < a < b), \\ & \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x} \frac{1 + a \sin x}{1 - a \sin x} dx \quad (0 < a < 1), \quad \int_0^\pi \ln(1 + \theta \cos x) dx \quad (|\theta| < 1), \\ & \int_0^\pi \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx \quad (|a| < 1), \quad \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\ln(1 + xy)}{y} dy, \\ & \int_0^1 \left[\int_\pi^{2\pi} \frac{y \sin(xy)}{y - \sin y} dy \right] dx, \quad \int_0^1 \frac{\arctan x}{x \sqrt{1 - x^2}} dx, \quad \int_0^1 \frac{\ln(1 + x)}{1 + x^2} dx, \\ & \int_0^1 \sin \left(\ln \frac{1}{x} \right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (a, b > 0), \end{aligned}$$

解: (1) 函数 $f(x, t) = x^2 \cos(tx)$ 在 $[0, 2] \times [-1, 1]$ 上连续, 从而得到

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^2 x^2 \cos(tx) dx = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}.$$

(2) 函数 $f(x, \alpha) = (1 + x^2 \cos(\alpha x))^{-1}$ 在 $[0, 1] \times [-1, 1]$ 上连续, 从而得到

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2 \cos \alpha x} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

(3) 利用积分

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy$$

得到

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 \left[\int_a^b x^y dy \right] dx = \int_a^b \left[\int_0^1 x^y dx \right] dy = \int_a^b \frac{dy}{1+y} = \ln \frac{1+b}{1+a},$$

因为二元函数 $f(x, y) = x^y$ 在 $[0, 1] \times [a, b]$ 上连续.

(4) 根据

$$\frac{1}{2 \sin x} \ln \frac{1+a \sin x}{1-a \sin x} = \int_0^a \frac{dy}{1-y^2 \sin^2 x}$$

得到

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x} \ln \frac{1+a \sin x}{1-a \sin x} dx &= 2 \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^a \frac{dy}{1-y^2 \sin^2 x} \right] dx \\ &= 2 \int_0^a \left[\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1-y^2 \sin^2 x} \right] dy = 2 \int_0^a \left[\frac{1}{2-y^2} \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\frac{y^2}{2-y^2} \cos x} \right] dy. \end{aligned}$$

利用一般公式

$$\int \frac{dx}{1+\epsilon \cos x} = \frac{2}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \tan \frac{x}{2} \right) + C, \quad |\epsilon| < 1,$$

计算得到

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x} \ln \frac{1+a \sin x}{1-a \sin x} dx = \int_0^a \frac{\pi}{\sqrt{1-y^2}} dy = \pi \arcsin a.$$

(5) 任给 $a \in (0, 1)$, 则二元函数 $f(x, \theta) := \ln(1 + \theta \cos x)$ 在 $[0, \pi] \times [-a, a]$ 上连续并且 $f_\theta(x, \theta) = \cos x / (1 + \theta \cos x)$ 也是连续的. 从而首先对 $\theta \neq 0$ 得到

$$\begin{aligned} I'(\theta) &:= \frac{d}{d\theta} \int_0^\pi \ln(1 + \theta \cos x) dx = \int_0^\pi \frac{\cos x}{1 + \theta \cos x} dx = \frac{\pi}{\theta} - \frac{\pi}{\theta} \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \theta \cos x} \\ &= \frac{\pi}{\theta} - \frac{1}{\theta \sqrt{1-\theta^2}} = \frac{-\pi\theta}{(1 + \sqrt{1-\theta^2})\sqrt{1-\theta^2}}. \end{aligned}$$

上述显然当 $\theta = 0$ 时也成立. 两边积分得到

$$I(\theta) = \pi \ln(1 + \sqrt{1-\theta^2}) + C.$$

由于 $I(0) = 0$ 故 $C = -\pi \ln 2$ 和

$$I(\theta) = \pi \ln \frac{1 + \sqrt{1-\theta^2}}{2}.$$

(6) 积分内求导并做变换 $t = \tan(x/2)$ 得到

$$I'(a) := \frac{d}{da} \int_0^\pi \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx = \int_0^\pi \frac{2a - 2 \cos x}{1 - 2a \cos x + a^2} dx$$

$$= \frac{2}{a} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} + 2 \left(a - \frac{1}{a} \right) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1-a)^2 + (1+a)^2 t^2} = 0.$$

(7) 由于

$$f(x, y) = \frac{\ln(1+xy)}{y}, \quad f_x(x, y) = \frac{1}{1+xy},$$

所以得到

$$I'(x) = \int_0^x f_x(x, y) dy + f(x, x) = \int_0^x \frac{dy}{1+yx} + \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \frac{2}{x} \ln(1+x^2).$$

(8) 积分交换得到

$$\int_0^1 \left[\int_{\pi}^{2\pi} \frac{y \sin(xy)}{y - \sin y} dy \right] dx = \int_{\pi}^{2\pi} \left[\int_0^1 \frac{y \sin(xy)}{y - \sin y} dx \right] dy = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1 - \cos y}{y - \sin y} dy = \ln 2.$$

(9) 利用

$$\frac{\arctan x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2 y^2},$$

得到

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{dy}{1+x^2 y^2} \right] \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{1}{1+x^2 y^2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \right] dy = \int_0^1 \left[\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+y^2 \cos^2 t} \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+y^2+u^2} \right] dy = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{\pi}{2} \ln(1+\sqrt{2}), \end{aligned}$$

这里作了变换 $x = \cos t$ 和 $u = \tan t$.

(10) 引入含参变量积分

$$I(a) := \int_0^1 \frac{\ln(1+ax)}{1+x^2} dx, \quad -\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}.$$

积分内求导得到

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^1 \frac{x}{(1+ax)(1+x^2)} dx = \frac{1}{1+a^2} \int_0^1 \left(\frac{-a}{1+ax} + \frac{a+x}{1+x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{1+a^2} \left[-\ln(1+ax) \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{a+x}{1+x^2} dx \right] = \frac{1}{1+a^2} \left[-\ln(1+a) + \int_0^1 \frac{a+x}{1+x^2} dx \right] \\ &= \frac{1}{1+a^2} \left[-\ln(1+a) + a \arctan x \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 \right] \\ &= \frac{1}{1+a^2} \left[-\ln(1+a) + a \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) + \frac{1}{2} \ln 2 \right] = \frac{\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4} a - \ln(1+a)}{1+a^2}. \end{aligned}$$

因此推出

$$I(1) - I(0) = \frac{\ln 2}{2} \int_0^1 \frac{da}{1+a^2} + \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{ada}{1+a^2} - \int_0^1 \frac{\ln(1+a)}{1+a^2} da$$

从而

$$I(1) = \frac{\ln 2}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \ln 2 - I(1) \implies I(1) = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

(11) 交换积分顺序得到

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx &= \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \left[\int_a^b x^y dy \right] dx \\ &= \int_a^b \left[\int_0^1 x^y \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_0^{+\infty} e^{-(1+y)t} \sin t dt \right] dy \\ &= \int_a^b \frac{dy}{1 + (1+y)^2} = \arctan(1+b) - \arctan(1+a), \end{aligned}$$

这里作了变换 $x = e^{-t}$.

例15.1.6. (Bessel 方程) 函数

$$u(x) := \int_0^\pi \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi \quad (15.1.10)$$

满足二阶常微分方程

$$x^2 u''(x) + x u'(x) + (x^2 - n^2) u(x) = 0. \quad (15.1.11)$$

回顾 §5.6.6 中的椭圆积分.

例15.1.7. (椭圆积分) 第二类完备椭圆积分定义为

$$E(k) := \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - k^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx, \quad 0 \leq k \leq 1.$$

利用例14.3.14 (1) 得到

$$\sqrt{1 - k^2 x^2} = \sum_{n \geq 0} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{k^{2n}}{1-2n} x^{2n}$$

从而利用定理14.3.8 (1) 和 (5.4.30) 可得到

$$\begin{aligned} E(k) &= \sum_{n \geq 0} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{k^{2n}}{1-2n} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{k^{2n}}{1-2n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \theta d\theta = \sum_{n \geq 0} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{k^{2n}}{1-2n} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

即得到

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \sum_{n \geq 0} \left[\frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \right]^2 \frac{k^{2n}}{1-2n}. \quad (15.1.12)$$

第一类完备椭圆积分定义为

$$K(k) := \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}, \quad 0 \leq k \leq 1.$$

同理可证

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \sum_{n \geq 0} \left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right]^2 k^{2n}. \quad (15.1.13)$$

第三类完备椭圆积分定义为

$$\Pi(n, k) := \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} (1 - n \sin^2 \theta)}, \quad 0 \leq k \leq 1.$$

练习15.1.8. (1) 证明 (15.1.13).

(2) 验证如下等式

$$\begin{aligned} E'(k) &= \frac{R(k) - K(k)}{k}, \\ K'(k) &= \frac{E(k)}{k(1-k^2)} - \frac{K(k)}{k}, \\ \Pi_n(n, k) &= \frac{E(k) + \frac{k^2-n}{n}K(k) + \frac{n^2-k^2}{n}\Pi(n, k)}{2(k^2-n)(n-1)}, \\ \Pi_k(n, k) &= \frac{k}{n-k^2} \left[\frac{E(k)}{k^2-1} + \Pi(n, k) \right]. \end{aligned}$$

§15.2 含参变量广义积分

假设二元函数 $f(x, y)$ 定义在区域 $[a, +\infty) \times [c, d]$ 上 (当然可以把闭区间换成任意的区间 $Y \subset \mathbb{R}$), 并考虑含参变量的广义积分

$$I(y) := \int_a^{+\infty} f(x, y) dx. \quad (15.2.1)$$

称 $y_0 \in [c, d]$ 为 $I(y)$ 的收敛点(point of convergence) 如果广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x, y_0) dx$$

收敛. 所有的收敛点就构成了收敛域(domain of convergence).

例15.2.1. (1) 在注15.1.4 (1) 我们已经知道对含参变量广义积分, 求积分和求导数不一定可以交换.

(2) 对含参变量广义积分来说, 求积分和求极限不一定可以交换. 考虑积分

$$I(y) := \int_0^{+\infty} xye^{-yx^2} dx, \quad y \geq 0.$$

则

$$I(0) = \int_0^{+\infty} \left[\lim_{y \rightarrow 0^+} xye^{-yx^2} \right] dx = 0$$

但是

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} I(y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{2} e^{-yx^2} \Big|_0^{+\infty} \right] = \frac{1}{2}.$$

(3) 对含参变量广义积分来说, 积分顺序不一定可以交换. 考虑二元函数

$$f(x, y) := (2y - 2xy^3)e^{-xy^2}, \quad (x, y) \in [0, +\infty) \times [0, 1].$$

从而得到

$$\int_0^1 \left[\int_0^{+\infty} (2y - 2xy^3)e^{-xy^2} dx \right] dy = \int_0^1 0 dy = 0$$

和

$$\int_0^{+\infty} \left[\int_0^1 (2y - 2xy^3)e^{-xy^2} dy \right] dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1.$$

当然除了上面提到的含参变量广义积分(无穷积分), 我们还可以定义含参变量瑕积分. 假设二元函数 $f(x, y)$ 定义在 $[a, b) \times [c, d]$ (其中 $[c, d] \subset \mathbb{R}$), 且对任意 $y \in Y$, 瑕积分

$$I(y) := \int_a^b f(x, y) dx \quad (15.2.2)$$

都存在.

§15.2.1 含参变量广义积分的一致收敛

下面给出 (15.2.1) 和 (15.2.2) 的一致收敛的定义.

定义15.2.2. (1) 假设二元函数 $f(x, y)$ 定义在 $[a, +\infty) \times [c, d]$ 上且对任意 $y \in [c, d]$ 无穷积分 (15.2.1) 都收敛. 称含参变量广义积分 (15.2.1) 关于 $y \in [c, d]$ 是一致收敛的如果对任意 $\epsilon > 0$ 存在常数 $A_0 \geq a$ 使得当 $A > A_0$ 时有

$$\max_{c \leq y \leq d} \left| \int_A^{+\infty} f(x, y) dx \right| \leq \epsilon. \quad (15.2.3)$$

(2) 假设二元函数 $f(x, y)$ 定义在 $[a, b) \times [c, d]$ 上且对任意 $y \in [c, d]$ 瑕积分 (15.2.2) 都收敛. 称含参变量广义积分 (15.2.2) 关于 $y \in [c, d]$ 是一致收敛的如果对任意 $\epsilon > 0$ 存在常数 $\delta \in (0, b - a)$ 使得当 $0 < \eta < \delta$ 时有

$$\max_{c \leq y \leq d} \left| \int_{b-\eta}^b f(x, y) dx \right| \leq \epsilon. \quad (15.2.4)$$

注15.2.3. (1) 同理我们可以给出

$$\int_{-\infty}^a f(x, y) dx \quad \text{和} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

一致收敛的定义.

(2) 含参变量广义积分 (15.2.1) 在 $[c, d]$ 上不是一致收敛的 $\iff \exists \epsilon_0 > 0$
 $\forall A \geq a \exists A_0 > A \exists y_0 \in [c, d]$ 有

$$\left| \int_{A_0}^{+\infty} f(x, y_0) dx \right| \geq \epsilon_0.$$

例15.2.4. (1) 证明含参变量广义积分

$$I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy} dx$$

在 $[c, +\infty)$ 上一致收敛 ($c > 0$), 但在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛.

证: 对任意 $A > c$ 有

$$0 \leq \int_A^{+\infty} e^{-xy} dy \leq \frac{1}{x} e^{-xA} \leq \frac{1}{c} e^{-cA} \rightarrow 0, \quad A \rightarrow +\infty.$$

因此, 对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $A_0 > -\frac{1}{\delta} \ln(\delta\epsilon)$ 使得当 $A > A_0$ 和任意 $x \geq c$ 有

$$\left| \int_A^{+\infty} e^{-xY} dy \right| \leq \frac{1}{c} e^{-cA} < \epsilon.$$

但是在 $(0, +\infty)$ 上不是一致收敛的. 取 $\epsilon_0 = 1/e$, $A_k = k$, $x_k = 1/k \in (0, +\infty)$, 则得到

$$\left| \int_k^{+\infty} e^{-y/k} dy \right| = k \int_k^{+\infty} e^{-y/k} d(y/k) = k \left(-e^{-y/k} \Big|_k^{+\infty} \right) = \frac{k}{e} \geq \epsilon_0.$$

(2) 证明含参变量广义积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + y^2}$$

在 \mathbb{R} 上一致收敛.

证: 因为

$$\int_A^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + y^2} \leq \int_A^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{A} < \epsilon$$

如果 $A > 1/\epsilon$.

(3) 证明含参变量广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y} dy$$

在 $[c, +\infty)$ 上一致收敛 ($c > 0$), 但在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛.

证: 对任意 $A > 0$ 有

$$\int_A^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y} dy = \int_{Ax}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du.$$

因为反常积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du \text{ 收敛,}$$

所以对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $A_0 > 0$ 对任意 $A > A_0$ 和任意 $x \geq c$ 得到

$$\left| \int_A^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y} dy \right| < \epsilon.$$

另一方面, 对任意 $\epsilon_0 > 0$ 和任意 $M > 0$ 存在 $x > 0$ 满足

$$\left| \int_{Mx}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du \right| < \epsilon_0.$$

从而得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \epsilon_0 < \int_{Mx}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du \leq \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du + \epsilon_0.$$

选择

$$\epsilon_0 := \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du,$$

对任意 $M > 0$ 存在 $x > 0$ 满足

$$\left| \int_M^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y} dy \right| = \left| \int_{Mx}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du \right| \geq \epsilon_0.$$

(4) 证明含参变量广义积分

$$\Phi(x) = \int_0^{+\infty} x^\alpha y^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+x)y} dy, \quad \alpha, \beta > 0$$

在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛的.

证: 计算得到

$$\int_A^\infty (xy)^\alpha e^{-xy} y^{\beta+1} e^{-y} dy \leq M_\alpha \int_A^\infty y^{\beta+1} e^{-y} dy$$

这里 $M_\alpha = \max_{t \geq 0} t^\alpha / e^t = \alpha^\alpha / e^\alpha$. 因为

$$\int_0^\infty y^{\beta+1} e^{-y} dy = \Gamma(\beta+2),$$

所以

$$\int_A^\infty y^{\beta+1} e^{-y} dy < \epsilon, \quad A \gg 1.$$

§15.2.2 含参变量广义积分的一致收敛的判别法

本小节给出一致收敛的几个常用判别法, 主要是针对含参变量广义积分 (15.2.1).

定理15.2.5. (Cauchy 判别法) 含参变量广义积分 (15.2.1) 在 $[c, d]$ 上一致收敛 $\iff \forall \epsilon > 0 \exists A_0 \geq a$ 使得对任意 $A_1, A_2 > A_0$ 有

$$\max_{c \leq y \leq d} \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x, y) dx \right| < \epsilon.$$

证: 假设含参变量广义积分 (15.2.1) 在 $[c, d]$ 上一致收敛, 则利用不等式

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x, y) dx \right| \leq \left| \int_{A_1}^{+\infty} f(x, y) dx \right| + \left| \int_{A_2}^{+\infty} f(x, y) dx \right|$$

推出所需要的不等式.

反之, 给定 $y \in [c, d]$. 任意 $\epsilon > 0$ 存在 $A_0 \geq a$ 只要 $A_1, A_2 > A_0$ 就有

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x, y) dx \right| < \epsilon.$$

根据反常积分的 Cauchy 判别法, 注5.5.4 (1), 可知

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

对任给 $y \in [c, d]$ 都收敛. 令 $A_2 \rightarrow +\infty$ 得到

$$\max_{c \leq y \leq d} \left| \int_{A_1}^{+\infty} f(x, y) dx \right| \leq \epsilon, \quad A_1 > A_0.$$

从而含参变量积分 (15.2.1) 在 $[c, d]$ 上一致收敛. \square

作为直接推论得到, 如果存在 $\epsilon_0 > 0, A_n, A'_n \rightarrow +\infty$, 和 $y_n \in [c, d]$, 使得

$$\left| \int_{A_n}^{A'_n} f(x, y_n) dx \right| \geq \epsilon_0,$$

则含参变量积分 (15.2.1) 在 $[c, d]$ 上非一致收敛.

根据定义可知, 绝对一致收敛必是一致收敛, 即若含参变量积分

$$\int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx$$

在 $[c, d]$ 上一致收敛, 则含参变量广义积分 (15.2.1) 在 $[c, d]$ 上一致收敛.

定理15.2.6. (Weierstrass 判别法) 假设二元函数 $f(x, y)$ 满足条件

$$|f(x, y)| \leq g(x), \quad x \geq a, \quad y \in [c, d]$$

且无穷积分

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx$$

收敛, 则含参变量广义积分 (15.2.1) 在 $[c, d]$ 上一致收敛.

证: 显然. \square

定理15.2.7. (Abel 和 Dirichlet 判别法) 假设二元函数 $f(x, y), g(x, y)$ 都定义在 $[a, +\infty) \times [c, d]$ 上. 如果

(1) **(Abel)** 含参变量广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dy$$

在 $[c, d]$ 上一致收敛, 且 $g(x, y)$ 逐点单调 (对任意 $y \in [c, d]$, 函数 $g(x, y)$ 关于 x 是单调的) 和一致有界 (即存在正数 $M > 0$ 使得 $|g(x, y)| \leq M$ 对任意 $(x, y) \in [a, +\infty) \times [c, d]$ 都成立), 或者

(2) (Dirichlet) 含参变量积分列

$$\left\{ \int_a^A f(x, y) dy \right\}_{A \geq a}$$

一致有界 (即存在正数 $M > 0$ 使得

$$\left| \int_a^A f(x, y) dy \right| \leq M, \quad \forall y \in [c, d], \forall A > a$$

成立), 且 $g(x, y)$ 逐点单调和一致趋于 0 (即对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $A_0 > a$ 使得对任意 $x \geq A_0$ 都有 $\max_{c \leq y \leq d} |g(x, y)| \leq \epsilon$),

则含参变量广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) g(x, y) dx$$

在 $[c, d]$ 上一致收敛.

证: 在这里我们只给出 (2) 的证明. 根据积分中值定理, 定理 5.4.9, 对任意 $A_2 > A_1 > a$ 存在 $\xi \in (A_1, A_2)$ 满足

$$\int_{A_1}^{A_2} f(x, y) g(x, y) dx = g(A_1, y) \int_{A_1}^{\xi} f(x, y) dx + g(A_2, y) \int_{\xi}^{A_2} f(x, y) dx.$$

因为 $g(x, y)$ 一致趋于 0, 对任意 $\epsilon > 0$ 我们可以找到 $A_0 > a$ 使得 $|g(x, y)| < \epsilon/4M$ 对任意 $x > A_0$ 和任意 $y \in [c, d]$ 都成立. 因此只要 $A_2 > A_1 > A_0$ 就有

$$\begin{aligned} \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x, y) g(x, y) dx \right| &\leq \frac{\epsilon}{4M} \left| \int_a^{\xi} f(x, y) dx - \int_a^{A_1} f(x, y) dx \right| \\ &+ \frac{\epsilon}{4M} \left| \int_a^{A_2} f(x, y) dx - \int_a^{\xi} f(x, y) dx \right| \leq \frac{\epsilon}{4M} (2M + 2M) = \epsilon. \end{aligned}$$

从而根据定理 15.2.5 得到一致收敛性. \square

对含参变量的瑕积分, 同样有 Cauchy 判别法、Weierstrass 判别法、Abel-Dirichlet 判别法. 当然我们也可以把含参变量的瑕积分通过变量替换写成含参变量的无穷积分, 这样就可以使用上述的判别法.

定理 15.2.8. (Dini) 假设函数 $f(x, y) \in C([a, +\infty) \times [c, d])$ 且 $f(x, y) \geq 0$. 如果含参变量广义积分 (15.2.1) 在 $[c, d]$ 上连续, 则其在 $[c, d]$ 上一致收敛.

证: 否则的话, 存在 $\epsilon_0 > 0$ 使得对任意 $n > a$ 我们总可以找到 $y_n \in [c, d]$ 满足

$$\int_n^{\infty} f(x, y_n) dx \geq \epsilon_0.$$

闭区间 $[c, d]$ 的紧性可以使我们不妨假设 $y_n \rightarrow y_0 \in [c, d]$, 当 $n \rightarrow \infty$. 因为反常积分

$$\int_a^{\infty} f(x, y_0) dx$$

是收敛的, 所以可以找到 $A > a$ 使得

$$\int_A^\infty f(x, y_0) dx < \frac{\epsilon_0}{2}$$

成立. 当 $n > A$, 得到

$$\int_A^\infty f(x, y_n) dx \geq \int_n^\infty f(x, y_n) dx \geq \epsilon_0.$$

连续性表明

$$\int_A^\infty f(x, y) dx = \int_a^\infty f(x, y) dx - \int_a^A f(x, y) dx$$

也是连续的从而推出

$$\epsilon_0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A^\infty f(x, y_n) dx = \int_A^\infty f(x, y_0) dx < \frac{\epsilon_0}{2}$$

产生矛盾! \square

例15.2.9. (1) 证明含参变量广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{1+x^2} dx$$

在 $(0, +\infty)$ 上一致收敛.

证: 因为 $|\cos(xy)/(1+x^2)| \leq 1/(1+x^2)$ 且

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2},$$

所以在 $(0, +\infty)$ 上一致收敛.

(2) 证明含参变量广义积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \sin x dx$$

在 $[a, +\infty)$ ($a > 0$) 上一致收敛, 但在 $(0, +\infty)$ 上不是一致收敛.

证: 因为当 $t \geq a$ 时得到

$$|e^{-tx^2} \sin x| \leq e^{-ax^2} \quad \text{且} \quad \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

所以在 $[a, +\infty)$ 上一致收敛. 但是在 $(0, +\infty)$ 却不是一致收敛, 这是因为取

$$A_n := 2n\pi + \frac{\pi}{4}, \quad A'_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad t_n = \frac{1}{(A'_n)^2},$$

我们得到

$$\int_{A_n}^{A'_n} e^{-t_n x^2} \sin x dx \geq e^{-1} \sin A_n (A'_n - A_n) = \frac{\pi\sqrt{2}}{8e} > 0.$$

(3) 证明含参变量广义积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx$$

在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

证: 因为

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

收敛, 根据Abel 判别法只要证明 e^{-xy} 是逐点单调和一致有界. 但是这两件事是显然的.

(4) 讨论含参变量广义积分

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} \sin \frac{1}{x} dx$$

关于 p 在 $(0, 2)$ 上的一致收敛性.

解: 做变量替换 $t = 1/x$ 得到

$$I := \int_0^1 \frac{1}{x^p} \sin \frac{1}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{2-p}} dt.$$

根据反常积分的Dirichlet 判别法可知当 $0 < p < 1$ 时 I 绝对收敛,

而当 $1 \leq p < 2$ 时 I 条件收敛. 根据含参变量广义积分的Dirichlet 判别法可知 I 是在任意 $(0, p_0]$ 上都一致收敛, 这里 $p_0 \in (0, 2)$. 但是 I 在 $(0, 2)$ 不是一致收敛的, 这是因为若取

$$A_n = 2n\pi, \quad A'_n = (2n+1)\pi, \quad p_n = 2 - \frac{1}{n},$$

则得到

$$\left| \int_{A_n}^{A'_n} \frac{\sin t}{t^{2-p_n}} dt \right| \geq \frac{1}{[(2n+1)\pi]^{2-p_n}} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin t dt = \frac{2}{[(2n+1)\pi]^{1/n}} \rightarrow 2.$$

(5) 讨论含参变量广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{x^p} dx, \quad 0 < p < 2,$$

关于 y 在 $[0, +\infty)$ 上的一致收敛性.

解: 首先将上述积分拆成两部分

$$I := \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{x^p} dx = \int_0^1 \frac{\sin(xy)}{x^p} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{x^p} dx =: I_1 + I_2.$$

对 I_1 , 因为

$$\left| \frac{\sin(xy)}{x^p} \right| \leq \frac{1}{x^p}, \quad \left| \frac{\sin(xy)}{x^p} \right| \leq \frac{xy}{x^p},$$

所以当 $0 < p < 1$ 时 I_1 在 $[0, +\infty)$ 上是一致收敛的; 而当 $1 \leq p < 2$ 时 I_1 在 $[0, +\infty)$ 内闭一致收敛, 但在 $[0, +\infty)$ 上不是一致收敛的. 这是因为

$$\int_{\pi/4n}^{\pi/2n} \frac{\sin(nx)}{x^p} dx \geq \left(\frac{2n}{\pi}\right)^p \frac{\sqrt{2}}{2n} \geq \frac{\sqrt{2}}{\pi}, \quad \forall n \geq 1.$$

对 I_2 , 当 $p > 1$ 时 I_2 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛. 当 $0 < p \leq 1$ 时, 函数 $1/x^p$ 关于 x 是单调递减且趋于 0. 因为

$$\left| \int_1^A \sin(xy) dx \right| = \left| \frac{\cos y - \cos(Ay)}{y} \right| \leq \frac{2}{y},$$

根据Dirichlet 判别法可知此时 I_2 在任意 $[a, +\infty)$ 上是一致收敛的, $a > 0$. 然而, I_2 在 $[0, +\infty)$ 不是一致收敛的, 这是因为

$$\begin{aligned} \left| \int_{n\pi}^{3n\pi/2} \frac{\sin(x/n)}{x^p} dx \right| &> \frac{1}{(3n\pi/2)^p} \left| \int_{n\pi}^{3n\pi/2} \sin(x/n) dx \right| \\ &= \frac{n^{1-p}}{(3\pi/2)^p} \geq (2/3\pi)^p. \end{aligned}$$

综上所述, 当 $0 < p < 2$ 时含参变量积分在 $[0, +\infty)$ 上内闭一致收敛但在 $[0, +\infty)$ 上不是一致收敛.

(6) 研究含参变量广义积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-(x+1)y} \sin y dy, \quad x \geq 0,$$

的一致收敛性.

解: 因为 $|e^{-(x+1)y} \sin y| \leq e^{-(x+1)y} \leq e^{-y}$, 所以一致收敛.

(7) 研究含参变量广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(xy)}{a^2 + x^2} dx, \quad a > 0, \quad y \geq y_0 > 0,$$

的一致收敛性.

解: 把原来积分写成

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{a^2 + x^2} \sin(xy) dx.$$

因为

$$\left| \int_0^A \sin(xy) dx \right| = \frac{|1 - \cos(Ay)|}{y} \leq \frac{2}{y_0}, \quad \frac{x}{a^2 + x^2} \text{ 逐点单调且一致收敛到 } 0,$$

根据Dirichlet 判别法这个含参变量积分在 $[y_0, +\infty)$ 上一致收敛.

(8) 研究含参变量广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{1+x^y} dx, \quad y \geq 0,$$

的一致收敛性.

解: 把原来积分写成

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{1+x^y} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^y} \sin(x^2) dx.$$

因为

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \text{ 收敛且 } \frac{1}{1+x^y} \text{ 逐点单调且一致有界,}$$

所以根据 Abel 判别法这个含参变量广义积分在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

(9) 研究含参变量广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{x^p} dx, \quad -1 < p < 1,$$

的一致收敛性.

解: 做分解

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{x^p} dx = \int_0^1 \frac{\cos(x^2)}{x^p} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{x^p} dx =: I_1 + I_2.$$

在 I_2 中做变换 $t = x^2$ 得到

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{(p+1)/2}} dt;$$

从而可知 I_2 在任意 $[p_0, 1)$ 上一致收敛, 这里 $p_0 \in (-1, 1)$. 同理在 I_1 中做变换 $t = x^2$ 得到

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\cos t}{t^{(p+1)/2}} dt;$$

从而可知 I_1 在任意 $(-1, p_1]$ 上一致收敛, 这里 $p_1 \in (-1, 1)$. 综上所述, 这个含参变量广义积分在 $(-1, 1)$ 内闭一致收敛.

(10) 研究含参变量广义积分

$$\int_0^{+\infty} x^y e^{-x} dx, \quad a \leq y \leq b,$$

的一致收敛性.

解: 只要研究含参变量广义积分

$$\int_1^{+\infty} x^y e^{-x} dx, \quad a \leq y \leq b.$$

此时下列不等式

$$0 < x^y e^{-x} \leq x^b e^{-x}$$

告诉我们

$$\int_1^{+\infty} x^b e^{-x} dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{x^b}{x^n/n!} dx = n! \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{n-b}} < +\infty,$$

这里取任意自然数 n 满足条件 $n - b \geq 2$ 即可. 因此这个含参变量广义积分在 $[a, b]$ 上一致收敛.

(11) 研究含参变量广义积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{y}{(x+y)^2} dx, \quad y \geq 0,$$

的一致收敛性.

解: 对任意 $A > 0$ 取 $y = A > 0$ 得到

$$\left| \int_A^{+\infty} \frac{y}{(x+y)^2} dx \right| = \frac{y}{A+y} = \frac{1}{2}.$$

因此含参变量广义积分在 $[0, +\infty)$ 上不是一致收敛.

§15.2.3 含参变量广义积分的基本性质

假设含参变量广义积分

$$\int_a^{\infty} f(x, y) dx$$

关于 y 在 $[c, d]$ 上一致收敛. 令

$$I(y) := \int_a^{\infty} f(x, y) dx, \quad y \in [c, d].$$

任取严格递增数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ 满足 $a_0 = a$ 和 $a_n \rightarrow \infty$, 并令

$$u_n(y) := \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x, y) dx, \quad n \geq 1. \quad (15.2.5)$$

则得到

$$F(y) = \sum_{n \in \mathbf{N}} u_n(y). \quad (15.2.6)$$

作为推论得到

定理15.2.10. 含参变量广义积分 (15.2.1) 关于 y 在 $[c, d]$ 上一致收敛 \iff 对任意满足 $a_0 = a$ 和 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ 的严格递增数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$, 函数项级数 $\sum_{n \geq 0} u_n(y)$ 在 $[c, d]$ 上一致收敛, 这里 $u_n(y)$ 是由 (15.2.3) 所定义.

下面我们来证明含参变量广义积分满足连续性、可积性和可微性.

定理15.2.11. (1) **(连续性)** 若 $f(x, y) \in C([a, +\infty) \times [c, d])$ 且含参变量广义积分 (15.2.1) 关于 y 在 $[c, d]$ 上一致收敛, 则

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{\infty} f(x, y) dx = \int_a^{\infty} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx \quad (15.2.7)$$

对任意 $y_0 \in [c, d]$ 都成立.

(2) **(可积性)** 若 $f(x, y) \in C([a, +\infty) \times [c, d])$ 且含参变量广义积分 (15.2.1) 关于 y 在 $[c, d]$ 上一致收敛, 则

$$\int_c^d dy \int_a^{\infty} f(x, y) dx = \int_a^{\infty} dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (15.2.8)$$

(3) **(可微性)** 若 $f(x, y), f_y(x, y) \in C([a, +\infty) \times [c, d])$, 含参变量广义积分 (15.2.1) 对任意 $y \in [c, d]$ 都收敛, 且含参变量广义积分

$$\int_a^{\infty} f_y(x, y) dx$$

关于 y 在 $[c, d]$ 上一致收敛, 则 (15.2.1) 在 $[c, d]$ 上可导且

$$\frac{d}{dy} \int_a^{\infty} f(x, y) dx = \int_a^{\infty} f_y(x, y) dx. \quad (15.2.9)$$

证: (1) 一致收敛推出函数项级数 $\sum_{n \geq 1} u_n(y)$ 关于 $y \in [c, d]$ 是一致收敛的. 由于

$$u_n(y) = \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x, y) dx$$

是连续的, 所以函数项级数 $\sum_{n \geq 1} u_n(y) = I(y)$ 是连续的. 则含参变量广义积分的连续性可由 (14.2.2) 得到.

当然我们可以直接证明. 根据计算可得

$$\begin{aligned} |I(y + \Delta y) - I(y)| &= \left| \int_a^{+\infty} [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] dx \right| \\ &\leq \int_A^{+\infty} |f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| dx + \left| \int_a^A [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] dx \right| \\ &\leq \left| \int_a^A [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] dx \right| + \left| \int_a^{+\infty} f(x, y + \Delta y) dx \right| + \left| \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right|. \end{aligned}$$

一致收敛性告诉我们对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $A_0 > a$ 对任意 $A > A_0$ 和任意 $y, y + \Delta y \in [c, d]$ 有

$$\left| \int_A^{+\infty} f(x, y + \Delta y) dx \right| < \epsilon, \quad \left| \int_A^{+\infty} f(x, y) dy \right| < \epsilon.$$

因为 $f(x, y) \in C([a, +\infty) \times [c, d])$, 所以

$$\int_a^A f(x, y) dx \in C([c, d]),$$

从而存在 $\delta > 0$ 对任意 $|\Delta y| < \delta$ 和对任意 $y \in [c, d]$ 有

$$\left| \int_a^A [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] dx \right| < \epsilon.$$

故 $|I(y + \Delta y) - I(y)| \leq \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon$.

(2) 这是因为

$$\begin{aligned} \int_c^d \sum_{n \geq 1} u_n(y) dy &= \sum_{n \geq 1} \int_c^d u_n(y) dy = \sum_{n \geq 1} \int_{a_{n-1}}^{a_n} dx \int_c^d f(x, y) dy \\ &= \int_a^\infty dx \int_c^d f(x, y) dy. \end{aligned}$$

(3) 定义

$$G(y) := \int_a^\infty f_y(x, y) dx.$$

根据 (1) 函数 $G(y)$ 是连续的. 利用 (1) 得到

$$\int_c^y G(z) dz = \int_c^y dz \int_a^\infty f_z(x, z) dx = \int_a^\infty dx \int_c^y f_z(x, z) dz = I(y) - I(c).$$

故 $G(y) = I'(y)$. \square

注15.2.12. (1) 定理15.2.11 (1) 的逆定理不一定正确. 比如考察函数 $f(x, a) := e^{-ax} \sin x \in C([0, +\infty) \times (0, 1/2])$, 显然

$$\int_0^{+\infty} f(x, a) dx = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin x dx = \frac{1}{1+a^2} \in C((0, 1/2]).$$

但是含参变量广义积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin x dx$$

关于 a 在 $(0, 1/2]$ 上不是一致收敛的, 这是因为

$$\begin{aligned} \left| \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} e^{-[(2n+1)\pi]^{-1}x} \sin x dx \right| &= \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} e^{\frac{-x}{(2n+1)\pi}} \sin x dx \\ &\geq \frac{1}{e} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin x dx = \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

(2) 如果二元函数 $f(x, y) \in C([a, +\infty) \times [c, d])$ 且非负的 (或者非正的), 则结合定理15.2.8 和定理 15.2.11 (1), 可知 (15.2.1) 连续当且仅当参变量广义积分一致收敛.

我们可以把定理 15.2.11 (2) 中的定义域改成 $[a, +\infty) \times [c, +\infty)$, 但此时则必须增加额外条件来保证 (15.2.8) 成立.

定理15.2.13. 若 $f(x, y) \in C([a, +\infty) \times [c, +\infty))$, 含参变量广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

关于 y 在 $[c, C] \subset [c, +\infty)$ 上一致收敛, 含参变量广义积分

$$\int_c^{+\infty} f(x, y) dy$$

关于 x 在 $[a, A] \subset [a, +\infty)$ 上一致收敛, 且

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy \quad \text{和} \quad \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx$$

中至少有一个存在, 则

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy = \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx. \quad (15.2.10)$$

证: 不妨假设

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy$$

存在. 如果 (15.2.10) 成立, 即

$$\begin{aligned} \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx &= \lim_{C \rightarrow +\infty} \int_c^C dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \\ &= \lim_{C \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} dx \int_c^C f(x, y) dy = \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy \end{aligned}$$

这里用到了含参变量广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

关于 y 在 $[c, C] \subset [c, +\infty)$ 上一致收敛, 和定理15.2.11 (2). 因此只需要证明

$$\lim_{C \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} dx \int_C^{+\infty} f(x, y) dy = 0.$$

但是注意到上面推导是基于积分

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$$

收敛的, 所以首先来说明该积分的收敛性. 根据定理15.2.11 (1) 可知含参变量广义积分

$$\int_c^{+\infty} f(x, y) dy$$

在任意闭区间 $[A_1, A_2] \subset [a, +\infty)$ 上是连续的, 从而在整个区间 $[a, +\infty)$ 上是连续的. 因为

$$\left| \int_c^{+\infty} f(x, y) dy \right| \leq \int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy,$$

所以根据比较判别法可知

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$$

绝对收敛从而必是收敛.

因为

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy$$

存在, 所以可做分解

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} dx \int_C^{+\infty} f(x, y) dy &= \int_a^A dx \int_C^{+\infty} f(x, y) dy + \int_A^{+\infty} dx \int_C^{+\infty} f(x, y) dy \\ &=: I_1 + I_2, \end{aligned}$$

且对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $A_0 \geq a$ 对任意 $A > A_0$ 都有

$$|I_2| \leq \int_A^{+\infty} dx \int_C^{+\infty} |f(x, y)| dy \leq \int_A^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy < \epsilon.$$

对上述 $A > A_0$, 由于

$$\int_c^{+\infty} f(x, y) dy$$

关于 x 在 $[a, A]$ 上一致收敛, 我们可以找到 $C_0 \geq c$ 使得对任意 $C > C_0$ 都有

$$\left| \int_C^{+\infty} f(x, y) dy \right| < \frac{\epsilon}{A-a}, \quad \forall x \in [a, A].$$

从而最后得到

$$\left| \int_a^{+\infty} dx \int_C^{+\infty} f(x, y) dy \right| \leq \epsilon + \int_a^A \frac{\epsilon}{A-a} dx < 2\epsilon$$

只要 $C > C_0$. \square

例15.2.14. (1) 确定函数

$$I(y) := \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^y} dx$$

的连续范围.

解: 做分解

$$I(y) = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^y} dx + \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^y} dx =: I_1 + I_2.$$

考虑极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p \frac{\ln(1+x)}{x^y} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{y-p}} = 0, \quad y-p > 0.$$

根据反常积分收敛判别法, 当 $p > 1$ 且 $y - p > 0$ 时 I_1 收敛, 从而当 $y > 1$ 时 I_1 收敛. 另一方面, 当 $y \leq 1$ 时, 取 $p = y$ 则推出 I_1 发散. 同理考虑极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p \frac{\ln(1+x)}{x^y} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{p+1}}{x^y} \text{ 存在, } p+1-y \geq 0.$$

此时仅当 $y < 2$ 时 I_1 收敛. 综上所述, $I(y)$ 的定义域是开区间 $(1, 2)$.

要证 $I(y)$ 在 $(1, 2)$ 内连续, 只要证明 $I(y)$ 在 $(1, 2)$ 内闭连续即可, 即对任意闭区间 $[a, b] \subset (1, 2)$ 证明 $I(y) \in C([a, b])$. 对 I_1 根据

$$0 < \frac{\ln(1+x)}{x^y} \leq \frac{\ln(1+x)}{x^a}, \quad \forall x \geq 1,$$

可知 I_1 在 $[a, b]$ 上一致收敛. 同理可证 I_2 也在 $[a, b]$ 上一致收敛. 因此 $I(y)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

(2) 求 Dirichlet 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

的值.

证: 形式上的推导见例 15.1.1. 但是我们要验证下面两件事:

$$I(\alpha) \in C([0, +\infty)), \quad \int_0^{+\infty} \left(e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} \right)' dx \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 内闭一致收敛.}$$

根据例 15.2.9 (3) 可知 $I(\alpha) \in C([0, +\infty))$. 因为

$$\left(e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} \right)' = -e^{-\alpha x} \sin x,$$

所以根据 Weierstrass 判别法得到

$$\int_0^{+\infty} \left(e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} \right)' dx$$

在任意区间 $[\alpha_0, +\infty)$ 上一致收敛从而在 $(0, +\infty)$ 内闭一致收敛.

类似可证

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\alpha). \quad (15.2.11)$$

(3) 求反常积分

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx$$

的值.

解: 利用分部积分得到

$$I = 2x \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \Big|_0^{+\infty} - 2 \int_0^{+\infty} 2x \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} dx$$

$$= -2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx + 2I \implies I = \pi.$$

(4) 求反常积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \cos(\lambda x) dx$$

的值.

解: 根据

$$\sin x \cos(\lambda x) = \frac{\sin[(1-\lambda)x] + \sin[(1+\lambda)x]}{2},$$

得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \cos(\lambda x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin[(1-\lambda)x]}{x} dx + \int_0^{+\infty} \frac{\sin[(1+\lambda)x]}{x} dx.$$

从 (15.2.11) 得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \cos(\lambda x) dx = \frac{\pi}{2} [\operatorname{sgn}(1-\lambda) + \operatorname{sgn}(1+\lambda)] = \begin{cases} 0, & |\lambda| > 1, \\ \pi/2, & |\lambda| = 1, \\ \pi, & |\lambda| < 1. \end{cases}$$

(5) 求 Euler-Poisson 积分

$$I := \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

的值.

解: 利用二重积分法求解课参见例5.5.5 (2) 或例13.3.5 (1). 现在考虑利用含参变量广义积分法来求解. 定义函数

$$\varphi(x) := \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+u^2)}}{1+u^2} dy, \quad f(x) := \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2.$$

计算得到

$$\varphi'(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+u^2)} [-2x(1+u^2)]}{1+u^2} du = -2 \int_0^1 x e^{-x^2(1+u^2)} du$$

和

$$f'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt = 2 \int_0^x e^{-(t^2+x^2)} dt = 2 \int_0^1 x e^{-x^2(1+u^2)} du.$$

因此 $\varphi'(x) + f'(x) = 0$ 和 $f(x) + \varphi(x) = C$, 其中 C 是常数. 由于

$$C = f(0) + \varphi(0) = \varphi(0) = \int_0^1 \frac{dy}{1+u^2} = \frac{\pi}{4},$$

我们得到

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \varphi(x).$$

令 $x \rightarrow +\infty$ 得到

$$I^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{4} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x).$$

因为含参变量积分

$$\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+u^2)}}{1+u^2} du$$

一致收敛, 所以

$$I^2 = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x^2(1+u^2)}}{1+u^2} du = \frac{\pi}{4} \quad I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(6) 考察函数

$$F(x) := e^{x^2/2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt, \quad x \geq 0.$$

求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ 并证明函数 $F(x)$ 单调递减.

