基本分析讲义: 第二卷 (多变量理论)

东南大学数学学院基础课系列

作者：李逸

时间：二零二二年月一月八日

版本：3.2;

单位：东南大学丘成桐中心、东南大学数学学院

Rather less, but better. — Carl Friedrich Gauss

致谢

本讲义采用了ElegantLaTeX 模板 (https://elegantlatex.org/)，本人非常喜欢 ElegantLaTeX 的风格，在此向开发者表示诚挚的谢意。

作者感谢：

东南大学 19 级理科实验班（按姓氏拼音排序）

崔雪红、刘碧璇、秦靖雯

整理上课笔记和

东南大学 20 级物理化学强基班（按姓氏拼音排序）

陈科铭、邓南开、冷超、刘章赫、夏玮乔、杨瑾涛、王一青

感谢下列同学指出讲义中的错误与不足（按姓氏拼音排序）

陈昕、胡蓉、李嘉淇、李文哲、刘春辰、王晓波、王泽川

田国凯、孙茗欣、魏佳蓓、杨帆、杨欣、易英鹏

张凌枫、张明远、朱康华

特别感谢 (按姓氏拼音排序)

刘康、郭雨臣、杨瑾涛

李逸

二零二一年七月一日

目录

第一章 序

第一部分

单变量理论

第 二 章 极限理论 I: 数列极限

第 三 章 极限理论 II: 函数极限

第四章 导数理论

第五章 积分理论

第六章 级数理论

第二部分

线性代数与常微分方程

第 七 章　矩阵和行列式

第 八 章　二次型和矩阵变换

第九章 常微分方程初步

Eadem mutata resurgo (纵使变化, 依然故我) — Jacob Bernoulli

9.1 常微分方程概念和例子

本章主要参考了

- 方道元, 薛儒英 编著: 常微分方程, 高等教育出版社, 2017
- 柳彬 编著: 常微分方程, 北京大学出版社, 2021
- 韩茂安, 周盛凡, 刑业朋, 丁玮 编著: 常微分方程 (第二版), 高等教育出版社, 2018
- C. Henry Edwards, David E. Penney 著: 常微分方程基础 (英文版, 原书第 5 版), 机械工业出版社, 2005
- Walter, Wolfgang, *Ordinary differetial equations*, GTM, **182**, Springer, 1998
- Arnol'd, Vladimir I., *Ordinary differenial equations* (Third edition), Universitext, Springer, 1991

以及其它论文和著作 (参看脚注).

微分方程大约和微积分同时发展, 是为了解决物理及天文学问题而产生. Newton以解析形式求解过一些微分方程, 比如在《Methodus fluxionum et serierum infinitarum》(《流数法》, 写于 1671 但出版于 1736 年) 和《Tractatus》(《专论》, 1676) 中都研究过 $y^{(n)}(x) = f(x)$. 常微分方程最早的工作首先出现在数学家们彼此的通信中 (许多已经找不到了), 或者出现在经常重登信件中建立的或宣布的结果的出版物中. 一个人宣布的结果经常会引起另一个人的声明, 说他之前就已经做了完全一样的事情. 鉴于存在着激烈的竞争, 这种声明可能是真实的但也可能不是真实的. 有些证明只有概述, 而且不清楚作者是否掌握了全部的细节; 同样, 所声称的一般解法也仅是通过特例来说明. 因此, 我们很难判定谁是首先得到这些结果的人.

Christiaan Huygens(惠更斯) 在 1693 年的《Acta Eruditorum》中明确提到了常微分方程, 而我们通常认为的常微分方程的概念是Alexis Fontaine des Bertins(亚历克西斯 · 方丹 · 德 · 贝尔廷斯) 在 1740 年左右提出来的. 微分方程在十八世纪中期成为一个独立的学科, 比如海王星的发现就和微分方程有关.

一些数学史家把Leibniz写下常微分方程 $dy/dx = x$ 的解 $y = x^2/2$ 的时间, 1675 年 11 月 11 日[1], 看成是常微分方程的诞生之日.

Newton其实早已开始寻求解微分方程的一般方法, 他把微分方程分成如下三类:

(1) $dy/dx = f(x)$ 或者 $dy/dx = f(y)$.

(2) $dy/dx = f(x, y)$.

[1]数学史上一个非常重要的“双十一”节日.

(3) $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u$.

前面两类是包含普通导数的常微分方程, 而第三类是包含偏导数的偏微分方程. Newton 用他的流数记号来表示这些方程, 而不是写成上面这种形式. 他利用级数求解了一些一阶常微分方程, 譬如,

$$\frac{dy}{dx}=1-3x+y+x^2+xy, \quad y(0)=0.$$

Newton 的基本想法是把初值 $y=0$ 看成是初始逼近, 代入原方程右边并只取最低阶就得到

$$\frac{dy}{dx}=1 \quad 得到 \quad y=x.$$

再把 $y=x$ 代入原方程右边并只取最低阶就得到

$$\frac{dy}{dx}=1-2x \quad 得到 \quad y=x-x^2.$$

继续这个过程得到

$$\frac{dy}{dx}=1-2x+x^2 \quad 得到 \quad y=x-x^2+\frac{1}{3}x^3.$$

最后Newton 用这个方法得到了解是

$$y=x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{30}x^5-\frac{1}{45}x^6+\cdots.$$

如果引入**误差函数 (error function)**

$$\mathbf{erf}(x):=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-x}^{x}e^{-t^2}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!},$$

我们得到了上面解 y 的闭公式

$$y=a\left[\mathbf{erf}(bx+b)-\mathbf{erf}(b)-\frac{4}{a}\right]e^{x(x+2)/2}+4-x,$$

其中 $a:=3\sqrt{2\pi e}$ 和 $b:=1/\sqrt{2}$.

1682 年, Leibniz成为莱比锡新期刊《Acta Eruditorum》(《博学学报》, 1682-1782)[2]的合作者. 1684 年 10 月, Leibniz在《Acta Eruditorum》上发表了微分第一篇正式出版的文章《Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus》. 1686 年, Leibniz在《Acta Eruditorum》发表了关于积分的论文, 这篇论文中首次出现了积分号 “$\int$”. Jacob Bernoulli在 1687 年写

[2]这是欧洲德语国家的第一本科学期刊, 出版于 1682 年至 1782 年. Otto Mencke在Leibniz的支持下, 于 1682 年在莱比锡创办了《Acta Eruditorum》并成为该杂志的第一位编辑, 而且在该杂志的前四年发表了 13 篇文章. 《Acta Eruditorum》由Johann Friedrich Gleditsch出版, 并得到了萨克森公爵的赞助, 仿照法国《Journal des savants》和意大利《Giornale de'letterati》. 该杂志每月出版一次, 完全以拉丁语出版, 包含新著作、评论、小论文和笔记的摘录. 大多数文章都致力于自然科学和数学, 除了Leibniz本人外, 还包括来自Jacob Bernoulli、Humphry Ditton、Leonhard Euler、Ehrenfried Walther von Tschirnhaus、Pierre-Simon Laplace和Jérô me Lalande等人的贡献, 也来自人文主义者以及哲学家如Veit Ludwig von Seckendorff、Stephan Bergler、Christian Thomasius和Christian Wolff.

虽然Mencke曾与Newton交换过信件和出版物, 但Newton并不是《Acta Eruditorum》的通讯员. Newton 和Leibniz之间关于微积分发展功劳的争论, 始于 1697 年 5 月Leibniz为了回应Fatio de Duillier而在《Acta Eruditorum》上的投稿. Fatio de Duillier由于被Leibniz的欧洲最佳数学家名单遗漏而感到被轻视 le, 所以就宣布Newton是在Leibniz之前发现了微积分而后者可能甚至依赖于前者的成就. 在接下来的激烈争吵中, 《Acta Eruditorum》大体上充当了Leibniz阵营的喉舌, 就像《Philosophical Transactions》(《哲学汇刊》, 1665 - 至今) 为Newton阵营所做的那样.