解: 计算可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt}{e^{-x^2/2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-e^{-x^2/2}}{-xe^{-x^2/2}} = 0$$

和

$$\begin{aligned} F'(x) &= xe^{x^2/2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt - e^{x^2/2} e^{-x^2/2} \\ &= \int_x^{+\infty} xe^{\frac{x^2-t^2}{2}} dt - 1 \leq \int_x^{+\infty} te^{\frac{x^2-t^2}{2}} dt - 1 \\ &= -e^{\frac{x^2-t^2}{2}} \Big|_{t=x}^{+\infty} - 1 = 0. \end{aligned}$$

(7) 假设函数 $f(x) \in C([-\infty, +\infty))$, $f > 0$, 且对任意 $t \in \mathbb{R}$ 都有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(x) dx \leq 1.$$

证明

$$\int_a^b f(x) dx \leq \frac{b-a}{2} + 1, \quad \forall a < b.$$

证: 根据假设条件得到

$$\int_a^b dt \int_a^b e^{-|t-x|} f(x) dx \leq \int_a^b dt = b-a.$$

交换积分顺序得到

$$b-a \geq \int_a^b f(x) \left[\int_a^b e^{-|t-x|} dt \right] dx = \int_a^b f(x) (2 - e^{a-x} - e^{x-b}) dx.$$

故

$$\int_a^b f(x) dx \leq \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2} \left[\int_a^b e^{a-x} f(x) dx + \int_a^b e^{x-b} f(x) dx \right];$$

但是

$$\int_a^b e^{a-x} f(x) dx = \int_a^b e^{-|a-x|} f(x) dx \leq 1$$

和

$$\int_a^b e^{x-b} f(x) dx = \int_a^b e^{-|b-x|} f(x) dx \leq 1,$$

我们得到

$$\int_a^b f(x) dx \leq \frac{b-a}{2} + 1.$$

(8) 证明对任意 $b \in (0, 1)$, 含参变量广义积分

$$I(\alpha) := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{|\sin x|^\alpha} dx$$

关于 α 在 $[0, b]$ 上一致收敛.

证: 把积分改写成级数形式

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \sum_{n \geq 0} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{e^{-x}}{|\sin x|^\alpha} dx = \sum_{n \geq 0} e^{-n\pi} \int_0^\pi \frac{e^{-t}}{\sin^\alpha t} dt \\ &= \frac{1}{1-e^{-\pi}} \int_0^\pi \frac{e^{-t}}{\sin^\alpha t} dt = \frac{1}{1-e^{-\pi}} \left[\int_0^{\pi/2} \frac{e^{-t}}{\sin^\alpha t} dt + \int_{\pi/2}^\pi \frac{e^{-t}}{\sin^\alpha t} dt \right]. \end{aligned}$$

当 $0 \leq t \leq \pi/2$ 时有不等式 $\sin t \geq 2t/\pi$ 从而得到

$$\int_0^{\pi/2} \frac{e^{-t}}{\sin^\alpha t} dt \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \int_0^{\pi/2} t^{-\alpha} e^{-t} dt.$$

由于

$$t^{-\alpha} \leq \begin{cases} t^{-b}, & 0 < t < 1, \\ 1, & t \geq 1, \end{cases}$$

因此含参变量积分

$$\int_0^{\pi/2} \frac{e^{-t}}{\sin^\alpha t} dt$$

关于 α 在 $[0, b]$ 上一致收敛. 同理可证含参变量积分

$$\int_{\pi/2}^\pi \frac{e^{-t}}{\sin^\alpha t} dt$$

关于 α 在 $[0, b]$ 上也是一致收敛.

(9) 证明Fresnel 积分

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

证: 做变量替换 $t = x^2$ 得到

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} du \right) dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} (e^{-tu^2} \sin t) dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{-tu^2} \sin t dt \right] du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}
\end{aligned}$$

这里利用了定理15.2.13.

(10) 求下面积分的值:

$$A := \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx, \quad B_n := \int_0^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{e^{2\pi x} - 1} dx \quad (n \geq 1)$$

和

$$C := \int_0^{+\infty} \frac{\sin(mx)}{e^{2\pi x} - 1} dx \quad (m > 0).$$

解: 因为

$$\frac{\ln x}{1-x^2} = \sum_{n \geq 0} x^{2n} \ln x, \quad 0 < x < 1,$$

所以

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{n \geq 0} \int_0^1 x^{2n} \ln x dx = \sum_{n \geq 0} \int_0^1 \frac{\ln x}{1n+1} d(x^{2n+1}) = \sum_{n \geq 0} - \int_0^1 \frac{x^{2n}}{2n+1} dx \\
&= - \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = - \left[\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \right] = - \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} \right) = - \frac{\pi^2}{8}.
\end{aligned}$$

因为

$$\frac{x^{2n-1}}{e^{2\pi x} - 1} = \sum_{k \geq 1} x^{2n-1} e^{-2k\pi x},$$

所以

$$B = \sum_{k \geq 1} \int_0^{+\infty} x^{2n-1} e^{-2k\pi x} dx = \sum_{k \geq 1} \frac{(2n-1)!}{(2k\pi)^{2n}} = \frac{(2n-1)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{2n}}.$$

利用(14.3.15)得到 $B = B_n/4n$.

因为

$$\frac{\sin(mx)}{e^{2\pi x} - 1} = \sum_{k \geq 1} e^{-2k\pi x} \sin(mx),$$

所以

$$\begin{aligned}
C &= \sum_{k \geq 1} \int_0^{+\infty} e^{-2k\pi x} \sin(mx) dx = \sum_{k \geq 1} \frac{m}{(2k\pi)^2 + m^2} = \frac{1}{4} \coth \frac{m}{2} - \frac{1}{2m} \\
&= \frac{1}{4} \frac{e^m + 1}{e^m - 1} - \frac{1}{2m} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^m - 1} - \frac{1}{m} + \frac{1}{2} \right)
\end{aligned}$$

这里利用了(14.3.12).

§15.3 * 二探 Euler 积分

本节部分内容取自参考文献中的谭琳的专著. Gamma 函数 $\Gamma(s)$ 定义为

$$\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx, \quad s > 0.$$

在 §5.5.4 我们已经证明了 $\Gamma(s)$ 在 $s > 0$ 时有定义. 因为

$$\int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} \ln x dx$$

在 $(0, +\infty)$ 内闭一致收敛, 因此 $\Gamma'(s) \in C((0, +\infty))$. 同理可证

$$\Gamma(s) \in C^\infty((0, +\infty)), \quad \Gamma^{(n)}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} (\ln x)^s dx. \quad (15.3.1)$$

因为 γ 是 Euler 常数

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k} - \ln n \right)$$

所以得到

$$\Gamma'(1) = - \int_0^1 \frac{1 - e^{-u} - e^{-1/u}}{u} dy = -\gamma. \quad (15.3.2)$$

事实上根据 (15.3.1) 有

$$\Gamma'(1) = \int_0^\infty e^{-t} \ln t dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{1/n}^1 e^{-t} \ln t dt + \int_1^n e^{-t} \ln t dt \right).$$

由分部积分计算得到

$$\int_{1/n}^1 e^{-t} \ln t dt = - \int_{1/n}^1 \ln t de^{-t} = -e^{-1/n} \ln n + \int_{1/n}^1 \frac{e^{-t}}{t} dt$$

和

$$\int_1^n e^{-t} \ln t dt = -e^{-n} \ln n + \int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt = -e^{-n} \ln n + \int_{1/n}^1 \frac{e^{-1/u}}{u} du,$$

因此

$$\begin{aligned} \Gamma'(1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[- \left(e^{-n} + e^{-1/n} \right) \ln n + \int_{1/n}^1 \frac{e^{-u} + e^{-1/u}}{u} du \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[- \left(e^{-n} + e^{-1/n} \right) \ln n - \int_{1/n}^1 \frac{1 - e^{-u} - e^{-1/u}}{u} du + \ln n \right] \\ &= - \int_0^1 \frac{1 - e^{-u} - e^{-1/u}}{u} du + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - e^{-1/n} \right) \ln n - \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \ln n \\ &= - \int_0^1 \frac{1 - e^{-u} - e^{-1/u}}{u} du \end{aligned}$$

and

$$-\Gamma'(1) = \int_0^1 \frac{1 - e^{-u} - e^{-1/u}}{u} du = \int_0^1 \frac{1 - e^{-u}}{u} du - \int_1^\infty \frac{e^{-u}}{u} du.$$

利用求极限和求积分可以相交换(可行性请自证)

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{e^{-u}}{u} du &= \int_1^\infty \frac{1}{u} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n du, \\ \int_0^1 \frac{1 - e^{-u}}{u} du &= \int_0^1 \frac{1}{u} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n\right] du, \end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned} -\Gamma'(1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_0^1 \frac{1 - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n}{u} du - \int_1^n \frac{\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n}{u} du \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_0^n \frac{1 - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n}{u} du - \int_1^n \frac{du}{u} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^n \frac{1 - y^n}{1 - y} dy - \ln n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k} - \ln n \right) = \gamma. \end{aligned}$$

定理15.3.1. Gamma 函数具有下列性质:

- (1) $\Gamma(1+s) = s\Gamma(s)$, 任意 $s > 0$.
- (2) $\Gamma(s)$ 可以延拓到 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$.
- (3) $\lim_{s \rightarrow -n} (s+n)\Gamma(s) = (-1)^n/n!$.

证: (1) 在 §5.5.4 已给出. 为了证明 (2) 我们首先考虑区间 $-1 < s < 0$. 此时 $1+s > 0$ 且 $\Gamma(1+s)$ 有定义. 因此

$$\frac{\Gamma(1+s)}{s} = \int_0^\infty e^{-t} \frac{t^s}{s} dt.$$

对任意 $\delta, \Delta > 0$, 计算得到

$$\begin{aligned} \int_\delta^\Delta e^{-t} \frac{t^s}{s} dt &= -e^{-t} \frac{t^s}{s} \Big|_\delta^\Delta + \int_\delta^\Delta e^{-t} t^{s-1} dt \\ &= \int_\delta^\Delta (e^{-t} - 1) t^{s-1} dt + (1 - e^{-t}) \frac{t^s}{s} \Big|_\delta^\Delta. \end{aligned}$$

令 $\delta \rightarrow 0$ 和 $\Delta \rightarrow \infty$, 我们得到当 $s \in (-1, 0)$ 时的 Γ 函数定义

$$\Gamma(s) := \frac{\Gamma(s+1)}{s} = \int_0^\infty (e^{-t} - 1) t^{s-1} ds, \quad s \in (-1, 0).$$

类似地, 当 $s \in (-n, -n+1)$, 我们得到

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty \left[e^{-t} + \sum_{0 \leq k \leq n-1} (-1)^{k+1} \frac{t^k}{k!} \right] t^{s-1} dt, \quad t \in (-n, -n+1).$$

这样我们就把 Γ 函数延拓到 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$ 上且仍旧满足 (1).

对 (3), 利用 (1) 推出

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow -n} (s+n)\Gamma(s) &= \lim_{s \rightarrow -n} \frac{\Gamma(s+n+1)}{s(s+1)\cdots(s+n-1)} \\ &= \frac{\Gamma(1)}{(-n)(-n+1)\cdots(-n+n-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}. \end{aligned}$$

即 $\Gamma(s) \approx \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{s+n}$, 当 $s \rightarrow -n$. \square

根据定理15.3.1 我们观察到 $\Gamma(s)\Gamma(1-s)$ 的所有极点是整数集 \mathbb{Z} . 根据 (6.4.4) 得到

$$\sin(\pi s) = \pi s \prod_{n \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right)$$

的所有零点也是整数集. 从而可知函数

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)\sin(\pi s)$$

既没有零点也没有极点.

我们可以把 $\Gamma(z)$ 函数的定义推广到 $z \in \mathbb{C}$:

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (15.3.3)$$

同样可得, $\Gamma(z)$ 当 $\operatorname{Re}(z) > 0$ 时也有定义且定理15.3.1 仍旧成立. 函数

$$f(z) := \Gamma(z)\Gamma(1-z)\sin(\pi z)$$

满足条件

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi z)}{z} = \pi, \\ f(\sqrt{-1}y) &= \sqrt{-1}y |\Gamma(\sqrt{-1}y)|^2 \sinh(\pi y) \\ &= -\sqrt{-1}y \frac{2\pi}{y(e^{\pi y} - e^{-\pi y})} \frac{e^{-\pi y} - e^{\pi y}}{2\sqrt{-1}} = \pi, \end{aligned}$$

利用之后章节中的复变函数知识可以证明 $f(z) \equiv \pi$ 对任意 $z \in \mathbb{C}$ 都成立.

定理15.3.2. 对任意 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ 有

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \quad (15.3.4)$$

证: 当 $z \in \mathbb{R}$ 时的证明可参见 §6.4.4. \square

考虑Euler乘积

$$E := \prod_{1 \leq k \leq n-1} \Gamma\left(\frac{k}{n}\right), \quad n \geq 2. \quad (15.3.5)$$

下面来证明

$$E = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}, \quad (15.3.6)$$

这个结果归功于Euler. 根据(15.3.4)得到

$$E^2 = \prod_{1 \leq k \leq n-1} \left[\Gamma\left(\frac{k}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-k}{n}\right) \right] = \prod_{1 \leq k \leq n-1} \frac{\pi}{\sin \frac{k\pi}{n}}.$$

注意到

$$\sum_{0 \leq k \leq n-1} x^k = \frac{x^n - 1}{x - 1} = \prod_{1 \leq k \leq n-1} \left(x - e^{\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{n}} \right).$$

令 $x \rightarrow 1$ 得到

$$\begin{aligned} n &= \prod_{1 \leq k \leq n-1} \left(1 - e^{\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{n}} \right) = \prod_{1 \leq k \leq n-1} -e^{\frac{k\pi\sqrt{-1}}{n}} \left(e^{\frac{k\pi\sqrt{-1}}{n}} - e^{-\frac{k\pi\sqrt{-1}}{n}} \right) \\ &= \prod_{1 \leq k \leq n-1} \left(-2\sqrt{-1} e^{\frac{k\pi\sqrt{-1}}{n}} \sin \frac{k\pi}{n} \right) = (-2\sqrt{-1})^{n-1} e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq k \leq n-1} \sin \frac{k\pi}{n} \\ &= 2^{n-1} \left(-\sqrt{-1} e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}} \right)^{n-1} \prod_{1 \leq k \leq n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = 2^{n-1} \prod_{1 \leq k \leq n-1} \sin \frac{k\pi}{n}. \end{aligned}$$

即恒等式(15.3.6).

§15.3.1 * Ramanujan 不等式

本小节来证明本章一开始所陈述的Ramanujan不等式¹:

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} \left(\frac{x}{e}\right)^x \left(8x^3 + 4x^2 + x + \frac{1}{100}\right)^{1/6} &< \Gamma(x+1) \\ &< \sqrt{\pi} \left(\frac{x}{e}\right)^x \left(8x^3 + 4x^2 + x + \frac{1}{30}\right)^{1/6}, \quad x \geq 0. \end{aligned} \quad (15.3.7)$$

Ramanujan 本人提出了一个非常有趣的公式

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{\pi} \left(\frac{x}{e}\right)^x \left(8x^3 + 4x^2 + x + \frac{\theta_x}{30}\right)^{1/6}, \quad (15.3.8)$$

部分 θ_x 的值如下

$$\theta_0 = \frac{30}{\pi^3} = 0.9675, \quad \theta_1 = 0.3359, \quad \theta_\infty = 1.$$

¹本证明取自参考文献中《拉玛努金遗失笔记》第四卷.

进一步有如上不等式 (15.3.7). 早在 1916 年 Ramanujan 在印度数学会杂志提了如下问题: 证明

$$e^x x^{-x} \pi^{-1/2} \Gamma(x+1) = (8x^3 + 4x^2 + x + E_x)^{1/6},$$

其中对任何 $x \geq 0$ 都有 $E_x \in [1/100, 1/30]$. 依照 Ponnusamy 和 Vuorinen (1997) 定义函数

$$h(x) := [g(x)]^6 - (8x^3 + 4x^2 + x), \quad g(x) := \left(\frac{e}{x}\right)^x \frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{\pi}}, \quad (15.3.9)$$

并证明了只要说明函数 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上递增且满足 $1/100 \leq h(x) \leq 1/30$, 则当 $x \geq 1$ 时 (15.3.7) 成立.

定理15.3.3. 函数 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上严格递增且

$$h(1) = \frac{e^6}{\pi^3} - 13, \quad h(+\infty) = \frac{1}{30}.$$

Alzer (2003) 证明了 (15.3.7) 对 $0 < x < 1$ 也成立. 和定理15.3.3 相反的是, 函数 $h(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内不是单调的. 可以证明函数 $h(x)$ 在 $[0, a]$ 上递增, 在 $[a, b]$ 上递减, 而在 $[b, 1]$ 上递增, 其中

$$a \approx 0.007714449, \quad b \approx 0.671503766, \quad h(a) \approx 0.033250349.$$

Mortici 在 2011 年证明了

$$\begin{aligned} & \sqrt{\pi} \left(\frac{x}{e}\right)^x \left(8x^3 + 4x^2 + x + \frac{1}{30} - \frac{11}{240x}\right)^{1/6} < \Gamma(x+1) \\ & < \sqrt{\pi} \left(\frac{x}{e}\right)^x \left(8x^3 + 4x^2 + x + \frac{1}{30} - \frac{10}{240x}\right)^{1/6}, \quad x \geq 8. \end{aligned} \quad (15.3.10)$$

Hirschhorn 在 2012 年把 (15.3.10) 改进到

$$\begin{aligned} & \sqrt{\pi} \left(\frac{x}{e}\right)^x \left(8x^3 + 4x^2 + x + \frac{1}{30} - \frac{11}{240x} + \frac{5}{240n^2}\right)^{1/6} < \Gamma(x+1) \\ & < \sqrt{\pi} \left(\frac{x}{e}\right)^x \left(8x^3 + 4x^2 + x + \frac{1}{30} - \frac{11}{240x} + \frac{9}{240n^2}\right)^{1/6}, \quad x \geq 8. \end{aligned} \quad (15.3.11)$$

显然定理15.3.3 可直接从如下引理推出.

引理15.3.4. (1) 对任意 $x \geq x_0 := 2.4$, 函数 $h(x)$ 满足不等式

$$\frac{1}{100} < h(x) < \frac{1}{30}$$

且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1/30$.

(2) 对任意 $x \geq x_1 := 4.21$, 函数 $h(x)$ 严格递增.

(3) 对任意 $1 < x \leq \max\{x_0, x_1\} = 4.21$, 函数 $h(x)$ 严格递增.

对 (15.3.9) 取对数得到

$$\ln g(x) = x - x \ln x + \ln x - \ln \sqrt{\pi} + \ln \Gamma(x). \quad (15.3.12)$$

在 §15.4 我们将证明

$$\ln \Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \ln x - x + \ln \sqrt{2\pi} + J(x), \quad (15.3.13)$$

这里

$$J(x) := \int_0^{+\infty} \frac{\sigma(u)}{(x+u)^2} du, \quad \sigma(u) := \int_0^u \rho(t) dt, \quad \rho(t) := \frac{1}{2} - \{t\} \quad (15.3.14)$$

其中 $\{t\} := t - [t]$ 表示 t 的小数部分. 把 (15.3.14) 带入 (15.3.12) 得到

$$\ln g(x) = \ln \sqrt{2x} + J(x), \quad g(x) = \sqrt{2x} e^{J(x)}, \quad (15.3.15)$$

从而

$$h(x) = 8x^3 e^{6J(x)} - (8x^3 + 4x^2 + x). \quad (15.3.16)$$

在 §15.4 我们将证明 $J(x)$ 的 **Stirling** 级数展开:

$$J(x) = \sum_{1 \leq k \leq n-1} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)x^{2k-1}} + R_n(x), \quad (15.3.17)$$

这里

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} \theta_n \frac{B_{2n}}{2n(2n-1)x^{2n+1}}, \quad \theta_n \in (0, 1). \quad (15.3.18)$$

若取 $n = 3$ 得到

$$J(x) = \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + R_3(x), \quad 0 < R_3(x) < \frac{1}{1260x^5}. \quad (15.3.19)$$

证明引理15.3.4. (1) 利用 (15.3.19) 我们可以把 $e^{6J(x)}$ 写成

$$e^{6J(x)} = e^{1/2x} e^{-\alpha(x)},$$

这里

$$\alpha(x) := \frac{1}{60x^3} - R(x), \quad 0 < R(x) < \frac{1}{210x^5}.$$

因此

$$0 < \frac{1}{84x^5} < \alpha(x) < \frac{1}{60x^3} \leq \frac{1}{60}, \quad x \geq 1.$$

对 $\alpha > 0$ 得到如下不等式

$$1 - \alpha \leq e^{-\alpha} \leq 1 - \alpha + \frac{\alpha^2}{2}, \quad \alpha > 0.$$

故得到

$$1 - \frac{1}{60x^3} + R(x) \leq e^{-\alpha(x)} \leq 1 - \frac{1}{60x^3} + R(x) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{60x^3} - R(x) \right)^2$$

从而

$$e^{1/2x} \left(1 - \frac{1}{60x^3}\right) \leq e^{6J(x)} \leq e^{1/2x} \left(1 - \frac{1}{60x^3} + \frac{1}{210x^5} + \frac{9}{39200x^6}\right).$$

根据 $e^{1/2x}$ 的 Taylor 级数展开就得到

$$e^{6J(x)} \geq \left(1 - \frac{1}{60x^3}\right) \left[1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2!(2x)^2} + \frac{1}{3!(2x)^3} + \frac{1}{4!(2x)^4} + \frac{1}{5!(2x)^5}\right]$$

和

$$e^{6J(x)} \leq \left(1 - \frac{1}{60x^3} + \frac{1}{210x^5} + \frac{9}{39200x^6}\right) \left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2!(2x)^2} + \cdots\right).$$

断言 1: 对任意 $x \geq 2.4$ 有

$$h(x) > 0.0114 > h(1). \quad (15.3.20)$$

因为

$$\begin{aligned} h(x) &= 8x^3 e^{6J(x)} - (8x^3 + 4x^2 + x) \\ &\geq \left(8x^3 + 4x^2 + x + \frac{1}{6} + \frac{1}{48x} + \frac{1}{480x^2}\right) \left(1 - \frac{1}{60x^3}\right) - (8x^3 + 4x^2 + x) \\ &\geq \frac{1}{30} - \frac{11}{240x} - \frac{7}{480x^2} - \frac{1}{360x^3} - \frac{1}{2880x^4} - \frac{1}{28800x^5}. \end{aligned}$$

从中得到 (15.3.20).

断言 2: 对任意 $x \geq 1.04$ 有

$$h(x) \leq \frac{1}{30}, \quad (15.3.21)$$

且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1/30$. 令

$$\begin{aligned} S(x) &:= 1 - \frac{1}{60x^3} + \frac{1}{210x^5}, \\ T(x) &:= 1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{8x^2} + \frac{1}{48x^3} + \frac{1}{384x^4} + \frac{1}{3840x^5}, \\ \delta(x) &:= \frac{9}{39200x^6} T(x) + \left(S(x) + \frac{9}{39200x^6}\right) \left[\frac{1}{6!(2x)^6} + \frac{1}{7!(2x)^7} + \cdots\right]. \end{aligned}$$

从而得到

$$e^{6J(x)} \leq S(x)T(x) + \delta(x). \quad (15.3.22)$$

观察到, 当 $x \geq 1$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{6!(2x)^6} + \frac{1}{7!(2x)^7} + \cdots &\leq \frac{1}{6!(2x)^6} \left[1 + \frac{1}{7} \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{(2x)^2} + \cdots\right)\right] \\ &\leq \frac{1}{6!(2x)^6} \frac{3}{2} = \frac{1}{30720x^6} \end{aligned}$$

和

$$S(x) \leq 1, \quad T(x) \leq \frac{33}{20}, \quad c \geq 1.$$

这些不等式给出

$$0 \leq \delta(x) \leq \frac{297}{784000x^6} + \left(1 + \frac{9}{39200x^6}\right) \frac{1}{30720x^6} \leq \frac{21}{50000x^6}.$$

从而

$$h(x) \leq 8x^3 S(x) T(x) - (8x^3 + 4x^2 + x) + \delta_1(x),$$

这里

$$0 \leq \delta_1(x) := 8x^3 \delta(x) \leq \frac{21}{6250x^3}.$$

最后得到

$$\begin{aligned} 8x^3 S(x) T(x) - (8x^3 + 4x^2 + x) &= \left(8x^3 + 4x^2 + x + \frac{1}{6} + \frac{1}{48x} + \frac{1}{480x^2}\right) \\ &\cdot \left(1 - \frac{1}{60x^3} + \frac{1}{210x^5}\right) - (8x^3 + 4x^2 + x) = \frac{1}{30} - \frac{11}{240x} + \frac{79}{3360x^2} + \delta_2(x), \end{aligned}$$

这里

$$0 \leq \delta_2(x) \leq \frac{41}{2520x^3} + \frac{89}{20160x^4} + \frac{17}{22400x^5} + \frac{1}{10080x^6} + \frac{1}{100800x^7} \leq \frac{1}{46x^3}.$$

整理可得

$$\begin{aligned} h(x) &\leq \frac{1}{30} - \frac{11}{240x} + \frac{79}{3360x^2} + \frac{21}{6250x^3} + \frac{1}{46x^3} \\ &\leq \frac{1}{30} - \frac{11}{240x} + \frac{79}{3360x^2} + \frac{251}{10000x^3} \leq \frac{1}{30}, \quad x \geq 1.04. \end{aligned}$$

根据两个断言中的证明得到 $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1/30$.

(2) 对 (15.3.9) 求导得到

$$h'(x) = 6g'(x)[g(x)]^5 - (24x^2 + 8x + 1), \quad g'(x) = g(x) \left[\frac{1}{x} + \psi(x) - \ln x \right]$$

这里

$$\psi(x) := \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \ln x - \frac{1}{2x} + J'(x)$$

和

$$J'(x) = -2 \int_0^{+\infty} \frac{\sigma(u)}{(x+u)^3} du.$$

因此得到

$$g'(x) = g(x) \left[\frac{1}{2x} + J'(x) \right]$$

和

$$h'(x) = 48x^3 e^{6J(x)} \left[\frac{1}{2x} + J'(x) \right] - (24x^2 + 8x + 1).$$

所以为了证明 $h'(x) > 0$ 只要证明

$$\frac{1}{2x} + J'(x) > \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{48x^3} \right) e^{-06J(x)}.$$

根据 (15.3.19) 推出

$$-6J(x) = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{60x^3} - \frac{\eta_1(x)}{210x^5}, \quad 0 \leq \eta_1(x) \leq 1.$$

这样就只要去证明如下不等式

$$e^{-1/60x^3} \left[\frac{1}{2x} + J'(x) \right] > \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{48x^3} \right) e^{-1/2x}.$$

根据不等式

$$1 - \beta \leq e^{-\beta} < 1 - \beta + \frac{\beta^2}{2!} - \frac{\beta^3}{3!} + \frac{\beta^4}{4!}$$

我们只需证明

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{60x^3} \right) \left[\frac{1}{2x} + J'(x) \right] &> \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{48x^3} \right) \\ &\cdot \left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{8x^2} - \frac{1}{48x^3} + \frac{1}{384x^4} \right). \end{aligned}$$

对 (15.3.17) 求导得到

$$J'(x) = -\frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4} - \frac{1}{252x^6} + \frac{\eta_2(x)}{120x^8}, \quad 0 \leq \eta_2(x) \leq 1.$$

所以只要证明

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{1}{60x^3} \right) \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4} - \frac{1}{252x^6} \right) \\ &> \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{48x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{8x^2} - \frac{1}{48x^3} + \frac{1}{384x^4} \right) \end{aligned}$$

或者

$$\frac{11}{11520} > \frac{1}{252x} + \frac{89}{460800x^2} - \frac{1}{15120x^4}.$$

最后这个不等式当 $x \geq 4.21$ 时成立.

(3) 当 $1 < x \leq 4.21$ 时, 要证明 $h'(x) > 0$ 我们需要 $h''(x)$ 和 $J''(x)$ 的渐进分析. 具体细节可参考 Karatsuba 的论文². □

²Karatsuba. *On the asymptotic representation of the Euler gamma function by Ramanujan*, J. Comp. Appl. Math., 135(2001), 225-240.

§15.3.2 * Gamma 函数和 Riemann ζ -函数

Riemann ζ -函数 定义为

$$\zeta(z) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}, \quad \operatorname{Re}(z) > 1. \quad (15.3.23)$$

实际上, 我们可以把 $\zeta(z)$ 延拓到整个复平面而成为亚纯函数且仅有唯一的奇点 $z = 1$. 原因如下: 对任意 $\operatorname{Re}(z) > 1$, 我们有

$$\begin{aligned} \zeta(z) &= \sum_{n \geq 1} z \int_n^\infty \frac{dt}{t^{z+1}} = z \int_0^\infty \left(\sum_{n \leq t} 1 \right) \frac{dt}{t^{z+1}} \\ &= z \int_1^\infty \frac{\langle t \rangle}{t^{z+1}} dt = \frac{z}{z-1} - z \int_1^\infty \frac{\langle t \rangle}{t^{z+1}} dt. \end{aligned} \quad (15.3.24)$$

这样我们可以把 Riemann zeta 函数全纯延拓到 $\operatorname{Re}(z) > 0$, 但是除了 $z = 1$. 为了把它全纯延拓到整个复平面, 我们需要 Riemann 方程.

因为

$$\Gamma(z)n^{-z} = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-nt} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \quad (15.3.25)$$

所以

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (15.3.26)$$

若引入函数

$$\tilde{\zeta}(z) := \pi^{-z/2} \Gamma(z/2) \zeta(z), \quad (15.3.27)$$

则得到如下著名的 Riemann 方程

$$\tilde{\zeta}(z) = \tilde{\zeta}(1-z), \quad z \neq 0, 1. \quad (15.3.28)$$

特别地

$$\tilde{\zeta}(z) = \left[2^z \pi^{z-1} \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Gamma(1-z) \right] \tilde{\zeta}(1-z). \quad (15.3.29)$$

这意味着 $\zeta(z)$ 可以全纯延拓到 $\operatorname{Re}(z) \leq 0$. 事实上我们可以证明

$$\tilde{\zeta}(z) = \int_0^\infty \vartheta_1(t) t^{z/2-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 1, \quad (15.3.30)$$

这里 $\vartheta_1(t) := (\vartheta(t) - 1)/2$ 和

$$\vartheta(t) := \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-\pi n^2 t} \quad (15.3.31)$$

是 Jacobi theta 函数 (根据下章 Fourier 分析, 我们将证明 $\vartheta(1/r) = \sqrt{r}\vartheta(t)$ 对任意 $t > 0$ 都成立). 在 (15.3.29) 中令 $z \rightarrow 2n+1$, 这里 $n \in \mathbf{N}$, 得到 $\zeta(-2n) = 0$. 因此 $-2\mathbf{N}$ 是 $\zeta(z)$ 的 (平凡) 零点. 注意到 $\zeta(0) = -1/2$ 和 $\zeta'(0) = -\frac{1}{2} \ln 2\pi$.

猜想15.3.5. (Riemann, 1859) $\zeta(z)$ 的任意非平凡零点都落在直线 $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$ 上.

根据 (14.3.15) 我们得到 $\zeta(2n) \in \mathbb{Q}\pi^{2n}$, 即

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^n B_n}{2(2n)!}, \quad n \geq 1. \quad (15.3.32)$$

猜想15.3.6. $\zeta(2n+1)$ 是否是无理数?

目前为止上述猜想至少对 $\zeta(3)$ 是正确的.

§15.3.3 * Gamma 函数和 Hausdorff 维数

给定 $\epsilon > 0$ 和 $\rho \geq 0$. 对任何集合 $D \subset \mathbb{R}^n$ 定义

$$\mathcal{H}_{p,\epsilon}(D) := \left\{ w_p(\{S_i\}_{i \in I}) : D = \bigcup_{i \in I} S_i, \operatorname{diam}(S_i) < \epsilon \text{ 对任意 } i \in I \right\}. \quad (15.3.33)$$

这里 $\{S_i\}_{i \in I}$ 是 D 的开覆盖, $\operatorname{diam}(S_i) := \sup_{x,y \in S_i} |x-y|$ 是 S_i 的直径, 且 $w_p(\{S_i\}_{i \in I})$ 定义为

$$w_p(\{S_i\}_{i \in I}) := \sum_{i \in I} C_p \left(\frac{1}{2} \operatorname{diam}(S_i) \right)^p, \quad C_p := \operatorname{Vol}(\mathbb{B}^p) = \frac{\pi^{p/2}}{\Gamma(2+p/2)} \quad (15.3.34)$$

($\mathbb{B}^p \subset \mathbb{R}^p$ 是 \mathbb{R}^p 中的单位开球使得当 p 是正整数时是通常意义下的单位开球). 若 $p \in \mathbb{N}$ 得到

$$|\mathbb{B}^p| \equiv \operatorname{Vol}(\mathbb{B}^p) = \int_{|x| \leq 1, x \in \mathbb{R}^p} dx = \frac{\pi^{p/2}}{\Gamma(1 + \frac{p}{2})}.$$

当 $\epsilon \rightarrow 0+$ 时, $\mathcal{H}_{p,\epsilon}(D)$ 时递增的. 因此可定义

$$\mathcal{H}_p(D) := \sup_{\epsilon > 0} \mathcal{H}_{p,\epsilon}(D), \quad (15.3.35)$$

称为 p -维 Hausdorff 测度.

我们先讨论测度的一般定义. 假设 X 是任意集合. X 的子集 \mathfrak{A} 称为 σ -代数如果满足下面条件:

- (1) $\emptyset, X \in \mathfrak{A}$.
- (2) 如果 $A, B \in \mathfrak{A}$, 则 $A \setminus B \in \mathfrak{A}$.
- (3) 如果 $\{A_i\}_{i \in I}$ 是 \mathfrak{A} 中的有限或者可数子集族, 则它们的并 $\cup_{i \in I} A_i$ 也属于 \mathfrak{A} .

定义15.3.7. σ -代数 \mathfrak{A} 上的测度是指函数 $\mu: \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} = [0, +\infty]$ 且满足

(1) $\mu(\emptyset) = 0$, 和

(2) (σ -可加性) 若 $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 是 \mathfrak{A} 中的有限或可数子集族且 A_i 互不相交, 则

$$\mu\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i).$$

注意到 $\sum_{i \geq 1} \mu(A_i)$ 是有限和或无限级数.

性质15.3.8. 假设 μ 是 σ -代数 \mathfrak{A} 上的测度.

(a) 令 $\{A_i\}_{i \geq 1}$ 是满足条件 $A_i \subset A_{i+1}$ 的可测集序列. 则数列 $\{\mu(A_i)\}_{i \geq 1}$ 是单调非减的且满足

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \mu(A_i) = \mu(\cup_{i \geq 1} A_i). \quad (15.3.36)$$

(b) 令 $\{A_i\}_{i \geq 1}$ 是满足条件 $A_i \supset A_{i+1}$ 和 $\mu(A_1) < +\infty$ 的可测集序列. 则数列 $\{\mu(A_i)\}_{i \geq 1}$ 是单调非增的且满足

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \mu(A_i) = \mu(\cap_{i \geq 1} A_i). \quad (15.3.37)$$

证: (a) 因为 $A_{i+1} = A_i \sqcup (A_{i+1} \setminus A_i)$, 所以

$$\mu(A_{i+1}) = \mu(A_i) + \mu(A_{i+1} \setminus A_i) \geq \mu(A_i)$$

且数列 $\{\mu(A_i)\}_{i \geq 1}$ 是单调非减的. 令 $A := \cup_{i \geq 1} A_i$ 并记 $B_i := A_i \setminus A_{i-1}$ 其中 $A_0 = \emptyset$. 得到

$$A_i = \bigsqcup_{1 \leq k \leq i} B_k, \quad A = \bigcup_{i \geq 1} A_i = \bigsqcup_{k \geq 1} B_k, \quad \mu(A) = \sum_{k \geq 1} \mu(B_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{1 \leq i \leq k} \mu(B_i).$$

这样就得到 (15.3.36).

(b) 由于 $A_i \supset A_{i+1}$, 我们有 $\mu(A_i) \geq \mu(A_{i+1})$ 且数列 $\{\mu(A_i)\}_{i \geq 1}$ 是单调非增的. 令 $B_i := A_i \setminus A_{i+1}$ 得到

$$\mu(A_i) = \mu(A_{i+1}) + \mu(B_i), \quad \mu(A_1) - \mu(A_{i+1}) = \sum_{1 \leq k \leq i} \mu(B_k) = \mu(A_1 \setminus A_{i+1}).$$

若记 $C_i := A_1 \setminus A_i$ 则数列 $\{C_i\}_{i \geq 1}$ 是单调非减的从而根据 (a) 得到

$$\mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{i \geq 1} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i \geq 1} C_i\right) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mu(C_i) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mu(A_1 \setminus A_i).$$

故

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} [\mu(A_1) - \mu(A_i)] = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{i \geq 1} A_i\right).$$

因为 $\mu(A_1) < +\infty$, 所以上述等式推出 (15.3.37). \square

性质15.3.8 (b) 中的假设条件 $\mu(A_1) < +\infty$ 是必须的. 比如考虑集合列 $A_i = (i, +\infty)$ 和通常的长度测度 μ , 则得到 $\mu(A_i) = +\infty$ 但是 $\bigcap_{i \in \mathbf{N}} A_i = \emptyset$.

如果 \mathfrak{G} 是集合 X 的任意子集族, 则存在唯一的最小 σ -代数包含 \mathfrak{G} ; 这个最小的 σ -代数称为由 \mathfrak{G} 所生成的 σ -代数. 事实上, 考虑集合

$$\sigma(\mathfrak{G}) := \bigcap \{ \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \text{ 是 } \sigma\text{-代数且 } \mathfrak{A} \supset \mathfrak{G} \}. \quad (15.3.38)$$

因为 X 本身就是 σ -代数, 所以这样的集合 \mathfrak{A} 总是存在的. 对任何包含 \mathfrak{G} 的 σ -代数 \mathfrak{A} 我们必有 $\emptyset, X \in \mathfrak{A}$ 从而得到 $\emptyset, X \in \sigma(\mathfrak{G})$. 若 $\{A_i\}_{i \in I}$ 是 $\sigma(\mathfrak{G})$ 中的有限个或可数个元素构成的序列, 则 $A_i \in \mathfrak{A}$ 对每个 $i \in I$ 都成立, 从而 $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathfrak{A}$ 和 $\bigcup_{i \in I} A_i \in \sigma(\mathfrak{G})$. 最小性可从定义推出.

- (1) 如果 X 是拓扑空间, 则有其拓扑所生成的 (即由该拓扑中的开集所生成的) σ -代数称为 X 上的 **Borel σ -代数**. Borel σ -代数中的元素称为 **Borel 集**.
- (2) 定义在 Borel σ -代数上的测度称为 X 上的 **Borel 测度**.

定理15.3.9. (Lebesgue) \mathbb{R}^m 上存在唯一的 Borel 测度 \mathcal{L}_m 满足如下性质: 平移变换下保持不变且 $\mathcal{L}_m([0, 1]^m) = 1$.

上述测度 \mathcal{L}_n 称为 **Lebesgue 测度**. 唯一性表明在单位立方体上取有限值的 \mathbb{R}^m 上的平移不变的 Borel 测度是 \mathcal{L}_m 的常数倍.

- (1) Lebesgue 测度关于 \mathbb{R}^m 上的等距映射是不变的.
- (2) 如果 $\mathbf{L} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射, 则

$$\mathcal{L}_m(\mathbf{L}(A)) = |\det \mathbf{L}| \mathcal{L}_m(A), \quad (15.3.39)$$

对每个可测集 $A \subset \mathbb{R}^m$ 都成立.

假设 (X, d) 是测度空间且 p 是非负实数. 类似于 (15.3.35) 我们可以定义关于 X 的 p -维 Hausdorff 测度 $\mathcal{H}_p(X)$. 因为当 $\epsilon \rightarrow 0+$ 时 $\mathcal{H}_{p, \epsilon}(X)$ 有极限 (可能是无穷的), $\mathcal{H}_p(X)$ 对任何度量空间 (X, d) 都是有定义的. 但是可能是非负实数或者是 $+\infty$.

定理15.3.10. 假设 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 是度量空间, 且 A 和 B 是 X 的子集. 则

- (1) 如果 $A \subset B$ 则 $\mathcal{H}_p(A) \leq \mathcal{H}_p(B)$.
- (2) $\mathcal{H}_p(\cup_{i \in I} A_i) \leq \sum_{i \in I} \mu_d(A_i)$ 对任意有限的或可数的子集族 $\{A_i\}_{i \in I} \subset X$ 都成立.
- (3) 如果 $\text{dist}(A, B) > 0$, 则 $\mathcal{H}_p(A \cup B) = \mathcal{H}_p(A) + \mathcal{H}_p(B)$.
- (4) 如果 $f: X \rightarrow Y$ 是 Lipschitz 映射且 Lipschitz 常数为 C , 则 $\mathcal{H}_p(f(X)) \leq C^p \mathcal{H}_p(X)$.
- (5) 如果 $f: X \rightarrow Y$ 是 C -相似的, 即, $d_Y(f(x_1), f(x_2)) = C d_X(x_1, x_2)$ 对任何 $x_1, x_2 \in X$ 都成立, 则 $\mathcal{H}_p(f(X)) = C^p \mathcal{H}_p(X)$.

在《实变函数》课程中或在之后的章节中, 我们将利用 **Carathéodory** 判别法来证明满足定理 15.3.10 中五条性质且定义在 X 的 Borel σ -代数上的非负函数必是测度.

定理15.3.11. 对任何度量空间 (X, d) 和任何 $p \geq 0$, \mathcal{H}_p 是 X 的 Borel σ -代数上的测度.

例15.3.12. 集合的 0-维 Hausdorff 测度就是它的势. 换句话说, $\mathcal{H}_0(X)$ 是 X 中元素个数如果 X 是有限的, 和 $\mathcal{H}_0(X) = +\infty$ 如果 X 是无限的.

对 \mathbb{R}^m 中的单位立方体 $[0, 1]^m$ 有 $\mathcal{H}_m([0, 1]^m) = 1$. 更进一步得到

定理15.3.13. 对每个 $m \in \mathbb{N}$, 在 \mathbb{R}^m 上成立 $\mathcal{L}_m = \mathcal{H}_m$.

定理15.3.14. (Vitali 覆盖定理) 假设 X 是 \mathbb{R}^m 中的有界集. 定义集族 \mathfrak{B} 为 \mathbb{R}^m 中满足如下性质的闭球集: 对任意 $x \in X$ 和任意 $\epsilon > 0$ 存在闭球 $\mathbf{B} \in \mathfrak{B}$ 满足 $x \in \mathbf{B}$ 和 $\text{diam}(\mathbf{B}) < \epsilon$. 则 \mathfrak{B} 包含有限的或可数的子集族 $\{\mathbf{B}_i\}_{i \in I}$ 满足

$$\mathbf{B}_i \cap \mathbf{B}_j = \emptyset \text{ 若 } i \neq j \text{ 且 } \mathcal{H}_m(X \setminus \cup_{i \in I} \mathbf{B}_i) = 0.$$

证: 不失一般性我们不妨假设每个球 $\mathbf{B} \in \mathfrak{B}$ 包含 X 中的至少一个点且把半径大于 1 的球都排除在外. 此时所有这样的闭球都包含在 X 的某个有界的 2-领域内.

我们利用归纳法来构造闭球序列 $\{\mathbf{B}_i\}_{i \geq 1}$. 如果 $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n$ 已经构造, 我们选择下一个闭球 \mathbf{B}_{n+1} 如下. 记

$$\mathfrak{B}_n := \{\mathbf{B} \in \mathfrak{B} \mid \mathbf{B} \text{ 和 } \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n \text{ 都不相交}\}.$$

若 $\mathfrak{B}_n = \emptyset$, 则 $\mathbf{B}_1 \cup \dots \cup \mathbf{B}_n$ 覆盖整个集合 X . 若 $\mathfrak{B}_n \neq \emptyset$, 选择 $\mathbf{B}_{n+1} \in \mathfrak{B}_n$ 满足

$$\text{diam}(\mathbf{B}_{n+1}) > \frac{1}{2} \sup_{\mathbf{B} \in \mathfrak{B}_n} \text{diam}(\mathbf{B}). \quad (15.3.40)$$

根据构造诸球 \mathbf{B}_i 互不相交. 我们现在来证明除了差一个 m - 维 Hausdorff 0 测集外, 这些闭球覆盖 X . 因为闭球都是互不相交的且都包含在某个具有有限体积的集合内, 所以得到

$$\sum_{i \geq 1} \mathcal{H}_m(\mathbf{B}_i) < +\infty.$$

固定 $\epsilon > 0$. 存在 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $\sum_{i \geq n+1} \mathcal{H}_m(\mathbf{B}_i) < \epsilon$. 令 $x \in X \setminus \cup_{i \geq 1} \mathbf{B}_i$, 并令 \mathbf{B} 是任何包含 x 且和 $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n$ 都不相交的球. 注意到 \mathbf{B} 必和 $\cup_{i \geq 1} \mathbf{B}_i$ 相交, 这是因为否则的话对任何 n 有 $\mathbf{B} \in \mathfrak{B}_n$. 根据 (15.3.40), 得到

$$\mathcal{H}_m(\mathbf{B}) = \mathcal{L}_m(\mathbf{B}) = C(m) \left(\frac{\text{diam}(\mathbf{B})}{2} \right)^m \leq C(m) (\text{diam}(\mathbf{B}_n))^m = 2^m \mathcal{H}_m(\mathbf{B}_n).$$

令 $n \rightarrow +\infty$ 得到 $\mathcal{H}_m(\mathbf{B}) = 0$, 矛盾! 令 $k > n$ 是最小的指标使得 $\mathbf{B} \cap \mathbf{B}_k \neq \emptyset$ 成立. 则 $\mathbf{B} \in \mathfrak{B}_{k-1}$ 从而根据 (15.3.40) 得到

$$\text{diam}(\mathbf{B}_k) > \frac{1}{2} \text{diam}(\mathbf{B}).$$

若记 (x, r) 和 (x_k, r_k) 分别为 \mathbf{B} 和 \mathbf{B}_k 的中心和半径, 则 $r \leq 2r_k$ 和

$$|x - x_k| \leq |x - x_0| + |x_0 - x_k| \leq r + (r_k + r) \leq 2r + r_k \leq 5r_k.$$

因此 $x \in 5\mathbf{B}_k$. 我们已经证明了每个 $x \in X \setminus \cup_{i \geq 1} \mathbf{B}_i$ 属于球 $5\mathbf{B}_k$, 这里 $k > n$. 即 $X \setminus \cup_{i \geq 1} \mathbf{B}_i \subset \cup_{i \geq n+1} 5\mathbf{B}_i$ 从而

$$\mathcal{H}_m(X \setminus \cup_{i \geq 1} \mathbf{B}_i) \leq \sum_{i \geq n+1} \mathcal{H}_m(5\mathbf{B}_i) = 5^m \sum_{i \geq n+1} \mathcal{H}_m(\mathbf{B}_i) < 5^m \epsilon.$$

根据 ϵ 的任意性可知 $\mathcal{H}_m(X \setminus \cup_{i \geq 1} \mathbf{B}_i) = 0$. \square

定理15.3.15. 对任何度量空间 (X, d) 存在非负实数 $p_0 \in [0, +\infty]$ 使得当 $p > p_0$ 时 $\mathcal{H}_p(X) = 0$ 和当 $p < p_0$ 时 $\mathcal{H}_p(X) = +\infty$.

证: 令 $p_0 := \inf\{p \geq 0 : \mathcal{H}_p(X) < +\infty\}$. 显然对任何 $p < p_0$ 有 $\mathcal{H}_p(X) = +\infty$. 如果 $p > p_0$, 则存在 $p' \in [p_0, p)$ 满足 $\mathcal{H}_{p'}(X) = M < +\infty$. 因此对任意 $\epsilon > 0$ 存在 X 的开覆盖 $\{S_i\}_{i \in I}$ 满足

$$\text{diam}(S_i) < \epsilon, \quad \sum_{i \in I} C(p') [\text{diam}(S_i)]^{p'} < 2M.$$

故得到

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} C(p) [\text{diam}(S_i)]^p &= \sum_{i \in I} C(p) [\text{diam}(S_i)]^{p-p'} [\text{diam}(S_i)]^{p'} \\ &\leq \epsilon^{p-p'} \frac{C(p)}{C(p')} \sum_{i \in I} C(p') [\text{diam}(S_i)]^{p'} \leq 2 \frac{C(p)}{C(p')} \epsilon^{p-p'} M. \end{aligned}$$

即得到 $\mathcal{H}_{p,\epsilon}(X) \leq 2\epsilon^{p-p'}C(p)M/C(p')$. 最后令 $\epsilon \rightarrow 0+$ 得到 $\mathcal{H}_p(X) = 0$. \square

定理15.3.15 中的数 p_0 称为 X 的 **Hausdorff 维数** 并记为 $\dim_{\mathcal{H}}(X)$. 注意到当 $p = \dim_{\mathcal{H}}(X)$ 时, 测度 $\mathcal{H}_p(X)$ 只有三种可能性, 即, 零, 正数 (可能不是整数) 或无穷.

例15.3.16. 回顾下 §2.3.6 中定义的 Cantor 集 C

$$\begin{aligned} C &= \bigcap_{m \geq 1} \bigcap_{0 \leq k \leq 3^{m-1}-1} \left(\left[0, \frac{3k+1}{3^m} \right] \cup \left[\frac{3k+2}{3^m}, 1 \right] \right) \\ &= [0, 1] \setminus \bigcup_{m \geq 1} \bigcup_{0 \leq k \leq 3^{m-1}-1} \left(\frac{3k+1}{3^m}, \frac{3k+2}{3^m} \right). \end{aligned}$$

若记 C_n 是第 n 步的剩余部分, 则得到 $\mathcal{H}_p(C_n) = C(p)2^n/3^{np}$ 和

$$\mathcal{H}_p(C) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{H}_p(C_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} C(p)2^n \left(\frac{1}{3^n} \right)^p = \begin{cases} +\infty, & p < \log_3 2, \\ C(p), & p = \log_3 2, \\ 0, & p > \log_3 2. \end{cases}$$

从而得到 $\dim_{\mathcal{H}}(C) = \log_3 2 = \ln 2 / \ln 3$, 但是 Cantor 集的通常维数是 0.

性质15.3.17. 假设 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 是度量空间.

- (1) 如果 $Y \subset X$, 则 $\dim_{\mathcal{H}}(Y) \leq \dim_{\mathcal{H}}(X)$.
- (2) 如果 X 被有限或可数子集族 $\{X_i\}_{i \in I}$ 所覆盖, 则

$$\dim_{\mathcal{H}}(X) = \sup_{i \in I} \dim_{\mathcal{H}}(X_i).$$

- (3) 如果 $f: X \rightarrow Y$ 是 Lipschitz 映射, 则 $\dim_{\mathcal{H}}(f(X)) \leq \dim_{\mathcal{H}}(X)$. 特别地, 双-Lipschitz 等价的度量空间必有相同的 Hausdorff 维数.
- (4) $\dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^m) = \dim_{\mathcal{H}}([0, 1]^m) = m$.

假设 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 是度量空间且映射 $f: X \rightarrow Y$ 满足条件

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq C d_X(x_1, x_2)^\alpha, \quad x_1, x_2 \in X, \quad (15.3.41)$$

这里 C, α 都是正常数. 则

$$\mathcal{H}_p(f(X)) \leq C^p \mathcal{H}_{p\alpha}(X), \quad \dim_{\mathcal{H}}(f(X)) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_{\mathcal{H}}(X).$$

§15.4 * 三探 Γ, Ψ, Φ 函数和 Mellin 变换

本节绝大部分内容取自谭琳的专著, 参见参考文献中书名. 在这里我们仅是依照我们的需要从专著中进行择取, 更重要的是把专著中的部分习题写入本节中. 除此之外, 我们也补充了部分关于 L 函数的内容.

令 G 是 Abel 群且令 $\mathcal{F}(G)$ 是定义在 G 上的所有复值函数构成的集合. 对任何 $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(G)$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$ 定义

$$(f_1 + f_2)(g) := f_1(g) + f_2(g), \quad (cf)(g) := c \cdot f(g), \quad g \in G.$$

则 $\mathcal{F}(G)$ 是 \mathbb{C} 上的向量空间.

练习15.4.1. 证明 $\mathcal{F}(G)$ 是 \mathbb{C} 上的向量空间. 当 G 是有限时, $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}(G) = |G|$.

称 $\chi \in \mathcal{F}(G)$ 是 G 的特征如果满足下列条件

- (i) 对任何 $g \in G$ 有 $|\chi(g)| = 1$, 且
- (ii) 对任何 $g_1, g_2 \in G$ 有 $\chi(g_1 g_2) = \chi(g_1) \chi(g_2)$.

G 的所有特征构成的集合记为 \hat{G} . 注意到对任意 $\chi \in \hat{G}$ 有 $\chi(e) = 1$, 这里 e 是 G 的单位元.

练习15.4.2. 令 $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. 则 \mathbb{T} 是乘法群且 $\hat{G} = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(G, \mathbb{T})$.

对任何 $\chi, \varphi \in \hat{G}$ 定义 $\chi\varphi \in \hat{G}$ 为

$$(\chi\varphi)(g) := \chi(g)\varphi(g), \quad g \in G.$$

则 \hat{G} 是 Abel 群. \hat{G} 中的单位元是 ι , 即

$$\iota(g) := 1.$$

$\chi \in \hat{G}$ 的逆元由下面给出

$$\chi^{-1}(g) := \overline{\chi(g)} = \frac{1}{\chi(g)}, \quad g \in G.$$

首先假设 G 是有限 Abel 群. 则 $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}(G) = |G|$. 对任意 $\chi \in \hat{G}$ 且 $\chi \neq \iota$, 我们可以找到 $g_0 \in G$ 使得 $\chi(g_0) \neq 1$ 且 $g_0 \neq e$. 计算得到

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = \sum_{g \in G} \chi(g_0 g) = \sum_{g \in G} \chi(g_0) \chi(g) = \chi(g_0) \sum_{g \in G} \chi(g).$$

因此

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = 0.$$

作为推论对任意 $\chi, \varphi \in \widehat{G}$, 只要 $\chi \neq \varphi$ 就得到

$$\sum_{g \in G} (\chi\varphi^{-1})(g) = \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\varphi(g)} = 0.$$

另一方面有

$$\sum_{g \in G} (\chi\chi^{-1})(g) = \sum_{h \in G} \iota(g) = \sum_{g \in G} 1 = |G|.$$

则得到

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\chi\chi^{-1})(g) = 1.$$

上述计算促使我们在 $\mathcal{F}(G)$ 上定义内积如下

$$\langle f_1, f_2 \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g)\overline{f_2(g)}, \quad f_1, f_2 \in \mathcal{F}(G). \quad (15.4.1)$$

从而得到

$$\langle \chi, \varphi \rangle = \delta_{\chi\varphi}, \quad \chi, \varphi \in \widehat{G}. \quad (15.4.2)$$

定理15.4.3. (a) 若 $G = \mathbb{Z}_n = \{[0], [1], \dots, [n-1]\}$ 和 $\zeta = e^{2\pi\sqrt{-1}/n}$, 则

$$\widehat{G} = \{\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_{n-1}\},$$

这里 $\chi_1([j]) = \zeta^j$ ($0 \leq j \leq n-1$) 和 $\chi_k = \chi_1^k$ ($0 \leq k \leq n-1$).

(b) 若 G_1 和 G_2 都是有限 Abel 群, 则 $\widehat{G_1 \times G_2} = \widehat{G_1} \times \widehat{G_2}$.

(c) 对任何有限 Abel 群 G 有 $|\widehat{G}| = |G|$.

练习15.4.4. 证明定理15.4.3.

定理15.4.5. 假设 G 是有限 Abel 群.

(a) \widehat{G} 是 $\mathcal{F}(G)$ 的正交基.

(b) 对任何 $f \in \mathcal{F}(G)$ 有

$$f = \sum_{\chi \in \widehat{G}} c(\chi)\chi, \quad c(\chi) := \langle f, \chi \rangle. \quad (15.4.3)$$

证: (a) 利用 (15.4.2) 和定理15.4.3.

(b) 根据 (a) 得到

$$f = \sum_{\chi \in \widehat{G}} c\chi$$

对某个 $c \in \mathbb{C}$ 成立. 从而推出

$$c = \langle f, \chi \rangle = \sum_{\varphi \in \widehat{G}} \langle c(\varphi)\varphi, \chi \rangle = \sum_{\varphi \in \widehat{G}} c(\varphi)\delta_{\varphi\chi} = c(\chi). \quad \square$$

我们接下来考虑群 $G = \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. 群 G 也是拓扑空间, 即运算 $(z, w) \mapsto zw$ 和 $z \mapsto z^{-1}$ 都是连续的. 因此 G 是拓扑群 (事实上是 Lie 群). 在此我们考虑 \mathbb{T} 的所有连续特征, 即, 集合 $\widehat{\mathbb{T}}$. 注意到原先的特征相对于有限群上的离散拓扑也是连续的.

对任意 $a \in \mathbb{R}$ 定义

$$\mu_a(x) := ax, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (15.4.4)$$

注意到 μ_a 是连续同态³.

(A) 选择连续同态 $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 并记 $a := \psi(1) \in \mathbb{R}$. 则 $\psi = \mu_a$. 事实上, 对任何 $m \in \mathbb{Z}$, 我们有 $\psi(m) = ma$. 若 $\psi(1/n) =: b$, 则

$$a = \psi(1) = \psi\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = n\psi\left(\frac{1}{n}\right) = nb;$$

即, $b = \frac{1}{n}a$. 作为推论, $\psi(x) = ax$ 对任何 $x \in \mathbb{Q}$ 都成立. 因为 \mathbb{Q} 在 \mathbb{R} 内稠密且 ψ 是连续的, 所以 $\psi(x) = ax$ 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 都成立.

(B) 定义指数映射为

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T}, \quad x \longmapsto e^{2\pi\sqrt{-1}t}. \quad (15.4.5)$$

显然 \exp 是连续同态, 局部同构, 和 $\ker(\exp) = \mathbb{Z}$. 也就是说 $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ 是覆盖映射. 利用拓扑学结果可以证明对任意连续映射 $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ 存在唯一的连续映射 $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $\varphi = \exp \circ \tilde{\varphi}$.

(C) $\widehat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$. 这里 $\widehat{\mathbb{R}}$ 表示 \mathbb{R} 上所有连续特征构成的集合. 对任意 $a \in \mathbb{R}$ 定义 $\varphi_a \in \widehat{\mathbb{R}}$ 为 $\varphi_a(x) := e^{2\pi\sqrt{-1}ax}$, $x \in \mathbb{R}$. 反之, 如果 $\varphi \in \widehat{\mathbb{R}}$ 则 $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ 是连续的和同态的. 根据 (B), 存在唯一的连续同态 $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $\varphi = \exp \circ \tilde{\varphi}$. 现在定义 $a := \tilde{\varphi}(1) \in \mathbb{R}$.

给定连续同态映射 $\chi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ 定义

$$\varphi_\chi := \chi \circ \exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T}. \quad (15.4.6)$$

则 φ_χ 也是连续同态的且 $\varphi_\chi(0) = \varphi_\chi(1) = \chi(1) = 1$. 根据以上讨论我们得到连续同态映射 $\tilde{\varphi}_\chi = \mu_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 且满足

$$\exp \circ \tilde{\varphi}_\chi = \varphi_\chi = \chi \circ \exp. \quad (15.4.7)$$

³映射 $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 称为同态, 如果其是 \mathbb{R} 上的群同态.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_\chi} & \mathbb{R} \\ \downarrow \exp & & \downarrow \exp \\ \mathbb{T} & \xrightarrow{\chi} & \mathbb{T} \end{array}$$

特别地对 $\chi = 1$ 得到

$$\exp(a) = \chi(\exp(1)) = \chi(1) = 1 \implies a = n \in \mathbb{Z}$$

并称 $a = n$ 是 χ 的度且记为 $\deg(\chi)$. 因此, (15.4.7) 变成

$$\chi(z) = z^n, \quad n := \deg(\chi), \quad z \in \mathbb{T}. \quad (15.4.8)$$

反之, 对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 定义

$$\chi_n := z^n, \quad z \in \mathbb{T}. \quad (15.4.9)$$

注意到 $\chi_n \in \hat{\mathbb{T}}$ 和 $\chi_n \chi_m = \chi_{n+m}$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

定理15.4.6. 我们有 $\hat{\mathbb{T}} = (\chi_n)_{n \in \mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}$.

对任意 $f \in \mathcal{F}(\mathbb{T})$ (等价地说, f 是定义在 \mathbb{R} 上的复值函数且周期为 2π) 和 $\chi \in \hat{\mathbb{T}}$ 定义

$$c(\chi) := \langle f, \chi \rangle = \frac{1}{|\mathbb{T}|} \int_{\mathbb{T}} f(x) \overline{\chi(x)} dx. \quad (15.4.10)$$

因此形式上有

$$f = \sum_{\chi \in \hat{\mathbb{T}}} c(\chi) \chi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c(\chi_n) \chi_n. \quad (15.4.11)$$

记

$$c_n := c(\chi_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-2\pi\sqrt{-1}nx} dx \quad (15.4.12)$$

则 (15.4.11) 等于

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi\sqrt{-1}nx}. \quad (15.4.13)$$

这是下章即将讨论的关于圆上的 Fourier 分析 (参见 第十六章).

对 \mathbb{R} , 我们在 (15.4.11) 中把 $\sum_{\chi \in \hat{\mathbb{T}}}$ 代替为 $\int_{\mathbb{R}}$ 从而得到

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\varphi_a) \varphi_a da, \quad c(\varphi_a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\varphi_a(t)} dt. \quad (15.4.14)$$

由于 $\varphi_a(t) = e^{2\pi\sqrt{-1}at}$ 故

$$\hat{f}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi\sqrt{-1}ax} dx, \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(a) e^{2\pi\sqrt{-1}ax} da. \quad (15.4.15)$$

这是 \mathbb{R} 上的经典 Fourier 分析. 令 $L^1(\mathbb{R})$ 为 \mathbb{R} 上 (Riemann 或 Lebesgue) 可积函数构成的集合.

(i) 如果 $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$, 则 (15.4.15) 中的第一个积分有定义. 如果 $\int_{-\infty}^{\infty}$ 是 Cauchy 主值积分 $\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \int_{-\Delta}^{\Delta}$ 则 (15.4.15) 中的第二个恒等式成立.

(ii) (平移不变性) 如果 $G = \mathbb{R}$ 或 \mathbb{T} 则

$$\int_G f(x) dx = \int_G f(gx) dx, \quad g \in G.$$

特别的对 $G = \mathbb{R}$ 得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+a) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx;$$

如果 $G = \mathbb{T}$ 得到

$$\int_0^{2\pi} f(e^{2\pi\sqrt{-1}(\theta+\alpha)}) d\theta = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(e^{2\pi\sqrt{-1}\theta}) d\theta.$$

(iii) 如果 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 则由 (15.4.15) 给出的函数 \hat{f} 是有界的和连续的. 对每个 $h \in \mathbb{R}$ 定义

$$\mathbf{L}_h : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow L^1(\mathbb{R}), \quad f \longmapsto \mathbf{L}_h(f)(x) := f(x+h).$$

从而得到

$$\widehat{\mathbf{L}_h(f)} = \varphi_h \hat{f}$$

这里 $\varphi_h(x) = e^{2\pi\sqrt{-1}hx}$.

§15.4.1 * \mathbb{R}^+ 上的调和函数

集合 \mathbb{R}^+ 在乘法下构成一个拓扑群. 映射

$$\epsilon : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad x \longmapsto e^x, \quad (15.4.16)$$

是拓扑同构(即, ϵ 不仅是群同构而且也是拓扑同胚). ϵ 的逆映射 λ 为

$$\lambda : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \longmapsto \ln y. \quad (15.4.17)$$

更进一步我们有如下两个映射

$$\hat{\epsilon} : \widehat{\mathbb{R}^+} \longrightarrow \widehat{\mathbb{R}}, \quad \varphi \longmapsto \varphi \circ \epsilon, \quad (15.4.18)$$

和

$$\hat{\lambda} : \widehat{\mathbb{R}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{R}^+}, \quad \psi \longmapsto \psi \circ \lambda. \quad (15.4.19)$$

因为 $\widehat{\mathbb{R}} = \langle \varphi_a \rangle_{a \in \mathbb{R}}$, 所以

$$\varphi_a^+(x) := \hat{\lambda}(\varphi_a)(x) = \varphi_a(\ln x) = e^{2\pi\sqrt{-1}a \ln x} = x^{2\pi\sqrt{-1}a}, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (15.4.20)$$

定理15.4.7. $\widehat{\mathbb{R}^+} = \langle \varphi_a^+ \rangle_{a \in \mathbb{R}^+}$ 作为拓扑群, $\widehat{\mathbb{R}^+}$ 和 \mathbb{R} 是同构的.

在群 \mathbb{R}^+ 存在不变测度 dx/x 满足

$$\int_{ra}^{rb} \frac{dx}{x} = \ln \frac{rb}{ra} = \ln \frac{b}{a} = \int_a^b \frac{dx}{x}, \quad a, b > 0.$$

定义

$$\tilde{f}(a) = c(\varphi_a^+) = \int_{\mathbb{R}^+} f(x) \overline{\varphi_a^+(x)} \frac{dx}{x} = \langle f, \varphi_a^+ \rangle_{L^2(\mathbb{R}^+, dx/x)}; \quad (15.4.21)$$

则得到

$$f(x) = \int_{\widehat{\mathbb{R}^+}} c(\varphi_a^+) \varphi_a^+ = \int_{\mathbb{R}} c(\varphi_a^+) \varphi_a^+ da = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(a) x^{2\pi\sqrt{-1}a} da. \quad (15.4.22)$$

公式 (15.4.21) 和 (15.4.22) 是 \mathbb{R}^+ 上的 Fourier 分析. 引入

$$\tau := -2\pi a, \quad \hat{f}(\tau) := \tilde{f}\left(-\frac{\tau}{2\pi}\right) = \tilde{f}(a). \quad (15.4.23)$$

则 (15.4.22) 和 (15.4.22) 变为

$$\hat{f}(\tau) = \int_0^{\infty} f(x) x^{\sqrt{-1}\tau} \frac{dx}{x}, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\tau) x^{-\sqrt{-1}\tau} d\tau. \quad (15.4.24)$$

定理15.4.8. (a) 如果 $f \in L^1(\mathbb{R}^+, dx/x) \cap C^1((0, +\infty))$, 则 (15.4.24) 中的第一个积分是有定义的. 更进一步如果 $\int_{-\infty}^{\infty}$ 表示 Cauchy 主值积分 $\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \int_{-\Delta}^{\Delta}$ 则 (15.4.24) 中的第二个恒等式成立.

(b) 如果 $F \in L^1((-\infty, \infty)) \cap C^1((-\infty, \infty))$, 则积分

$$f(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) x^{-\sqrt{-1}\tau} d\tau$$

是有定义的. 进一步有

$$F(\tau) = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{\Delta}}^{\Delta} f(x) x^{\sqrt{-1}\tau} \frac{dx}{x}.$$

给定 $f \in C^1(\mathbb{R}^+)$ 和 $\sigma > 0$, 定义

$$f_{\sigma}(x) := x^{\sigma} f(x). \quad (15.4.25)$$

注意到 $f_{\sigma} \in C^1(\mathbb{R}^+)$. 若进一步假设 $f_{\sigma} \in L^1(\mathbb{R}^+, dx/x)$, 此时根据定理15.4.8

(a) 定义

$$\widehat{f}_{\sigma}(\tau) = \int_0^{\infty} f(x) x^{\sigma + \sqrt{-1}\tau} \frac{dx}{x}. \quad (15.4.26)$$

定理15.4.9. (Mellin 变换) 如果 $f \in C^1(\mathbb{R}^+)$ 和 $f_\sigma \in L^1(\mathbb{R}^+, dx/x)$ 其中 $\sigma \in (a, b) \subset \mathbb{R}^+$, 则

$$F(z) := \int_0^\infty f(x)x^z \frac{dx}{x} \quad (15.4.27)$$

关于 z (其中 $a < \operatorname{Re}(z) < b$) 是全纯的, 且

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty} F(z)x^{-z} dz \quad (15.4.28)$$

该积分和 $\sigma \in (a, b)$ 的选择无关.

证: 显然 $F(z) := \widehat{f}_\sigma(\tau)$ 关于 $z := \sigma + \sqrt{-1}\tau$, 其中 $a < \sigma < b$, 是全纯的. 根据定理15.4.8 (b) 我们有

$$x^\sigma f(x) = f_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \widehat{f}_\sigma(\tau)x^{-\sqrt{-1}\tau} d\tau$$

则

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \widehat{f}_\sigma(\tau)x^{-\sigma-\sqrt{-1}\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty} F(z)x^{-z} dz.$$

根据 Cauchy 定理最后的积分和 σ 无关. \square

称 $(f(x), F(z))$ 为 **Mellin 对** 并通常把 $F(z)$ 记作 $\mathcal{M}(f)(z)$. 若 $f(x) = e^{-x}$, 则 $f_\sigma \in L^1(\mathbb{R}^+, dx/x)$ 对任何 $\sigma \in \mathbb{R}^+$ 都成立. 则 $F(z) = \Gamma(z)$.

定理15.4.10. (a) $(e^{-x}, \Gamma(z))$ 是 Mellin 对.

(b) 我们有

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x} x^z \frac{dx}{x}, \quad e^{-x} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty} \Gamma(z)x^{-z} dz \quad (15.4.29)$$

对任何 $\operatorname{Re}(z) > 0$ 都成立.

练习15.4.11. $e^{-x} - 1 + \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ 和 $\Gamma(z)$ ($-n < \operatorname{Re}(z) < -(n-1)$) 是 Mellin 对.

练习15.4.12. 令 $(f(x), F(z))$ 是 Mellin 对. 证明对任何 $a, b > 0$ 和 $c, \ell \in \mathbb{C}$ 如下都是 Mellin 对:

- (a) $f(x^a)$ 和 $\frac{1}{a}F(\frac{z}{a})$,
- (b) $\frac{1}{x^\ell}f(\frac{1}{x})$ 和 $F(\ell - z)$,
- (c) $f(bx)$ 和 $\frac{F(z)}{b^z}$,
- (d) $x^c f(x)$ 和 $F(z + c)$,

(e) $f(bx^a)$ 和 $F(\frac{z}{a})/ab^{z/a}$.

练习15.4.13. 假设 $(f(x), F(z))$ 是 Mellin 对. 对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 证明 $f(x)(\ln x)^n$ 和 $F^{(n)}(z)$ 是 Mellin 对.

若 $(f(x), F(z))$ 和 $(g(x), G(z))$ 都是 Mellin 对, 则

$$\begin{aligned} F(z)G(z) &= \int_0^\infty f(t)t^z \frac{dt}{t} \cdot \int_0^\infty g(y)y^z \frac{dy}{y} = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(t)g(y)(ty)^z \frac{dt}{t} \right] \frac{dy}{y} \\ &= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(t)g\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t} \right] x^z \frac{dx}{x} = \int_0^\infty (f * g)(x)x^z \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

这里 $f * g$ 表示 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $L^1(\mathbb{R}^+, dx/x)$ 上的卷积(convolution):

$$(f * g)(x) := \int_0^\infty f(t)g\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t}. \quad (15.4.30)$$

定理15.4.14. 对任意 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^+, dx/x)$, 有 $\mathcal{M}(f * g) = \mathcal{M}(f)\mathcal{M}(g)$.

练习15.4.15. (a) 如果 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^+, dx/x)$, 则 $f * g \in L^1(\mathbb{R}^+, dx/x)$.

(b) 如果 $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^+, dx/x)$, 则 $(f * g) * h = f * (g * h)$.

(c) 如果 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^+, dx/x)$, 则 $f * g = g * f$.

(d) 如果 $f_1, f_2, g \in L^1(\mathbb{R}^+, dx/x)$ 和 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, 则

$$(c_1 f_1 + c_2 f_2) * g = c_1 (f_1 * g) + c_2 (f_2 * g)$$

上述练习表明 $(L^1(\mathbb{R}^+, dx/x), *)$ 是 \mathbb{R} 上的交换代数. 另一方面 \mathbb{C} 上的所有亚纯函数构成的集合 \mathcal{M} 也是 \mathbb{R} 上的交换代数.

定理15.4.16. (a) $\mathcal{M}: L^1(\mathbb{R}^+, dx/x) \rightarrow \mathcal{M}$ 是代数同态.

(b) 如果 $f_1, \dots, f_n \in L^1(\mathbb{R}^+, dx/x)$, 则

$$\prod_{1 \leq i \leq n} \mathcal{M}(f_i) = \mathcal{M}\left(*_{1 \leq i \leq n} f_i\right), \quad (15.4.31)$$

这里

$$\begin{aligned} \left(*_{1 \leq i \leq n} f_i\right)(x) &= \underbrace{\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty}_{n-1} f_1(x_1)f_2(x_2)\cdots f_{n-1}(x_{n-1}) \\ &\quad f_n\left(\frac{x}{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}\right) \frac{dx_{n-1}}{x_{n-1}} \cdots \frac{dx_2}{x_2} \frac{dx_1}{x_1}. \end{aligned}$$

易证

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \Gamma(z) \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-z} dt = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} y^{z-1} dy \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-z} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{-t(y+1)} dt \right] y^{z-1} dy = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+y} y^{z-1} dy.\end{aligned}$$

因此 $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$ 和 $\frac{1}{1+x}$ 是 Mellin 对. 下面练习给出另一个证明.

练习15.4.17. 证明

(a) $\frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$ 和 $\Gamma(1-z)$ 是 Mellin 对.

(b) $e^{-x} * \left(\frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{1+x}$.

(c) $e^{-nx^{1/n}}$ 和 $\Gamma(nz)/n^{nz-1}$ 是 Mellin 对.

定理15.4.18. (Gauss) 对任意 $n \geq 1$ 有

$$\prod_{0 \leq k \leq n-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\Gamma(nz)}{n^{nz-1}}. \quad (15.4.32)$$

证: 对每个 k , $\Gamma(z + \frac{k}{n})$ 和 $x^{k/n} e^{-x}$ 是 Mellin 对. 根据 (15.4.31), 我们得到 $\prod_{0 \leq k \leq n} \Gamma(z + \frac{k}{n})$ 和

$$\begin{aligned}f(x) &= \underbrace{\int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty}}_{n-1} e^{-\frac{x}{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}} x_{n-1}^{\frac{1}{n}} e^{-x_{n-1}} \cdots x_2^{\frac{n-2}{n}} e^{-x_2} x_1^{\frac{n-1}{n}} e^{-x_1} \frac{dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1}}{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} \\ &= \underbrace{\int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty}}_{n-1} e^{-(x_1 \cdots + x_{n-1} + \frac{x}{x_1 \cdots x_{n-1}})} \frac{dx_1 \cdots dx_{n-1}}{x_1^{\frac{1}{n}} \cdots x_{n-1}^{\frac{n-1}{n}}}\end{aligned}$$

是 Mellin 对. 利用 (15.3.10) 得到

$$\begin{aligned}\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}} &= \prod_{1 \leq k \leq n-1} \Gamma\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x_1} x_1^{\frac{n-1}{n}} \frac{dx_1}{x_1} \int_0^{\infty} e^{-x_2} x_2^{\frac{n-2}{n}} \frac{dx_2}{x_2} \cdots \int_0^{\infty} e^{-x_n} x_n^{\frac{1}{n}} \frac{dx_{n-1}}{x_{n-1}} \\ &= \underbrace{\int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty}}_{n-1} e^{-(x_1 + \cdots + x_{n-1})} \frac{dx_1 \cdots dx_{n-1}}{x_1^{\frac{1}{n}} \cdots x_{n-1}^{\frac{n-1}{n}}}.\end{aligned}$$

考虑函数

$$f(x) = \frac{(2\pi)^{n-1}}{\sqrt{n}} e^{-n \sqrt[n]{x}}. \quad (15.4.33)$$

利用下面练习可推出

$$f(x) = \frac{(2\pi)^{n-1}}{\sqrt{n}} e^{-n \sqrt[n]{x}}.$$

另一方面利用练习15.4.17 (c), 得到 $(e^{-n \sqrt[n]{x}}, \Gamma(nz)/n^{nz-1})$ 是 Mellin 对. \square

练习15.4.19. 证明函数 (15.4.33) 恒等于 0. (提示: 考虑它的导数).

定理15.3.1 和定理 15.3.2 证明了 $\Gamma(s)$ 的值由其在区间 $(0, 1/2]$ 上的值所决定的. 我们现在来证明 $\Gamma(s)$ 的值由其在区间 $(0, 1/3]$ 上的值所决定的. 根据定理15.3.2 得到

$$\Gamma\left(\frac{1+x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

根据 (5.5.24) 得到

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+x}{2}\right) = \sqrt{\pi}2^{1-x}\Gamma(x).$$

因此

$$\Gamma(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{1-x} \cos \frac{\pi x}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)}. \quad (15.4.34)$$

当 $x \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ 时有 $\frac{x}{2}, \frac{1-x}{2} \in (0, \frac{1}{3}]$. 则对任意 $x \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$, $\Gamma(x)$ 有 (15.4.34) 所给出.

练习15.4.20. 证明 $\Gamma(x)$ 的值由其在区间 $(0, 1/4]$ 上的值所决定:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{3} - 2x\right) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{1}{3}+2x} \cos\left(\frac{\pi}{6} - \pi x\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6} - x\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3} + x\right)}, \\ \Gamma\left(\frac{2}{3} + x\right)\Gamma\left(\frac{7}{6} + x\right) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{1}{3}+2x}} \Gamma\left(\frac{4}{3} + 2x\right), \\ \Gamma(3x) &= \frac{3^{3x-\frac{1}{2}} 2^{-\frac{5}{3}-2x}}{\sqrt{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{6} - \pi x\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3} + x\right)\Gamma(x)\Gamma\left(\frac{1}{6} - x\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3} - 2x\right)}. \end{aligned}$$

因此

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \frac{2^{-\frac{5+2x}{3}} 3^{x-\frac{1}{2}} \sqrt{\pi}}{\sin \frac{\pi+\pi x}{3} \sin \frac{\pi-\pi x}{3}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{x}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1-2x}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-x}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1-2x}{3}\right)}, & x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right), \\ \frac{4^{-x} \sqrt{\pi}}{\sin(\pi x)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1-2x}{2}\right)}{\Gamma(1-2x)}, & x \in \left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right). \end{cases}$$

练习15.4.21. 利用定理15.4.18 证明

$$\sin x = 2^{n-1} \prod_{0 \leq k \leq n-1} \sin \frac{x+k\pi}{n}.$$

(提示: 取 $z = x/n$).

定理15.4.22. 如果 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^+, dx/x)$, 则 $\mathcal{M}(fg) = \mathcal{M}(f) * \mathcal{M}(g)$.

证: 令 $F = \mathcal{M}(f)$ 和 $G = \mathcal{M}(g)$. 因为

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty} F(w)x^{-w} dw,$$

我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(fg)(z) &= \int_0^\infty f(x)g(x)x^z \frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_0^\infty \left[\int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty} F(w)x^{-w}dw \right] g(x)x^z \frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty} F(w) \left[\int_0^\infty g(x)x^{z-w} \frac{dx}{x} \right] dw \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty} F(w)G(z-w)dw. \end{aligned}$$

最后一步是 $(F * G)(z)$ 的定义. \square

在练习15.4.17 (c) 中令 $y = nx$ 得到 $(e^{-nx}, \Gamma(z)/n^z)$ 对每个 $n \geq 1$ 都是 Mellin 对. 回顾 Riemann zeta 函数

$$\zeta(z) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}.$$

定理15.4.23. (1) 如果 $\operatorname{Re}(z) > 1$, 则 $(\frac{1}{e^x-1}, \Gamma(z)\zeta(z))$ 是 Mellin 对.

(2) 如果 $\operatorname{Re}(z) \in (0, 1)$, 则 $(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}, \Gamma(z)\zeta(z))$ 是 Mellin 对.

(3) 如果 $\sigma > 1$, 则

$$\frac{1}{e^x-1} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty} \Gamma(z)\zeta(z)x^{-z}dz.$$

证: 这可以从函数项级数 $\frac{1}{u-1} = \sum_{n \geq 1} u^{-n}$ 推出. \square

练习15.4.24. 完成定理 15.4.23 的证明.

如果函数 f 有如下的 (Fourier 级数) 展开

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} a_n e^{-nx},$$

使得对任何 $\sigma \in (a, \infty)$ 都有 $f_\sigma(x) = x^\sigma f(x) \in L^1(\mathbb{R}^+, dx/x)$, 则此时

$$\mathcal{M}(f_\sigma)(\tau) = \Gamma(\sigma + \sqrt{-1}\tau) \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^{\sigma + \sqrt{-1}\tau}}, \quad \sigma > a.$$

请同学们自证.

定理15.4.25. 如果对任何 $\sigma \in (a, \infty) \subset \mathbb{R}^+$ 都有 $x^\sigma \sum_{n \geq 1} a_n e^{-nx} \in L^1(\mathbb{R}^+, \frac{dx}{x})$, 则 $\sum_{n \geq 1} a_n e^{-nx}$ 和 $\Gamma(z) \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^z}$, $\operatorname{Re}(z) > a$, 是 Mellin 对.

级数

$$D(z, \{a_n\}_{n \geq 1}) := \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^z} \quad (15.4.35)$$

称为数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 的 **Dirichlet 级数(Dirichlet series)**. Dirichlet 级数也可以用算术函数来重新描述. 称 \mathbb{N} 上的复值函数 f 为 **算术函数(additive function)**, 此时若定义 $a_n := f(n)$ 则 (15.4.35) 可改写成

$$D_f(z) := \sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^z}.$$

这也称为函数 f 的 **生成函数(generating series)**.

进一步算术函数 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ 称为 **加性函数(additive function)** 如果

$$f(mn) = f(m) + f(n), \quad (m, n) = 1.$$

函数 f 称为 **完全加性函数(completely additive function)** 如果这个性质对任何 $m, n \in \mathbb{N}$ 都成立. 同样地, f 称为 **乘性函数(multiplicative function)** 如果

$$f(mn) = f(m)f(n), \quad (m, n) = 1.$$

函数 f 称为 **完全乘性函数(completely multiplicative function)** 如果这个性质对任何 $m, n \in \mathbb{N}$ 都成立. 比如 $f(n) = \ln n$ 是完全加性函数而 $f(n) = n^{-z}$ 是完全乘性函数.

如果 f 是乘性函数, 则只要下面的级数和乘积都是绝对收敛就有

$$D_f(z) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left[\sum_{n \geq 0} \frac{f(p^n)}{p^{nz}} \right] = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left[1 + f(p)p^{-z} + f(p^2)p^{-2z} + \cdots \right]$$

这里 \mathbb{P} 表示所有素数构成的集合. 取特殊情形 $f(n) \equiv 1$ 得到 **Euler 乘积(Euler product)**

$$\zeta(z) = D_1(z) = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-z})^{-1}, \quad \operatorname{Re}(z) > 1.$$

$\zeta(z)$ 的倒数也具有 Dirichlet 级数展开,

$$\frac{1}{\zeta(z)} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^z} \right) = \sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n^z}$$

这里

$$\mu(n) := \begin{cases} (-1)^r, & m = p_1 \cdots p_r \text{ 且 } p_1, \cdots, p_r \text{ 互不相同,} \\ 0, & \text{其余情形.} \end{cases}$$

是 **Möbius** 在 1832 年引入的, 现在称为 **Möbius 函数(Möbius function)**. 从 $\zeta(z) \cdot \zeta^{-1}(z) = 1$ 得到

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \delta_{m1}.$$

作为推论得到**Möbius 反演公式(Möbius inversion)**:

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \iff f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

上述形式是**Dedekind** 在 1857 年给出的. 可以证明 Möbius 函数是乘性函数, 一般地可以证明如果 f, g 都是乘性函数则 fg 和 $f * g$ 也都是乘性函数.

若令 $\tau(n)$ 是自然数 n 的正因子个数, 则得到

$$\zeta^2(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{\tau(n)}{n^z}.$$

一般地定义 $\tau_k(n)$ 为 n 分解成 k 个自然数的不同乘积数, 所以

$$\zeta^k(n) = \sum_{n \geq 1} \frac{\tau_k(n)}{n^z}, \quad \tau(n) = \tau_2(n).$$

可以证明

$$\tau_k(n) = \binom{a_1 + k - 1}{k - 1} \cdots \binom{a_r + k - 1}{k - 1}, \quad n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}.$$

对任意 $\nu \in \mathbb{C}$ 定义 $\sigma_\nu(n)$ 如下

$$\zeta(z)\zeta(z - \nu) = \sum_{n \geq 1} \frac{\sigma_\nu(n)}{n^z}$$

从而得到

$$\sigma_\nu(n) = \sum_{d|n} d^\nu.$$

这样就得到了**Ramanujan 公式(Ramanujan formula)**

$$\zeta(z)\zeta(z - \alpha)\zeta(z - \beta)\zeta(z - \alpha - \beta)\zeta^{-1}(2z - \alpha - \beta) = \sum_{n \geq 1} \frac{\sigma_\alpha(n)\sigma_\beta(n)}{n^z}.$$

特别地

$$\zeta^4(z)\zeta^{-1}(2z) = \sum_{n \geq 1} \frac{\tau(n)^2}{n^z}.$$

上面的**Ramanuja** 级数是所谓的**Rankin-Selberg** 卷积 L - 函数的特殊情形.

假设 Dirichlet 级数 $D_f(z)$ 和 $D_g(z)$ 绝对收敛, 则乘积 $D_f(z)D_g(s)$ 也是 Dirichlet 级数且可以表示成

$$D_f(z)D_g(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{h(n)}{n^z}, \quad h(n) := \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

这里算术函数 h 称为 f 和 g 的 **Dirichlet 卷积(Dirichlet convolution)** 并记作 $h = f * g$.

利用分部积分法计算得到

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^{\infty} \frac{x^z}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = \int_0^{\infty} \frac{x \cdot x^{z-2} dx}{e^x - 1} = -\frac{1}{z-1} \int_0^{\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) x^z \frac{dx}{x};$$

一般的对 $k = 0, 1, 2, \dots$ 有

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \frac{(-1)^{k+1}}{(z-1)z(z+1)\cdots(z+k-1)} \int_0^{\infty} x^{z+k-1} \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) dx.$$

等价地, 对每个 $k = 0, 1, 2, \dots$, 得到

$$\zeta(z) = \frac{(-1)^{k+1}}{(z-1)\Gamma(z+k)} \int_0^{\infty} x^{z+k} \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) \frac{dx}{x}. \quad (15.4.36)$$

当 $\operatorname{Re}(z) > -k$ 时, 反常积分

$$\int_0^{\infty} x^{z+k} \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) \frac{dx}{x}$$

收敛, 所以 (15.4.36) 的右边关于 z 是全纯的, 当然只要满足 $\operatorname{Re}(z) > -k$ 和 $z \neq 1$ (因为 $\Gamma(z+k)$ 是全纯的和恒不为 0). 因此我们可以把 Riemann zeta 函数全纯延拓到整个复平面除了 $z = 1$.

定理 15.4.26. (a) $\zeta(z)$ 在 $\mathbf{C} \setminus \{z = 1\}$ 上是全纯的.

(b) $\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)\zeta(z) = 1$.

(c) 如果 $\operatorname{Re}(z) > -k$, 则 $\zeta(z)$ 由 (15.4.36) 所给出.

(d) $(z-1)\zeta(z)$ 是全纯函数.

(e) $\zeta(0) = \frac{1}{2}$.

证: 计算得到

$$(z-1)\zeta(z) = -\frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) x^z \frac{dx}{x}.$$

令 $z \rightarrow 1$ 得到

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)\zeta(z) = -\frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^{\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) dx = -\frac{x}{e^x - 1} \Big|_0^{\infty} = 1.$$

因此 $z = 1$ 是 $\zeta(z)$ 的简单极点.