信给Leibniz请求开启这种新分析的奥秘, 由于当时Leibniz正在外面游学, 所以直到 1690 年才给予回复. 在这段时间内, Jacob Bernoulli 和Johann Bernoulli 在没有借助任何外力下解开了这个奥秘. Jacob Bernoulli 是用微积分求解常微分方程问题的先驱者之一, 比如在 1692 年他已经知道求解一阶齐次常微分方程; 所有求解一阶常微分方程的已知初等方法都在 Bernoulli 时代被发现.

1690 年 5 月, Jacob Bernoulli在《Acta Eruditorum》上发表了**等时问题 (isochrone problem)** 的解答, 之前Huygens在《Horologium Oscillatorium》(《摆钟》, 1673) 里用几何方法给出了解答, 和Leibniz在 1689 年给出了解析解. 等时问题是要去寻找一条曲线, 使得质点放在此曲线上任一处而自由下滑 (不考虑阻力) 至最低点所需的时间都相等. 利用他的记号, Jacob Bernoulli找到的微分方程是

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{b^2y-a^3}}.$$

两边积分 (这个词第一次被使用) 并利用变量分离法得到

$$\frac{2b^2y-2a^3}{3b^2}\sqrt{b^2y-a^3}=x\sqrt{a^3},$$

这条曲线就是**摆线 (cycloid)**. Jacob Bernoulli 的这篇论文在微积分历史上是很重要的, 因为“积分”这个词第一次出现时就带有积分的含义.

下面我们来简单回顾下摆线的历史[3]. 摆线被称为“几何学家的海伦”, 一般认为是法国数学家Charles de Bovelles (查尔斯 · 德 · 博维勒斯) 在《Introductio in geometriam》(《几何学导论》, 1503) 中首先对摆线作了描述. Galileo 首先发起“摆线”这个术语, 并且是第一个对摆线进行认真研究的人. 根据Galileo学生Evangelista Torricelli(埃万杰利斯塔 · 托里拆利) 的描述, Galileo 在 1599 年尝试了摆线的求积 (确定摆线下方的面积) 问题, 他切割出形如摆线及其生成圆的两块金属并称重, 结果发现摆线面积大约是生成圆面积的 3 倍. Gilles Persone de Roberval(吉勒斯 · 德 · 罗伯瓦尔) 在 1634 年利用Bonaventura Francesco Cavalier(卡瓦列里) 的定理, 严格证明了摆线面积是生成圆面积的 3 倍, 但是这项工作直到 1693 年才出版在他的著作《Traité des Indivisibles》里. 另一个严格的证明是Torricelli在 1644 年给出的, 不过同样也用到了Cavalier的定理.

摆线切线的构造可追溯到Roberval(在 1636 年给出了第一种方法, 而在 1638 年 8 月给出了现代切线理论意义下的第二种方法)、Fermat(在十七世纪三十年代) 和Descartes(在 1637 年). Marin Mersenne(梅森) 把这些结果告诉了Galileo, 而Galileo将它们交给了他的学生Torricelli和Vincenzo Viviani(维维亚尼), 从而Torricelli把这些结果和摆线求积一起发表在关于摆线的第一部正式出版的著作《Opera geometrica》(《几何工作》, 1644) 中. 这导致Roberval以剽窃罪指控Torricelli, 由于Torricelli于 1647 年在佛罗伦萨因染上伤寒而早逝, 这场争论就此被打断了.

1658 年, Pascal开始考虑关于摆线的几个问题. 为了公布结果, 他提议举办一场比赛.

[3]主要参考了这两篇论文: (a) Roidt, Tom. *Cycloids and paths*, M.S. Thesis, Portland State University, 2011. (b) Chavez, Natalle. *The history of the cycloid curve*, 2020, https://www.semanticscholar.org/paper/The-History-of-the-Cycloid-Curve-Chavez/7f549a405e262272db276eb94e1e273948bc501e

他提出了与摆线的重心、面积和体积有关的三个问题, 获胜者将获得 20 和 40 枚西班牙达布隆金币 (价值相当于 540 和 1080 元人民币). Pascal、Roberval和Vincenzo Viviani参议员是评委, 两份提交的材料（John Wallis和Antoine de Laloubère(安托万 · 德 · 拉劳贝)) 都被认为是不充分的. 在比赛进行期间, 英国建筑师Christopher Wren(克里斯托弗 · 雷恩) 爵士向Pascal发送了一份关于摆线弧长证明的提案 (摆线弧长是其生成圆半径的 8 倍); Roberval立即声称他已经知道这个结果很多年了. Wallis在其著作《De Cycloide》(《摆线论》, 1659) 中发表了Wren的证明, 并把摆线弧长的第一个证明归功于了Wren.

十五年后的 1673 年, Huygens部署了摆线摆来改进精密计时器, 并发现无论起点如何, 一个粒子都会在相同的时间内穿过一段倒置的摆线拱.

如果摆线的生成圆半径为 r, 则摆线的参数化方程为

$$x = r(t - \sin t), \quad y = r(1 - \cos t).$$

写成直角坐标为

$$x = r\cos^{-1}\left(1 - \frac{y}{r}\right) - \sqrt{y(2r - y)}.$$

对 t 求导得到摆线的切线

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{r\sin t}{r(1-\cos t)} = \cot\frac{t}{2}.$$

由此易证摆线满足如下的微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2r}{y} - 1}.$$

摆线 (第一拱) 的面积为

$$\int_0^{2\pi} r(1-\cos t)\cdot r(1-\cos t)\,dt = r^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt = 8rB\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right) = 3\pi r^2,$$

即摆线面积是生成圆面积的 3 倍. 摆线 (第一拱) 的弧长为

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = \int_0^{2\pi} r\sqrt{2 - 2\cos t}dt = 4r\int_0^{\pi}\sin u\,du = 8r,$$

即摆线弧长是生成圆半径的 8 倍.

Jacob Bernoulli 在 1690 年 5 月的《Acta Eruditorum》上提出了求悬链线的公开问题. 一年后的 1691 年, Leibniz、Huygens和Johann Bernoulli为响应Jacob Bernoulli 的挑战推导出了该方程; 他们的解决方案发表在 1691 年 6 月的《Acta Eruditorum》上.

在 1691 年, Jacob Bernoulli提出了弹性曲线问题, 其相应的微分方程是

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{\sqrt{a^4 - x^4}}.$$

但是两边积分后不能用初等函数来表示.

1691 年, 切线的反问题促使Leibniz隐约发现了求解常微分方程的变量分离法, 但是, 给出变量分离法显示求解过程的是Johann Bernoulli, 这记录在 1694 年 5 月 9 日他给Leibniz的信中.

利用积分因子来求解微分方程的想法要归功于Johann Bernoulli, 虽然他没有正式引入这个概念. 他把他这个想法记录在 1690 年初时准备的讲义中, 但这份讲义直到 1742 年