最后来计算 $\zeta(0)$ 的值. 在 (15.4.36) 中令 $k = 1$ 和 $z = 0$ 就得到

$$\zeta(0) = -\int_0^{\infty} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) dx = -\frac{d}{dx} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) \Big|_0^{\infty}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(x-1)e^x + 1}{(e^x - 1)^2} \Big|_0^\infty = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)e^x + 1}{(e^x - 1)^2} \\
&= -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x = (x-1)e^x}{2(e^x - 1)e^x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2(e^x - 1)} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

故 $\zeta(0) = -1/2$. \square

练习15.4.27. 对每个正数 $a > 0$, 定义 Hurwitz zeta 函数为

$$\zeta(z, a) := \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+a)^z}.$$

证明 $\zeta(z, a)$ 关于 z 收敛只要 $\operatorname{Re}(z) > 1$, 和关于 z 是一致收敛只要 $\operatorname{Re}(z) > 1 + \delta$ ($\delta > 0$). 进一步 $(\frac{e^{-ax}}{1-e^{-x}}, \Gamma(z)\zeta(z, a))$ 是 Mellin 对.

定义函数 I, J 如下

$$I := \int_0^\infty e^{-t} \cos(ut) dt, \quad J := \int_0^\infty e^{-t} \sin(ut) dt. \quad (15.4.37)$$

注意到

$$I + \sqrt{-1}J = \int_0^\infty e^{-t + \sqrt{-1}ut} dt.$$

计算

$$\begin{aligned}
I &= -\int_0^\infty \cos(ut) de^{-t} = -\left[0 - 1 + u \int_0^\infty e^{-t} \sin(ut) dt\right] = 1 - uJ, \\
I &= \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{u} d\sin(ut) = \int_0^\infty \frac{\sin(ut)}{u} e^{-t} dt = \frac{1}{u}J.
\end{aligned}$$

因此

$$I = \frac{1}{1+u^2}, \quad J = \frac{u}{1+u^2}. \quad (15.4.38)$$

记

$$\hat{c}(z) := \mathcal{M}(\cos x), \quad \hat{s}(z) := \mathcal{M}(\sin x) \quad (15.4.39)$$

分别是 $\cos x$ 和 $\sin x$ 的 Mellin 变换.

练习15.4.28. (Euler) 证明

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{u^{-z} \hat{c}(z)}{1+u^2} du &= \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = \Gamma(z), \\
\int_0^\infty \frac{x^{-z}}{1+x^2} dx &= \frac{\pi}{2} \sec \frac{\pi z}{2}, \\
\hat{c}(z) &= \Gamma(z) \cos \frac{\pi z}{2}, \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \\
\hat{s}(z) &= \Gamma(z) \sin \frac{\pi z}{2}, \quad \operatorname{Re}(z) > -1.
\end{aligned}$$

利用练习15.4.12 (c) 我们得到

推论15.4.29. (Euler) (a) 对每个 $t > 0$, $(\cos(tx), \Gamma(z) \cos \frac{\pi z}{2} \cdot t^{-z})$ 是 Mellin 对. 因此

$$\int_0^{\infty} \cos(tx) x^z \frac{dx}{x} = \frac{\Gamma(z)}{t^z} \cos \frac{\pi z}{2}, \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \quad (15.4.40)$$

和

$$\cos(tx) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty} \Gamma(z) \cos \frac{\pi z}{2} (tx)^{-z} dz. \quad (15.4.41)$$

(b) 对每个 $t > 0$, $(\sin(tx), \Gamma(z) \sin \frac{\pi z}{2} \cdot t^{-z})$ 是 Mellin 对. 因此

$$\int_0^{\infty} \sin(tx) x^z \frac{dx}{x} = \frac{\Gamma(z)}{t^z} \sin \frac{\pi z}{2}, \quad \operatorname{Re}(z) > -1, \quad (15.4.42)$$

和

$$\sin(tx) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty} \Gamma(z) \sin \frac{\pi z}{2} (tx)^{-z} dz. \quad (15.4.43)$$

上述练习给出了如下恒等式

$$\frac{\pi}{2\Gamma(z) \sin \frac{\pi z}{2}} = \Gamma(1-z) \cos \frac{\pi z}{2} = \int_0^{\infty} \sin x \cdot x^{1-z} \frac{dx}{x} = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^z} dx. \quad (15.4.44)$$

在 (15.4.44) 中令 $z = 1$ 得到

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \quad (15.4.45)$$

定理15.4.30. (1) 假设 $(f(x), F(z))$ 是 Mellin 对. 则下面命题等价

(i) $f(x)$ 满足

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos(tx) dt. \quad (15.4.46)$$

(ii) $F(z)$ 满足

$$\frac{F(z)}{2^{\frac{z}{2}} \Gamma(\frac{z}{2})} = \frac{F(1-z)}{2^{\frac{1-z}{2}} \Gamma(\frac{1-z}{2})}. \quad (15.4.47)$$

(2) 假设 $(f(x), F(z))$ 是 Mellin 对. 则下面命题等价

(i) $f(x)$ 满足

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin(tx) dt. \quad (15.4.48)$$

(ii) $F(z)$ 满足

$$\frac{F(z)}{2^{\frac{z}{2}} \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{z}{2})} = \frac{F(1-z)}{2^{\frac{1-z}{2}} \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1-z}{2})}. \quad (15.4.49)$$

证: W 我们给出 (1) 的证明. (i) \Rightarrow (ii): 利用 (15.4.46) 和 (15.4.40) 得到

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_0^\infty f(x)x^z \frac{dx}{x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(t) \cos(tx) dt \right] x^z \frac{dx}{x} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \left[\int_0^\infty \cos(tx) x^z \frac{dx}{x} \right] dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(z) \cos \frac{\pi z}{2} \int_0^\infty f(t) t^{1-z} \frac{dt}{t} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(z) \cos \frac{\pi z}{2} F(1-z). \end{aligned}$$

根据恒等式 (请诸位自证)

$$\frac{2^{\frac{z}{2}} \Gamma(\frac{z}{2})}{2^{\frac{1-z}{2}} \Gamma(\frac{1-z}{2})} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(z) \cos \frac{\pi z}{2},$$

得到 (15.4.47).

(ii) \Rightarrow (i): 上面恒等式结合 (15.4.47) 给出

$$F(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(t) \cos(tx) dt \right] x^z \frac{dx}{x}.$$

利用 Mellin 变换的唯一性推出 (15.4.46). \square

令 $K_c(z)$ 和 $K_s(z)$ 分别为 $\sqrt{2/\pi} \cos x$ 和 $\sqrt{2/\pi} \sin x$ 的 Mellin 变换. 则

$$K_c(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(z) \cos \frac{\pi z}{2}, \quad K_s(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(z) \sin \frac{\pi z}{2} \quad (15.4.50)$$

根据练习15.4.28.

练习15.4.31. 假设 $(f(x), F(z))$ 和 $(g(x), G(z))$ 是 Mellin 对.

(1) 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty g(t) \cos(tx) dt, \quad g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos(tx) dt,$$

则

$$F(z) = G(1-z)K_c(z), \quad G(z) = F(1-z)K_c(z).$$

(2) 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty g(t) \sin(tx) dt, \quad g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \sin(tx) dt,$$

则

$$F(z) = G(1-z)K_s(z), \quad G(z) = F(1-z)K_s(z).$$

为了应用定理15.4.30 我们需要找到满足条件 (15.4.46) 或 (15.4.48) 的函数. 比如考虑函数

(i) $x^{-\frac{1}{2}}, e^{-\frac{1}{2}x^2}, \operatorname{sech}(\sqrt{\frac{\pi}{2}}x), \dots$, 满足 (15.4.46).

(ii) $x^{-\frac{1}{2}}, xe^{-\frac{1}{2}x^2}, \frac{1}{e^{\sqrt{2\pi x}-1}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}, \dots$, 满足 (15.4.48).

我们排除掉函数 $e^{-\frac{1}{2}}$ 这是因为它不属于 $L^1(\mathbb{R}^+, dx/x)$.

(1) $f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x^2}$. 因为 $(e^{-x}, \Gamma(z))$ 是 Mellin 对, 所以根据练习15.4.12 (e) 得到 $(f(x), F(z))$ 是 Mellin 对, 这里 $F(z) = 2^{\frac{z}{2}}\Gamma(\frac{z}{2})$. 因此得到 (15.4.47).

(2) $f(x) = \sqrt{2}xe^{-\frac{1}{2}x^2}$. 因为 $(2e^{-\frac{1}{2}x^2}, 2^{\frac{z}{2}}\Gamma(\frac{z}{2}))$ 是 Mellin 对, 根据练习15.4.12 (d) 得到 $(f(x), F(z))$ 是 Mellin 对, 这里 $F(z) = 2^{\frac{z}{2}}\Gamma(\frac{z+1}{2})$. 因此得到 (15.4.49).

(3) $f(x) = \operatorname{sech}(\sqrt{\frac{\pi}{2}}x)$. 回顾

$$\frac{1}{2}\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-2x}} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n e^{-(2n+1)x}$$

从而积分得到

$$\int_0^\infty \frac{1}{2}\operatorname{sech}(x) \frac{dx}{x} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \int_0^\infty e^{-(2n+1)x} x^z \frac{dx}{x} = \Gamma(z) \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^z}.$$

若定义 $\chi_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_3$ 为

$$\chi_1(2k) = 0, \quad \chi_1(4k+1) = 1, \quad \chi_1(4k+3) = -1, \quad (15.4.51)$$

其相应的 Dirichlet 级数为

$$L(z, \chi_1) \equiv D_{\chi_1}(z) := \sum_{n \geq 1} \frac{\chi_1(n)}{n^z}. \quad (15.4.52)$$

所以得到

$$\left(\frac{1}{2}\operatorname{sech}(x), \Gamma(z)L(z, \chi_1) \right) \text{ 是 Mellin 对.} \quad (15.4.53)$$

作为推论可知 $(f(x), 2(\frac{z}{\pi})^{\frac{z}{2}}\Gamma(z)L(z, \chi_1))$ 是 Mellin 对.

(4) $f(x) = \cosh(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}x)/\cosh(\sqrt{\pi}x)$ 满足 (15.4.46). 则 $(f(x), F(z))$ 是 Mellin 对, 这里 $F(z) = L(z, \chi_2) = \sum_{n \geq 1} \chi_2(n)/n^z$ 和

$$\chi_2(n) := \begin{cases} 1, & n \equiv 1, 3 \pmod{8}, \\ -1, & n \equiv 5, 7 \pmod{8}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (15.4.54)$$

(5) $f(x) = \sinh(\frac{1}{2}\sqrt{\pi x})/\sinh(\sqrt{\pi x})$ 满足 (15.4.48). 则 $(f(x), F(z))$ 是 Mellin 对, 这里 $F(z) = L(z, \chi_3) = \sum_{n \geq 1} \chi_3(n)/n^z$ 和

$$\chi_3(n) := \begin{cases} 1, & n \equiv 1, 7 \pmod{8}, \\ -1, & n \equiv 3, 5 \pmod{8}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (15.4.55)$$

(6) $f(x) = \frac{1}{1+2\cosh(\sqrt{\frac{2\pi}{3}}x)}$ 满足 (15.4.46). 则 $(f(x), F(z))$ 是 Mellin 对, 这里 $F(z) = L(z, \chi_4) = \sum_{n \geq 1} \chi_4(n)/n^z$ 和

$$\chi_4(n) := \begin{cases} 1, & n \equiv 1 \pmod{3}, \\ -1, & n \equiv -1 \pmod{3}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (15.4.56)$$

(7) $f(x) = \frac{\sinh(\sqrt{\frac{\pi}{6}}x)}{\cosh(\sqrt{\frac{2\pi}{3}}x)-1}$ 满足 (15.4.48). 则 $(f(x), F(z))$ 是 Mellin 对, 这里 $F(z) = L(z, \chi_5) = \sum_{n \in \mathbf{N}} \chi_5(n)/n^z$ 和

$$\chi_5(n) := \begin{cases} 1, & n \equiv 1, 11 \pmod{12}, \\ -1, & n \equiv 5, 7 \pmod{12}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (15.4.57)$$

(8) $f(x) = (e^{\sqrt{2\pi x}} - 1)^{-1} - (\sqrt{2\pi x})^{-1}$. 则 $(f(x), F(z))$ 是 Mellin 对, 这里 $F(z) = (2\pi)^{-\frac{z}{2}}\Gamma(z)\zeta(z)$ 且 $\text{Re}(z) \in (0, 1)$. 如果定义

$$\lambda(z) := \frac{F(z)}{2^{\frac{z}{2}}\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{z}{2})} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z), \quad (15.4.58)$$

则根据 (15.4.49) 得到

$$\lambda(z) = \lambda(1-z), \quad 0 < \text{Re}(z) < 1. \quad (15.4.59)$$

作为推论, 对任意 $z \in \mathbf{C}$ 且 $0 < \text{Re}(z) < 1$, 有

$$\zeta(1-z) = \left[\frac{2^{z+1}\Gamma(z)}{\pi \sin \frac{\pi z}{2}} \right] \zeta(z), \quad \zeta(z) = \left[2^z \pi^{z-1} \sin \frac{\pi z}{2} \Gamma(1-z) \right] \zeta(1-z). \quad (15.4.60)$$

进一步计算得到

$$\begin{aligned} \pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) &= \pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \left[2^z \pi^{z-1} \sin \frac{\pi z}{2} \Gamma(1-z) \right] \zeta(1-z) \\ &= \pi^{\frac{z}{2}-1} 2^z \sin \frac{\pi z}{2} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \Gamma(1-z) \zeta(1-z) \\ &= \pi^{\frac{z}{2}-1} 2^z \frac{\pi}{\Gamma(\frac{z}{2})\Gamma(1-\frac{z}{2})} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \Gamma(1-z) \zeta(1-z) \end{aligned}$$

$$= \pi^{\frac{z}{2}} 2^z \frac{\Gamma(1-z)}{\Gamma(1-\frac{z}{2})} \zeta(1-z) = \pi^{\frac{z}{2}} 2^z \frac{\Gamma(\frac{1-z}{2})}{\sqrt{\pi} 2^z} \zeta(1-z).$$

故

$$\pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z) = \pi^{-\frac{1-z}{2}} \Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right) \zeta(1-z), \quad 0 < \operatorname{Re}(z) < 1. \quad (15.4.61)$$

定理15.4.32. (Riemann) 定义

$$\zeta(z) := \begin{cases} \frac{1}{2} z(z-1) \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z), & \operatorname{Re}(z) > 0, \\ \frac{1}{2} z(z-1) \pi^{-\frac{1-z}{2}} \Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right) \zeta(1-z), & \operatorname{Re}(z) < 1. \end{cases} \quad (15.4.62)$$

则 $\zeta(z)$ 是整函数且对任意 $z \in \mathbf{C}$ 都满足

$$\zeta(z) = \zeta(1-z) \quad (15.4.63)$$

证: 根据定理 15.3.2 (3) 和定理 15.4.26 (b), 可知函数

$$\frac{1}{2} z(z-1) \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z)$$

关于 z 是全纯的, 这里 $\operatorname{Re}(z) > 0$. 类似地可以证明函数

$$\frac{1}{2} z(z-1) \pi^{-\frac{1-z}{2}} \Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right) \zeta(1-z)$$

关于 z 也是全纯的, 这里 $\operatorname{Re}(z) < 1$. 在区间 $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$ 内, 根据 (15.4.61) 可知上述两个函数是一样的. \square

因为 $(e^{-x}, \Gamma(z))$ 是 Mellin 对, 所以 $(e^{-\pi x^2}, \frac{1}{2} \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma(\frac{z}{2}))$ 也是 Mellin 对.

(i) 对任意 $n \in \mathbf{N}$, $(2e^{-\pi n^2 x^2}, \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma(\frac{z}{2}) \frac{1}{n^z})$ 都是 Mellin 对. 即,

$$\pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \frac{1}{n^z} = 2 \int_0^\infty e^{-\pi n^2 x^2} x^z \frac{dx}{x}, \operatorname{Re}(z) > 0, \quad (15.4.64)$$

和

$$2e^{-\pi n^2 x^2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty} \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \frac{x^{-z}}{n^z} dz, \sigma > 0. \quad (15.4.65)$$

(ii) 根据 (i) 可知 $(\sum_{n \in \mathbf{N}} 2e^{-\pi n^2 x^2}, \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma(\frac{z}{2}) \zeta(z))$ 是 Mellin 对. 定义

$$\theta(x) := \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-\pi n^2 x}, \quad \Lambda(z) := \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z). \quad (15.4.66)$$

定理15.4.33. $(\theta(x^2 - 1), \Lambda(z))$ 是 Mellin 对. 即,

$$\Lambda(z) = \int_0^\infty [\theta(x^2) - 1] x^z \frac{dx}{x}, \operatorname{Re}(z) > 1 \quad (15.4.67)$$

和

$$\theta(x^2) - 1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty} \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z) x^{-z} dz, \sigma > 1. \quad (15.4.68)$$

因此, $(\frac{1}{2}[\theta(x) - 1], \Lambda(2z))$ 对任意 $\operatorname{Re}(z) > \frac{1}{2}$ 都是 Mellin 对.

从 (15.4.68) 和定理 15.4.32 我们看到对任何 $\sigma > 1$ 都有

$$\begin{aligned} \theta(x^2) - 1 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{1-\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{1-\sigma+\sqrt{-1}\infty} \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z) x^{-z} dz + \frac{1}{x} - 1 \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty} \pi^{-\frac{1-z}{2}} \Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right) \zeta(1-z) x^{-1+z} dz + \frac{1}{x} - 1 \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty} \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z) \left(\frac{1}{x}\right)^{-z} dz + \frac{1}{x} - 1 \\ &= \frac{1}{x} \left[\theta\left(\frac{1}{x^2}\right) - 1 \right] - \frac{1}{x} - 1. \end{aligned}$$

这里第一个恒等式利用 Cauchy 积分公式和定理 15.4.26.

定理15.4.34. 对任何 $x > 0$ 都有

$$\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \theta\left(\frac{1}{x}\right). \quad (15.4.69)$$

即 $\theta(x)$ 是权为 $1/2$ 的模形式 (具体细节见 §15.5).

练习15.4.35. 验证

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left(\int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty} - \int_{1-\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{1-\sigma+\sqrt{-1}\infty} \right) \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z) x^{-z} dz = \frac{1}{x} - 1.$$

§15.4.2 * Ψ 和 Φ 函数

对任何 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$ 定义

$$f(z) := - \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

由于当 $n \gg 1$ 时有

$$\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1-z}{n^2} + \frac{z^2-1}{n^3} + \frac{1-z^3}{n^4} + \frac{z^4-1}{n^5} + \dots \sim \frac{1-z}{n^2}$$

则级数 $\sum_{n \geq 0} (\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1})$ 是收敛的. 注意到

$$f(z+1) = \frac{1}{z} + f(z).$$

如果 $g'(z) = f(z)$ 和 $h(z) = e^{g(z)}$, 则

$$h(z+1) = Czh(z).$$

因此 $h(z)$ 看起来像 $\Gamma(z)$, 或者 $f(z)$ 看起来像 $\Gamma'(z)/\Gamma(z)$.

定义 Ψ 函数为

$$\Psi(z) := -\gamma - \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n \geq 0} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{z+n} \right]. \quad (15.4.70)$$

定理15.4.36. $\Psi(z)$ 满足

$$\Psi(z+1) - \Psi(z) = \frac{1}{z}, \quad (15.4.71)$$

$$\Psi(1-z) - \Psi(z) = \pi \cot(\pi z), \quad (15.4.72)$$

$$\Psi(1+z) - \Psi(1-z) = \frac{1}{z} - \pi \cot(\pi z), \quad (15.4.73)$$

$$\psi \left(\frac{1}{2} + z \right) - \Psi \left(\frac{1}{2} - z \right) = \pi \tan(\pi z). \quad (15.4.74)$$

证: 第一个恒等式时显然的. 利用恒等式 (如果 z 是复数则可令用复变函数知识给出证明. 如果 $z \in \mathbb{R}$ 则利用 Eisenstein 方法得到证明, 参见 (6.4.26))

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} \right) \quad (15.4.75)$$

得到 (15.4.72) 和 (15.4.73). 在 (15.4.72) 中把 z 换成 $\frac{1}{2} - z$ 得到 (15.4.74). \square

定理15.4.37. $\Psi^{(k)}(z)$ 满足

$$\Psi'(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(z+n)^2}, \quad (15.4.76)$$

$$\pi^2 \csc^2(\pi z) = \Psi'(z) + \Psi'(1-z), \quad (15.4.77)$$

$$\Psi^{(k)}(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{k+1} k!}{(z+n)^{k+1}} = (-1)^{k+1} k! \zeta(k+1, z), \quad (15.4.78)$$

$$\Psi^{(k)}(1) = (-1)^{k+1} k! \zeta(k+1). \quad (15.4.79)$$

这里 $\zeta(k+1, z)$ 是由练习15.4.27 所给出的 Hurwitz zeta 函数.

证: 回顾到 (利用 (15.4.75))

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \pi^2 \csc^2(\pi z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2}.$$

这样我们就得到 (15.4.76) 和 (15.4.77). 最后两个恒等式是显然的. \square

回顾 $\Psi(z) = -\gamma + f(z)$ 这里

$$f(z) = -\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

计算得到

$$\begin{aligned} f_{2N+1}(z) &:= \sum_{0 \leq n \leq 2N+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+z} \right) \\ &= \sum_{0 \leq n \leq N} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+z} \right) + \sum_{0 \leq n \leq N} \left[\frac{1}{(2n+1)+1} - \frac{1}{(2n+1)+z} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{0 \leq n \leq N} \left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{n+\frac{z}{2}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{0 \leq n \leq N} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+\frac{z+1}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} f_N \left(\frac{z}{2} \right) + \frac{1}{2} f_N \left(\frac{z+1}{2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{0 \leq n \leq N} \left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[f_N \left(\frac{z}{2} \right) + f_N \left(\frac{z+1}{2} \right) \right] + \sum_{1 \leq n \leq 2N} \frac{(-1)^{n-1}}{n}. \end{aligned}$$

令 $N \rightarrow \infty$ 得到

定理15.4.38. Ψ 满足

$$\Psi(z) = \frac{1}{2} \left[\Psi \left(\frac{z}{2} \right) + \Psi \left(\frac{z+1}{2} \right) \right] + \ln 2, \quad (15.4.80)$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{n} \sum_{0 \leq k \leq n-1} \Psi \left(\frac{z+k}{n} \right) + \ln n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (15.4.81)$$

练习15.4.39. 证明 (15.4.81).

定义积分

$$\Phi(z) := \int_1^z \Psi(w) dw \quad (15.4.82)$$

其中 $\Phi(1) = 0$, 这里积分路径和负实轴不相交.

定理15.4.40. 我们有

$$\Phi(2) = 0, \quad \Phi \left(\frac{1}{2} \right) = \ln \sqrt{\pi}. \quad (15.4.83)$$

证: 计算得到

$$\begin{aligned}\Phi(2) &= \int_1^2 \left[-\gamma - \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1} \right) \right] dz \\ &= -\gamma - \sum_{n \geq 0} \int_1^2 \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1} \right) dz = -\gamma - \sum_{n \geq 0} \left(\ln \frac{n+2}{n+1} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= -\gamma + \lim_{N \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} - \ln(N+1) \right] = -\gamma + \gamma = 0.\end{aligned}$$

回顾Wallis 公式如下 (参见 (5.4.31))

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{(2N-2)!!}{(2N-1)!!} \right]^2 2N. \quad (15.4.84)$$

计算可得到

$$\begin{aligned}\Phi\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_1^{\frac{1}{2}} \left[-\gamma - \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1} \right) \right] dz \\ &= \frac{1}{2}\gamma - \sum_{n \geq 0} \left(\ln \frac{\frac{1}{2}+n}{1+n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} - \ln N \right) \\ &\quad - \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{0 \leq n \leq N-1} \ln \frac{2n+1}{2n+2} + \frac{1}{2} \ln N \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{(2N)!!}{(2N-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} \right].\end{aligned}$$

故得到 $2\Phi(1/2) = \ln \pi$. \square

练习15.4.41. 利用 (15.4.84) 证明 $(2n)!!/(2n-1)!! \sim \sqrt{\pi n}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时.

对 (15.4.71) 积分得到

$$\Phi(z+1) - \Phi(z) = \ln z + C_1.$$

取 $z=1$ 得到 $C_1=0$. 对 (15.4.72) 积分得到

$$-\Phi(1-z) - \Phi(z) = \ln \sin(\pi z) + C_2.$$

取 $z=\frac{1}{2}$ 得到 $C_2=-\ln \pi$. 对 (15.4.80) 积分得到

$$\Phi(z) = \Phi\left(\frac{z}{2}\right) + \Phi\left(\frac{z+1}{2}\right) + z \ln 2 + C_3.$$

取 $z=1$ 得到 $C_3=-\ln 2 - \ln \sqrt{\pi}$.

定理15.4.42. $\Phi(z)$ 满足

$$\Phi(z+1) = \Phi(z) + \ln z, \quad (15.4.85)$$

$$\Phi(z) + \Phi(1-z) = \ln \pi - \ln \sin(\pi z), \quad (15.4.86)$$

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \Phi\left(\frac{z}{2}\right) + \Phi\left(\frac{1+z}{2}\right) \\ &\quad + \ln(2^{z-1}) - \ln \sqrt{\pi}. \end{aligned} \quad (15.4.87)$$

若记 $F(z) := e^{\Phi(z)}$ 则定理15.4.42 可表述成

$$\begin{aligned} F(1+z) &= zF(z), \\ F(z)F(1-z) &= \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \\ F(z)F\left(z + \frac{1}{2}\right) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}}F(2z). \end{aligned}$$

根据定理 5.5.23 得到 $F(z) = \Gamma(z)$.

定理15.4.43. 我们有

$$\Phi(z) = \ln \Gamma(z), \quad \Psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \quad (15.4.88)$$

更进一步有

$$\Phi(z) = -\gamma z - \ln z + \sum_{n \geq 1} \left[\frac{z}{n} - \ln \left(1 + \frac{z}{n}\right) \right]. \quad (15.4.89)$$

证: 对 (15.4.70) 积分得到

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \int_1^z \Psi(w) dw = \int_1^z \left[-\gamma - \frac{1}{w} - \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{w+n} - \frac{1}{n} \right) \right] dw \\ &= -\gamma z + \gamma - \ln z - \sum_{n \geq 1} \left(\ln \frac{z+n}{1+n} - \frac{z}{n} + \frac{1}{n} \right) \\ &= -\gamma z + \gamma - \ln z + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{z}{n} - \ln \frac{z+n}{n} \right) + \sum_{n \geq 1} \left(\ln \frac{n+1}{n} - \frac{1}{n} \right) \\ &= -\gamma z + \gamma - \ln z + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{z}{n} - \ln \frac{z+n}{n} \right). \end{aligned}$$

注意到 (15.4.89) 中的级数时绝对收敛的, 这是因为 $\frac{z}{n} - \ln(1 + \frac{z}{n}) \sim \frac{z^2}{2n^2}$. \square

练习15.4.44. 证明 (15.4.89) 中的级数时绝对收敛的.

利用 Taylor 级数展开 $\ln(1 + \frac{1}{n}) = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{kn^k}$ 得到

$$\ln(1+N) - \sum_{1 \leq n \leq N} \frac{1}{n} = \sum_{1 \leq n \leq N} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \sum_{1 \leq n \leq N} \frac{1}{n} = \sum_{k \geq 2} \sum_{1 \leq n \leq N} \frac{(-1)^{k-1}}{kn^k}.$$

令 $N \rightarrow \infty$ 得到如下的 (15.4.90), 这是因为 $\zeta(2) > \zeta(3) > \zeta(4) > \dots$.

性质15.4.45. 我们有

$$\gamma = \sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^k \zeta(k)}{k}, \quad (15.4.90)$$

$$\Psi(1+z) = -\gamma + \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \zeta(n+1) z^n, \quad |z| < 1, \quad (15.4.91)$$

$$\begin{aligned} \Phi(1+z) &= \ln \Gamma(1+z) \\ &= -\gamma z + \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n \zeta(n)}{n} z^n, \quad |z| < 1, \end{aligned} \quad (15.4.92)$$

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= \Psi(z_0) \\ &+ \sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} \zeta(k+1, z_0) (z - z_0)^k, \quad z_0 \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}_{\leq 0}, \end{aligned} \quad (15.4.93)$$

$$\gamma = \sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{\zeta(n) - 1}{n} + 1 - \ln 2, \quad (15.4.94)$$

$$\begin{aligned} \Phi(1+z) &= \ln \Gamma(1+z) \\ &= -\ln(1+z) + (1-\gamma)z + \sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{\zeta(n) - 1}{n} z^n, \end{aligned} \quad (15.4.95)$$

$$\ln \Gamma(1+z) = \frac{1}{2} \ln \frac{\pi z}{\sin(\pi z)} - \gamma z - \sum_{n \geq 1} \frac{\zeta(2n+1)}{2n+1} z^{2n+1}, \quad (15.4.96)$$

$$\begin{aligned} \ln \Gamma(1+z) &= \frac{1}{2} \ln \frac{\pi z}{\sin(\pi z)} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-z}{1+z} + (1-\gamma)z \\ &- \sum_{n \geq 1} \frac{\zeta(2n+1) - 1}{2n+1} z^{2n+1}, \end{aligned} \quad (15.4.97)$$

$$\gamma = 1 + \ln 2 - \ln 3 - \sum_{n \geq 1} \frac{\zeta(2n+1) - 1}{(2n+1)4^n}, \quad (15.4.98)$$

$$\Psi(1+z) = \frac{1}{2z} - \frac{\pi}{2} \cot(\pi z) - \sum_{n \geq 0} \zeta(2n+1) z^{2n}, \quad (15.4.99)$$

$$\begin{aligned} \Psi(1+z) &= \frac{1}{2z} - \frac{\pi}{2} \cot(\pi z) \\ &- \frac{1}{1-z^2} - \sum_{n \geq 0} [\zeta(2n+1) - 1] z^{2n}. \end{aligned} \quad (15.4.100)$$

这里 $\zeta(1) := \gamma$, (15.4.94) 是 Euler 得到的, (15.4.95) 和 (15.4.96) 是 Legendre 得到的, 和 (15.4.98) 是 Stieltjes 得到的.

证: 通过计算得到

$$\begin{aligned} \Psi(1+z) &= -\gamma - \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{z+1+n} - \frac{1}{n+1} \right) = -\gamma - \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) \\ &= -\gamma - \sum_{n \geq 1} \left[\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{n} \binom{z}{n}^k - \frac{1}{n} \right] = -\gamma - \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{n^{k+1}} z^k \\ &= -\gamma + \sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} \zeta(k+1) z^k. \end{aligned}$$

这里我们可以把 γ 看作是“ $\zeta(1)$ ”. 对 (15.4.91) 积分得到 (15.4.92).

对任意 $z_0 \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}_{\leq 0}$ 有

$$\begin{aligned} \Psi(z_0 + z) - \Psi(z_0) &= \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{z_0 + n} - \frac{1}{z_0 + z + n} \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \left[\frac{1}{z_0 + n} - \frac{1}{z_0 + n} \sum_{k \geq 0} (-1)^k \left(\frac{z}{z_0 + n} \right)^k \right] \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{(z_0 + n)^{k+1}} z^k = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} \zeta(k+1, z_0) z^k \end{aligned}$$

因为

$$1 < \zeta(n) < 1 + \frac{1}{2^{n-2}}, \quad n \geq 2, \quad (15.4.101)$$

所以得到

$$0 < \zeta(n) - 1 < \frac{1}{2^{n-2}}$$

和 (15.4.94). 公式 (15.4.95) 可从 (15.4.92) 和 $\ln(1+z) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$. 在 (15.4.95) 中把 z 替换成 $-z$ 得到

$$\ln \Gamma(1-z) = -\ln(1-z) - (1-\gamma)z + \sum_{n \geq 2} \frac{\zeta(n) - 1}{n} z^n.$$

故

$$\ln \Gamma(1+z) - \ln \Gamma(1-z) - \ln \frac{1-z}{1+z} + 2(1-\gamma)z - 2 \sum_{n \geq 1} \frac{\zeta(2n+1) - 1}{2n+1} z^{2n+1}.$$

利用恒等式

$$\ln \Gamma(1+z) + \ln \Gamma(1-z) = \ln \frac{\pi z}{\sin(\pi z)},$$

我们得到 (15.4.97). 公式 (15.4.96) 可从恒等式

$$\ln \sin(\pi z) = \ln(\pi z) - \sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{\zeta(2n)}{n} z^{2n} \quad (15.4.102)$$

得到. 最后在 (15.4.97) 中取 $z = 1/2$ 得到 (15.4.98). \square

练习15.4.46. 证明 (15.4.101) 和 (15.4.102).

定理15.4.47. (Binet) (1) 我们有

$$\Gamma(1+z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n, \quad |z| < 1, \quad (15.4.103)$$

其中

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^{k+1} \zeta(k+1) a_{n-k}, \quad n \geq 0. \quad (15.4.104)$$

实际上

$$a_n = (-1)^n \sum_{1 \leq k \leq n} \sum_{r_1 + \dots + r_k = n} \frac{1}{k!} \frac{\zeta(r_1) \cdots \zeta(r_k)}{r_1 \cdots r_k}. \quad (15.4.105)$$

这里 $\zeta(1) := \gamma$.

(2) 我们有

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)} = \sum_{n \geq 0} b_n z^n, \quad |z| < 1, \quad (15.4.106)$$

其中

$$b_0 = 1, \quad b_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k \zeta(k+1) b_{n-k}, \quad n \geq 0. \quad (15.4.107)$$

实际上

$$b_n = (-1)^n \sum_{1 \leq k \leq n} \sum_{r_1 + \dots + r_k = n} \frac{(-1)^k \zeta(r_1) \cdots \zeta(r_k)}{k r_1 \cdots r_k}. \quad (15.4.108)$$

证: 由于 $\Gamma'(1+z) = \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$, $|z| < 1$, 和 $\Psi(1+z)\Gamma(1+z) = \Gamma'(1+z)$, 我们利用 (15.4.91) 得到

$$\sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^{k+1} \zeta(k+1) a_{n-k} = (n+1) a_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

公式 (15.4.105) 则立即得到. \square

比如

$$a_1 = -\zeta(1) = -\gamma, \quad a_2 = \frac{1}{2}\zeta(2) + \frac{1}{2}\zeta(1)^2 = \frac{\pi^2}{12} + \frac{\gamma^2}{2}$$

and

$$b_1 = \zeta(1) = \gamma, \quad b_2 = -\frac{1}{2}\zeta(2) + \frac{1}{2}\zeta(1)^2 = -\frac{\pi^2}{12} + \frac{\gamma^2}{2}.$$

在 (15.4.70) 中取 $z = x + \sqrt{-1}y$ 就得到

$$\begin{aligned} \Psi(x + \sqrt{-1}y) &= -\gamma + \sum_{n \geq 0} \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(x+n) + \sqrt{-1}y} \right] \\ &= -\gamma + \sum_{n \geq 0} \left[\frac{1}{n+1} - \frac{x+n}{(x+n)^2 + y^2} \right] + \sqrt{-1} \sum_{n \geq 0} \frac{y}{(x+n)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

因此函数 $\Psi(z)$ 仅有实零点. 当 $x, y > 0$ 时我们得到

$$\Psi(x) - \Psi(y) = (x-y) \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(x+n)(y+n)}. \quad (15.4.109)$$

即 $\Psi(x)$ 在区间 $(0, \infty)$ 内时单调递增的. 因为 $\Psi(1) = -\gamma < 0$ 和 $\Psi(2) = 1 - \gamma > 0$, 所以存在唯一的 $r \in (1, 2)$ 满足 $\Psi(r) = 0$. 另一方面, 对每个 $n \in \mathbb{N}$,

函数 $\Psi(x)$ 在区间 $(-n-1, -n)$ 内时单调递增的且 $\Psi(x)$ 在 $-n$ 处有单极点. 故存在唯一的 $r_n \in (-n-1, -n)$ 满足 $\Psi(r_n) = 0$. 根据定义得到

$$\Psi(n) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}. \quad (15.4.110)$$

定理15.4.48. 我们有如下性质:

- (a) $\Psi(z)$ 仅有实零点.
- (b) $\Psi(x)$ 在区间 $(0, \infty)$ 内单调递增且对每个 $n \in \mathbb{N}$ 函数 $\Psi(x)$ 在区间 $(-n-1, -n)$ 内也是单调递增的.
- (c) $\Psi(x)$ 有唯一的正实零点 $r \in (1, 2)$.
- (d) $\Psi(x)$ 在每个区间 $(-n-1, -n)$ 内有唯一的零点 r_n .
- (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} [\Psi(x) - \ln x] = 0$.

计算表明

$$r = 1.4616321451105, r_0 = -0.504083008, r_1 = -1.57349847, r_2 = -2.61072087.$$

为了研究唯一的负零点, 记

$$r_n := -n - 1 + \epsilon_n, \quad \epsilon_n \in (0, 1). \quad (15.4.111)$$

在 (15.4.72) 中取 $z = r_n = -n - 1 + \epsilon_n$, 则根据定理 15.4.48 (e) 得到

$$\pi \cot(\pi \epsilon_n) = \Psi(n + 2 - \epsilon_n) = \ln n + \delta_n$$

这里 $\delta_n \rightarrow 0$. 因此

$$\begin{aligned} \epsilon_n &= \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\pi}{\ln n + \delta_n} \right) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{\ln n + \delta_n} - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{\ln n + \delta_n} \right)^3 + \cdots \right] \\ &= \frac{1}{\ln n + \delta_n} - \frac{\pi^2}{3(\ln n + \delta_n)^3} + \cdots \end{aligned}$$

推论15.4.49. (Hermite) 我们有

$$r_n = -n - 1 + \frac{1}{\ln n} + \delta'_n, \quad (15.4.112)$$

这里 $\delta'_n = O(1/(\ln n)^3)$.

下面结论是定理15.3.2的直接推论.

推论15.4.50. $\Gamma(x)$ 函数满足如下性质:

- (a) $\Gamma(x)$ 在区间 $(0, \infty)$ 上恒为正的且在 r 处取到最小值.
- (b) $\Gamma(x)$ 在区间 $(-2n, -2n+1)$ 上恒为正的且在 r_{2n-1} 处取到最小值.
- (c) $\Gamma(x)$ 在区间 $(-2n-1, -2n)$ 上恒为负的且在 r_{2n-1} 处取到最大值.

§15.4.3 * Γ 函数的 Euler 定义

回顾

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \ln \Gamma(x) = \Phi(x), \quad \Phi'(x) = \Psi(x), \quad \Psi'(x) > 0 \text{ in } (0, \infty).$$

称函数 $F(x)$ 在 (a, b) 上是凸的 如果

$$F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda F(x_1) + (1-\lambda)F(x_2)$$

对任何 $\lambda \in (0, 1)$ 和 $x_1, x_2 \in (a, b)$ 都成立. 如果 $F \in C^2((a, b))$, 则 F 是凸的当且仅当 $F'' > 0$. 从而以上部分性质可总结如下

(i) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(ii) $\ln \Gamma(x)$ 在 $(0, \infty)$ 内是凸的.

(iii) $\Gamma(1) = 1$.

定理15.4.51. 如果函数 $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 满足如下条件

(i) $f(x+1) = xf(x)$,

(ii) $\ln f(x)$ 在 $(0, \infty)$ 内是凸的,

(iii) $f(1) = 1$,

则必有

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}.$$

证: 参见定理 3.1.17 的证明. \square

推论15.4.52. (Euler) 我们有

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z n!}{z(z+1) \cdots (z+n)}. \quad (15.4.113)$$

公式 (15.4.113) 可以通过直接计算得到. 根据

$$\int_0^1 t^{x-1} (1-t)^n dt = \frac{n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}$$

得到

$$G_n(x) = n^x \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^n dt = \int_0^n y^{x-1} \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n dy.$$

因此 $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x)$. 观察到

$$\frac{G_n(z)}{G_{n-1}(z)} = 1 + \frac{c_n(z)}{n^2}$$

这里 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n(z) = \frac{z(z+1)}{2}$. 故

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{c_n(z)}{n^2}\right). \quad (15.4.114)$$

定理15.4.53. (Bohr-Mollerup-Artin) 如果函数 $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 满足如下条件

- (i) $f(x+1) = xf(x)$,
- (ii) $\ln f(x)$ 在 $(0, \infty)$ 内是凸的,
- (iii) $f(1) = 1$,

则 $f(x) = \Gamma(x)$ 对任意 $x \in (0, \infty)$ 都成立.

接下来则给出定理 15.4.53 的几个应用.

(A) **定理 15.4.18:** 对每个 $n \in \mathbb{N}$ 定义

$$f(x) := n^x \Gamma\left(\frac{x}{n}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right).$$

则 $f(x+1) = xf(x)$ 和 $\ln f(x)$ 是凸的. 根据定理 15.4.53 我们得到 $f(x) = c_n \Gamma(x)$, 这里根据 (15.3.10) 有

$$c_n = f(1) = n \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \sqrt{n} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.$$

(B) **定理 15.3.3:** 令

$$g(x) := \frac{\pi}{\Gamma(1-x) \sin(\pi x)}, \quad x \in (0, \infty).$$

则 $\ln g(x)$ 是凸的且 $g(x+1) = xg(x)$. 根据定理 15.4.53 得到 $g(x) = c\Gamma(x)$, 这里

$$c = \frac{\pi}{\Gamma(x)\Gamma(1-x) \sin(\pi x)}.$$

令 $x \rightarrow 0$ 推出 $c = 1$.

(C) $B(x, a) = \Gamma(x)\Gamma(a)/\Gamma(x+a)$: 计算得到

$$\begin{aligned} B(x, a) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(x+a)(x+a+1) \cdots (x+a+n)}{x(x+1) \cdots (x+n)a(a+1) \cdots (a+n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{x}{a+1}\right) \cdots \left(1 + \frac{x}{a+n}\right) \\ &\quad \cdot \frac{1}{x} \left(1 - \frac{x}{x+1}\right) \left(1 - \frac{x}{x+2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{x+n}\right). \end{aligned}$$

推论15.4.54. 我们有

$$B(a, x) = \frac{1}{x} \prod_{n \geq 1} \left[\left(1 + \frac{x}{a+n-1}\right) \left(1 - \frac{x}{x+n}\right) \right]. \quad (15.4.115)$$

考虑多项式

$$P(x) = \prod_{1 \leq i \leq d} (x - \alpha_i), \quad Q(x) = \prod_{1 \leq i \leq d} (x - \beta_i),$$

这里 $\alpha_1, \dots, \alpha_d, \beta_1, \dots, \beta_d \in \mathbb{C}$ 和 $\beta_1, \dots, \beta_d \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$. 因此

$$\prod_{n \geq 1} \frac{P(n)}{Q(n)} \text{ 收敛} \iff \sum_{1 \leq i \leq d} \alpha_i = \sum_{1 \leq i \leq d} \beta_i. \quad (15.4.116)$$

此时推出

$$\prod_{n \geq 1} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{\Gamma(1 - \beta_1) \cdots \Gamma(1 - \beta_d)}{\Gamma(1 - \alpha_1) \cdots \Gamma(1 - \alpha_d)}. \quad (15.4.117)$$

练习15.4.55. 证明等价刻画 (15.4.116). 取 $P(x) = x^2$ 和 $Q(x) = x^2 - \frac{1}{4}$ 重新证明 (15.4.84).

§15.4.4 * Euler 和 Weierstrass 乘积公式

因为

$$\begin{aligned} n^z &= \left(1 + \frac{1}{1}\right)^z \cdots \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^z \left(1 + \frac{1}{n}\right)^z \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^z}, \\ \frac{(z+1) \cdots (z+n)}{n!} &= \left(1 + \frac{z}{1}\right) \left(1 + \frac{z}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{z}{n}\right), \end{aligned}$$

所以根据 (15.4.113) 得到

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n \geq 1} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^z}{\left(1 + \frac{z}{n}\right)}, \quad (15.4.118)$$

称为 **Euler 乘积公式 (Euler product formula)**. 从 Taylor 级数展开

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} = \left(1 + \frac{z}{n}\right) \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^k}{k! n^k} = 1 - \sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^k (k-1) z^k}{k! n^k}$$

和

$$\begin{aligned} \ln[zG_N(z)] &= z \sum_{1 \leq n \leq N} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \sum_{1 \leq n \leq N} \ln \left(1 + \frac{z}{n}\right) - z \ln \left(1 + \frac{1}{N}\right) \\ &= \sum_{1 \leq n \leq N} \left[\frac{z}{n} - \ln \left(1 + \frac{z}{n}\right)\right] - z \sum_{1 \leq n \leq N} \left[\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] - z \ln \left(1 + \frac{1}{N}\right), \end{aligned}$$

我们可知

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \frac{1}{z} \prod_{n \geq 1} \frac{e^{z[\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n}]}}{\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}} = \frac{e^{z \sum_{n \geq 1} [\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n}]}}{z \prod_{n \in \mathbf{N}} \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}\right]} \\ &= \frac{e^{-\gamma z}}{z} \cdot \frac{1}{\prod_{n \geq 1} \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}\right]}. \end{aligned}$$

定理15.4.56. (Weierstrass) 我们有

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n \geq 1} \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right]. \quad (15.4.119)$$

上述公式表明 $1/\Gamma(z)$ 是整函数. 在 (15.4.119) 中取 $z = x + \sqrt{-1}y$ 得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\Gamma(x + \sqrt{-1}y)|} &= \sqrt{x^2 + y^2} e^{\gamma x} \prod_{n \geq 1} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2} e^{-\frac{x}{n}} \right] \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} e^{\gamma x} \prod_{n \geq 1} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} \sqrt{1 + \frac{y^2}{(x+n)^2}} \right]. \end{aligned}$$

另一方面根据

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)} = \frac{1}{x\Gamma(x)} = e^{\gamma x} \prod_{n \geq 1} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} \right].$$

可得

$$\frac{1}{|\Gamma(x + \sqrt{-1}y)|} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\Gamma(x+1)} \sqrt{\prod_{n \geq 1} \left[1 + \frac{y^2}{(x+n)^2} \right]}$$

如果 $x \in (0, 1)$ 则有

$$\frac{1}{1+y^2} \prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{y^2}{n^2}\right) < \prod_{n \geq 1} \left[1 + \frac{y^2}{(x+n)^2} \right] < \prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{y^2}{n^2}\right) = \frac{e^{\pi y} - e^{-\pi y}}{2\pi}.$$

定理15.4.57. 对任意 $x \in (0, 1)$ 和 $y \neq 0$, 我们有

$$|\Gamma(x + \sqrt{-1}y)| = \lambda \cdot \frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sqrt{\frac{2\pi y}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}}} \quad (15.4.120)$$

其中 $\lambda = \lambda(x) \in (1, \sqrt{1+y^2})$.

令 $\zeta_3 := \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ 则 $\zeta_3^3 = 1$.

推论15.4.58. (Liouville) 我们有

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(\zeta_3 z)\Gamma(\zeta_3^2 z)} = z^3 \prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{z^3}{n^3}\right). \quad (15.4.121)$$

证: 计算得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(\zeta_3 z)\Gamma(\zeta_3^2 z)} &= z^3 \prod_{n \in \mathbf{N}} \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) \left(1 + \frac{\zeta_3 z}{n}\right) \left(1 + \frac{\zeta_3^2 z}{n}\right) \right] \\ &= z^3 \prod_{n \in \mathbf{N}} \left(1 + \frac{z^3}{n^3}\right) \end{aligned}$$

这是由于 $1 + \zeta_3 + \zeta_3^2 = 0$. \square

练习15.4.59. 如果 $\zeta_m := e^{2\pi\sqrt{-1}/m}$, 则

$$\prod_{0 \leq k \leq m-1} \frac{1}{\Gamma(1 - \zeta_m^k z)} = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^m}{n^m}\right).$$

对任意 $w \in \mathbb{C}$ 我们有

$$\prod_{0 \leq k \leq m-1} (w - \zeta_m^k z) = w^m - z^m.$$

从而得到

$$\begin{aligned} & \prod_{0 \leq k \leq m-1} \frac{1}{\Gamma(w - \zeta_m^k z)} \\ &= \prod_{0 \leq k \leq m-1} \left\{ (w - \zeta_m^k z) e^{\gamma(w - \zeta_m^k z)} \prod_{n \geq 1} \left[\left(1 + \frac{w - \zeta_m^k z}{n}\right) e^{-\frac{w - \zeta_m^k z}{n}} \right] \right\} \\ &= (w^m - z^m) e^{m\gamma w} \prod_{n \geq 1} \left\{ \left[\left(1 + \frac{w}{n}\right)^m - \left(\frac{z}{n}\right)^m \right] e^{-\frac{m}{n}w} \right\} \\ &= w^m \left(1 - \frac{z^m}{w^m}\right) e^{m\gamma w} \prod_{n \geq 1} \left[\left(1 + \frac{w}{n}\right)^m e^{-\frac{m}{n}w} \right] \prod_{n \geq 1} \left[1 - \frac{z^m}{(w+n)^m} \right] \\ &= \frac{1}{[\Gamma(w)]^m} \prod_{n \geq 0} \left[1 - \frac{z^m}{(w+n)^m} \right]. \end{aligned}$$

定理15.4.60. (Mellin) 我们有

$$\prod_{1 \leq k \leq m-1} \frac{\Gamma(w)}{\Gamma(w - \zeta_m^k z)} = \prod_{n \geq 0} \left[1 - \left(\frac{w}{z+n}\right)^m \right]. \quad (15.4.122)$$

因为 $1, \zeta_m, \dots, \zeta_m^{m-1}$ 是代数方程 $X^m - 1 = 0$ 的所有根, 我们可以问

$$\prod_{1 \leq i \leq m} \frac{1}{\Gamma(w - r_i z)}$$

的无穷乘积展开, 这里 r_1, \dots, r_m 是多项式的根.

练习15.4.61. (Mellin) 证明

$$\begin{aligned} w\Psi(z) &= -\gamma w - \frac{w}{z} - \sum_{n \geq 1} \left(\frac{w}{z+n} - \frac{w}{n} \right), \\ e^{w\Psi(z)} &= e^{-\gamma w} e^{-\frac{w}{z}} \prod_{n \geq 1} e^{-\frac{w}{z+n} + \frac{w}{n}}, \\ e^{w\Psi(z)} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+w)} &= \prod_{n \geq 1} \left[\left(1 + \frac{w}{z+n}\right) e^{-\frac{w}{z+n}} \right], \\ e^{\Psi(z)} &= \prod_{n \geq 1} \left[\left(1 + \frac{1}{z+n}\right) e^{-\frac{1}{z+n}} \right]. \end{aligned}$$

练习15.4.62. (Liouville) 令

$$f(z) := z^3 \prod_{n \in \mathbf{N}} \left(1 + \frac{z^3}{n^3}\right), \quad g(z) := \prod_{n \in \mathbf{N}} \left[1 + \frac{8z^3}{(2n+1)^3}\right],$$

和

$$g_1(z) := \prod_{n \in \mathbf{N}} \left[1 + \frac{27z^3}{(3n+1)^3}\right], \quad g_2(z) := \prod_{n \in \mathbf{N}} \left[1 + \frac{27z^3}{(3n+2)^3}\right].$$

则

$$f(2z) = 8f(z)g(z), \quad f(3z) = 27f(z)g_1(z)g_2(z).$$

§15.4.5 * $\Gamma(z)$ 的渐近展开

如果我们在 (15.4.110) 中把 $\frac{1}{k}$ 替换成

$$\int_0^1 u^{k-1} du$$

则得到

定理15.4.63. (Legendre) 当 $\operatorname{Re}(z) > 0$ 时我们有

$$\Psi(z) = -\gamma + \int_0^1 \frac{1-u^{z-1}}{1-u} du \quad (15.4.123)$$

$$= -\gamma + \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^z} \right] \frac{dt}{t} \quad (15.4.124)$$

$$= -\gamma + \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-x} - e^{-zx}}{1 - e^{-x}} \right) dx. \quad (15.4.125)$$

证: 分别做变量替换 $u = \frac{1}{1+t}$ 和 $u = e^{-x}$ 就可以得到. \square

练习15.4.64. 证明

$$\Psi\left(\frac{3}{2}\right) = -\gamma + 2 - \ln 2, \quad \Psi\left(\frac{4}{3}\right) = -\gamma + 3 - \frac{3}{2} \ln 3 - \frac{\pi}{6} \sqrt{3},$$

$$\Psi\left(\frac{3}{4}\right) = -\gamma + \frac{\pi}{2} - 3 \ln 2, \quad \Psi\left(\frac{1}{4}\right) = -\gamma - \frac{\pi}{2} - 3 \ln 2,$$

$$\Psi\left(\frac{2}{3}\right) = -\gamma + \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{3}{2} \ln 3, \quad \Psi\left(\frac{1}{3}\right) = -\gamma - \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{3}{2} \ln 3.$$

推论15.4.65. (1) 如果 $\operatorname{Re}(z), \operatorname{Re}(w) > 0$, 则

$$\Psi(z) - \Psi(w) = \int_0^1 \frac{u^w - u^z}{1-u} \frac{du}{u} \quad (15.4.126)$$

$$= \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{(1+t)^w} - \frac{1}{(1+t)^z} \right] \frac{dt}{t} \quad (15.4.127)$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-wx} - e^{-zx}}{1 - e^{-x}} dx. \quad (15.4.128)$$

(2) 如果 $-1 < \operatorname{Re}(z) < 1$, 则

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} - \pi \cot(\pi z) &= \int_0^1 \frac{u^{-z} - u^z}{1-u} du & (15.4.129) \\ &= \int_0^\infty \left[(1+t)^{z+1} - \frac{1}{(1+t)^{z+1}} \right] \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \frac{e^{(1+z)x} - e^{(1-z)x}}{1-e^{-x}} dx. \end{aligned}$$

(3) 我们有

$$\ln \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \int_0^1 \frac{u^z - u^{-z} - 2}{1-u} \frac{du}{\ln u}. \quad (15.4.130)$$

练习15.4.66. 证明

$$\begin{aligned} \ln \frac{\pi}{2} &= \int_0^1 \frac{v-1}{v+1} \frac{dv}{\ln v} = \int_0^1 \frac{(u^{\frac{1}{4}} - u^{-\frac{1}{4}})^2}{u-1} \frac{du}{\ln u}, \\ \ln \frac{\pi}{2\sqrt{2}} &= \int_0^1 \frac{(y^2-1)y^2}{(1+y)(1+y^2)} \frac{dy}{\ln y}. \end{aligned}$$

利用 (15.3.5) 得到

$$\begin{aligned} \gamma &= -\int_0^\infty e^{-t} \ln t dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^\infty (-e^{-t} \ln t) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{-t} \ln t \Big|_{\frac{1}{n}}^\infty - \int_{\frac{1}{n}}^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{-\frac{1}{n}} \ln n - \int_{\frac{1}{n}}^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \right). \end{aligned}$$

另一方面, 因为 $e^{-1/n} \ln n \sim \ln n \sim \ln(n+1)$, 所以

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_0^\infty \frac{1}{t(t+1)} dt - \int_{\frac{1}{n}}^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \right].$$

定理15.4.67. (Euler) 我们有

$$\gamma = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t} - e^{-t} \right) \frac{dt}{t}. \quad (15.4.131)$$

练习15.4.68. 证明

$$\gamma = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{xe^x} \right) dx \quad (15.4.132)$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{1-v} - \frac{1}{\ln(1/v)} \right) dv \quad (15.4.133)$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{u} - \frac{e^{1-\frac{1}{u}}}{u^2} \right) du. \quad (15.4.134)$$

推论15.4.69. (Dirichlet-Gauss) 当 $\operatorname{Re}(z) > 0$ 时有

$$\Psi(z) = \int_0^\infty \left[e^{-t} - \frac{1}{(1+t)^z} \right] \frac{dt}{t} \quad (15.4.135)$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-zx}}{1-e^{-x}} \right) dx. \quad (15.4.136)$$

练习15.4.70. 通过考虑二重积分 *considering the double integral*

$$\iint_{[0, \infty) \times [0, \infty)} e^{-u} u^{z-1} (e^{-y} - e^{-uy}) \frac{dy du}{y}.$$

重新给出 (15.4.135) 的证明.

练习15.4.71. 证明

$$\Psi(x) = \int_0^1 \left(e^{1-\frac{1}{y}} - y^z \right) \frac{dy}{y(1-y)} = \int_0^1 \left[\frac{1}{\ln(1/v)} - \frac{v^{z-1}}{1-v} \right] dv.$$

对 (15.4.135) 和 (15.4.136) 积分得到

推论15.4.72. (Plana) 当 $\operatorname{Re}(z) > 0$ 时有

$$\ln \Gamma(z) = \int_0^\infty \left[e^{-t}(z-1) - \frac{(1+t)^{-1} - (1+t)^{-z}}{\ln(1+t)} \right] \frac{dt}{t}, \quad (15.4.137)$$

$$\ln \Gamma(z) = \int_0^\infty \left[e^{-x}(z-1) + \frac{e^{-zx} - e^{-x}}{1-e^{-x}} \right] \frac{dx}{x}. \quad (15.4.138)$$

回顾

$$\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} B'_n}{(2n)!} x^{2n-1} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \coth \frac{x}{2}, \quad 0 < |x| < 1,$$

或

$$\frac{1}{2^{2\pi t} - 1} - \frac{1}{2\pi t} + \frac{1}{2} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} \zeta(2n)}{\pi} t^{2n-1}, \quad 0 < |t| < \frac{1}{2\pi}, \quad (15.4.139)$$

这里 $B'_n := B_{2n} = 2(2n)! \zeta(2n) / (2\pi)^{2n}$ 是第 $2n$ 个 Bernoulli 数 (参见 (15.3.32)).

比如

$$B'_1 = \frac{1}{6}, B'_2 = \frac{1}{30}, B'_3 = \frac{1}{42}, B'_4 = \frac{1}{30}, B'_5 = \frac{5}{66}, B'_6 = \frac{691}{2730}, B'_7 = \frac{7}{6}, B'_8 = \frac{3617}{510}.$$

又回顾到

$$x \coth(x) = 1 + 2x^2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{x^2 + (\pi n)^2}. \quad (15.4.140)$$

受 (15.4.139) 启发我们把 (15.4.136) 写成

$$\begin{aligned} \Psi(z+1) &= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-zx}}{e^x - 1} \right) dx \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-zx} dx + \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-zx}}{2} dx - \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) e^{-zx} dx. \end{aligned}$$

定理15.4.73. 当 $\operatorname{Re}(z) > 0$ 时有

$$\Psi(z+1) = \frac{1}{2z} + \ln z - \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) e^{-zx} dx, \quad (15.4.141)$$

$$\Psi(z) = -\frac{1}{2z} + \ln z - \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) e^{-zx} dx. \quad (15.4.142)$$

证: 可从 $\Psi(z+1) - \Psi(z) = \frac{1}{z}$ 得到. \square

根据定理15.4.48 我们定义

$$v(z) := \ln z - \Psi(z). \quad (15.4.143)$$

推论15.4.74. 当 $\operatorname{Re}(z) > 0$ 时有

$$v(z) = \frac{1}{2z} + \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) e^{-zx} dx, \quad (15.4.144)$$

$$v(z) = \sum_{n \geq 0} \left[\frac{1}{z+n} - \ln \left(1 + \frac{1}{z+n} \right) \right], \quad (15.4.145)$$

$$\ln \Gamma(z+1) = \frac{1}{2} \ln z + z(\ln z - 1) + 1 + \mu(z) - \mu(1). \quad (15.4.146)$$

这里

$$\mu(z) := \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) e^{-zx} \frac{dx}{x}, \quad \mu'(z) = \frac{1}{2z} - v(z). \quad (15.4.147)$$

观察到 $\mu(z)$ 可写成

$$\mu(z) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) e^{-zx} \frac{dx}{x}.$$

证: 利用 (15.4.70) 和 $\lim_{N \rightarrow \infty} \ln \frac{z+N+1}{N+1} = 0$ 得到

$$\begin{aligned} v(z) &= \ln z - \sum_{n \geq 0} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{z+n} \right) - \frac{1}{z+n} \right] \\ &= \ln z - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq n \leq N} \left(\ln \frac{n+1}{n} - \frac{1}{z+n} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq n \leq N} \left[\frac{1}{z+n} - \ln \left(1 + \frac{1}{z+n} \right) \right] \\ &\quad + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq n \leq N} \left(\ln \frac{z+n+1}{z+n} - \ln \frac{n+1}{n} \right) + \ln z \\ &= \sum_{n \geq 0} \left[\frac{1}{z+n} - \ln \left(1 + \frac{1}{z+n} \right) \right] + \lim_{N \rightarrow \infty} \ln \frac{z+N+1}{N+1} \\ &= \sum_{n \geq 0} \left[\frac{1}{z+n} - \ln \left(1 + \frac{1}{z+n} \right) \right]. \end{aligned}$$

对 (15.4.142) 求积分并使用

$$\ln \Gamma(z+1) = \ln \Gamma(z+1) - \ln \Gamma(2) = \int_1^z \Psi(w+1) dw$$

就得到 (15.4.146). \square

从 (15.4.146) 我们得到

$$\Gamma(z+1) = z^{z+\frac{1}{2}} e^{1-z} e^{\mu(z)-\mu(1)}.$$

注意到 $\lim_{x \rightarrow \infty} \mu(x) = 0$.

考虑二重积分

$$I := \int_a^c \int_0^\infty \frac{e^{-vy} - e^{-by}}{y} dy dv.$$

利用定理 5.5.24 得到

$$\ln \frac{b}{v} = \int_0^\infty \frac{e^{-vy} - e^{-by}}{y} dy.$$

根据 Fubini 定理推出

$$\int_0^\infty \left[\frac{e^{-ax} - e^{-cx}}{x} - (c-a)e^{-bx} \right] \frac{dx}{x} = (c-a)(1 + \ln b) - (c \ln c - a \ln a). \quad (15.4.148)$$

注意到

$$\mu(1) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) e^{-x} \frac{dx}{x} = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) e^{-x} \frac{dx}{x}.$$

因为

$$\mu(1) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-2x}} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} \right) e^{-2x} \frac{dx}{x}$$

和

$$\frac{1}{1 - e^{-2x}} = \frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{e^{-x}}{1 - e^{-2x}},$$

所以

$$0 = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-2x}} - \frac{2 - e^{-x}}{2x} - \frac{1 - e^{-x}}{2} \right) e^{-x} \frac{dx}{x}.$$

引理 15.4.75. 我们有

$$\mu\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2, \quad \mu(1) = 1 - \ln \sqrt{2\pi}. \quad (15.4.149)$$

证: 利用上述恒等式和等式

$$\begin{aligned} \mu\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) e^{-\frac{1}{2}x} \frac{dx}{x} \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-2x}} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} \right) e^{-x} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\frac{1 - e^{-x}}{x} - e^{-x} \right) e^{-x} \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

在 (15.4.148) 中取 $a = 1$ 和 $b = c = 2$ 就得到

$$\mu\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} [(2-1)(1+\ln 2) - (2\ln 2 - 1\ln 1)] = \frac{1-\ln 2}{2}.$$

在 (15.4.146) 中取 $z = 1/2$ 得到

$$\ln \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{2} - 1\right) + 1 + \mu\left(\frac{1}{2}\right) - \mu(1).$$

由此推出 $\mu(1) = \frac{1}{2} - \ln \sqrt{\pi} + \mu(1/2) = 1 - \ln \sqrt{2\pi}$. \square

练习15.4.76. 本练习给出 $C := 1 - \mu(1)$ 的另一个计算方法. 证明

(a) $\sum_{1 \leq k \leq n} \ln k = C + (n + \frac{1}{2}) \ln n - n + \mu(n).$

(b) $\sum_{1 \leq k \leq 2n} \ln k = C + (2n + 1) \ln(2n) - 2n + \mu(2n).$

(c) $\sum_{1 \leq k \leq n} \ln(2k) = n \ln 2 + C + (n + \frac{1}{2}) \ln n - n + \mu(n).$

(d) $\sum_{1 \leq k \leq n} (2k - 1) = n \ln n + (n + \frac{1}{2}) \ln 2 - n + \mu(2n) - \mu(n).$

(e) 当 $n \rightarrow \infty$ 时有

$$(2 \ln 2 - \ln 1) + \sum_{2 \leq k \leq n-1} [2 \ln(2k) - 2 \ln(2k-1)] + [\ln(2n) - 2 \ln(2n-1)] \rightarrow \ln \frac{\pi}{2}.$$

(f) $C = \ln \sqrt{2\pi}.$

推论15.4.77. (1) 当 $\operatorname{Re}(z) > 0$ 时有

$$\ln \Gamma(z+1) = \left(z + \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \ln \sqrt{2\pi} + \mu(z), \quad (15.4.150)$$

$$\ln \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \ln \sqrt{2\pi} + \mu(z). \quad (15.4.151)$$

(2) 当 $x \gg 1$ 时有

$$\ln \Gamma(x+1) \sim \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln x - x + \ln \sqrt{2\pi}, \quad (15.4.152)$$

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}. \quad (15.4.153)$$

(3) **(Stirling)** 当 $n \gg 1$ 时有

$$n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n. \quad (15.4.154)$$

证: (1) 中的两个恒等式可从 (15.4.146), (15.4.149), 和 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ 得到. 最后三个恒等式可从 $\mu(x) \rightarrow 0$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 得到. \square

性质15.4.78. (1) $\nu(z)$ 满足

$$\nu(z+1) = \nu(z) + \ln\left(1 + \frac{1}{z}\right) - \frac{1}{z}. \quad (15.4.155)$$

(2) (Binet) $\mu(z)$ 满足

$$\mu(z+1) = \mu(z) + \left[1 - \left(z + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{z}\right)\right]. \quad (15.4.156)$$

(3) (Gudermann) 我们有

$$\mu(z) = \sum_{n \geq 0} \left[\left(z + n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{z+n}\right) - 1 \right]. \quad (15.4.157)$$

(4) 我们有

$$\nu(z) = \sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(k, z). \quad (15.4.158)$$

(5) 我们有

$$\mu(z) = \sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^k (k-1)}{2k(k+1)} \zeta(k, z). \quad (15.4.159)$$

(6) (Binet) 我们有

$$\mu(z) = \sum_{k \geq 2} \frac{k-1}{2k(k+1)} \zeta(k, z+1). \quad (15.4.160)$$

(7) 我们有

$$\nu(z) = \frac{1}{z} - \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k} \zeta(k, z+1). \quad (15.4.161)$$

证: (1) 可从 (15.4.145) 推出.

(2) 根据 (15.4.147) 得到

$$\begin{aligned} \mu'(z+1) - \mu'(z) &= \frac{1}{2(z+1)} - \nu(z+1) - \frac{1}{2z} + \nu(z) \\ &= \frac{1}{2(z+1)} + \frac{1}{2z} - \ln\left(1 + \frac{1}{z}\right). \end{aligned}$$

在 $[1, z]$ 上积分得到

$$\begin{aligned} \mu(z+1) - \mu(2) - \mu(z) + \mu(1) &= \frac{\ln(z+1) - \ln 2}{2} + \frac{1}{2} \ln z + z(\ln z - 1) + 1 \\ &\quad - (z+1)[\ln(z+1) - 1] + 2(\ln 2 - 1). \end{aligned}$$

然而 (15.4.146) 告诉我们 $\mu(2) - \mu(1) = -\frac{3}{2} \ln 2 + 1$ 从而

$$\mu(z+1) - \mu(z) = 1 - \left(z + \frac{1}{2}\right) \ln(z+1) + \left(z + \frac{1}{2}\right) \ln z.$$

(3) 对每个 $n \geq 0$ 都有

$$\begin{aligned}\mu(z) &= \mu(z+n+1) - \sum_{0 \leq k \leq n} [\mu(z+k+1) - \mu(z+k)] \\ &= \mu(z+n+1) - \sum_{0 \leq k \leq n} \left[1 - \left(z+k + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{z+k} \right) \right] \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n} \left[\left(z+k + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{z+k} \right) - 1 \right] + \mu(z+n+1).\end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$ 得到 (15.4.157).

(4) 因为 (15.4.145) 中的每项等于

$$\frac{1}{z+n} - \ln \left(1 + \frac{1}{z+n} \right) = \frac{1}{z+n} - \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{1}{(z+n)^k} = \sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^k}{k} \frac{1}{(z+n)^k},$$

所以得到 (15.4.158).

(5) 同样 (15.4.157) 中的每项等于

$$\left(z+n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{z+n} \right) - 1 = \sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^k (k-1)}{2k(k+1)} \frac{1}{(z+n)^k}.$$

故得到 (15.4.159).

(6) 因为

$$\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{x} = \frac{e^x(x-2) + (x+2)}{2x^2(e^x-1)},$$

所以

$$\mu(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^x(x-2) + (x+2)}{x^2} \cdot \frac{e^{-zx}}{e^x-1} dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \sum_{k \geq 1} \frac{k}{(k+2)!} \frac{x^k e^{-zx}}{e^x-1} dx.$$

利用 $x^k e^{-zx} / (e^x - 1) = \sum_{m \geq 0} x^k w^{-(z+m+1)x}$ 得到 (15.4.160). 同样方法可以得到 (15.4.161). \square

练习15.4.79. (Lerch) 证明

$$|\Gamma(x + \sqrt{-1}y)| = \sqrt{2\pi}(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})} e^{-x-y \tan^{-1} \frac{y}{x}} (1 + \epsilon)$$

其中 $\epsilon \rightarrow 0$ (x 或 y 趋于 $+\infty$).

对任何 $k \in \mathbb{N}$ 不等式 $k^2 - 5k + 6 = (k-2)(k-3) \geq 0$ 推出

$$\frac{k-1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{6}.$$

(这里我们取 $>$ 当 $l > 3$ 时). 因此对任何 $x > 0$ 有

$$0 < \mu(x) < \frac{1}{12} \sum_{k \geq 2} \zeta(k, x+1). \quad (15.4.162)$$

另一方面

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 2} \zeta(k, x+1) &= \sum_{k \geq 2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(x+n)^k} = \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 2} \frac{1}{(x+n)^k} \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(x+n)^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{x+n}} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(x+n)(x+n-1)} \\ &= \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{x+n-1} - \frac{1}{x+n} \right) = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

从而得到

$$0 < \mu(x) < \frac{1}{12x}. \quad (15.4.163)$$

定理15.4.80. (Stirling) 对任何 $x > 0$ 得到

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} e^{\frac{\theta_x}{12x}} \quad (15.4.164)$$

这里 $\theta_x \in (0, 1)$. 特别地

$$n! = \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{\theta_n}{12n}}. \quad (15.4.165)$$

从 (15.4.151) 得到

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} e^{\mu(x)}.$$

根据 (15.4.140) 我们有

$$\left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{x} = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{x^2 + (2\pi n)^2}.$$

然而

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 + (2\pi n)^2} &= \frac{1}{(2\pi n)^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{(2\pi n)^2}} \\ &= \frac{1}{(2\pi n)^2} \left[\sum_{0 \leq k \leq m-1} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2\pi n)^{2k}} + (-1)^m \frac{r_n}{(2\pi n)^{2m}} x^{2m} \right], \end{aligned}$$

其中 $r_n := 4n^2\pi^2 / (4n^2\pi^2 + x^2) \in (0, 1)$. 故对每个 $m \in \mathbb{N}$ 有

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{x} &= 2 \sum_{1 \leq k \leq m} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-2}}{(2\pi n)^{2k}} \\ &\quad + 2(-1)^m \theta_m x^{2m} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2\pi n)^{2m+2}} \end{aligned}$$

其中 $\theta_m \in (0, 1)$. 从 (15.3.32) 和 (15.4.147) 出发的到

$$\mu(z) = 2 \sum_{1 \leq k \leq m} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi n)^{2k}} \int_0^\infty x^{2k-2} e^{-zx} dx$$

$$\begin{aligned}
& + 2(-1)^m \theta_m \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(2\pi n)^{2m+2}} \int_0^\infty x^{2m} e^{-zx} dx \\
& = 2 \sum_{1 \leq k \leq m} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{k-1} (2k-2)!}{(2\pi n)^{2k}} \frac{1}{z^{2k-1}} + 2(-1)^m \theta_m \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2\pi n)^{2m+2}} \frac{(2m)!}{z^{2m+1}} \\
& = 2 \sum_{1 \leq k \leq m} \frac{(-1)^{k-1} (2k-2)!}{(2\pi)^{2k} z^{2k-1}} \zeta(2k) + 2(-1)^m \theta_m \frac{(2m)!}{z^{2m+1}} \frac{1}{(2\pi)^{2m+2}} \zeta(2m+2) \\
& = \sum_{1 \leq k \leq m} \frac{(-1)^{k-1} B_{2k}}{2k(2k-1)z^{2k-1}} + (-1)^m \theta_m \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)(2m+1)z^{2m+1}}.
\end{aligned}$$

推论15.4.81. 给定 $\operatorname{Re}(z) > 0$. 对每个 $m \in \mathbb{N}$ 存在 $\theta_m \in (0, 1)$ 满足

$$\mu(z) = \sum_{1 \leq k \leq m} \frac{(-1)^{k-1} B_{2k}}{2k(2k-1)z^{2k-1}} + (-1)^m \theta_m \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)(2m+1)z^{2m+1}}. \quad (15.4.166)$$

公式 (15.4.166) 的直接推论是

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3}} = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3}}. \quad (15.4.167)$$

练习15.4.82. (Cauchy) 对每个 $n \in \mathbb{N}$ 证明

$$2 \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{2n-\frac{1}{2}}} e^{-2n} < B_{2n} < \frac{1}{12} \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{12}}}{(2\pi)^{2n-\frac{5}{2}}} e^{-2n+\frac{1}{24n}}.$$

对恒等式

$$\frac{\frac{1}{2} - u}{u+z} = \frac{z + \frac{1}{2}}{u+z} - 1$$

两边积分得到

$$\int_0^1 \frac{\frac{1}{2} - u}{u+z} du = \left(z + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{z}\right) - 1.$$

一般地, 对每个 $n \geq 0$ 可证明

$$\int_n^{n+1} \frac{\frac{1}{2} - u + n}{u+z} du = \left(z + n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{z+n}\right) - 1.$$

故

$$\mu(z) = \sum_{n \geq 0} \int_n^{n+1} \frac{\frac{1}{2} - u + n}{u+z} du = \sum_{n \geq 0} \int_0^1 \frac{\frac{1}{2} - t}{u+z+n} du.$$

定义函数

$$\Lambda(t) := \frac{1}{2} - t + [t], \quad t \in \mathbb{R}. \quad (15.4.168)$$

定理15.4.83. 当 $\operatorname{Re}(z) > 0$ 时有

$$\mu(z) = \int_0^\infty \frac{\Lambda(t)}{t+z} dt. \quad (15.4.169)$$

练习15.4.84. (Binet-Liouville-Bourgoret) 证明

$$\begin{aligned}\mu(x) &= 2 \int_0^\infty \frac{\tan^{-1}(t/x)}{e^{2\pi t} - 1} dt \\ &= \frac{x}{\pi} \int_0^\infty \ln\left(\frac{1}{1 - e^{-2\pi t}}\right) \frac{dt}{t^2 + x^2} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(2n\pi t)}{t + x} dt.\end{aligned}$$

§15.5 * 模形式

模群(modular group) 定义为

$$\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}) := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ab - bc = 1 \right\}. \quad (15.5.1)$$

令 Γ 是由如下矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (15.5.2)$$

所生成的 $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的子群. 对所有整数 $n \in \mathbb{Z}$ 有

$$\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n.$$

下面练习证明了 $\Gamma = \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$; 即模群是由 (15.5.2) 所生成的.

练习15.5.1. 令 $\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 是 $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ 中的矩阵. 利用恒等式

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b' \\ c & nc + d \end{bmatrix}$$

来证明, 除非 $c = 0$, 某些矩阵 $\alpha\gamma, \gamma \in \Gamma$, 具有如下形式

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & -a \\ d & -c \end{bmatrix}$$

继续这个过程直到某些矩阵 $\alpha\gamma, \gamma \in \Gamma$, 的第二列为 $(0, *)$. 事实上第二列是 $(0, \pm 1)$, 且因为 $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = -I$, 第二列可以取 $(0, 1)$. 从而证明 $\alpha\gamma \in \Gamma$ 和 $\alpha \in \Gamma$.

模群中的每个元 $\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 可看成 Riemann 球 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上的自同构,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}(\tau) := \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \tau \in \widehat{\mathbb{C}}. \quad (15.5.3)$$

根据练习15.5.1 这些自同构由

$$\tau \mapsto \tau + 1, \quad \tau \mapsto -\frac{1}{\tau} \quad (15.5.4)$$

所生成.

§15.5.1 * k 权模形式

上半平面(upper half-plane) 定义为

$$\mathbb{H} := \{\tau \in \mathbb{C} : \text{Im}(\tau) > 0\}. \quad (15.5.5)$$

Riemann 曲面理论告诉我们只有三类单连通 Riemann 曲面, 即, 复平面 $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, Riemann 球 $\hat{\mathbb{C}} \cong \mathbb{S}^2$, 和上半平面 $\mathbb{H} \cong \mathbb{B}^2$.

练习15.5.2. 证明

$$\begin{aligned} \text{Im}(\gamma(\tau)) &= \frac{\text{Im}(\tau)}{|c\tau + d|^2}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}), \\ (\gamma\gamma')(\tau) &= \gamma(\gamma'(\tau)), \quad \gamma, \gamma' \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}), \quad \tau \in \mathbb{H}, \\ \frac{d\gamma(\tau)}{d\tau} &= \frac{1}{(c\tau + d)^2}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

因此模群把上半平面映成上半平面.

定义15.5.3. 令 $k \in \mathbb{Z}$ 为整数. 亚纯函数 $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ 称为 k 权弱模形式(weakly modular form of weight k) 如果

$$f(\gamma(\tau)) = (c\tau + d)^k f(\tau), \quad \gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}) \text{ 和 } \tau \in \mathbb{H}. \quad (15.5.6)$$

可以证明如果 (15.5.6) 对形如 (15.5.2) 的 γ 成立, 则对任意 $\gamma \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ 也成立. 换句话说, f 是 k 权弱模形式的如果

$$f(\tau + 1) = f(\tau), \quad f\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^k f(\tau). \quad (15.5.7)$$

0 权弱模形式具有 $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ - 不变性, $f \circ \gamma = f$ 对所有 $\gamma \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ 都成立.

根据 (15.5.7) 得到每个弱模形式 $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ 是 \mathbb{Z} - 周期的. 记 $\mathbb{D} = \mathbb{B}^2 := \{q \in \mathbb{C} : |q| < 1\}$ 是单位开复圆盘, 记 $\mathbb{D}' := \mathbb{D} \setminus \{0\}$, 并回顾到 \mathbb{Z} - 周期全纯映射 $\tau \mapsto e^{2\pi\sqrt{-1}\tau} = q$ 把 \mathbb{H} 映成 \mathbb{D}' . 对应于 f , 函数 $g: \mathbb{D}' \rightarrow \mathbb{C}$ 其中

$$g(q) := f\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \ln q\right) \quad (15.5.8)$$

是有定义的且 $f(\tau) := g(e^{2\pi\sqrt{-1}\tau})$. 若 f 在上半平面上是全纯的, 则复合函数 g 在去心圆盘上是全纯的, 因此 g 有如下的 Laurent 级数展开

$$g(q) = \sum_{n \geq 1} a_n q^n, \quad q \in \mathbb{D}'. \quad (15.5.9)$$

根据 $|q| = e^{-2\pi\text{Im}(\tau)}$ 我们可以证明当 $\text{Im}(\tau) \rightarrow \infty$ 时 $q \rightarrow 0$. 称 f 在 ∞ 处全纯的 (**holomorphic at ∞**) 如果 g 可全纯延拓到 $q = 0$, 即, Laurent 级数只对 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 求和. 因此 f 具有如下 Fourier 级数展开

$$f(\tau) = \sum_{n \geq 0} a_n(f) q^n, \quad q := e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}. \quad (15.5.10)$$

定义15.5.4. 假设 k 是整数. 称 $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ 是 k 权模形式 如果

- (1) f 在 \mathbb{H} 上是全程的,
- (2) f 是 k 权弱模形式,
- (3) f 在 ∞ 处是全纯的.

k 权模形式的集合记为 $\mathcal{M}_k(\text{SL}_2(\mathbb{Z}))$.

练习15.5.5. (a) 证明集合 $\mathcal{M}_k(\text{SL}_2(\mathbb{Z}))$ 是 \mathbb{C} 上的向量空间.

(b) 若 $f \in \mathcal{M}_k(\text{SL}_2(\mathbb{Z}))$ 和 $g \in \mathcal{M}_\ell(\text{SL}_2(\mathbb{Z}))$, 则 $fg \in \mathcal{M}_{k+\ell}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}))$.

从而

$$\mathcal{M}(\text{SL}_2(\mathbb{Z})) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}_k(\text{SL}_2(\mathbb{Z})) \quad (15.5.11)$$

是分次环. \mathbb{H} 上的零函数是任意权模形式, 和 \mathbb{H} 上的常值函数是 0 权模形式.

§15.5.2 * k 权 Eisenstein 级数和尖点形式

假设 $k \geq 3$ 是偶数. 定义 k 权 Einstein 级数 (**Einstein series of weight k**) 为

$$G_k(\tau) := \sum_{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(c\tau + d)^k}, \quad \tau \in \mathbb{H}. \quad (15.5.12)$$

练习15.5.6. 证明 G_k 在 \mathbb{H} 上是全纯函数且是 k 权弱模形式. 最后证明当 $\text{Im}(\tau) \rightarrow \infty$ 时 G_k 时有界的从而是 k 权模形式.

回顾恒等式

$$\frac{1}{\tau} + \sum_{d \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{\tau - d} + \frac{1}{\tau + d} \right) = \pi \cot(\pi\tau) = \pi\sqrt{-1} - 2\pi\sqrt{-1} \sum_{m \geq 0} q^m, \quad (15.5.13)$$

这里 $q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$. 对 (15.5.13) 关于 $\tau \in \mathbb{H}$ 求 $k-1$ 导数, $q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$, 得到

$$\sum_{d \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\tau + d)^k} = \frac{(-2\pi\sqrt{-1})^k}{(k-1)!} \sum_{m \geq 1} m^{k-1} q^m, \quad k \geq 2. \quad (15.5.14)$$

对每个 $k \geq 3$,

$$\begin{aligned} \sum_{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(c\tau + d)^k} &= \sum_{d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{d^k} + 2 \sum_{c \geq 1} \left[\sum_{d \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(c\tau + d)^k} \right] \\ &= 2\zeta(k) + 2 \frac{(2\pi\sqrt{-1})^k}{(k-1)!} \sum_{c \geq 1} \sum_{m \geq 1} m^{k-1} q^{cm} \end{aligned}$$

所以

$$G_k(\tau) = 2\zeta(k) + 2 \frac{(2\pi\sqrt{-1})^k}{(k-1)!} \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}(n) q^n, \quad k \geq 3 \text{ 和 } k \text{ 偶数} \quad (15.5.15)$$

这里的系数 $\sigma_{k-1}(n)$ 是算术函数

$$\sigma_{k-1}(n) := \sum_{m|n, m>0} m^{k-1}. \quad (15.5.16)$$

正规化 Eisenstein 级数(normalized Eisenstein series) 定义为

$$E_k(\tau) := \frac{G_k(\tau)}{2\zeta(k)}. \quad (15.5.17)$$

利用 (15.3.32) 得到

$$E_k(\tau) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}(n) q^n. \quad (15.5.18)$$

练习15.5.7. 证明 (15.5.13) 中的第二个恒等式.

定义15.5.8. k 权尖点形式(cusp form of weight k) 是指 k 权模形式且其 Fourier 展开中首项系数 $a_0 = 0$, 即,

$$f(\tau) = \sum_{n \geq 1} a_n q^n, \quad q := e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}.$$

k 权尖点形式的集合记为 $\mathcal{S}_k(\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}))$.

当 $\lim_{\text{Im}(\tau) \rightarrow \infty} f(\tau) = 0$ 时, 可得模形式必是尖点形式. 从而尖点形式集合 $\mathcal{S}_k(\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}))$ 构成了模形式集合 $\mathcal{M}_k(\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}))$ 的向量子空间, 且分次环

$$\mathcal{S}(\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{S}_k(\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}))$$

是 $\mathcal{M}(\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}))$ 的理想.

令

$$g_2(\tau) := 60G_4(\tau), \quad g_3(\tau) := 140G_6(\tau) \quad (15.5.19)$$

并定义判别函数(discriminant function)为

$$\Delta: \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \Delta(\tau) := g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2. \quad (15.5.20)$$

则 Δ 是 12 权弱模形式且在 \mathbb{H} 上是全纯的.

练习15.5.9. 证明在函数 Δ 的 Fourier 级数展开中 $a_0 = 0$ 和 $a_1 = (2\pi)^{12}$. 故 $\Delta \in \mathcal{S}_{12}(\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}))$.

可以证明 $\Delta(\tau) \neq 0$ 对所有 $\tau \in \mathbb{H}$ 都成立从而 Δ 的唯一零点是 ∞ . 因此模函数(modular function)

$$j: \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad j(\tau) := 1728 \frac{g_2(\tau)^3}{\Delta(\tau)} \quad (15.5.21)$$

在 \mathbb{H} 上是全纯的.

练习15.5.10. 证明 j 是 $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ -不变的, 即 $j(\gamma(\tau)) = j(\tau)$ 对所有 $\gamma \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ 和 $\tau \in \mathbb{H}$ 都成立.

练习15.5.11. 令 $\mu_3 := e^{2\pi\sqrt{-1}/3}$. 证明 $g_2(\mu_3) = 0$, $g_3(\mu_3) \neq 0$, $g_3(\sqrt{-1}) = 0$, 和 $g_2(\sqrt{-1}) \neq 0$, 因此 $j(\mu_3) = 0$ 和 $j(\sqrt{-1}) = 1728$.

我们可以证明

$$g_2(\sqrt{-1}) = 4\omega_4^4, \quad \omega_4 := 2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = 2\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})} \quad (15.5.22)$$

and

$$g_3(\mu_3) = \frac{27}{16}\omega_3^6, \quad \omega_3 := 2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}} = 2\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(\frac{5}{6})}. \quad (15.5.23)$$

§15.6 参考文献

1. Koblitz, Neal. *Introduction to elliptic curves and modular forms*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics 97, Springer-Verlag, New York, 1993. x+248 pp. ISBN: 0-387-97966-2
2. 布鲁斯·C. 伯恩特 (Bruce C. Berndt) 主编: 拉玛努金笔记(第 1, 2, 3, 4, 5 卷), 哈尔滨工业大学出版社, 2019.
3. 乔治·E. 安德鲁斯, 布鲁斯·C. 伯恩特 (Bruce C. Berndt) 主编: 拉玛努金遗失笔记(第 1, 2, 3, 4, 5 卷), 哈尔滨工业大学出版社, 2019.

4. Hardy, G. H. *Divergent series*, Oxford, at the Clarendon Press, 1949. xvi+396 pp.
5. 谭琳 著: Γ 函数札记, 浙江大学出版社, 1997.
6. 徐森林, 薛春华 编著: *数学分析*, 清华大学出版社, 2005.
7. 张福保, 薛金美, 潮小李 主编: *数学分析讲义*, 科学出版社, 2019.
8. 梅加强 编著: *数学分析*, 高等教育出版社, 2015.
9. 邓建平 编: *微积分 I 和 II*, 科学出版社, 2019.
10. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis I*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+574 pp. ISBN: 3-540-40386-8
11. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis II*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xvi+681 pp. ISBN: 3-540-40633-6
12. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis I*, Translated from the 1988 German original by Gary Brookfield, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. xiv+426 pp. ISBN: 3-7643-7153-6
13. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis II*, Translated from the 1999 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. xii+400 pp. ISBN: 978-3-7643-7472-3; 3-7643-7472-3
14. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis III*, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. xii+468 pp. ISBN: 978-3-7643-7479-2; 3-7643-7479-2
15. 菲赫金哥尔茨 著 (徐献瑜, 冷生明, 梁文骐 译; 郭思旭 校): *微积分学教程* (第一、二、三卷), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.
16. 吉米多维奇 著 (李荣涑, 李植 译): *数学分析习题集* (根据 2010 年俄文版翻译), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.
17. 汪林 著: *数学分析中的问题和反例*, 现代数学基础 56, 高等教育出版社, 2015.
18. 裴礼文 编著: *数学分析中的典型问题与方法* (第二版), 高等教育出版社, 2015.