才出版. Johann Bernoulli 用这个想法来求解微分方程

$$2y\,dx - x\,dy = 0.$$

由于当时人们还不知道 $1/x$ 的积分是什么, 因此Johann Bernoulli不能利用分离变量法来求解上述微分方程. 他注意到, 方程两边同乘 x/y^2 就得到

$$\frac{x(2ydx - xdy)}{y^2} = d\left(\frac{x^2}{y}\right),$$

所以就得到解为 $x^2/y = C$, 其中 C 为任意常数. 他同时也注意到 y^{a-1}/x^2 是微分方程

$$ax\,dy - y\,dx = 0$$

的积分因子, 这是因为

$$\frac{y^{a-1}}{x^2}(axdy - ydx) = d\left(\frac{y^a}{x}\right).$$

Johann Bernoulli 用他的积分因子法求解的另一个微分方程是

$$3y\,dx = x\,dy + y\,dx.$$

积分因子的完整理论直到 1741 年才被Euler 在一篇论文中建立起来, 在这篇论文中他用同样的方法求解了

$$dt + 2tz\,dt - t\,dz + t^2dz = 0.$$

1696 年 6 月, Johann Bernoulli在《Acta Eruditorum》上提出了**最速降线问题 (brachistochrone problem)**, 即给定垂直平面上的两个点 A 和 B, 寻找曲线使得仅受重力作用的点从 A 开始并在最短的时间内到达 B. 对这个问题, Newton、Leibniz、L'Hô pital、Jacob Bernoulli 和Johann Bernoulli 都给出了正确的答案——还是摆线!

1695 年, Jacob Bernoulli 研究了现在称之为的 **Bernoulli 方程**. 在 1696 年, Leibniz利用变量替换把 Bernoulli 方程转化为线性方程. 1698 年, Johann Bernoulli 解决了 1-参数曲线族的正交轨迹的确定问题.

所有求解一阶常微分方程的初等方法在十七世纪末都被找到了. 到了十八世纪早期, 人们开始研究二阶甚至三阶常微分方程. 1696 年, Jacob Bernoulli 提出了**等周问题 (isoperimetric problem)**; 1701 年他给出了解答, 它可转化为一个三阶微分方程. 在 1716 年 5 月 20 日写给Leibniz的信中, Johann Bernoulli 考虑了方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y}{x^2},$$

其通解为

$$y = \frac{x^2}{a} + \frac{b^2}{3x};$$

当 $b \to 0$ 时解曲线是抛物线, 而当 $a \to \infty$ 时解曲线是双曲线.

1724 年, Jacopo Riccati讨论了曲率半径仅依赖于 y 坐标的曲线, 从而得到了形如下面的微分方程

$$y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2.$$

Riccati本人没有给出任何解, 而且上述方程一般来说不能通过初等方法求解出来. 1724

年, Daniel Bernoulli 对特殊情形

$$y' + ay^2 = bx^m$$

给出了可以用初等方法求解出来的充分条件.

1734 年, Alexis Claude Clairaut研究了

$$y = xy' + fy',$$

他是首批解决奇解问题 (寻找通解曲线族的包络) 的数学家之一, 而奇解现象是Leibniz在 1694 年观察到的. 我们回顾下Brook Taylor在 1715 年所考虑过的微分方程

$$(1+x)^2(y')^2 = 4y^3 - 4y^2.$$

为了求解这个方程, 他作了替换

$$y = u^m v^n,$$

这里 u, v 都是变量而 m, n 是常数. Taylor 选取了

$$v = 1 + x^2, \quad m = -2, \quad n = 1,$$

从而把原方程转化为

$$u^2 - 2xy\frac{du}{dx} + v\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = 1.$$

再次微分得到

$$2\frac{d^2u}{dx^2}\left(v\frac{du}{dx} - xu\right) = 0.$$

这样就得到两组解

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \quad 或 \quad v\frac{du}{dx} - xu = 0.$$

前一个解最后得到原方程通解为

$$y = \frac{1+x^2}{\left(ax \pm \sqrt{1-a^2}\right)^2},$$

这里 $a \in [0, 1]$ 为常数. 后一个解最后得到原方程通解为

$$y = v^{-1}v = 1.$$

但是显然遗漏了另一个解 $y = 0$. 两个特殊的解 $y = 0$ 和 $y = 1$ 显然不能从通解得到, 这样的解我们称为奇解.