19. 朱尧辰 编著: 数学分析例选通过范例学技巧, 哈尔滨工业大学出版社, 2013.
20. 周民强 编著: 数学分析习题演练 (第一、二、三册), 科学出版社, 2018.
21. 李逸 编著: 数学分析讲义, 上海交通大学数学分析课讲义, 未出版, 2016.

第十六章 Fourier 级数

A more general value of b is easily formed by adding together several terms similar to the preceding, and we have

$$v = ae^{-x} \cos y + be^{-3x} \cos 3y + ce^{-5x} \cos 5y + de^{-7x} \cos 7y + \dots$$

It is evident that the function v denoted by $\phi(x, y)$ satisfies the equation $\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} = 0$, and the condition $\phi(x, \pm\frac{1}{2}\pi) = 0$. A third condition remains to be fulfilled, which is expressed thus, $\phi(0, y) = 1$, and it is essential to remark that this result must exist when we give to y any value whatever included between $-\frac{1}{2}\pi$ and $+\frac{1}{2}\pi$.

—《The analytical theory of heat》, Joseph Fourier, 1822

§16.1 Fourier 级数展开

通常说的“**Fourier 定理**”是指,当 $f(x)$ 属于某个合适的函数类时且存在某个三角级数

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

在开区间 $(-\pi, \pi)$ 内收敛到 $f(x)$, 则

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Hardy (见参考文献) 在其专著中指出,公式 a_n, b_n 的出现要早于 **Fourier** 且根据 **Burkhardt** 的论文这两个公式可追溯到 **Clairaut** (1757). 其实 **Euler** 早就对此很熟悉了,在 1777 年利用逐项积分给出了一般化的推导.

du Bois-Reymond 和 **de la Vallée-Poussin** 证明了“当 f 是有界的、可积的且三角级数在通常意义下收敛到 $f(x)$ 时”,则上述 **Fourier 定理** 成立.

本节来给出这个定理的证明.

§16.1.1 平方可积函数空间和正交函数系

回顾记号 $R([a, b])$, 即闭区间 $[a, b]$ 上所有 (Riemann) 可积函数构成的集合. 为了研究方便我们引入记号

$$R^2([a, b]) := \left\{ f \in R([a, b]) \mid f^2 \in R([a, b]) \right\}.$$

此时利用 **Cauchy 不等式** 可知**内积(inner product)**

$$\langle f, g \rangle_{R^2([a, b])} := \int_a^b f(x)g(x) dx, \quad f, g \in R^2([a, b]),$$

在 $R^2([a, b])$ 上有定义. 则 $(R^2([a, b]), \langle \cdot, \cdot \rangle_{R^2([a, b])})$ 是向量空间.

定义16.1.1. (1) $f, g \in R^2([a, b])$ 称为正交的(orthogonal) 如果

$$\langle f, g \rangle_{L^2([a, b])} = 0.$$

(2) 称函数列 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1} \subset R^2([a, b])$ 是正交函数系(orthogonal system) 如果

$$\|f_n\|_{R^2([a, b])}^2 = 0, \quad \langle f_m, f_n \rangle_{R^2([a, b])} = 0 \quad (m \neq n).$$

(3) 正交函数系 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1} \subset R^2([a, b])$ 称为规范正交函数系(normalized orthogonal system) 如果进一步要求

$$\langle f_m, f_n \rangle_{R^2([a, b])} = \delta_{mn}.$$

例16.1.2. (1) 因为对任意 $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\langle \sin mx, \sin nx \rangle_{R^2([- \pi, \pi])} = \langle \cos mx, \cos nx \rangle_{R^2([- \pi, \pi])} = \pi \delta_{mn}$$

和

$$\langle \sin mx, \cos nx \rangle_{R^2([- \pi, \pi])} = 0$$

和

$$\langle 1, \sin nx \rangle_{R^2([- \pi, \pi])} = \langle 1, \cos nx \rangle_{R^2([- \pi, \pi])} = 2\pi \delta_{n0},$$

故 $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是正交函数系和 $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是规范正交函数系.

(2) 根据 (1) 对任意 $T > 0$

$$\left\{ 1, \cos \frac{\pi}{T} nx, \sin \frac{\pi}{T} nx \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

是 $[-T, T]$ 上的正交函数系从而

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2T}}, \frac{1}{\sqrt{T}} \cos \frac{\pi}{T} nx, \frac{1}{\sqrt{T}} \sin \frac{\pi}{T} nx \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

是 $[-T, T]$ 上的规范正交函数系.

(3) 当 $a \neq b$ 时根据

$$\begin{aligned} \int_0^T \sin ax \sin bx dx &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin[(a-b)T]}{a-b} - \frac{\sin[(a+b)T]}{a+b} \right\} \\ &= \cos aT \sin bT \frac{b \tan aT - a \tan bT}{a^2 - b^2} \end{aligned}$$

和

$$\int_0^T \sin^2 ax dx = \frac{T}{2} - \frac{1}{2} \int_0^T \cos 2ax dx = \begin{cases} 0, & a = 0, \\ \frac{T}{2} - \frac{\sin 2aT}{4a}, & a \neq 0. \end{cases}$$

因此, 若 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 是严格递增数列且满足条件 $\tan a_n T = a_n c$ (这里 c 是任意给定的常数), 则 $\{\sin a_n x\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是 $[0, T]$ 上的正交函数系.

(4) Legendre 多项式

$$P_n(x) := \frac{1}{n!2^n} [(x^2 - 1)^n]^{(n)}, \quad n \geq 1$$

构成了 $[-1, 1]$ 上的正交函数系. 事实上, 因为所有次数 $k < n$ 的 Legendre 多项式都是 $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ 的线性组合, 所以只要证明 $\langle P_n(x), x^k \rangle_{R^2([-1, 1])} = 0$, $0 \leq k \leq n-1$. 利用分部积分法得到

$$\int_{-1}^1 x^k P_n(x) dx = \frac{1}{n!2^n} \int_{-1}^1 (x^k)^{(k+1)} [(x^2 - 1)^n]^{(n-k-1)} = 0.$$

§16.1.2 2π 周期函数的 Fourier 展开

考虑本章一开始提到的函数项级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in [-\pi, \pi]. \quad (16.1.1)$$

这里 a_0, a_n, b_n 都是常数. 回顾到 $e^{\sqrt{-1}x} = \cos x + \sqrt{-1} \sin x$. 因此 (16.1.1) 可写成复级数形式

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n e^{\sqrt{-1}nx} \quad (16.1.2)$$

其中 $A_0 = \frac{1}{2}a_0$, $A_n = \frac{1}{2}a_n - \frac{\sqrt{-1}}{2}b_n$, 和 $A_{-n} = \frac{1}{2}a_n + \frac{\sqrt{-1}}{2}b_n$.

如果级数 (16.1.1) 在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛到 $f(x)$, 则 $f \in C([-\pi, \pi])$ 且逐项积分得到

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad (16.1.3)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx. \quad (16.1.4)$$

从而得到

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-\sqrt{-1}nx} dx, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (16.1.5)$$

一般地, 对任意 $f \in R([-\pi, \pi])$ 定义其 **Fourier 级数 (Fourier series)** 为 (16.1.1)

其中系数 a_n, b_n 由 (16.1.3) 和 (16.1.4) 所给出, 或者形式上可记成

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n e^{\sqrt{-1}nx}, \quad x \in [-\pi, \pi]. \quad (16.1.6)$$

此时

$$S_N(f)(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{1 \leq n \leq N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{-N \leq n \leq N} A_n e^{\sqrt{-1}nx}$$

称为 $f(x)$ 的 **部分和 (partial sum)**.

例16.1.3. (1) 计算函数

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

的 Fourier 级数. 这里我们按照周期 2π 将函数 $f(x)$ 作延拓, 从而得到 $f(\pi) = f(-\pi) = -1$. 根据 (16.1.3) 和 (16.1.4) 得到

$$a_n = 0, \quad n \geq 0,$$

和

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n], \quad n \geq 1.$$

故得到

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin nx = \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2k+1} \sin[(2k+1)x].$$

但是右边的函数项级数不一定等于右边的函数, 比如 $f(0) = 1$, 但是右边函数项级数此时为 0. 但是我们发现

$$0 = \frac{1 + (-1)}{2} = \frac{f(0+) + f(0-)}{2}.$$

如果在不连续点作如下修改, 那左边函数值就等于右边的函数项级数值. 在之后的章节中我们会看到这是个普遍的现象.

(2) 计算函数 $f(x) = \frac{x}{2}$ 的在 $[-\pi, \pi)$ 上的 Fourier 级数. 同样我们也作周期为 2π 的延拓使得 $f(\pi) = f(-\pi) = -\pi/2$. 计算得到

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2} \cos nx dx = 0, \quad n \geq 0$$

和

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x}{2} \sin nx dx = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad n \geq 1.$$

因此得到 Fourier 级数为

$$f(x) \sim \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx.$$

(3) 计算函数 $f(x) = x^2$ 在 $[-\pi, \pi)$ 上的 Fourier 级数. 同样我们也作周期为 2π 的延拓使得 $f(\pi) = f(-\pi) = \pi^2$, 且延拓后的函数是连续的. 计算得到

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx = 0, \quad n \geq 1$$

和

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2$$

和

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin nx dx = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} x^2 d \sin nx = \frac{4}{n^2\pi} \int_0^{\pi} x d \cos nx \\ &= \frac{4}{n^2\pi} \pi (-1)^n - \frac{4}{n^2\pi} \int_0^{\pi} 6\pi_0 \cos nx dx = \frac{4}{n^2} (-1)^n, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

因此得到 Fourier 级数为

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \cos nx.$$

(4) 计算函数 $f(x) = x$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的 Fourier 级数. 此时

$$a_n = 0, \quad n \geq 0$$

和

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{-2}{n\pi} \int_0^{\pi} x d \cos nx = (-1)^{n-1} \frac{2}{n}, \quad n \geq 1.$$

因此得到

$$f(x) \sim \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{2}{n} \sin(nx).$$

§16.1.3 正弦级数和余弦级数

上面例子促使我们引入正弦级数和余弦级数. 假设 $f \in R[(0, \pi)]$ 并考察其奇延拓 f_{odd}

$$f_{\text{odd}}(x) := -f(-x), \quad x \in (-\pi, 0).$$

此时 f_{odd} 的系数“ a_n ”都是 0 而系数“ b_n ”为

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\text{odd}}(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

因此我们得到函数 $f(x)$ 的 **Fourier 正弦级数 (Fourier sin series)**

$$f(x) \sim \sum_{n \geq 1} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \right] \sin(nx). \quad (16.1.7)$$

同样我们可以考虑函数 $f(x)$ 的偶延拓 f_{even}

$$f_{\text{even}}(x) := f(-x), \quad x \in (-\pi, 0).$$

并得到 **Fourier 余弦级数 (Fourier cos series)**

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx + \sum_{n \geq 1} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \right] \cos(nx). \quad (16.1.8)$$

例16.1.4. (1) 计算函数 $f(x) = x, 0 < x < \pi$, 的正弦级数和余弦级数. 因为

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin(nx) dx = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}, \quad n \geq 1,$$

和

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos(nx) dx = 2 \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi},$$

所以得到

$$f(x) \sim 2 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

和

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos nx.$$

(2) 计算函数 $f(x) = x(\pi - x), 0 < x < \pi$, 的正弦级数和余弦级数. 计算可得

$$f(x) \sim \frac{8}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$$

和

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n \geq 1} \frac{\cos 2nx}{n^2}.$$

(3) 计算函数 $f(x) = x^2, 0 < x < \pi$, 的正弦级数和余弦级数. 直接计算得到

$$x^2 \sim 2\pi \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx) - \frac{8}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\sin[(2n-1)x]}{(2n-1)^3}$$

和

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

如果例16.1.4 中的符号“ \sim ”改成“ $=$ ”, 则取 $x = \pi$ 得到 (此时我们定义 $f(\pi) = \pi^2$)

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \implies \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

这就形式上给出了 Euler 公式的另一个证明.

§16.1.4 任意周期函数的 Fourier 展开

假设函数 $f(x)$ 在 $[-T, T]$ 上可积. 令 $x = \frac{T}{\pi}t$ 我们得到函数 $\varphi(t) := f(\frac{T}{\pi}t)$ 且 $t \in [-\pi, \pi]$. 由于

$$\varphi(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left[a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \right]$$

这里

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos(nt) dt, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin(nt) dt,$$

我们得到

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{T}x\right) \right] \quad (16.1.9)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right) dx, \quad b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{T}x\right) dx. \quad (16.1.10)$$

例16.1.5. (1) 计算函数

$$f(x) = \begin{cases} C, & -T < x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq T \end{cases}$$

的 Fourier 级数. 事实上

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) dx = C,$$

和

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \cos \frac{\pi nx}{T} dx = C \int_{-1}^0 \cos(\pi nt) dt = 0, \quad n \geq 1,$$

和

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \sin \frac{\pi nx}{T} dx = C \int_{-1}^0 \sin(\pi nt) dt = \frac{C}{n\pi} [1 + (-1)^n], \quad n \geq 1.$$

因此

$$f(x) \sim \frac{C}{2} - \frac{2C}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n-1} \sin \left[\frac{(2n-1)\pi}{T} x \right].$$

(2) 计算函数 $f(x) = x \cos x$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, 的 Fourier 级数. 此时 $T = \pi/2$ 和 $a_n = 0$, 从而得到

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x \cos x \cdot \sin(2nx) dx = \frac{(-1)^{n-1}}{\pi} \frac{16n}{(4n^2-1)^2}.$$

故

$$x \cos x \sim \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{16n}{\pi(4n^2-1)^2} \sin(2nx).$$

§16.2 Fourier 级数的收敛判别法

如果函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上时可积的并记 $L := b - a$, 则 f 的第 n 个 Fourier 系数 (n -th Fourier coefficient) 定义为

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{L} \int_a^b f(x) e^{-2\pi\sqrt{-1}nx/L} dx, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (16.2.1)$$

此时 f 的 Fourier 级数可写成

$$f(x) \sim \sum_{n \geq 1} \hat{f}(n) e^{2\pi\sqrt{-1}nx/L}. \quad (16.2.2)$$

比如, 如果 $f \in R([-\pi, \pi])$ 则其第 n 个 Fourier 系数为

$$\hat{f}(n) = A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-\sqrt{-1}nx} dx, \quad n \in \mathbb{Z},$$

从而 f 的 Fourier 级数为

$$f(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n e^{\sqrt{-1}nx}.$$

如果 $f \in R([0, 2\pi])$ 则得到

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-\sqrt{-1}nx} dx \quad \text{and} \quad f(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{\sqrt{-1}nx}. \quad (16.2.3)$$

若 f 是定义在圆 S^1 上的函数, 则我们可以把 f 看成是 \mathbb{R} 上的 2π - 周期函数. 此时我们可以把函数 f 限制到任意长度为 2π 的区间上, 例如 $[0, 2\pi]$ 或 $[-\pi, \pi]$, 从而计算出其 Fourier 系数. 观察到函数 f 的周期性表明计算得到的积分和起初选择的区间无关. 这就说明了圆上函数 f 的 Fourier 系数是有定义的.

如果 $g \in R([0, 1])$ 则

$$\hat{g}(n) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi\sqrt{-1}nx} dx \quad \text{和} \quad g(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}(n) e^{2\pi\sqrt{-1}nx}. \quad (16.2.4)$$

这样只要 $f \in R([0, 2\pi])$, 就有 $g(x) := f(2\pi x) \in R([0, 1])$ 从而得到 f 的第 n 个 Fourier 系数等于 g 的第 n 个 Fourier 系数.

所谓的三角级数(trigonometric series) 是指如下的形式和

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi\sqrt{-1}nx/L}$$

这里 $c_n \in \mathbb{C}$. 如果三角级数中只包含有限多个非零项, 即 $c_n = 0$ 对任何充分大的 $|n|$ 都成立, 此时称为三角多项式(trigonometric polynomial); 这个多项式的度(degree) 定义为满足 $c_n \neq 0$ 的最大 $|n|$.

定义在 $[a, b]$ 上的函数 f 的 Fourier 级数的第 N 个部分和(N -th partial sum) 是三角多项式且定义为

$$S_N(f)(x) := \sum_{-N \leq n \leq N} \hat{f}(n) e^{2\pi\sqrt{-1}nx/L}, \quad L := b - a. \quad (16.2.5)$$

注意到上述和是对称的, 这是因为 n 从 $-N$ 取到 N . 此时一个基本和自然的问题是

问题: 在什么意义下 $S_N(f)$ 收敛到 $f, N \rightarrow \infty$?

我们首先要问 $S_N(f)$ 是否逐点收敛到 f . 即, 是否对每个 x 极限

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x) = f(x)$$

成立. 显然我们不可能期望这个结果对每个 x 都是对的, 这是因为我们可以改变可积函数在一点的值而不改变其 Fourier 系数. 如果 f 是连续的和周期的, 此时 $S_N(f)(x)$ 是否逐点收敛到 $f(x)$. 在很长时期内, 人们总是认为加上连续性和周期性, 逐点收敛应该是正确的. 但令人吃惊的是 **Du Bois-Reymond** 证明了存在一个连续函数其 Fourier 级数在某点是发散的. 当 f 是连续可微时, 我们将看到此时 f 的 Fourier 级数一致收敛到 f .

当函数 f 是可积时, 我们将证明此时部分和 $S_N(f)$ 在 L^2 意义下收敛到 f , 即

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_N(f)(x) - f(x)|^2 dx \rightarrow 0, \quad N \rightarrow +\infty.$$

在 1913 年, **Lusin** 提出了他著名的猜想: 如果 f 可积, 则除了一个零测度集外 f 的 Fourier 级数逐点收敛到 f . 这个猜想在 1966 年被 **Carleson** 所解决.

例16.2.1. (Dirichlet 核) 第 N 个 Dirichlet 核 (N -th Dirichlet kernel) 定义为

$$D_N(x) := \sum_{-N \leq n \leq N} e^{\sqrt{-1}nx}, \quad -\pi \leq x \leq \pi. \quad (16.2.6)$$

若令 $\omega := e^{\sqrt{-1}x}$ 则得到

$$D_N(x) = \sum_{0 \leq n \leq N} \omega^n + \sum_{-N \leq n \leq -1} \omega^n = \frac{1 - \omega^{N+1}}{1 - \omega} + \frac{\omega^{-N} - 1}{1 - \omega} = \frac{\omega^{-N} - \omega^{N+1}}{1 - \omega}.$$

故

$$D_N(x) = \frac{\sin[(N + \frac{1}{2})x]}{\sin(x/2)}. \quad (16.2.7)$$

例16.2.2. (Poisson 核) Poisson 核 (Poisson kernel) 定义为

$$P_r(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{\sqrt{-1}nx}, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq r < 1. \quad (16.2.8)$$

注意到上述函数项级数是绝对和一致收敛的. 若令 $\omega = re^{\sqrt{-1}x}$ 我们得到

$$P_r(x) = \sum_{n \geq 0} \omega^n + \sum_{n \geq 1} \bar{\omega}^n = \frac{1}{1 - \omega} + \frac{\bar{\omega}}{1 - \bar{\omega}} = \frac{1 - |\omega|^2}{|1 - \omega|^2}.$$

即

$$P_r(x) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2}. \quad (16.2.9)$$

例16.2.3. (Fejér 核) 第 N 个 Fejér 核(N -th Fejér kernel) 定义为

$$F_N(x) := \frac{1}{N} \sum_{0 \leq n \leq N-1} D_n(x), \quad -\pi \leq x \leq \pi. \quad (16.2.10)$$

若令 $\omega = e^{\sqrt{-1}x}$ 我们得到

$$F_N = \frac{1}{N} \sum_{0 \leq n \leq N-1} \frac{\omega^{-n} - \omega^{n+1}}{1 - \omega} = \frac{1}{N} \frac{1}{1 - \omega} \left[\frac{1 - \omega^{-N}}{1 - \omega} - \frac{\omega(1 - \omega^N)}{1 - \omega} \right].$$

即

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}, \quad x \in [-\pi, \pi]. \quad (16.2.11)$$

§16.2.1 Fourier 级数的唯一性

假设 f 和 g 是定义在圆 S^1 上的可积函数且有相同的 Fourier 系数 $\hat{f}(n) = \hat{g}(n), n \in \mathbb{Z}$. 从而 $f - g$ 的 Fourier 系数为 0.

定理16.2.4. 假设 $f \in R(S^1)$ 且 $\hat{f}(n) = 0$ 对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 都成立. 如果 f 在 x_0 处连续, 则 $f(x_0) = 0$.

证: 假设定理对任意实值函数都成立. 下证对任意复值函数 f 也成立. 此时记

$$f(x) = u(x) + \sqrt{-1}v(x)$$

这里 u 和 v 都是实值函数. 如果定义 $\bar{f}(x) := \overline{f(x)}$, 则

$$u(x) = \frac{f(x) + \bar{f}(x)}{2}, \quad v(x) = \frac{f(x) - \bar{f}(x)}{2\sqrt{-1}},$$

并且由于 $\hat{f}(x) = \overline{\hat{f}(-n)}$, 我们得到 u 和 v 的 Fourier 系数都消失, 故在连续点处有 $f = 0$.

不失一般性不妨假设 f 是定义在 $[-\pi, \pi]$ 上的实值函数, $x_0 = 0$, 且 $f(0) > 0$. 因为 f 在 0 处连续, 所以我们可以选择 $\delta \in (0, \pi/2]$ 使得 $f(x) > f(0)/2$ 只要 $|x| < \delta$ 成立. 令

$$p(x) := \epsilon + \cos x$$

这里选择 $\epsilon > 0$ 使得不等式 $|p(x)| < 1 - \frac{\epsilon}{2}$ 对任何 $\delta \leq |x| \leq \pi$ 都成立. 选择 $\eta \in (0, \delta)$ 使得 $p(x) > 1 + \frac{\epsilon}{2}$ 对任何 $|x| < \eta$ 都成立. 引入

$$p_k(x) := [p(x)]^k, \quad B := \max_{|x| \leq \pi} |f(x)|.$$

由于 $\hat{f}(n) = 0$ 对任何 $n \in \mathbb{Z}$ 都成立, 故得到

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)p_k(x)dx$$

对任意 $k \in \mathbb{N}$ 都成立. 另一方面

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)p_k(x)dx &= \int_{|x|<\eta} f(x)p_k(x)dx + \int_{\eta \leq |x|<\delta} f(x)p_k(x)dx \\ &\quad + \int_{|x|\geq\delta} f(x)p_k(x)dx \geq 2\eta \frac{f(0)}{2} \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)^k + 0 \\ &\quad - \left| \int_{|x|\geq\delta} f(x)p_k(x)dx \right| \geq \eta f(0) \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)^k - 2\pi B \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)^k. \end{aligned}$$

若令 $k \rightarrow \infty$ 就得到矛盾! 因此必有 $f(0) = 0$. \square

推论16.2.5. 如果 $f \in C(S^1)$ 且 $\hat{f}(n) = 0$ 对任何 $n \in \mathbb{N}$ 都成立, 则 $f \equiv 0$.

推论16.2.6. 如果 $f \in C(S^1)$ 且 f 的 Fourier 级数是绝对收敛的, 则 f 的 Fourier 级数一致收敛到 f , 即

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x) = f(x)$$

关于 x 是一致收敛的.

证: 因为 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|$ 是绝对收敛的, 所以函数

$$g(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{\sqrt{-1}nx}$$

在 S^1 上是连续的. 又因为 g 的 Fourier 系数就是 $\hat{f}(n)$, 所以根据推论 16.2.5 可知在 S^1 上必有 $f \equiv g$. \square

如果可以提高 f 的光滑性, 我们可以把推论 16.2.6 中的假设条件“ f 的 Fourier 级数是绝对收敛”去掉.

推论16.2.7. 如果 $f \in C^k(S^1)$ ($k \geq 2$), 则 $\hat{f}(n) = O(1/|n|^k)$ 当 $|n| \rightarrow \infty$ 时. 特别地, f 的 Fourier 级数是绝对和一致收敛到 f .

证: 不妨假设 $k = 2$ 并对 $n \neq 0$ 利用分部积分法. 计算

$$\begin{aligned} 2\pi \hat{f}(n) &= \int_0^{2\pi} f(x) e^{-\sqrt{-1}nx} dx \\ &= \left[f(x) \frac{-e^{-\sqrt{-1}nx}}{\sqrt{-1}n} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{\sqrt{-1}n} \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-\sqrt{-1}nx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{-1}n} \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-\sqrt{-1}nx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{-1}n} \left[f'(x) \frac{-e^{-\sqrt{-1}nx}}{\sqrt{-1}n} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{(\sqrt{-1}n)^2} \int_0^{2\pi} f''(x) e^{-\sqrt{-1}nx} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{-1}{n^2} \int_0^{2\pi} f''(x) e^{-\sqrt{-1}nx} dx.$$

如果 $B := \max_{x \in \mathbb{S}^1} |f(x)|$, 则

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{C}{2\pi n^2}.$$

即 $\hat{f}(n) = O(1/n^2)$. \square

§16.2.2 卷积

给定 \mathbb{R} 上以 2π 为周期的可积函数 f, g , 定义它们的卷积(convolution) $f * g$ 为

$$f * g(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy, \quad x \in [-\pi, \pi]. \quad (16.2.12)$$

根据定义 (16.2.12) 显然有 $f * g = g * f$. 观察到

$$\begin{aligned} (f * D_N)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\sum_{-N \leq n \leq N} e^{\sqrt{-1}n(x-y)} \right) dy \\ &= \sum_{-N \leq n \leq N} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{\sqrt{-1}n(x-y)} dy \right) = \sum_{-N \leq n \leq N} \hat{f}(n) e^{\sqrt{-1}nx} = S_N(f)(x). \end{aligned}$$

从而得到

$$f * D_N = S_N(f). \quad (16.2.13)$$

性质16.2.8. 假设 f, g, h 都是以 2π 为周期的可积函数. 则

- (i) $f * (g + h) = f * g + f * h$.
- (ii) $(cf) * g = c(f * g) = f * (cg), c \in \mathbb{C}$.
- (iii) $(f * g) * h = f * (g * h)$.
- (iv) $f * g$ 是连续的.
- (v) $\widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$.

证: 我们只给出 (iv) 和 (v) 的证明. 首先假设 f, g 都是连续的. 对任何 $n \in \mathbb{Z}$ 有

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f * g)(x) e^{-\sqrt{-1}nx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy \right] e^{-\sqrt{-1}nx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-\sqrt{-1}ny} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x-y) e^{-\sqrt{-1}n(x-y)} dx \right] dy = \hat{f}(n)\hat{g}(n). \end{aligned}$$

由于 g 是连续周期函数, 因此 g 在 \mathbb{R} 上是一致连续的. 故对任意 $\epsilon > 0$ 存在正数 $\delta > 0$ 满足 $|g(x) - g(y)| < \epsilon$ 只要 $|x - y| < \delta$. 利用恒等式

$$(f * g)(x_1) - (f * g)(x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)[g(x_1 - y) - g(x_2 - y)]dy,$$

得到

$$\begin{aligned} |(f * g)(x_1) - (f * g)(x_2)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(y)| |g(x_1 - y) - g(x_2 - y)| dy \\ &\leq \frac{\epsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(y)| dy \leq \epsilon \cdot \max_{[-\pi, \pi]} |f|, \end{aligned}$$

只要 $|x_1 - x_2| < \delta$.

一般地, 当 f, g 仅是可积时, 我们要使用如下引理来证明 (iv).

引理16.2.9. 假设 f 在圆上可积且满足 $\sup_{[-\pi, \pi]} |f| \leq B$. 则存在圆上的连续函数列 $\{f_k(x)\}_{k \geq 1}$ 满足

$$\sup_{[-\pi, \pi]} |f_k| \leq B \quad \text{和} \quad \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_k(x)| dx \rightarrow 0 \quad \text{当} \quad k \rightarrow +\infty.$$

证: 假设 f 是实值的. 给定 $\epsilon > 0$ 我们选择区间 $[-\pi, \pi]$ 的一个划分

$$-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = \pi$$

使得 f 的 Darboux 上和与 Darboux 下和的差最多是 ϵ . 令 f^* 是如下定义的阶梯函数

$$f^*(x) := \sup_{y \in [x_{j-1}, x_j]} f(y), \quad \text{如果} \quad x \in [x_{j-1}, x_j] \quad \text{和} \quad 1 \leq j \leq N.$$

根据构造得到 $|f^*| \leq B$ 和

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f^*(x) - f(x)| dx = \int_{-\pi}^{\pi} [f^*(x) - f(x)] dx < \epsilon.$$

现在我们对 f^* 做些修改使得修改后的函数是连续周期函数. 对充分小的 $\delta > 0$, 当 x 和分割点 x_0, \dots, x_N 的距离 $\geq \delta$, 我们定义 $\tilde{f}(x) := f^*(x)$. 在每个 x_j 的 δ -邻域内, $j = 1, \dots, N-1$, 定义 $\tilde{f}(x)$ 是线性函数且满足 $\tilde{f}(x_j \pm \delta) = f^*(x_j \pm \delta)$. 在 $x_0 = -\pi$ 附近, \tilde{f} 是线性的且满足 $\tilde{f}(-\pi) = 0$ 和 $\tilde{f}(-\pi + \delta) = f^*(-\pi + \delta)$. 同样在 $x_N = \pi$ 附近, \tilde{f} 是线性的且满足 $\tilde{f}(\pi) = 0$ 和 $\tilde{f}(\pi - \delta) = f^*(\pi - \delta)$. 因为 $\tilde{f}(-\pi) = \tilde{f}(\pi)$, 我们可以把 \tilde{f} 延拓成 \mathbb{R} 上的连续函数和以 2π 为周期的函数. 另外, $|\tilde{f}| \leq B$ 且 \tilde{f} 与 f^* 仅在 N 个长度为 2δ 的区间上不同. 从而得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f^*(x) - \tilde{f}(x)| dx \leq 4BN\delta.$$

故

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(x) - f(x)| dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f^*(x) - f(x)| dx + \int_{-\pi}^{\pi} |f^*(x) - \tilde{f}(x)| dx < 2\epsilon$$

只要 $\delta \in (0, \epsilon/4BN)$. 当 $2\epsilon = 1/k$ 时记 $f_k := \tilde{f}$ 如上构造, 则函数列 $\{f_k\}_{k \geq 1}$ 满足引理中的性质. \square

应用引理 16.2.9 到 f 和 g 我们得到 S^1 上的连续函数列 $\{f_k\}_{k \geq 1}$ 和 $\{g_k\}_{k \geq 1}$ 满足

$$\sup_{[-\pi, \pi]} |f_k| \leq \sup_{[-\pi, \pi]} |f|, \quad \sup_{[-\pi, \pi]} |g_k| \leq \sup_{[-\pi, \pi]} |g|$$

和

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_k(x)| dx \rightarrow 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - g_k(x)| dx \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty.$$

根据

$$f * g - f_k * g_k = (f - f_k) * g_k + f_k * (g - g_k),$$

和

$$\begin{aligned} |(f - f_k) * g|(x) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y) - f_k(x-y)| |g(y)| dy \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \sup_{[-\pi, \pi]} |g| \int_{-\pi}^{\pi} |f(y) - f_k(y)| dy \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

我们推出 $(f - f_k) * g \rightarrow 0$ 关于 x 是一致收敛的. 类似地, $f_k * (g - g_k) \rightarrow 0$ 一致地, 从而 $f_k * g_k$ 一致收敛到 $f * g$. 因为每个 $f_k * g_k$ 都是连续的, 所以 $f * g$ 也是连续的.

对每个固定的 $n \in \mathbb{Z}$, 必有 $\widehat{f_k * g_k}(n) \rightarrow \widehat{f * g}(n)$, 这是因为 $f_k * g_k$ 一致收敛到 $f * g$. 另一方面, $\widehat{f_k * g_k}(n) = \hat{f}_k(n) \hat{g}_k(n)$. 为了证明 $\widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n) \hat{g}(n)$, 我们必须证明 $\hat{f}_k(n) \rightarrow \hat{f}(n)$ 和 $\hat{g}_k(n) \rightarrow \hat{g}(n)$, $k \rightarrow \infty$. 因为

$$|\hat{f}(n) - \hat{f}_k(n)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f_k(x)] e^{-\sqrt{-1}nx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_k(x)| dx,$$

我们得到 $\hat{f}_k(n) \rightarrow \hat{f}(n)$, $n \rightarrow \infty$. \square

练习 16.2.10. 证明性质 16.2.8 中的其它条目.

§16.2.3 好核

圆上的核列 $\{K_n(x)\}_{n \geq 1}$ 称为**好核列(family of good kernels)** 如果满足如下性质:

(a) 对所有 $n \geq 1$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 1.$$

(b) 存在 $M > 0$ 使得对任意 $n \geq 1$ 都有

$$\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)| dx \leq M$$

(c) 对每个 $\delta > 0$, 有

$$\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |K_n(x)| dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

例16.2.11. 令 $D_N(x)$ 是第 N 个 Dirichlet 核. 则 $\{D_N\}_{N \geq 1}$ 不是一个好核列. 对任意 $N \geq 1$ 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx &= \sum_{-N \leq k \leq N, k \neq 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\sqrt{-1}kx} dx + 1 \\ &= \sum_{-N \leq k \leq N, k \neq 0} \frac{\sin(k\pi)}{k\pi} + 1 = 1. \end{aligned}$$

令

$$L_N := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)| dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin[(N + \frac{1}{2})x]}{\sin \frac{x}{2}} \right| dx.$$

对任意 $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, 我们有 $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$. 因此

$$\begin{aligned} L_N &\geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin[(N + \frac{1}{2})x]|}{|x|} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{N\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{|\sin \theta|}{\theta} d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{0 \leq k \leq N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin \theta|}{\theta} d\theta + \int_{N\pi}^{N\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{|\sin \theta|}{\theta} d\theta \\ &\geq \frac{2}{\pi} \sum_{0 \leq k \leq N-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin \theta| d\theta + \frac{2}{\pi(2N+1)} \int_{N\pi}^{N\pi + \frac{\pi}{2}} |\sin \theta| d\theta \\ &= \frac{4}{\pi^2} \sum_{1 \leq k \leq N} \frac{1}{k} + \frac{4}{\pi^2} \frac{\pi}{2N+1}. \end{aligned}$$

因为数列 $\{a_N\}_{N \geq 1}$, 其中 $a_N = \sum_{1 \leq k \leq N} \frac{1}{k} - \ln N$, 是单调递减的, 所以

$$\sum_{1 \leq k \leq N} \frac{1}{k} \geq \ln N + \gamma,$$

这里 γ 是 Euler 常数. 作为推论得到

$$L_N \geq \frac{4}{\pi^2} \ln N + \frac{4}{\pi^2} \left(\gamma + \frac{\pi}{2N+1} \right). \quad (16.2.14)$$

故 $\{D_N\}_{N \geq 1}$ 不是好核列.

练习16.2.12. 试着证明 $L_N \leq a \ln N + b_N$ 并求出 a 和 b_N .

回顾 §14.4 中的记号和定义. 考虑复级数 $c_0 + c_1 + c_2 + \cdots = \sum_{k \geq 0} c_k$. 定义第 n 个部分和 s_n 为

$$s_n := \sum_{0 \leq k \leq n} c_k$$

并称该级数收敛到 s 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$. 数列 $\{s_k\}_{k \geq 0}$ 的第 N 个 **Cesàro 平均**(N -th Cesàro mean) 或级数 $\sum_{k \geq 0} c_k$ 的第 N 个 **Cesàro 和**(N -th Cesàro sum) 定义为

$$\sigma_N := \frac{1}{N} \sum_{0 \leq k \leq N-1} s_k. \quad (16.2.15)$$

称级数 $\sum_{k \geq 0} c_k$ 是 **Cesàro 可求和**(Cesàro summable) 到 σ 如果 σ_N 收敛到 σ 当 $N \rightarrow \infty$ 时.

- (i) 级数 $\sum_{k \geq 0} (-1)^k$ 是 Cesàro 可求和到 $1/2$.
- (ii) 如果级数 $\sum_{k \geq 0} s_k$ 收敛到 s , 则其是 Cesàro 可求和到同一极限 s .
- (iii) (**Tauber 定理**) 如果级数 $\sum_{n \geq 0} c_n$ 是 Cesàro 可求和到 σ 且 $c_n = o(1/n)$, 则 $\sum_{n \geq 0} c_n$ 收敛到 σ .

练习16.2.13. 证明上面的 Tauber 定理.

如果 $f \in R(\mathbf{S}^1)$, 则

$$S_N(f) = f * D_N.$$

我们可以定义 Fourier 级数的第 N 个 **Cesàro 平均**(N -th Cesàro mean)

$$\sigma_N(f) := \frac{S_0(f) + S_1(f) + \cdots + S_{N-1}(f)}{N} = f * F_N, \quad (16.2.16)$$

这里 $F_N(x)$ 是第 N 个 **Fejér 核**(N -th Fejér kernel)

$$F_N(x) = \frac{D_0(x) + D_1(x) + \cdots + D_{N-1}(x)}{N} = \frac{1}{N} \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}. \quad (16.2.17)$$

练习16.2.14. 证明 $\{F_N\}_{N \geq 1}$ 是好核列.

复级数 $\sum_{k \geq 0} c_k$ 称为 **Abel 可求和的**(Abel summable) 到 s 如果对每个 $r \in [0, 1)$ 幂级数

$$A(r) := \sum_{k \geq 0} c_k r^k$$

都收敛, 且 $\lim_{r \rightarrow 1} A(r) = s$. 把 $A(r)$ 称为级数 $\sum_{k \geq 0} c_k$ 的 **Abel 平均**(Abel means).

- (i) 级数 $\sum_{k \geq 0} (-1)^k (k+1)$ 是 Abel 可求和到 $1/4$.
- (ii) 如果级数是 Cesàro 可求和到 σ 则其也是 Abel 可求和到 σ .

(iii) **(Tauber 定理)** 如果级数 $\sum_{n \geq 0} c_n$ 是 Abel 可求和到 σ 且 $c_n = o(1/n)$, 则 $\sum_{n \geq 0} c_n$ 收敛到 σ .

练习16.2.15. 证明以上的 Tauber 定理. (提示: 对 $A(r) = \sum_{n \geq 0} c_n r^n$ 和 $0 < r < 1$, 我们有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{0 \leq n \leq N} c_n - f(x) \right| &= \left| \sum_{1 \leq n \leq N} c_n(1-r^n) - \sum_{n \geq N+1} c_n r^n \right| \\ &\leq (1-x) \sum_{1 \leq n \leq N} |nc_n| + \frac{1}{N(1-x)} \sup_{n > N} |nc_n|. \end{aligned}$$

令 $\sum_{0 \leq n \leq N} c_n = s_N$ 和 $x = 1 - 1/N$ 得到

$$\left| s_N - A\left(1 - \frac{1}{N}\right) \right| \leq \frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} |nc_n| + \sup_{n > N} |nc_n|.$$

如果 $nc_n \rightarrow 0$ 和 $A(r) \rightarrow s$, 就有 $s_N \rightarrow s$.)

Tauber 在 1897 年导出了他的“第二定理”, 即给出了 Abel 可求和级数是收敛的充要条件.

定理16.2.16. (Tauber, 1897) Abel 可求和级数 $\sum_{n \geq 0} c_n$ 是收敛的 \iff

$$\frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} ka_k = s_n - \frac{1}{n} \sum_{0 \leq k \leq n-1} s_k \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

练习16.2.17. 本练习来证明如下关系:

$$\text{收敛} \implies \text{Cesàro 可求和} \implies \text{Abel 可求和}, \quad (16.2.18)$$

但是反之都不对, 比如考察级数 $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$ 和 $\sum_{n \geq 0} (-1)^{n-1} n$.

如果 $f \in R(\mathbb{S}^1)$ 且 $f(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n e^{\sqrt{-1}nx}$, 则我们来定义 f 的 **Abel 平均(Abel means)** 为

$$A_r(f)(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} A_n e^{\sqrt{-1}nx}. \quad (16.2.19)$$

由于 A_n 是一致有界的, 因此对每个 $r \in [0, 1)$ 函数项级数 $A_r(f)$ 都是绝对一致收敛的. 注意到

$$A_r(f) = f * P_r \quad (16.2.20)$$

这里 $P_r(x)$ 是 **Poisson 核(Poisson kernel)** 并根据如下定义

$$P_r(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{\sqrt{-1}nx} = \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2}, \quad r \in [0, 1). \quad (16.2.21)$$

练习16.2.18. 证明 $\{P_r\}_{r \in [0,1]}$ 是好核列. 即证明

(a) 对每个 $r \in [0,1]$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) dx = 1.$$

(b) 存在 $M > 0$ 使得对所有 $r \in [0,1]$ 都有

$$\int_{-\pi}^{\pi} |P_r(x)| dx \leq M$$

(c) 对每个 $\delta > 0$ 有

$$\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |P_r(x)| dx \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 1.$$

定理16.2.19. 假设 $\{K_n\}_{n \geq 1}$ 是好核列且 $f \in R(\mathbb{S}^1)$. 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f * K_n)(x) = f(x)$$

只要 f 在 x 处连续. 特别地, 如果 f 是处处连续, 则上述极限是一致收敛的.

证: 根据好核的定义得到

$$\begin{aligned} f * K_n(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(y)K_n(x-y) - f(x)K_n(y)] dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(y) [f(x-y) - f(x)] dy \end{aligned}$$

对任何 x 都成立. f 在 x 处的连续性推出对任意 $\epsilon > 0$ 存在正数 $\delta > 0$ 满足 $|f(x-y) - f(x)| < \epsilon$ 只要 $|y| < \delta$. 因此

$$\begin{aligned} |f * K_n(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(y)| |f(x-y) - f(x)| dy \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |K_n(y)| |f(x-y) - f(x)| dy + \frac{1}{2\pi} \int_{|y| < \delta} |K_n(y)| |f(x-y) - f(x)| dy \\ &\leq \frac{\epsilon}{2\pi} \int_{|y| < \delta} |K_n(y)| dy + \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \max_{[-\pi, \pi]} |f| \cdot \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |K_n(y)| dy \\ &\leq \frac{\epsilon}{2\pi} M + \frac{1}{\pi} \max_{[-\pi, \pi]} |f| \cdot \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |K_n(y)| dy. \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$ 得到

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f * K_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon M}{2\pi},$$

即 $f * K_n(x) \rightarrow f(x)$ 只要 f 在 x 处连续. \square

推论16.2.20. (1) 如果 f 在 S^1 上可积, 则 f 的 Fourier 级数在 f 的每个连续点上是 Cesaro 可求和到 f . 更进一步, 如果 f 在 S^1 上是连续的则 f 的 Fourier 级数是一致 Cesaro 可求和到 f .

(2) 如果 f 在 S^1 上可积, 则 f 的 Fourier 级数在 f 的每个连续点上是 Abel 可求和到 f . 更进一步, 如果 f 在 S^1 上是连续的则 f 的 Fourier 级数是一致 Abel 可求和到 f .

在练习16.2.13 和练习16.2.15 我们假设了 $nc_n \rightarrow 0$. Hardy 问道在 Tauber 定理中上述条件可否减弱为数列 $\{nc_n\}_{n \geq 1}$ 是有界的. 根据练习16.2.15 中的提示, 我们看到数列 $\{nc_n\}_{n \geq 0}$ 的有界性并结合级数 $\sum_{n \geq 0} c_n$ 的 Abel 可求和, 推出数列 $\{s_N\}_{N \geq 0}$ 是有界的.

定理16.2.21. (Hardy-Landau, 1910) 如果级数 $\sum_{n \geq 0} c_n$ 是 Cesàro 可求的且要么 $|nc_n| \leq C$ (Hardy) 或者要么 $nc_n \geq -C$ (Landau), 则级数 $\sum_{n \geq 0} c_n$ 收敛.

证: 下面证明是属于 Kloosterman (1940). 不妨假设 c_n 是实数并记

$$s_n = c_0 + \cdots + c_n =: c_n^{(-1)}, \quad c_n^{(-2)} := c_0^{(-1)} + \cdots + c_n^{(-1)}.$$

对每个整数 $h > 0$ 和 $n < k \leq n+h$ 得到

$$\begin{aligned} c_{n+h}^{(-2)} &= c_n^{(-2)} + [c_{n+1}^{(-1)} + \cdots + c_{n+h}^{(-1)}] \\ &= c_n^{(-2)} + hc_n^{(-1)} + [hc_{n+1} + (h-1)c_{n+2} + \cdots + c_{n+h}]; \end{aligned}$$

最后的有限和是不会超过 $\frac{h(h+1)}{2} \max_{n+1 \leq k \leq n+h} c_k$. 故我们得到离散 Taylor 公式:

$$c_{n+h}^{(-2)} = c_n^{(-2)} + hc_n^{(-1)} + \frac{h(h+1)}{2} c_{\xi}^*,$$

这里 c_{ξ}^* 是介于 $\min_{n < k \leq n+h} c_k$ 和 $\max_{n < k \leq n+h} c_k$ 之间的数.

不妨假设级数 $\sum_{n \geq 0} c_n$ 是 Cesàro 可求和到 0 从而得到 $c_n^{(-2)}/n \rightarrow 0$ 当 $n \rightarrow \infty$. 不等式 $nc_n \geq -C$ ($C > 0$) 和 $|c_n^{(-2)}| \leq n\epsilon$ ($\epsilon > 0$ 充分小和 n 充分大), 推出对 $h \approx 2n\sqrt{\epsilon/C}$ 有

$$s_n = \frac{c_{n+h}^{(-2)} - c_n^{(-2)}}{h} - \frac{h(h+1)}{2} c_{\xi}^* \leq \frac{2n+h}{h} \epsilon + C \frac{h+1}{2n} < 3\sqrt{C\epsilon}.$$

对它方向上的估计我们可取 $h \approx -2n\sqrt{\epsilon/C}$; 当 $h < 0$ 时离散 Taylor 公式需要作些调整. 现在可得出 $s_n \rightarrow 0$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时. \square

Hardy 利用定理 16.2.21 得出下面关于 Fourier 级数的结论:

- (i) 假设 f 是以 2π 为周期的连续函数且其 Fourier 系数满足 $\hat{f}(n) = O(1/|n|)$ (根据推论16.2.7 的证明我们可以得到 $\hat{f}(n) = O(1/|n|)$ 对任何 $f \in C^1(S^1)$ 都成立). 则 f 的 Fourier 级数逐点收敛到 f .

(ii) 假设 f 是周期函数且在周期上的变差是有界的. 则 Fourier 系数 $\hat{f}(n)$ 满足 $O(1/|n|)$, 因此 f 的 Fourier 级数在每点 x 处收敛到 $\frac{1}{2}[f(x-) + f(x+)]$.

定理16.2.22. (1) (Littlewood, 1911) 如果级数 $\sum_{n \geq 0} c_n$ 是 Abel 可求和的且

$$|nc_n| \leq C,$$

则 $\sum_{n \geq 0} c_n$ 是收敛的.

(2) (Hardy-Littlewood, 1914) 如果级数 $\sum_{n \geq 0} c_n$ 是 Abel 可求和的且

$$nc_n \geq -C,$$

则 $\sum_{n \geq 0} c_n$ 是收敛的.

§16.2.4 Riemann 引理

If $f \in C^1(S^1)$, 根据推论 16.2.7 我们得到 $\hat{f}(n) = O(1/|n|)$. 一般地我们有如下定理.

定理16.2.23. (Riemann 引理) 假设 ψ 在 $[a, b]$ 上可积的或者在瑕积分意义下是绝对可积的, 则

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b \psi(x) \sin(px) dx = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b \psi(x) \cos(px) dx = 0. \quad (16.2.22)$$

证: (1) 首先假设 $\psi \in R([a, b])$. 此时 ψ 必有界. 对任意 $\epsilon > 0$ 总存在关于 $[a, b]$ 的一个划分 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 满足

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \omega_i \Delta x_i < \frac{\epsilon}{2}, \quad \Delta x_i := x_i - x_{i-1}, \quad \omega_i := M_i - m_i,$$

这里 $m_i := \min_{[x_{i-1}, x_i]} \psi$ 和 $M_i := \max_{[x_{i-1}, x_i]} \psi$. 计算得到

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \psi(x) \sin(px) dx \right| &= \left| \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left\{ [\psi(x) - m_i] \sin(px) + m_i \sin(px) \right\} dx \right| \\ &\leq \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\psi(x) - m_i| |\sin(px)| dx + \sum_{1 \leq i \leq n} |m_i| \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin(px) dx \right| \\ &\leq \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\psi(x) - m_i| dx + \frac{2}{p} \sum_{1 \leq i \leq n} |m_i| \\ &\leq \sum_{1 \leq i \leq n} \omega_i \Delta x_i + \frac{2}{p} \sum_{1 \leq i \leq n} |m_i| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

只要 $p \geq \frac{4}{\epsilon} \sum_{1 \leq i \leq n} |m_i|$.

(2) 假设函数 ψ 的唯一瑕点是 b . 根据假设条件得到对任意 $\epsilon > 0$ 存在正数 $\delta > 0$ 使得当 $\eta \in (0, \delta)$ 时有

$$\int_{b-\eta}^b |\psi(x)| dx < \frac{\epsilon}{2}.$$

固定上面的 η , 由于 $\psi(x) \in R([a, b-\eta])$, 利用 (1) 存在正数 $P > 0$ 使得

$$\left| \int_a^{b-\eta} \psi(x) \sin px dx \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

只要 $p > P$. 从而推出

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \psi(x) \sin px dx \right| &\leq \left| \int_a^{b-\eta} \psi(x) \sin px dx \right| + \int_{b-\eta}^b |\psi(x) \sin px| dx \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \int_{b-\eta}^b |\psi(x)| dx \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \quad \square \end{aligned}$$

§16.2.5 Fourier 级数的逐点收敛定理

回顾

$$S_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1 \leq k \leq n} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)],$$

和

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

这里 f 是以 2π 为周期的周期函数. 则可计算得到

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{1 \leq k \leq n} \cos n(t-x) \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(t-x)}{\sin \frac{t-x}{2}} dt \quad (16.2.23) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin \frac{2n+1}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} dt. \end{aligned}$$

给定函数 $\sigma(x)$ 我们就得到

$$S_n(f)(x) - \sigma(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - \sigma(x) \right] \frac{\sin \frac{2n+1}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} dt. \quad (16.2.24)$$

推论16.2.24. (1) **(局部性原理)** 如果 f 是以 2π 为周期的可积 (或者在瑕积分意义下是绝对可积) 函数, 则函数列 $\{S_n(f)(x)\}_{n \geq 1}$ 的收敛性只依赖于限制函数 $f|_{(x-\delta, x+\delta)}$, 这里 $\delta > 0$ 是充分小的数.

(2) 如果 ψ 在 $[0, \delta]$ 上是可积的或者在瑕积分意义下是绝对可积的, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \psi(x) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \psi(t) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}t}{t} dt.$$

(3) 练习 16.2.12 可改进为 $L_N = a \ln N + O(1)$ 当 $N \rightarrow +\infty$ 时.

证: (1) 对任给 $\delta > 0$ 有 $\sin(t/2) > C_\delta$, 这里存在 $C_\delta > 0$ 和任意 $\delta \leq t \leq \pi$. 利用定理16.2.23 我们得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\delta^\pi [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin \frac{2n+1}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} dt = 0.$$

所以根据 (16.2.23), $S_n(f)(x)$ 的手里性指依赖于 $f|_{(x-\delta, x+\delta)}$.

(2) 因为 $2 \sin \frac{t}{2} \sim t$ 当 $t \rightarrow 0$ 时, 我们可以考虑函数

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t}, & 0 < t \leq \delta, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

显然它在 $[0, \delta]$ 上时连续的. 从而根据定理 16.2.23 得证.

(3) 可由 (2) 直接推出. \square

作为推论16.2.24 的直接结果是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{\sin \frac{2n+1}{2}t}{t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{\sin \frac{2n+1}{2}t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt.$$

对任意 $t \in [0, \pi]$ 有

$$\frac{1}{2} + \cos t + \cos(2t) + \cdots + \cos(nt) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}t}{2 \sin \frac{t}{2}}.$$

在 $[0, \pi]$ 上积分得到

$$\int_0^\pi \frac{\sin \frac{2n+1}{2}t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

给定区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 和定义在 D 上的函数 f . 称 $f \in C^{0,\alpha}(D)$ ($C^{0,\alpha}(D)$ 称为 α 阶 Hölder 空间(Hölder's space with order α)) 如果存在 $\alpha \in (0, 1]$ 和 $L \geq 0$ 使得

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha$$

对任何 $x, y \in D$ 都成立. 记 $\mathbf{Lip}(D) := C^{0,1}(D)$. 观察到

$$C^1(D) \subsetneq \mathbf{Lip}(D) \subsetneq C(D). \quad (16.2.25)$$

练习16.2.25. 验证 (16.2.25).

函数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 称为分段单调(piecewise monotone) 如果存在划分 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ 使得 $f|_{(x_{i-1}, x_i)}$, $1 \leq i \leq N$, 是单调的.

引理16.2.26. (Dirichlet 引理) 假设 ψ 在 $[0, \delta]$ 上是单调的, 则

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^\delta \frac{\psi(t) - \psi(0+)}{t} \sin(pt) dt = 0.$$

证: 不妨假设 ψ 是单调递增的. 对任意 $\epsilon > 0$ 存在正数 $\eta \in (0, \delta)$ 使得 $0 \leq \psi(t) - \psi(0+) < \epsilon$ 对任何 $t \in (0, \eta]$ 都成立. 计算得到

$$\begin{aligned} & \int_0^\delta \frac{\psi(t) - \psi(0+)}{t} \sin(pt) dt \\ &= \int_0^\eta \frac{\psi(t) - \psi(0+)}{t} \sin(pt) dt + \int_\eta^\delta \frac{\psi(t) - \psi(0+)}{t} \sin(pt) dt \\ &= [\psi(\eta) - \psi(0+)] \int_\xi^\eta \frac{\sin(pt)}{t} dt + \int_\eta^\delta \frac{\psi(t) - \psi(0+)}{t} \sin(pt) dt \\ &\leq \epsilon \left| \int_{p\xi}^{p\eta} \frac{\sin u}{u} du \right| + \int_\eta^\delta \frac{\psi(t) - \psi(0+)}{t} \sin(pt) dt \end{aligned}$$

这里存在 $\xi \in [0, \eta]$. By (15.2.11), 存在 $p_1 > 0$ 使得

$$\left| \int_{p\xi}^{p\eta} \frac{\sin u}{u} du \right| < 1$$

对任何 $p \geq p_1$ 都成立. 由于函数 $[\psi(t) - \psi(0+)]/t$ 是可积的, 因此从定理 16.2.23 得到

$$\left| \int_\eta^\delta \frac{\psi(t) - \psi(0+)}{t} \sin(pt) dt \right| < \epsilon$$

只要 $p \geq p_2$, 这里 p_2 是充分大的数. 故

$$\left| \int_0^\delta \frac{\psi(t) - \psi(0+)}{t} \sin(pt) dt \right| < 2\epsilon$$

只要 $p \geq \max(p_1, p_2)$. \square

假设 $x \in [a, b]$ 是函数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 的连续点或第一类间断点. 称 $f \in C^{0,\alpha}(x)$ 如果 $|f(x \pm t) - f(x \pm)| \leq Lt^\alpha$ 对所有充分小的 $t > 0$ 都成立, 这里 $L > 0$ 和 $\alpha \in (0, 1]$.

定理16.2.27. 假设函数 f 是以 2π 为周期的可积 (或在瑕积分意义下是绝对可积) 函数. 如果 f 满足

- (1) **(Dirichlet-Jordan 判别法)** f 在某个区间 $(x - \delta, x + \delta)$ 上是分段单调, 或
- (2) **(Dini-Lipschitz 判别法)** 对某个 $\alpha \in (0, 1]$ 有 $f \in C^{0,\alpha}(x)$,

则 f 的 Fourier 级数在每点 x 都收敛到 $[f(x+) + f(x-)]/2$, 即,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left[a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx) \right] = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}. \quad (16.2.26)$$

证: (1) 从引理 16.2.26 推出

$$\int_0^\delta \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \sin(pt) dt \rightarrow 0, \quad \int_0^\delta \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t} \sin(pt) dt \rightarrow 0.$$

Using (16.2.24), 推论 16.2.24, 和定理 16.2.23, 得到

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) &= \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+t) + f(x-t) - f(x+0) - f(x-0)] \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \\ &\sim \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[\frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} + \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t} \right] \sin \frac{2n+1}{2} t dt \end{aligned}$$

但是这个积分是趋于零的.

(2) 此时我们有 $|f(x \pm t) - f(x \pm 0)|/t \leq L/t^{1-\alpha}$. 故

$$\left| \frac{f(x+t) + f(x-t) - f(x+) - f(x-)}{t} \right| \leq \frac{2L}{t^{1-\alpha}}.$$

即左边是可积的从而再次根据定理 16.2.23 得证. \square

例16.2.28. 函数 $f(x) = x^2$, $-\pi \leq x \leq \pi$, 的 Fourier 余弦级数为

$$f_{\text{even}}(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

利用定理 16.2.27 得到

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (16.2.27)$$

例16.2.29. 函数 $f(x) = x$, $-\pi \leq x \leq \pi$, 的 Fourier 正弦级数为

$$f_{\text{odd}}(x) \sim \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{2}{n} \sin(nx).$$

利用定理 16.2.27 得到

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{2}{n} \sin(nx) = \begin{cases} x, & -\pi < x < \pi, \\ 0, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

例16.2.30. 利用定理 16.2.27 得到函数 $f(x) = \cos(ax)$, $-\pi \leq x \leq \pi$, 的 Fourier 级数为

$$\frac{\pi \cos(ax)}{2 \sin(a\pi)} = \frac{1}{2a} + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{a \cos(nx)}{a^2 - n^2} \quad (16.2.28)$$

这里 $a \notin \mathbf{Z}$.

作为应用我们给出例 15.2.14 (2) 的一个初等证明, 这个证明是属于 **N. I. Lobatshevski**. 在 (16.2.28) 中取 $x = 0$ 得到

$$\frac{1}{\sin(a\pi)} = \frac{1}{a\pi} + 2 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n a\pi}{(a\pi)^2 - (n\pi)^2}$$

接下来令 $t = a\pi$ 得到

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{t} + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \left(\frac{1}{t - n\pi} + \frac{1}{t + n\pi} \right). \quad (16.2.29)$$

重新改写

$$I := \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{k \geq 0} \int_{k\pi/2}^{(k+1)\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx.$$

由于

$$\begin{aligned} \int_{2m\pi/2}^{(2m+1)\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx &= (-1)^m \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{m\pi + t} dt, \\ \int_{(2m+1)\pi/2}^{2m\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx &= (-1)^{m-1} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{m\pi - t} dt, \end{aligned}$$

因此得到

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \sin t \left[\frac{1}{t} + \sum_{m \geq 1} (-1)^m \left(\frac{1}{t - m\pi} + \frac{1}{t + m\pi} \right) \right] dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin t \cdot \frac{1}{\sin t} dt = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

§16.2.6 * Fourier 级数的一致收敛性

本小节内容主要取自 **周颂平** 的专著, 见参考文献. 考虑非负数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$.

- (1) 称 $\{a_n\}_{n \geq 1} \in \mathbf{MS}$ (**monotone sequences**) 如果它是递减的.
- (2) (**Shah, 1962**) 称 $\{a_n\}_{n \geq 1} \in \mathbf{QMS}$ (**quasi-monotone sequences**) 如果存在某个 $\alpha \geq 0$ 使得数列 $\{a_n/n^\alpha\}_{n \geq 1} \in \mathbf{MS}$.
- (3) 称 $\{a_n\}_{n \geq 1} \in \mathbf{AMS}$ (**almost monotone sequences**) 如果 $a_k \leq Ma_n$ 对任何 $k \geq n$ 都成立.
- (4) 称 $\{a_n\}_{n \geq 1} \in \mathbf{RQMS}$ (**regularly-varying quasi-monotone sequences**) 如果数列 $\{a_n/R(n)\}_{n \geq 1} \in \mathbf{MS}$ 对某个正则变化数列 $\{R(n)\}_{n \in \mathbf{N}}$ 成立. 这里正则变化数列 $\{R(n)\}_{n \geq 1}$ 是指数列 $\{R(n)\}_{n \geq 1}$ 是正的, 单调递增的且满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R(\lfloor \lambda n \rfloor)}{R(n)} < \infty$ 对某个 $\lambda > 1$ 成立.
- (5) 称 $\{a_n\}_{n \geq 1} \in \mathbf{BVS}$ (**bounded variation sequences**) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 且

$$\sum_{n \geq 1} |\Delta a_n| < \infty,$$

这里 $\Delta a_n := a_n - a_{n+1}$.

- (6) (Leindler, 2001) 称 $\{a_n\}_{n \geq 1} \in \text{RBVS}$ (rest bounded variation sequences) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 且

$$\sum_{k \geq n} |\Delta a_k| \leq M a_n$$

对任何 $n \geq 1$ 都成立, 这里 M 是非负常数.

- (7) (乐-周, 2005) 称 $\{a_n\}_{n \geq 1} \in \text{GBVS}$ (group bounded variation sequences) 如果

$$\sum_{n \leq k \leq 2n} |\Delta a_k| \leq M a_n$$

对任何 $n \geq 1$ 都成立, 这里 M 是非负常数.

- (8) (虞-周, 2007) 称 $\{a_n\}_{n \geq 1} \in \text{NBVS}$ (non-onesided bounded variation sequences) 如果

$$\sum_{n \leq k \leq 2n} |\Delta a_k| \leq M(a_n + a_{2n})$$

对任何 $n \geq 1$ 都成立, 这里 M 是非负常数.

- (9) (周, 2010) 称 $\{a_n\}_{n \geq 1} \in \text{MVBVS}$ (mean value bounded variation sequences) 如果

$$\sum_{n \leq k \leq 2n} |\Delta a_k| \leq \frac{M}{n} \sum_{[n/\lambda] \leq k \leq [\lambda n]} a_k$$

对任何 $n \geq 1$ 都成立, 这里 M 是非负常数和 $\lambda \geq 2$.

练习16.2.31. 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1} \in \text{QMS} \iff$ 存在 $\alpha > 0$ 使得 $a_{n+1} \leq a_n(1 + \alpha/n)$ 对充分大 $n \gg 1$ 都成立.

练习16.2.32. 假设 $\{R(n)\}_{n \geq 1}$ 是正的递增数列. 证明 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{R([\lambda n])}{R(n)} < \infty$ 对某个 $\lambda > 1$ 成立 $\iff \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{R(2m)}{R(m)} < \infty$.

定理16.2.33. (Chaundy-Jolliffe, 1916) 如果数列 $\{a_n\}_{n \geq 1} \in \text{MS}$ 则函数项级数 $\sum_{n \geq 1} a_n \sin nx$ 一致收敛 $\iff \lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$.

证: 令 $S_n(x) := \sum_{1 \leq k \leq n} a_k \sin(kx)$ 并记 $\|f\| := \max_{\mathbb{R}} |f|$. 则

$$\|S_{2n} - S_{n-1}\| \geq \sum_{n \leq k \leq 2n} a_k \sin\left(k \frac{\pi}{4n}\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n \leq k \leq 2n} a_k \geq \frac{n+1}{\sqrt{2}} a_{2n}.$$

如果函数项级数 $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \sin nx$ 是一致收敛的, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} 2n a_{2n} = 0$. 类似地我们有 $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1) a_{2n+1} = 0$. 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$.

反之我们假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$. 为证明一致收敛性, 我们只要验证函数列 $\{S_n(x)\}_{n \geq 1}$ 对每个 $x \in \mathbb{R}$ 是 Cauchy 的. 根据周期性, 我们不妨假设 $x \in (0, \pi)$.

对任意 $\epsilon > 0$, 存在整数 n_0 使得 $na_n < \epsilon$ 对任意 $n > n_0$ 都成立. 对任意 $x \in (0, \pi)$ 取 $N := \lfloor 1/x \rfloor$ 和 $n > n_0$. 则

$$\sum_{k \geq n} a_k \sin(kx) = \sum_{n \leq k \leq N-1} a_k \sin(kx) + \sum_{k \geq N} a_k \sin(kx) =: I_1 + I_2.$$

这里我们不妨假设 $N > n$. 利用不等式 $|\sin x| \leq |x|$ 得到

$$\left| \sum_{n \leq k \leq N-1} a_k \sin(kx) \right| \leq \sum_{n \leq k \leq N-1} a_k |\sin(kx)| \leq \max_{n \leq k \leq N-1} ka_k \leq \epsilon.$$

另一方面有

$$|I_2| \leq 4\pi N\epsilon.$$

事实上根据 Abel 变换推出

$$\sum_{k \geq N} a_k \sin(kx) = -a_N \tilde{D}_N - 1(x) + \sum_{k \geq N} \Delta a_k \tilde{D}_k(x),$$

这里

$$\tilde{D}_n(x) := \sum_{1 \leq k \leq n} \sin(kx) = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

注意到 $|\tilde{D}_n(x)| \leq \pi/x$ 对任意 $x \in (0, \pi)$ 都成立. 故

$$\left| \sum_{k \geq N} a_k \sin(kx) \right| \leq \frac{\pi}{x} \left(a_N + \sum_{k \geq N} |\Delta a_k| \right) \leq 2\pi N \left(a_N + \sum_{k \geq N} |\Delta a_k| \right).$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (na_n \cdot \frac{1}{n}) = 0$, 所以

$$\left| \sum_{k \geq K} a_k \sin(kx) \right| \leq 4\pi N \sum_{k \geq N} |\Delta a_k| = 4\pi N a_N < 4\pi\epsilon.$$

从而 $|\sum_{k \geq n} a_k \sin(kx)| \leq (1 + 4\pi)\epsilon$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\sum_{k \geq n} a_k \sin(kx)\| = 0$. \square

定理16.2.34. (Shah, 1962; Nurcombe, 1992) 如果数列 $\{a_n\}_{n \geq 1} \in \mathbf{QMS}$ 则函数项级数 $\sum_{n \geq 1} a_n \sin nx$ 一致收敛 $\iff \lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$.

上述定理可推广到其它单调数列集.

定理16.2.35. (谢 - 周, 1994) 对复数列 $\{c_n\}_{n \geq 1} \in \mathbf{RQMS}$ 记

$$f(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{\sqrt{-1}nx}.$$

若 $c_n + c_{-n} \in K(\theta_0)$ 对某个 $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2})$ 成立, 则 f 是连续的且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n\| = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} nc_n = 0 \text{ 和 } \sum_{n \geq 1} |c_n + c_{-n}| < \infty.$$

这里 $K(\theta_0) := \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| \leq \theta_0\}$.

推论16.2.36. 如果数列 $\{a_n\}_{n \geq 1} \in \mathbf{RQMS}$ 则函数项级数 $\sum_{n \geq 1} a_n \sin nx$ 一致收敛 $\iff \lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$.

定理16.2.37. (Leindler, 2001) 如果数列 $\{a_n\}_{n \geq 1} \in \mathbf{RBVS}$ 则 $\sum_{n \geq 1} a_n \sin nx$ 一致收敛 $\iff \lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$.

定理16.2.38. (乐 - 周; 2005; Tikhonov, 2007) 对复数列 $\{c_n\}_{n \geq 1} \in \mathbf{GBVS}$ 记

$$f(x) := \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{\sqrt{-1}nx}.$$

若 $c_n + c_{-n} \in K(\theta_0)$ 对某个 $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2})$ 成立, 则 f 是连续的且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n\| = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} nc_n = 0 \text{ 和 } \sum_{n \geq 1} |c_n + c_{-n}| < \infty.$$

定理16.2.39. (虞 - 周; 2007) 对复数列 $\{c_n\}_{n \geq 1} \in \mathbf{NBVS}$ 记

$$f(x) := \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{\sqrt{-1}nx}.$$

若 $c_n + c_{-n} \in K(\theta_0)$ 对某个 $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2})$ 成立, 则 f 是连续的且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n\| = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} nc_n = 0 \text{ 和 } \sum_{n \geq 1} |c_n + c_{-n}| < \infty.$$

定理16.2.40. (周, 2010) 对复数列 $\{c_n\}_{n \geq 1} \in \mathbf{MVBVS}$ 记

$$f(x) := \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{\sqrt{-1}nx}.$$

若 $c_n + c_{-n} \in K(\theta_0)$ 对某个 $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2})$ 成立, 则 f 是连续的且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n\| = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} nc_n = 0 \text{ 和 } \sum_{n \geq 1} |c_n + c_{-n}| < \infty.$$

§16.2.7 几个反例

I. 我们给出 **Du Bois-Reymond** 的结论, 即存在连续周期函数其 Fourier 级数在某点是发散的. 这说明定理 16.2.27 (2) 中的 **Dini-Lipschitz** 判别法的条件 “ $f \in C^{0,\alpha}(x)$ ” 不能减弱为 “ f 在 x 附近连续”.

考察锯齿函数 $f(x)$, 它关于 x 是奇函数且在 $0 < x < \pi$ 上为 $\sqrt{-1}(\pi - x)$. 则

$$f(x) \sim \sum_{n \neq 0} \frac{e^{\sqrt{-1}nx}}{n} = \sum_{n \leq -1} \frac{e^{\sqrt{-1}nx}}{n} + \sum_{n \geq 1} \frac{e^{\sqrt{-1}nx}}{n}. \quad (16.2.30)$$

我们可以证明函数项级数

$$\sum_{n \geq -1} \frac{e^{\sqrt{-1}nx}}{n}$$

不是任何 Riemann 可积函数的 Fourier 级数. 事实上若假设它是可积函数 \tilde{f} 的 Fourier 级数, 则 \tilde{f} 是有界的. 利用 Abel 平均得到

$$|A_r(\tilde{f})(0)| = \sum_{n \geq 1} \frac{r^n}{n},$$

且当 $r \rightarrow 1$ 时趋于无穷. 这就给出了矛盾, 因为

$$|A_r(\tilde{f})(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(x)| P_r(x) dx \leq \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |\tilde{f}(x)|$$

其中 $P_r(x)$ 是 Poisson 核.

对每个 $N \in \mathbb{N}$ 定义如下两个 $[-\pi, \pi]$ 上的函数,

$$f_N(x) := \sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{e^{\sqrt{-1}nx}}{n}, \quad \tilde{f}_N(x) := \sum_{-N \leq n \leq -1} \frac{e^{\sqrt{-1}nx}}{n}. \quad (16.2.31)$$

由于

$$\sum_{1 \leq n \leq N} \frac{1}{n} \geq \sum_{1 \leq n \leq N-1} \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} = \int_1^N \frac{dx}{x} = \ln N,$$

因此

$$|\tilde{f}_N(0)| = \left| \sum_{-N \leq n \leq -1} \frac{1}{n} \right| = \sum_{1 \leq n \leq N} \frac{1}{n} \geq \ln N.$$

引理16.2.41. 假设级数 $\sum_{n \geq 1} c_n$ 的 Abel 平均 $A_r = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n r^n$ 当 $r \rightarrow 1-$ 时是有界的. 如果 $c_n = O(1/n)$, 则部分和 $S_N := \sum_{1 \leq n \leq N} c_n$ 是有界的.

证: 令 $r := 1 - N^{-1}$ 并选择 M 使得 $n|c_n| \leq M$ 和 $|A_r| \leq M$ 成立. 根据

$$S_N - A_r = \sum_{1 \leq n \leq N} (1 - r^n) c_n - \sum_{n \geq N+1} c_n r^n,$$

我们得到

$$\begin{aligned} |S_N - A_r| &\leq \sum_{1 \leq n \leq N} |c_n| (1 - r^n) + \sum_{n \geq N+1} |c_n| r^n \\ &\leq M \sum_{1 \leq n \leq N} (1 - r) + \frac{M}{N} \sum_{n \geq N+1} r^n \leq MN(1 - r) + \frac{M}{N} \frac{1}{1 - r} = 2M. \end{aligned}$$

故得到 $|S_N| \leq 3M$. \square

利用 (16.2.30) 函数项级数 $\sum_{n \neq 0} e^{\sqrt{-1}nx}/n$ 是锯齿函数 f 的 Fourier 级数. 因此

$$c_n = \frac{e^{\sqrt{-1}nx}}{n} + \frac{e^{-\sqrt{-1}nx}}{-n} = O\left(\frac{1}{|n|}\right).$$

因为 $A_r(f) = f * P_r$ 且 f 是有界的, 所以当 $r \rightarrow 1-$ 时 A_r 时有界的; 根据引理 16.2.41 部分和 $S_N(f) = f_N$ 关于 N 和 x 是一致有界的.

定义

$$P_N(x) := e^{2N\sqrt{-1}x} f_N(x), \quad \tilde{P}_N(x) := e^{2N\sqrt{-1}x} \tilde{f}_N(x). \quad (16.2.32)$$

则得到

$$S_M(P_N) = \begin{cases} P_N, & M \geq 3N, \\ \tilde{P}_N, & M = 2N, \\ 0, & M < N. \end{cases}$$

选择 $N_k := 3^{2^k}$ 和 $\alpha_k := 1/k^2$. 则

$$N_{k+1} > 3N_k, \quad \alpha_k \ln N_k \rightarrow \infty.$$

最后我们来定义

$$g(x) := \sum_{k \geq 1} \alpha_k P_{N_k}(x). \quad (16.2.33)$$

根据 P_N 的一致有界性, 上述函数项级数一致收敛到某个连续周期函数. 但是

$$|S_{2N_m}(f)(0)| \geq c\alpha_m \ln N_m + O(1) \rightarrow \infty, \quad m \rightarrow +\infty.$$

从而我们得到一个连续周期函数其 Fourier 级数在 0 处发散.

II. 回顾共轭 Dirichlet 核 \tilde{D}_N 的定义

$$\tilde{D}_N(x) := \sum_{|n| \leq N} \text{sign}(x) e^{\sqrt{-1}nx} = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2N+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}. \quad (16.2.34)$$

类似于例 16.2.11 我们可以证明

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{D}_N(x)| dx \leq c \ln N \quad (16.2.35)$$

对某个 $c > 0$ 成立. 如果 f 是 (Riemann) 可积的, 则

$$f * \tilde{D}_N = O(\ln N).$$

作为推论得到

(i) 函数项级数

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{\ln n}$$

对每个 x 都是收敛的, 但不是任何 (Riemann) 可积函数的 Fourier 级数.

(ii) 给定 $\alpha \in (0, 1)$ 函数项级数

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$$

对每个 x 都是收敛的, 但不是任何 (Riemann) 可积函数的 Fourier 级数.

如果上面两种情形都成立则得到

$$\sum_{1 \leq n \leq N} \frac{1}{\ln n} = O(\ln N), \quad \sum_{1 \leq n \leq N} \frac{1}{n^\alpha} = O(\ln N) \quad (0 < \alpha < 1). \quad (16.2.36)$$

练习16.2.42. 验证 (16.2.35), 并证明 (16.2.36) 不可能成立.

§16.3 \mathbb{R} 上的 Fourier 变换

回顾到对任何 $f \in C(\mathbf{S}^1)$ 有

$$f(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n e^{\sqrt{-1}nx},$$

这里

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-\sqrt{-1}nx} dx.$$

做变量替换 $y = x/2\pi$ 得到

$$A_n = \int_0^1 f(y) e^{-2\pi\sqrt{-1}ny} dy, \quad f(y) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n e^{2\pi\sqrt{-1}ny}.$$

如果 f 是定义在 \mathbb{R} 上的函数, 我们引入

$$f^\wedge(\xi) \equiv \hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi} dx, \quad f(x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi\sqrt{-1}x\xi} d\xi =: \check{f}(x) \equiv f^\vee(x),$$

如果第二个 \sim 取等号这就是著名的 Fourier 反演公式.

对定义在 \mathbb{R} 上的函数 f , 定义其 Cauchy 主值积分为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N f(x) dx = \mathbf{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

注意极限不一定存在, 比如考虑函数 $f(x) = 1/(1 + |x|)$.

§16.3.1 适度递减函数

定义在 \mathbb{R} 上的函数 f 称为适度递减的 (moderate decrease) 如果 f 是连续的且存在常数 $A > 0$ 使得

$$|f(x)| \leq \frac{A}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

成立. 记 $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ 为定义在 \mathbb{R} 上的所有适度递减函数的集合. 在函数通常加法下和 (复) 标量数乘下, $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ 是 \mathbb{C} 上的向量空间. 如果 $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ 则

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N |f(x)| dx \leq 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \frac{A}{1+x^2} dx \\ &= 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\int_0^1 \frac{A}{1+x^2} dx + \int_1^N \frac{A}{1+x^2} dx \right] \leq 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \left(A + \int_1^N \frac{A}{x^2} dx \right) = 4A. \end{aligned}$$

因此 (Cauchy 主值) 积分 $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$ 存在.

性质16.3.1. 如上定义的关于适度递减函数的积分满足如下性质:

(i) (被积函数线性) 如果 $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ 且 $a, b \in \mathbb{C}$, 则

$$\int_{\mathbb{R}} [af(x) + bg(x)] dx = a \int_{\mathbb{R}} f(x) dx + b \int_{\mathbb{R}} g(x) dx.$$

(ii) (平移不变性) 对每个 $a \in \mathbb{R}$ 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-a) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

(iii) (尺度变换) 如果 $\delta > 0$ 则

$$\delta \int_{-\infty}^{\infty} f(\delta x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

(iv) (连续性) 如果 $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-a) - f(x)| dx \rightarrow 0, \quad a \rightarrow 0.$$

证: (i) - (iii) 是显然的. 现在证明 (iv). 选择 $|a| \leq 1$. 对任意 $\epsilon > 0$ 存在整数 $N \in \mathbb{N}$ 满足

$$\int_{|x| \geq N} |f(x)| dx < \frac{\epsilon}{4}, \quad \int_{|x| \geq N} |f(x-a)| dx \leq \frac{\epsilon}{4}.$$

由于 f 在 \mathbb{R} 上连续, 因此 f 在闭区间 $[-N-1, N+1]$ 上一致连续. 存在 $\delta > 0$ 使得

$$\sup_{|x| \leq N} |f(x-a) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{4N}$$

成立, 只要 $|a| < \delta$. 故

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-a) - f(x)| dx &\leq \int_{-N}^N |f(x-a) - f(x)| dx \\ &+ \int_{|x| \geq N} |f(x-a)| dx + \int_{|x| \geq N} |f(x)| dx \leq \frac{\epsilon}{4N} \cdot 2N + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon \end{aligned}$$

对 $|a| \leq \delta \leq 1$ 成立. \square

§16.3.2 Fourier 变换

如果 $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ 我们定义其 Fourier 变换为

$$\hat{f}(\xi) \equiv \hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (16.3.1)$$

显然此时积分存在. 更进一步有

(i) \hat{f} 是有界的且连续的.

(ii) $\hat{f}(\xi) \rightarrow 0$ 当 $|\xi| \rightarrow \infty$ 时. 事实上

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) - f\left(x - \frac{1}{2\xi}\right) \right| e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi} dx \rightarrow 0$$

根据性质 16.3.1, 当 $|\xi| \rightarrow \infty$ 时.

但是 Fourier 变换不保持函数的适度递减性, 即存在适度递减函数 f 其 Fourier 变换 \hat{f} 不是适度递减的.

练习16.3.2. 考虑函数 \mathbb{R} 上的连续函数 f , 当 $|x| \geq 1$ 时 $f(x) = 0$, $f(0) = 0$, 且在 0 附近的小邻域内等于 $1/\ln(1/|x|)$. 证明 \hat{f} 不是适度递减的.

\mathbb{R} 上的 Schwartz 空间 (Schwartz space) $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 是由满足下面条件的光滑函数 f 所构成, 这里的条件是各阶导数 $f^{(\ell)}$ 都是迅速递减的 (rapidly decreasing) 即

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(\ell)}(x)| < \infty, \quad k, \ell \geq 0.$$

注意到 $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{M}(\mathbb{R})$.

练习16.3.3. 证明 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 是 \mathbb{C} 上的向量空间. 进一步如果 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 则

$$f'(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad xf(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

因此 Schwarz 空间关于求导和多项式数乘运算是封闭的.

例16.3.4. (Gaussian 函数) Gaussian 函数 $f(x) = e^{-ax^2}$, 这里 $a > 0$, 属于 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

例16.3.5. (隆起函数) 对 $a < b$ 定义的隆起函数 (bump function)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ e^{-1/(x-a)} e^{-1/(b-x)}, & a < x < b, \\ 0, & x \geq b, \end{cases}$$

属于 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

练习16.3.6. 证明 $e^{-|x|} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

虽然 $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{M}(\mathbb{R})$ 但是我们仍旧可以定义 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 的 Fourier 变换

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi} dx.$$

之后我们使用记号 $f(x) \mapsto \hat{f}(\xi)$ 来表示 \hat{f} 是 f 的 Fourier 变换.

性质16.3.7. 如果 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 则

- (i) $f(x+a) \rightarrow \hat{f}(\xi)e^{2\pi\sqrt{-1}a\xi}$, 任意 $a \in \mathbb{R}$.
- (ii) $f(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}xa} \rightarrow \hat{f}(\xi+x)$, 任意 $a \in \mathbb{R}$.
- (iii) $f(\delta x) \rightarrow \delta^{-1}\hat{f}(\delta^{-1}\xi)$, 任意 $\delta > 0$.
- (iv) $f'(x) \rightarrow 2\pi\sqrt{-1}\xi\hat{f}(\xi)$.
- (v) $-2\pi\sqrt{-1}xf(x) \rightarrow \frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi)$.

证: 我们只给出 (v) 的证明. 令 $F(x) = -2\pi\sqrt{-1}xf(x)$ 则得到

$$\hat{F}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} -2\pi\sqrt{-1}xf(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi} dx.$$

计算可知

$$\frac{\hat{f}(\xi+a) - \hat{f}(\xi)}{a} - \hat{F}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi} \left(\frac{e^{-2\pi\sqrt{-1}xa} - 1}{a} + 2\pi\sqrt{-1}x \right) dx.$$

因为 $f(x), xf(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 所以存在整数 N 满足

$$\int_{|x| \geq N} |f(x)| dx, \int_{|x| \geq N} |xf(x)| dx \leq \epsilon.$$

进一步对 $|x| \leq N$ 存在 a_0 使得当 $|a| < a_0$ 时推出

$$\left| \frac{e^{-2\pi\sqrt{-1}xa} - 1}{a} + 2\pi\sqrt{-1}x \right| \leq \frac{\epsilon}{N}.$$

因此只要 $|a| < a_0$ 就有

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\hat{f}(\xi+a) - \hat{f}(\xi)}{a} - \hat{F}(\xi) \right| \\ & \leq \int_{-N}^N \left| f(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi} \left(\frac{e^{-2\pi\sqrt{-1}xa} - 1}{a} + 2\pi\sqrt{-1}x \right) \right| dx + C\epsilon \leq C'\epsilon. \end{aligned}$$

这里 C, C' 都是常数. \square

定理16.3.8. 如果 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 则 $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

证: 因为 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 所以得到 $C_{k,\ell}(f) := \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(\ell)}(x)| < \infty$. 特别地, $|\hat{f}(\xi)| \leq C < \infty$. 从

$$(1 + |x|^2) |f(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^2 |f(x)| = C_{0,0}(f) + C_{2,0}(f) < \infty$$

我们可以找到常数 $C > 0$ 满足

$$|f(x)| \leq \frac{C}{1 + |x|^2}$$

从而

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \leq 2C \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} < \infty.$$

一般地, 对每对 (k, ℓ) 函数 $\xi^k \hat{f}^{(\ell)}(\xi)$ 是有界的, 这是因为它是

$$\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^k} \left(\frac{d}{dx}\right)^k [(-2\pi\sqrt{-1}x)^\ell f(x)]$$

的 Fourier 变换. \square

回顾反常积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1.$$

定理16.3.9. (1) 如果 $f(x) = e^{-\pi x^2}$ 则 $\hat{f}(\xi) = f(\xi)$.

(2) 如果 $\delta > 0$ 和

$$K_\delta(x) := \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\frac{\pi x^2}{\delta}}$$

则 $\widehat{K}_\delta(\xi) = e^{-\pi\delta\xi^2}$.

(3) 当 $\delta \rightarrow 0+$ 时 $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ 是好核列. 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |K_\delta(x)| dx \leq M,$$

且对任意 $\eta > 0$, 有

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{|x|>\eta} |K_\delta(x)| dx = 0.$$

证: (1) 定义

$$F(\xi) := \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi} dx.$$

则 $F(0) = 1$ 和

$$\begin{aligned} F'(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (-2\pi\sqrt{-1}x) e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi} dx = \sqrt{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi} dx \\ &= \sqrt{-1} (2\pi\sqrt{-1}\xi) \hat{f}(\xi) = -2\pi\xi F(\xi). \end{aligned}$$

令

$$G(\xi) := F(\xi)e^{\pi\xi^2}.$$

我们得到 $G'(\xi) = 0$ 和 $G(0) = 1$ 从而推出 $G(\xi) \equiv 1$.

(2) 若记 $f(x) = e^{-\pi x^2}$ 则得到

$$\begin{aligned}\widehat{K}_\delta(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\delta}} f\left(\frac{x}{\sqrt{\delta}}\right) e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{\sqrt{\delta}}\right) e^{-2\pi\sqrt{-1}\frac{x}{\sqrt{\delta}}(\sqrt{\delta}\xi)} d\left(\frac{x}{\sqrt{\delta}}\right) = \widehat{f}(\sqrt{\delta}\xi) = e^{-\pi\delta\xi^2}.\end{aligned}$$

最后一个结论是显然的. \square

对 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 定义它们的卷积(convolution)为

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t) dt. \quad (16.3.2)$$

定理16.3.10. 当 $\delta \rightarrow 0$ 时 $(f * K_\delta)(x) \rightarrow f(x)$ 关于 x 是一致收敛的.

证: 对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $R > 0$ 满足 $|f(x)| < \epsilon/4$ 只要 $|x| \geq R$, 这是因为 $|f(x)| \leq C/|x|$ 对某个 $C > 0$ 成立. f 的连续性推出 f 在闭区间 $[-R, R]$ 上是一致连续的. 故可以找到 $\eta > 0$ 使得 $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2$ 对 $|x - y| < \eta$ 和 $x, y \in [-R, R]$ 都满足. 如果 $x \in [-R, R], |y| > R$ 且 $|x - y| < \delta$, 则得到

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(R)| + |f(y) - f(R)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} < \epsilon.$$

如果 $|x|, |y| > R$ 且 $|x - y| < \eta$, 则 $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2$. 因此, f 在 \mathbb{R} 上是一致连续的. 计算可得

$$\begin{aligned}|(f * K_\delta)(x) - f(x)| &\leq \left(\int_{|t| \geq \eta} + \int_{|t| < \eta} \right) K_\delta(t) |f(x-t) - f(x)| dt \\ &< \epsilon + 2 \max_{\mathbb{R}} |f| \cdot \int_{|t| \geq \eta} K_\delta(t) dt < 2\epsilon\end{aligned}$$

只要 $\delta \ll 1$, 知识因为定理 16.3.9 \square

对任意 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 考虑

$$F(x, y) := f(x)g(y)e^{-2\pi\sqrt{-1}xy}.$$

因为 $|f(x)| \leq C_f/(1 + |x|^2)$ 和 $|g(y)| \leq C_g/(1 + |y|^2)$, 所以

$$|F(x, y)| \leq \frac{C_f C_g}{(1 + |x|^2)(1 + |y|^2)}.$$

故如下两个函数

$$F_1(x) := \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) dy, \quad F_2(y) := \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) dx$$

都是连续的和适度递减的. 根据定理 15.2.13 得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(y) dy.$$

即

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) g(y) dy, \quad f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \quad (16.3.3)$$

定理16.3.11. (Fourier 反演公式) 如果 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 则

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi\sqrt{-1}\xi x} d\xi. \quad (16.3.4)$$

证: 令 $G_\delta(x) := e^{-\pi\delta x^2}$ 这里 $\delta > 0$. 根据定理 16.3.7 和定理 16.3.9 得到

$$\widehat{G}_\delta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \hat{f}\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\xi\right) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} f\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\xi\right) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\frac{\pi\xi^2}{\delta}} = K_\delta(x)$$

其中 $f(x) = e^{-\pi x^2}$. 利用 (16.3.3) 得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) K_\delta(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) G_\delta(\xi) d\xi.$$

令 $\delta \rightarrow 0$ 得到

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

一般地, 定义 $F(y) := f(y+x)$. 上面论证推出

$$f(x) = F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi\sqrt{-1}\xi x} d\xi.$$

这样就证明了 (16.3.4). \square

定义如下两个映射

$$\mathcal{F} : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad f \longmapsto \mathcal{F}(f) \quad (16.3.5)$$

和

$$\mathcal{F}^* : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad g \longmapsto \mathcal{F}^*(g), \quad (16.3.6)$$

其中

$$\mathcal{F}(f)(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi\sqrt{-1}\xi x} dx = \hat{f}(\xi), \quad (16.3.7)$$

$$\mathcal{F}^*(g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{2\pi\sqrt{-1}\xi x} d\xi = \check{g}(x). \quad (16.3.8)$$

根据定理 16.3.11 我们得到

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^\circ = \mathbf{1} = \mathcal{F}^* \circ \mathcal{F} \quad \text{在 } \mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ 上.} \quad (16.3.9)$$

这就表明 Fourier 变换 \mathcal{F} 在 Schwartz 空间上是双射的.

性质 16.3.12. 如果 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 则

$$f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad f * g = g * f, \quad \widehat{(f * g)}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi). \quad (16.3.10)$$

证: (1) 首先回顾

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) dy.$$

故

$$|x|^k |(f * g)(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| (|x|^k |g(x-y)|) dy.$$

其次我们断言

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |g(x-y)| = \sup_{z \in \mathbb{R}} |z+y|^k |g(z)| \leq A_k (1+|y|)^k$$

这里 A_k 是仅依赖于 g 和 k 的常数. 事实上若 $|y| \leq |z|$ 则

$$|z+y|^k |g(z)| \leq 2^k |z|^k |g(z)| \leq 2^k C_{k,0}(g);$$

若 $|y| \geq |z|$ 则

$$|z+y|^k |g(z)| \leq 2^k |y|^{6k} |g(z)| \leq 2^k C_{0,0}(g) |y|^k.$$

无论哪种情形我们都得到所需要的结论. 从而

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |(f * g)(x)| \leq A_k \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| (1+|y|)^k dy < \infty$$

因为 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. 利用恒等式

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^\ell (f * g)(x) = (f * g^{(\ell)})(x), \quad \ell \in \mathbb{N},$$

(这可以对 ℓ 作归纳得到), 推出 $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(2) 这是显然的.

(3) 为此引入二元函数

$$F(x, y) := f(y)g(x-y)e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi}$$

这是由于

$$\widehat{(f * g)}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) dy \right] e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi} dx.$$

同样考虑两个函数

$$F_1(x) := (f * g)(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi}, \quad F_2(y) := f(y)e^{-2\pi\sqrt{-1}y\xi}\hat{g}(\xi).$$

根据定理 15.2.13 得到

$$\widehat{(f * g)}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x) dx = \iint_{\mathbb{R}^2} F(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(y) dy = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

即 $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$. \square

Schwartz 空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上可引入 Hermitian 内积

$$(f, g) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)} dx, \quad \|f\| := \sqrt{(f, f)}. \quad (16.3.11)$$

定理16.3.13. (Plancherel) 如果 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 则 $\|\hat{f}\| = \|f\|$.

证: 定义 $g(x) := \overline{f(-x)}$ 和 $h(x) := (f * g)(x)$. 则得到

$$\begin{aligned} \hat{g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(-x)}e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi} dx \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(-x)e^{2\pi\sqrt{-1}x\xi} dx} = \overline{\hat{f}(\xi)}. \end{aligned}$$

更进一步

$$\begin{aligned} \hat{h}(\xi) &= \widehat{(f * g)}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) = |\hat{f}(\xi)|^2, \\ h(0) &= (f * g)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(-y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2 dy. \end{aligned}$$

从而得到

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2 dy = h(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|\hat{f}\|^2$$

这是因为 $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. \square

§16.3.3 \mathbb{R} 上的热核

考虑 \mathbb{R} 上的热方程(heat equation)

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t), \quad u(x, 0) = f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \quad (16.3.12)$$

定义热核(heat kernel) 如下

$$H_t(x) = H(x, t) := K_{4\pi t}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (16.3.13)$$

从而得到其 Fourier 变换

$$\widehat{H}_t(x) = e^{-4\pi^2 t \xi^2}. \quad (16.3.14)$$

对 (16.3.12) 作 Fourier 变换推出

$$\partial_t \hat{u}(\xi, t) = -4\pi^2 \xi^2 \hat{u}(\xi, t), \quad \hat{u}(\xi, t) = A(\xi) e^{-4\pi^2 \xi^2 t}, \quad \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi), \quad A(\xi) = \hat{f}(\xi).$$

定理16.3.14. 给定 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 令

$$u(x, t) := (f * H_t)(x), \quad t > 0$$

这里 H_t 是热核. 则

- (i) 函数 u 是 C^2 的当 $x \in \mathbb{R}$ 和 $t > 0$, 且 u 满足热方程.
(ii) 当 $t \rightarrow 0$ 时 $u(x, t) \rightarrow f(x)$ 关于 x 是一致收敛的. 因此若记 $u(x, 0) = f(x)$, 则 u 在上半平面的闭包 $\overline{\mathbb{R}_+^2} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$ 上是连续的.
(iii) 当 $t \rightarrow 0$ 时有

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t) - f(x)|^2 dx \rightarrow 0.$$

- (iv) $u(\cdot, t)$ 关于 t 是一致属于 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, 即对任何 $T > 0$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}, t \in (0, T)} |x|^k \left| \frac{\partial^\ell}{\partial x^\ell} u(x, t) \right| < \infty \quad (16.3.15)$$

对每个 $k, \ell \geq 0$ 都成立.

证: (i) 因为 $u = f * H_t$, 对 x 变量取 Fourier 变换得到

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) e^{-4\pi^2 \xi t}$$

从而根据 Fourier 反演公式得到

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\xi, t) e^{2\pi \sqrt{-1} \xi x} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-4\pi^2 \xi t} e^{2\pi \sqrt{-1} \xi x} d\xi.$$

在积分号下求导推出 (i). 实际上我们可以证明 u 是光滑的.

(ii) 这可从 $u = f * H_t = f * K_{4\pi t} \Rightarrow f$. $t \rightarrow 0$, 得到.

(iii) 根据定理 16.3.13 我们有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t) - f(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(\xi, t) - \hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 |e^{-4\pi^2 t \xi^2} - 1|^2 d\xi. \end{aligned}$$

因为 $|e^{-4\pi^2 t \xi^2} - 1|^2 \leq 4$ 和 $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 所以对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $N \in \mathbb{N}$ 满足

$$\int_{|\xi| \geq N} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \frac{\epsilon}{8}.$$

由于 \hat{f} 是有界的, 我们可以找到 $\delta > 0$ 使得

$$\sup_{|\xi| \leq N} |\hat{f}(\xi)|^2 |e^{-4\pi^2 t \xi^2} - 1|^2 < \frac{\epsilon}{4N}$$

对任何 $|t| < \delta$ 都成立. 这样就得到

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t) - f(x)|^2 dx &\leq \int_{|\xi| \leq N} |\hat{f}(\xi)|^2 |e^{-4\pi^2 t \xi^2} - 1|^2 d\xi \\ &+ \int_{|\xi| \geq N} |\hat{f}(\xi)|^2 |e^{-4\pi^2 t \xi^2} - 1|^2 d\xi \leq \frac{\epsilon}{4N} 2N + \frac{\epsilon}{8} 4 = \epsilon \end{aligned}$$

只要 $|t| < \delta$.

(iv) 该结论可从

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq \int_{|y| \leq \frac{|x|}{2}} |f(x-y)| H_t(y) dy + \int_{|y| \geq \frac{|x|}{2}} |f(x-y)| H_t(y) dy \\ &\leq \frac{C_N}{(1+|x|)^N} + \frac{C}{\sqrt{t}} e^{-\frac{cx^2}{t}} \end{aligned}$$

推出. 因为 f 是快速递减的, 所以得到 $|f(x-y)| \leq C_N/(1+|x|)^N$ 只要 $|y| \leq |x|/2$. 如果 $|y| \geq |x|/2$ 则 $H_t(y) \leq C t^{-1/2} e^{-cx^2/t}$, 此时我们也得到上述不等式. 我们已经证明了 $u(x, t)$ 对 $0 < t < T$ 是一致快速递减的. 同样的论证可应用到高阶导数上去. \square

定理16.3.15. 假设 $u(x, t)$ 满足如下条件:

- (i) u 在上半平面的闭包上是连续的,
- (ii) 当 $t > 0$ 时 u 满足热方程,
- (iii) u 满足边界条件 $u(x, 0) = 0$,
- (iv) $u(\cdot, t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 关于 t 是一致的 (见 (16.3.15)).

则得到 $u \equiv 0$.

证: 考虑函数 u 的能量积分

$$E(t) := \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t)|^2 dx \geq 0.$$

因为 $\partial_t u = \partial_x^2 u$ 我们得到

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} [\partial_t u(x, t) \overline{u(x, t)} + u(x, t) \overline{\partial_t u(x, t)}] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\partial_x^2 u(x, t) \overline{u(x, t)} + u(x, t) \overline{\partial_x^2 u(x, t)}] dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} [\partial_x u(x, t) \overline{\partial_x u(x, t)} + \partial_x u(x, t) \overline{\partial_x u(x, t)}] dx \\ &= -2 \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_x u(x, t)|^2 dx \leq 0, \end{aligned}$$

这里我们利用了 u 和其 x - 导数当 $|x| \rightarrow +\infty$ 时是快速递减的. 因为 $E(0) = 0$, 所以 $E(t) \equiv 0$ 从而 $u \equiv 0$. \square

§16.3.4 Poisson 求和公式

给定 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 定义

$$F_1(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n). \quad (16.3.16)$$

由于 $|f(x)| \leq A/|x|^2$, F_1 在 \mathbb{R} 中的任何紧开子集上都是绝对一致收敛的. 因此 $F_1 \in C(\mathbb{R})$. 注意到 $F_1(x+1) = F_1(x)$. 称函数 F_1 是 f 的周期化(Periodization). 另一个连续周期函数

$$F_2(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi\sqrt{-1}nx} \quad (16.3.17)$$

来自恒等式

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi\sqrt{-1}\xi x} d\xi.$$

练习16.3.16. 验证 F_1 和 F_2 都是连续周期函数.

定理16.3.17. (Poisson 求和公式) 如果 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 则

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi\sqrt{-1}nx} \quad (16.3.18)$$

对任何 $x \in \mathbb{R}$ 都成立. 特别地

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n). \quad (16.3.19)$$

证: 计算得到

$$\begin{aligned} \hat{F}_1(m) &= \int_0^1 F_1(x) e^{-2\pi\sqrt{-1}mx} dx = \int_0^1 \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) \right) e^{-2\pi\sqrt{-1}mx} dx \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+n) e^{-2\pi\sqrt{-1}mx} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(y) e^{-2\pi\sqrt{-1}my} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi\sqrt{-1}my} dy = \hat{f}(m). \end{aligned}$$

即 $\hat{F}_1(m) = \hat{F}_2(m)$. 根据推论 16.2.5 得到 $F_1 \equiv F_2$. \square

练习16.3.18. 证明 (16.3.18) 当 f 和 f' 都是适度递减函数时也成立.

例16.3.19. 考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

则

$$\hat{f}(\xi) = \left(\frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi} \right)^2$$

和

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n + \alpha)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \right)^2 \quad (16.3.20)$$

对 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ 都成立.

练习16.3.20. 证明

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n + \alpha} = \frac{\pi}{\tan \pi \alpha} \quad (16.3.21)$$

只要 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. (提示: 公式 (16.3.21) 的左边级数表示上面意思? 在 $\alpha = 1/2$ 处计算.)

练习16.3.21. 本练习利用 Poisson 公式来给出 (14.3.15) 和 (15.3.32) 的证明. 应用定理 16.3.17 到 $f(x) = \frac{t}{\pi(x^2+t^2)}$ 和 $\hat{f}(\xi) = e^{-2\pi t|\xi|}$, 这里 $t > 0$, 得到

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{t}{t^2 + n^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi t|n|}.$$

证明

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{t}{t^2 + n^2} = \frac{1}{\pi t} + \frac{2}{\pi} \sum_{m \in \mathbb{N}} (-1)^{m+1} \zeta(2m) t^{2m-1}$$

和

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi t|n|} = \frac{2}{1 - e^{-2\pi t}} - 1.$$

利用恒等式

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{B_{2m}}{(2m)!} z^{2m},$$

这里 B_k 是 Bernoulli 数, 来推导出

$$2\zeta(2m) = (-1)^{m+1} \frac{(2\pi)^{m+1}}{(2m)!} B_{2m}.$$

§16.3.5 Theta 和 zeta 函数

我们已经定义了 (Jacobi) theta 函数 $\vartheta(s)$ (参见 (15.3.31))

$$\vartheta(s) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s}, \quad s > 0. \quad (16.3.22)$$

定理16.3.22. 当 $s > 0$ 时我们有

$$s^{-1/2} \vartheta(1/s) = \vartheta(s). \quad (16.3.23)$$

证: 定义 $f(x) := e^{-\pi s x^2}$. 则 $\hat{f}(\xi) = s^{-1/2} e^{-\pi \xi^2 / s}$. 根据定理 16.3.17 有

$$\vartheta(s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) = s^{-1/2} \vartheta(1/s)$$

从而推出 (16.3.23). \square

练习16.3.23. 验证 (15.3.30).

§16.3.6 S^1 上的热核

定义函数 $\Theta(z|\tau)$ 为

$$\Theta(z|\tau) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\sqrt{-1}\pi n^2 \tau} e^{2\pi \sqrt{-1} n z} \quad (16.3.24)$$

这里 $\text{Im}(\tau) > 0$ 和 $z \in \mathbb{C}$. 注意到 $\Theta(0|\sqrt{-1}s) = \vartheta(s)$. 满足边界条件 $u(x, 0) = f(x)$ 的方程

$$\partial_t u(x, t) = \partial_x^2 u(x, t)$$

的解, 其中 f 是周期为 1 的周期函数, 是

$$u(x, t) = (f * H_t^{S^1})(x)$$

这里 $H_t^{S^1}(x)$ 是圆上的热核, 即,

$$H_t^{S^1}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-4\pi^2 n^2 t} e^{2\pi \sqrt{-1} n x} = \Theta(x|4\pi \sqrt{-1} t). \quad (16.3.25)$$

回顾 \mathbb{R} 上的热核

$$H_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad \widehat{H}_t(\xi) = e^{-4\pi^2 \xi^2 t}.$$

根据定理 16.3.17 得到

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} H_t(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{H}_t(n) e^{2\pi \sqrt{-1} n x} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-4\pi^2 n^2 t} e^{2\pi \sqrt{-1} n x}.$$

定理 16.3.24. 圆上的热核是数轴上的热核的周期化:

$$H_t^{S^1}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} H_t(x+n). \quad (16.3.26)$$

The kernel $\{H_t^{S^1}(x)\}_{t>0, |x| \leq 1/2}$, 是好核列.

证: 显然 $\int_{|x| \leq 1/2} H_t^{S^1}(x) dx = 1$ 和 $H_t^{S^1} \geq 0$. 当 $|x| \leq 1/2$ 时我们断言

$$H_t^{S^1}(x) = H_t(x) + E_t(x)$$

这里误差项满足 $|E_t(x)| \leq c_1 e^{-c_2/t}$, 其中 $c_1, c_2 > 0$ 和 $0 < t \leq 1$. 事实上,

$$E_t(x) := \sum_{|n| \geq 1} H_t(x+n) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{|n| \geq 1} e^{-(x+n)^2/4t} \leq C t^{-1/2} \sum_{n \geq 1} e^{-cn^2/t}$$

这是因为 $|x| \leq 1/2$. 注意到 $n^2/t \geq n^2$ 和 $n^2/t \geq 1/t$ 只要 $0 < t \leq 1$, 故 $e^{-cn^2/t} \leq e^{-cn^2/2} e^{-c/2t}$. 因此

$$|E_t(x)| \leq C t^{-1/2} e^{-c/2t} \sum_{n \geq 1} e^{-cn^2/2} \leq c_1 e^{-c_2/t}.$$

因为当 $t \rightarrow 0$ 时 $\int_{|x| \leq 1/2} |E_t(x)| dx \rightarrow 0$, 所以

$$\int_{|x| \leq 1/2} |H_t^{S^1}(x)| dx \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0$$

这是由于 H_t 也满足此性质. \square

§16.3.7 Heisenberg 不确定原理

在量子力学中, **Heisenberg 不确定原理(Heisenberg's uncertainty principle)** 是说

$$(\text{位置的不确定性}) \times (\text{动量的不确定性}) \geq \frac{\hbar}{16\pi^2} > 0$$

这里 \hbar 是 Planck 常数.

定理16.3.25. (Heisenberg 不确定原理) 假设函数 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 满足条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 1.$$

则

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{1}{16\pi^2}, \quad (16.3.27)$$

且等号取到当且仅当 $f(x) = Ae^{-Bx^2}$, 这里 $B > 0$ 和 $A^2 = \sqrt{2B/\pi}$. 事实上我们有

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 |f(x)|^2 dx \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \xi_0)^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right] \geq \frac{1}{16\pi^2}. \quad (16.3.28)$$

证: 第二个不等式 (16.3.28) 可从第一个不等式 (16.3.27) 推出只要把 $f(x)$ 换成 $e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi_0} f(x + x_0)$ 即可. 现在我们来证明 (16.3.27). 计算得到

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \left(x \frac{d}{dx} |f(x)|^2 \right) dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \left[x f'(x) \overline{f(x)} + x \overline{f'(x)} f(x) \right] dx \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} |x| |f(x)| |f'(x)| dx \\ &\leq 2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

由于 $\hat{f}'(\xi) = 2\pi\sqrt{-1}\xi\hat{f}(\xi)$, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}'(\xi)|^2 d\xi = 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

从而得到 (16.3.27). \square

Heisenberg 不确定原理可以用 **Hermite 算子(Hermite operator)** 来描述:

$$\mathbf{L} := -\frac{d^2}{dx^2} + x^2. \quad (16.3.29)$$

这里对 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 定义

$$\mathbf{L}(f)(x) := -f''(x) + x^2 f(x). \quad (16.3.30)$$

考虑 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上的内积

$$(f, g) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx, \quad f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

在定理 16.3.25 中我们已经证明了

$$(\mathbf{L}f, f) \geq (f, f), \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \quad (16.3.31)$$

如上不等式我们常记作 $\mathbf{L} \geq \mathbf{I}$. 考虑 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上的湮灭算子(annihilation operator) 和产生算子(creation operator)

$$\mathbf{A} := \frac{d}{dx} + x, \quad \mathbf{A}^* := -\frac{d}{dx} + x. \quad (16.3.32)$$

练习16.3.26. 对所有 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 证明

$$(\mathbf{A}f, g) = (f, \mathbf{A}^*g), \quad (\mathbf{A}f, \mathbf{A}f) = (\mathbf{A}^*\mathbf{A}f, f) \geq 0, \quad \mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{L} - \mathbf{I}.$$

对每个 $t \in \mathbb{R}$ 定义

$$\mathbf{A}_t := \frac{d}{dx} + tx, \quad \mathbf{A}_t^* := -\frac{d}{dx} + tx. \quad (16.3.33)$$

我们可以把 $(\mathbf{A}_t^*\mathbf{A}_t f, f)$ 看成是 t 的多项式.

练习16.3.27. 利用不等式 $(\mathbf{A}_t^*\mathbf{A}_t f, f) \geq 0$ 来给出 Heisenberg 不确定原理的另一个证明.

Hermite 函数(Hermite functions) $h_k(x)$ 定义为

$$\sum_{k \geq 0} h_k(x) \frac{t^k}{k!} = e^{-\frac{x^2}{2} + 2tx - t^2}. \quad (16.3.34)$$

练习16.3.28. 证明

$$h_k(x) = (-1)^k e^{x^2/2} \left(\frac{d}{dx} \right)^k e^{-x^2}. \quad (16.3.35)$$

对任何 $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ 我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-y^2} e^{2xy} dy = 0 \text{ 对任意 } x \in \mathbb{R} \implies f \equiv 0.$$

实际上我们可以考虑 $f * e^{-x^2}$.

称 $\{h_k(x)\}_{k \geq 0}$ 是完备的(complete) 如果 $(f, h_k) = 0$ 对所有 $k \geq 0$ 和 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 都成立.

练习16.3.29. 验证在 (16.3.35) 中定义的 $\{h_k(x)\}_{k \geq 0}$ 是完备的.

定义

$$h_k^*(x) := h_k(\sqrt{2\pi}x). \quad (16.3.36)$$

练习16.3.30. 证明 $\widehat{h_k^*}(\xi) = (-\sqrt{-1})^k h_k^*(\xi)$. 从而每个 h_k^* 是 Fourier 变换的特征函数. 证明 $\mathbf{L}h_k = (2k+1)h_k$. 特别地, h_k 关于 Schwartz 空间上的 L^2 -内积是正交的. 最后证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h_k(x)|^2 dx = \pi^{1/2} 2^k k!.$$

§16.4 Fourier 级数的性质

假设 f 是以 2π 为周期的周期函数. 则

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n \in \mathbf{N}} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) =: S(f)(x).$$

根据定理 16.2.23 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \quad f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]. \quad (16.4.1)$$

§16.4.1 Fourier 级数的分析性质

我们首先利用 定理 16.4.2 来证明如下结论.

定理16.4.1. (A) (Fourier 级数的逐项积分定理) 假设 $f \in R([-\pi, \pi])$ 则

$$\int_c^x f(t) dt = \int_c^x \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n \in \mathbf{N}} \int_c^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt) dt \quad (16.4.2)$$

对任何 $c, x \in [-\pi, \pi]$ 都成立.

(B) (Fourier 级数的逐项微分定理) 如果 $f'' \in R([-\pi, \pi])$ 则

$$f'(x) = \sum_{n \in \mathbf{N}} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx) \quad (16.4.3)$$

对任何 $x \in [-\pi, \pi]$ 都成立.

(C) (Fourier 级数的一致收敛定理) 如果 $f' \in R([-\pi, \pi])$ 则 $S(f)(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛到 $f(x)$.

证: (C) 因为

$$f'(x) \sim \sum_{n \geq 1} (nb_n \cos nx - na_n \sin nx),$$

所以得到

$$\sum_{1 \leq n \leq N} (|a_n| + |b_n|) = \sum_{1 \leq n \leq N} \frac{|nb_n| + |na_n|}{n}$$

$$\leq \left[\sum_{1 \leq n \leq N} \left((nb_n)^2 + (na_n)^2 \right) \right]^{1/2} \left(\sum_{1 \leq n \leq N} \frac{2}{n^2} \right)^{1/2} \leq \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx \right]^2.$$

因此 $S(f)(x)$ 绝对一致收敛到 $f(x)$.

(B) 因为 $f'' \in R([-\pi, \pi])$, 我们应用 (C) 到 f' .

(A) 考虑函数

$$g(x) := \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & t = 0 \text{ or } t = x, \\ \pi, & 0 < t < x, \\ 0, & x < t < 2\pi. \end{cases}$$

则得到

$$g(x) \sim \frac{x}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{\sin nx}{x} \cos nt + \frac{1 - \cos nx}{x} \sin nt \right).$$

利用 (16.4.7) 得到

$$\frac{1}{\pi} \int_0^x \pi f(t) dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{a_n}{n} \sin nx + \frac{b_n}{n} (1 - \cos nx) \right)$$

对任何 $0 \leq x \leq 2\pi$ 都成立. 从而证明了 (16.4.2) 对 $c = 0$ 成立. 对一般的 c 作平移即得证. \square

§16.4.2 Fourier 级数的平方逼近性质

我们将利用 Parseval 等式来证明下面定理.

定理 16.4.2. (D) (Weierstrass) 如果 f 是以 2π 为周期的连续周期函数, 则存在三角多项式列 $\{T_n\}_{n \geq 1}$, 其中

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0^n}{2} + \sum_{1 \leq k \leq n} (\alpha_k^n \cos kx + \beta_k^n \sin kx),$$

使得对任意 $\epsilon > 0$ 存在整数 $N \in \mathbb{N}$ 满足

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - T_n(x)| \leq \epsilon$$

只要 $n \geq N$.

(E) (Parseval) 如果 $f \in R([-\pi, \pi])$, 则

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx. \quad (16.4.4)$$

证: (D) 回顾

$$S_n(f)(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{1 \leq k \leq n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = (f * D_n)(x),$$

这里

$$D_n(x) := \sum_{|k| \leq n} e^{\sqrt{-1}kx}.$$

Fejér 核是指

$$\sigma_n(f) := \frac{1}{n} \sum_{0 \leq i \leq n-1} S_i(f) = f * F_n, \quad F_n(x) = \frac{1}{N} \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}.$$

对任意 $x \in [-\pi, \pi]$ 我们有

$$\begin{aligned} |f(x) - \sigma_n(f)(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) F_n(y) dy - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) F_n(x-y) dy \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(y) |f(x) - f(x-y)| dy. \end{aligned}$$

因为 $f \in C([-\pi, \pi])$ 且是周期函数, 所以 f 在 \mathbb{R} 上是一致连续的. 对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 满足 $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon/3$ 只要 $|x_1 - x_2| < \delta$. 计算得到

$$\begin{aligned} |f(x) - \sigma_n(f)(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} F_n(y) |f(x) - f(x-y)| dy \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} F_n(y) |f(x) - f(x-y)| dy + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} F_n(y) |f(x) - f(x-y)| dy \\ &:= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

对 I_1 有

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} F_n(y) |f(x) - f(x-y)| dy \\ &\leq \frac{1}{\pi} \sup_{[-\pi, \pi]} |f| \cdot \int_{-\pi}^{-\delta} \frac{\sin^2(Ny/2)}{N \sin^2(y/2)} dy \leq \frac{1}{\pi} \sup_{[-\pi, \pi]} |f| \cdot \int_{-\pi}^{-\delta} \frac{dy}{N \sin^2(\delta/2)} \\ &= \frac{1}{\pi} \sup_{[-\pi, \pi]} |f| \cdot \frac{\pi - \delta}{\sin^2(\delta/2)} \cdot \frac{1}{N} \leq \frac{\sup_{[\pi, \pi]} |f|}{\sin^2(\delta/1)} \cdot \frac{1}{N} \end{aligned}$$

从而意味着存在整数 $N_1 \in \mathbb{N}$ 满足

$$I_1 < \frac{\epsilon}{3}, \quad n > N_1.$$

同样我们可以找到 $N_2 \in \mathbb{N}$ 满足

$$I_3 < \frac{\epsilon}{3}, \quad n > N_2.$$

对 I_2 有

$$I_2 \leq \frac{\epsilon}{6\pi} \int_{-\delta}^{\delta} F_n(y) dy \leq \frac{\epsilon}{6\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(y) dy \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

这样对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $n > N := \max\{N_1, N_2\}$ 满足 $|f(x) - \sigma_n(f)(x)| < \epsilon$ 只要 $x \in [-\pi, \pi]$.

(E) 回顾 $f \in R^2([a, b])$ 如果 $f, |f|^2 \in R([a, b])$. 在 $R^2([a, b])$ 中函数列 $\{f_n\}_{n \geq 1} \rightarrow f$ 如果 $f_n, f \in R^2([a, b])$ 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0.$$

下面事实是显然的:

(i) $f \in R^2([a, b]) \Rightarrow |f| \in R([a, b])$. 事实上,

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq \frac{1}{2} \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx + b - a \right).$$

(ii) $f, g \in R^2([a, b]) \Rightarrow |fg| \in R([a, b])$ 且 $f + g \in R^2([a, b])$. 事实上我们有

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

和

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

现在来证明 (16.4.4). 根据引理 16.4.4 可知对任意 $\epsilon > 0$ 存在整数 $N \in \mathbf{N}$ 满足

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(f)(x)|^2 dx < \epsilon$$

只要 $n \geq N$. 因为

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(f)(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{1 \leq k \leq n} (a_k^2 + b_k^2) \right],$$

所以

$$0 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{1 \leq k \leq n} (a_k^2 + b_k^2) \right] < \epsilon$$

只要 $n \geq N$. \square

引理16.4.3. (最佳逼近) 假设 $f \in R([-\pi, \pi])$. 对任意三角多项式

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{1 \leq k \leq n} (\alpha_k \cos nx + \beta_k \sin nx)$$

我们有

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(f)(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_n(x)|^2 dx. \quad (16.4.5)$$

证: 由于 $f - T_n \in R([-π, π])$, 我们定义

$$\Delta_n := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_n(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

计算得到

$$\begin{aligned} \Delta_n^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - R_n(x)|^2 dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) T_n(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x) dx \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{1 \leq k \leq n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right] dx \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{1 \leq k \leq n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right]^2 dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{\alpha_0 a_0}{2} - \sum_{1 \leq k \leq n} (\alpha_k a_k + \beta_k b_k) + \frac{\alpha_0^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k \leq n} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \frac{1}{2} \left[\frac{(\alpha_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{1 \leq k \leq n} (\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2 \right] \\ &\quad - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k \leq n} (a_k^2 + b_k^2). \end{aligned}$$

另一方面

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(f)(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k \leq n} (a_k^2 + b_k^2).$$

因此

$$\begin{aligned} \Delta_n^2 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(f)(x)|^2 dx \\ = \frac{1}{2} \left[\frac{(\alpha_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{1 \leq k \leq n} (\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2 \right] \geq 0. \end{aligned}$$

故得到 (16.4.5). \square

引理16.4.4. 如果 $f \in R([-π, π])$, 则在 $R^2([-π, π])$ 上有 $S_n(f) \rightarrow f$. 即,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(f)(x)|^2 dx = 0. \quad (16.4.6)$$

证: 对任意 $m < n$ 我们有

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(f)(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_m(f)(x)|^2 dx$$

这是由于引理 16.4.3. 因此数列

$$\left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(f)(x)|^2 dx \right\}_{n \geq 1}$$

是递减的. 根据连续函数 Weierstrass 定理我们可以找到函数 $g \in C([-\pi, \pi])$ 满足 $g(-\pi) = g(\pi)$ 使得

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx < \frac{\epsilon}{4}$$

对给定的 $\epsilon > 0$ 成立. 根据 (D), 存在三角多项式

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{1 \leq k \leq n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

使得

$$\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |g(x) - T_n(x)| < \sqrt{\frac{\epsilon}{8\pi}}$$

成立. 故

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_n(x)|^2 dx \leq 2 \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx + 2 \int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - T_n(x)|^2 dx < \epsilon.$$

再次利用引理 16.4.3 推出

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(f)(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_n(x)|^2 dx < \epsilon.$$

故得到 (16.4.6). \square

注 16.4.5. 我们可以找到三角级数 $T(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$ 使得对任何可积周期函数 $f(x)$ 有 $S(f)(x) \neq T(x)$. 事实上, 考虑三角级数

$$T(x) := \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nx)}{\sqrt{n}}.$$

如果 $T(x) = S(f)(x)$, 则 (16.4.4) 推出

$$\infty = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx < \infty$$

产生矛盾!

公式 (16.4.4) 可显然作推广. 如果 $f, g \in R([-\pi, \pi])$, 则

$$\frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \alpha_n + b_n \beta_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx, \quad (16.4.7)$$

这里

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

和

$$g(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx).$$

练习16.4.6. 验证 (16.4.7).

例16.4.7. 考虑级数 $f(x) = \frac{x^2}{2} - \pi x, 0 \leq x \leq 2\pi$. 因为

$$\frac{\pi - x}{2} \sim \sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n}$$

所以

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\pi - t}{2} dt = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \int_0^x \frac{\sin nt}{n} dt = \frac{1}{2} \left[- \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \geq 1} \frac{\cos nx}{n^2} \right].$$

故

$$\frac{x^2}{2} - \pi x = -\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n \geq 1} \frac{2 \cos nx}{n^2}, \quad x \in [0, 2\pi]. \quad (16.4.8)$$

§16.5 * 等周不等式

再次回顾曲线的基本概念. 参数曲线 γ 定义为映射 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. γ 的像集称为曲线并记为 Γ . 曲线是简单的如果自身不相交, 称为是闭的如果两个端点重合. 我们可以把 γ 延拓成周期为 $b - a$ 的 \mathbb{R} 上的周期函数, 从而可以把 γ 看成是圆上的函数. 更进一步 γ 的参数诱导出 Γ 上的定向: 参数 s 从 a 到 b .

假设: 我们总是假设 γ 是 C^1 的, 且其导数 $\dot{\gamma}$ 满足 $\dot{\gamma}(s) \neq 0$.

任何 C^1 双射 $s: [c, d] \rightarrow [a, b]$ 给出了 Γ 的另一个参数化

$$\eta(t) := \gamma(s(t)).$$

注意到条件“ γ 是闭的和简单的”和所选择的参数化无关. 称上述两个参数化 γ 和 η 是等价的如果 $\dot{s}(t) > 0$ 对所有 $t \in [c, d]$ 都成立; 这意味着 η 和 γ 诱导出曲线 Γ 上相同的定向. 如果 $\dot{s}(t) < 0$ 则此时 η 转变定向.

§16.5.1 弧长和面积

假设 γ 的参数方程为 $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ 则曲线 Γ 的长度定义为

$$L(\gamma) := \int_a^b |\dot{\gamma}(s)| ds = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2} ds. \quad (16.5.1)$$

γ 的长度不依赖于所选的参数化. 事实上如果 $\gamma(s(t)) = \eta(t)$, 这里 $s: [c, d] \rightarrow [a, b]$ 是某个 C^1 双射, 则

$$\int_a^b |\dot{\gamma}(s)| ds = \int_c^d |\dot{\gamma}(s(t))| |\dot{s}(t)| dt = \int_c^d |\dot{\eta}(t)| dt.$$

称 γ 是弧长参数化(parametrization by arc-length) 如果 $|\dot{\gamma}(s)| = 1$ 对所有 s 都成立. 这也就是说 $\gamma(s)$ 以常速度行进从而 Γ 的长度为 $b - a$. 因此, 在差一个可能的平移变换外, 弧长的参数化区间记作 $[0, \ell]$, 这里 $\ell := L(\gamma)$.

练习16.5.1. 令 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是闭曲线 Γ 的参数化.

(i) 证明 γ 是弧长参数化 \iff 从 $\gamma(a)$ 到 $\gamma(s)$ 的曲线长度为 $s - a$, 即,

$$\int_a^s |\dot{\gamma}(t)| dt = s - a.$$

(ii) 证明任何曲线 Γ 都有弧长参数化.

(iii) 如果 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, 则曲线长度等于

$$\frac{1}{2} \int_a^b [x(s)\dot{y}(s) - y(s)\dot{x}(s)] ds = \int_a^b x(s)\dot{y}(s) ds = - \int_a^b y(s)\dot{x}(s) ds.$$

(iv) 定义 γ 的反向参数化(reverse parametrization) 为 $\gamma^-: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 其中 $\gamma^-(t) := \gamma(b + a - t)$. γ^- 的像是 Γ , 但是 $\gamma^-(t)$ 和 $\gamma(t)$ 沿着相反的方向行进. 即 γ^- 把曲线的方向“反向”. 证明

$$\int_{\gamma} (x dy + y dx) = - \int_{\gamma^-} (x dy - y dx).$$

§16.5.2 等周不等式

假设 Γ 是 \mathbb{R}^2 中的 Jordan 曲线并令 D 是由此曲线所围成的区域. 根据 Green 公式 (13.9.2) 区域 D 的面积为

$$A = \frac{1}{2} \left| \int_{\Gamma} (x dy - y dx) \right|. \quad (16.5.2)$$

定理16.5.2. (等周不等式) 假设 Γ 是 \mathbb{R}^2 中长为 L 的 Jordan 曲线并令 A 是由此曲线所围成的区域的面积. 则

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi} \quad (16.5.3)$$

且等号取到当且仅当 Γ 是圆.

证: 不失一般性我们不妨假设 $L := 2\pi$. 令

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(s) := (x(s), y(s))$$

是曲线 Γ 的弧长参数化, 即, $\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2 = 1$ 对所有 $s \in [0, 2\pi]$ 都成立. 这意味着

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2] ds = 1. \quad (16.5.4)$$

因为曲线是闭的, 所以函数 $x(s)$ 和 $y(s)$ 都是以 2π 为周期的, 故

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^2 (|a_n|^2 + |b_n|^2) = 1, \quad (16.5.5)$$

根据 (16.5.4) 和 (16.4.4), 这里

$$x(s) \sim \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n e^{\sqrt{-1}ns}, \quad y(s) \sim \sum_{n \in \mathbf{Z}} b_n e^{\sqrt{-1}ns}.$$

因为 $x(s)$ 和 $y(s)$ 都是实值的, 所以我们得到 $a_n = \overline{a_{-n}}$ 和 $b_n = \overline{b_{-n}}$. 因此根据 (16.4.7), 得到

$$A = \frac{1}{2} \left| \int_0^{2\pi} [x(s)\dot{y}(s) - y(s)\dot{x}(s)] ds \right| = \pi \left| \sum_{n \in \mathbf{N}} n (a_n \overline{b_n} - b_n \overline{a_n}) \right|.$$

从不等式

$$\left| a_n \overline{b_n} - b_n \overline{a_n} \right| \leq 2|a_n||b_n| \leq |a_n|^2 + |b_n|^2, \quad (16.5.6)$$

和 (16.5.5) 我们得到

$$A \leq \pi \sum_{n \in \mathbf{Z}} |n|^2 (|a_n|^2 + |b_n|^2) \leq \pi.$$

当 $A = \pi$ 时得到

$$x(s) = a_{-1}e^{-\sqrt{-1}s} + a_0 + a_1e^{\sqrt{-1}s}, \quad y(s) = b_{-1}e^{-\sqrt{-1}s} + b_0 + b_1e^{\sqrt{-1}s}$$

这是因为 $|n| < |n|^2$ 仅当 $|n| \geq 2$ 时成立. 我们知道 $x(s)$ 和 $y(s)$ 都是实值的, 因此 $a_{-1} = \overline{a_1}$ 和 $b_{-1} = \overline{b_1}$. 恒等式 (16.5.5) 推出 $2(|a_1|^2 + |b_1|^2) = 1$, 但是在 (16.5.6) 中我们取等式从而必有 $|a_1| = |b_1| = 1/2$. 记 $a_1 = \frac{1}{2}e^{\sqrt{-1}\alpha}$ 和 $b_1 = \frac{1}{2}e^{\sqrt{-1}\beta}$. $1 = 2|a_1 \overline{b_1} - \overline{a_1} b_1|$ 这个事实蕴含了 $|\sin(\alpha - \beta)| = 1$, 所以 $\alpha - \beta = k\pi/2$ 其中 k 是整数. 由此我们得到

$$x(s) = a_0 + \cos(\alpha + s), \quad y(s) = b_0 \pm \sin(\alpha + s)$$

这里 $y(s)$ 中的正负号依赖于整数的 k 的奇偶性. 但是无论如何我们证明了 Γ 是一圆. \square

练习16.5.3. 本练习构造 $[0, 1]$ 上的 (Riemann) 可积函数使得它的不连续点集是稠密的. 从而在 $[0, 1]$ 上得到了一个几乎处处不连续的可积函数.

(a) 取 $f(x) = 0$ 当 $x < 0$ 时, 和 $f(x) = 1$ 当 $x \geq 0$ 时. 选择 $[0, 1]$ 内的可数稠密数列 $\{r_n\}_{n \geq 1}$ (比如取 $[0, 1]$ 内的有理数点). 则证明函数

$$F(x) := \sum_{n \geq 1} \frac{f(x - r_n)}{n^2}$$

是可积的且仅在 r_n 处是不连续的.

(b) 接下来考虑函数

$$F(x) := \sum_{n \geq 1} \frac{g(x - r_n)}{3^n},$$

这里 $g(x) = \sin(1/x)$ 当 $x \neq 0$ 时和 $g(0) = 0$. 证明 F 是可积的, 在每个 $x = r_n$ 处时不连续的, 且在 $[0, 1]$ 中的任意子区间内是不单调的.

(c) **Riemann** 最初是研究函数

$$F(x) := \sum_{n \geq 1} \frac{(nx)}{n^2},$$

这里 $(x) = x$ 当 $x \in (-1/2, 1/2]$ 时并把它按照周期函数延拓到整个 \mathbb{R} 上来, 即, $(x+1) = (x)$. 可以证明 F 在 $x = m/2n$, 这里 $m, n \in \mathbb{Z}$ 且满足 m 是奇数和 $n \neq 0$, 处是不连续的.

§16.6 参考文献

1. 布鲁斯·C. 伯恩特 (Bruce C. Berndt) 主编: 拉玛努金笔记(第 2, 3, 4 卷), 哈尔滨工业大学出版社, 2019.
2. Koblitz, Neal. *Introduction to elliptic curves and modular forms*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics 97, Springer-Verlag, New York, 1993. x+248 pp. ISBN: 0-387-97966-2
3. Fourier, Joseph. *The analytical theory of heat*, translated, with notes, by Alexander Freeman, HEP World's Classics, Higher Education Press, 2016.
4. Hardy, G. H. *Divergent series*, Oxford, at the Clarendon Press, 1949. xvi+396 pp.
5. 周颂平 著: 三角级数研究中的单调性条件: 发展和应用, 科学出版社, 2012.
6. 徐森林, 薛春华 编著: 数学分析, 清华大学出版社, 2005.
7. 张福保, 薛金美, 潮小李 主编: 数学分析讲义, 科学出版社, 2019.
8. 梅加强 编著: 数学分析, 高等教育出版社, 2015.
9. 邓建平 编: 微积分 I 和 II, 科学出版社, 2019.
10. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis I*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+574 pp. ISBN: 3-540-40386-8
11. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis II*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xvi+681 pp. ISBN: 3-540-40633-6
12. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis I*, Translated from the 1988 German original by Gary Brookfield, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. xiv+426 pp. ISBN: 3-7643-7153-6

13. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis II*, Translated from the 1999 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. xii+400 pp. ISBN: 978-3-7643-7472-3; 3-7643-7472-3
14. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis III*, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. xii+468 pp. ISBN: 978-3-7643-7479-2; 3-7643-7479-2
15. 菲赫金哥尔茨 著 (徐献瑜, 冷生明, 梁文骐 译; 郭思旭 校): *微积分学教程* (第一、二、三卷), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.
16. 吉米多维奇 著 (李荣涑, 李植 译): *数学分析习题集* (根据 2010 年俄文版翻译), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.
17. 汪林 著: *数学分析中的问题和反例*, 现代数学基础 **56**, 高等教育出版社, 2015.
18. 裴礼文 编著: *数学分析中的典型问题与方法* (第二版), 高等教育出版社, 2015.
19. 朱尧辰 编著: *数学分析例选通过范例学技巧*, 哈尔滨工业大学出版社, 2013.
20. 周民强 编著: *数学分析习题演练* (第一、二、三册), 科学出版社, 2018.
21. 李逸 编著: *数学分析讲义*, 上海交通大学数学分析课讲义, 未出版, 2016.

第四部分

数学分析后续：高等分析初步

第十七章 Fourier 分析

第十八章 实分析

第十九章 复分析

第二十章 泛函分析

第五部分

数学分析后续：拓扑学初步

第二十一章 范畴理论

第二十二章 基本群

第二十三章 微分流形

第二十四章 代数拓扑

第六部分

数学分析后续：微分几何学初步

第二十五章 Riemann 流形

第二十六章 复流形

第二十七章 Riemann 曲面

第二十八章 Einstein 方程

第七部分

数学分析后续：Lie 群初步

第二十九章 群论和 Galois 理论

第三十章 拓扑群与 Lie 群

第三十一章 $SL_2(\mathbb{C})$ 上的分析

第三十二章 Poincaré 模型

第八部分

数学分析后续：模形式初步

第三十三章 模形式和 Eisenstein 级数

第三十四章 Hecke 算子

第三十五章 L 函数

第三十六章 Galois 表示

第九部分

数学分析后续: (待补充)