在 1739 年 9 月 15 日和Johann Bernoulli的通信中, Euler开始了常系数齐次线性常微分方程的研究被给出了解法.

1743 年, Joseph Louis Lagrange 在研究一般线性方程的积分因子确定问题时, 给出了**伴随方程 (adjoint equation)** 的概念. 他不仅对一般线性方程确定了积分因子, 而且给出了 n 阶齐次线性常微分方程的通解证明.

Jean Le Rond d'Alembert 在 1747 年研究弦振动时, 给出了波动偏微分方程. 1767 年, 基于Lagrange 的工作, Jean Le Rond d'Alembert 给出了线性常微分方程降阶的条件, 这样就解决了常系数线性常微分方程问题, 同时开启了线性方程组的研究.

常微分方程的初等积分法大约持续到 1775 年, 因为很多问题不能用这些初等方法来

求解了,之后人们更多关注边值问题(从而导致了 Bessel 函数、Laguaerre 多项式、Legendre 多项式、Hermite 多项式等)、解的存在性以及数值解法.

9.1.1 常微分方程的基本概念

我们把含有自变量、未知函数以及未知函数的导数的关系式称为**微分方程 (differential equation)**. 如果微分方程中的未知函数是一元函数, 则称为**常微分方程 (ordinarty differential equation)**; 如果微分方程中的未知函数是含有两个变量以上的多元函数, 则称为**偏微分方程 (partial differenial equation)**.

常微分方程的一般形式可写为

$$F\left(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{9.1.1}$$

这里未知函数 $y = y(x)$ 实际出现的最高阶导数的阶数 n 称为 (9.1.1) 的**阶**. 如果 (9.1.1) 左边为关于未知函数 y 及其导数 $y', \cdots, y^{(n)}$ 的一次有理整式, 则称 (9.1.1) 为**n 阶线性常微分方程 (n th order linear ordinary differential equation)**, 否则称为**n 阶非线性常微分方程 (n th order nonlinear ordinary differential equation)**.

n 阶线性常微分方程的一般形式为

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x), \tag{9.1.2}$$

这里 $a_i(x), 1 \leq i \leq n$, 和 $f(x)$ 是关于 x 的已知函数, $f(x)$ 称为线性常微分方程 (9.1.2) 的**非齐次项 (non-homogeneous term)**. 当 $f(x) = 0$ 时, (9.1.2) 称为**n 阶线性齐次常微分方程 (n-th order linear homogeneous ordinary differential equation)**; 当 $f(x) \neq 0$, (9.1.2) 称为**n 阶线性非齐次常微分方程 (n-th order linear non-homogeneous ordinary differential equation)**.

我们通常考虑如下

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right) \tag{9.1.3}$$

n 阶显式常微分方程 (n-th order explicit ordinary differential equation).

定义 9.1. (解、通解和特解)

如果函数 $y = \phi(x)$, 其中 $\phi \in C^n(I)$ 且 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间, 及其各阶导数, 对任何 $x \in I$ 都满足

$$F\left(x, \phi(x), \phi'(x), \cdots, \phi^{(n)}(x)\right) = 0,$$

我们称 $y = \phi(x)$ 为 (9.1.1) 在区间 I 上的一个**解 (solution)**. 含有 n 个独立的任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 的解

$$y = \phi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$$

称为 n 阶常微分方程的**通解 (general solution)**, 反之称为 n 阶常微分方程的**特解 (special solution)**. ♣

这里的“区间”可以是开区间、闭区间、半开半闭区间, 甚至可以是无穷区间. 我们称 n 个任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是**独立的 (independent)**, 如果 ϕ, ϕ', $\cdots$, $\phi^{(n-1)}$ 关于

$C_1, C_2, \cdots, C_n$ 的 Jacobian 行列式不为零, 即

$$\frac{\partial(\phi, \phi', \cdots, \phi^{(n-1)})}{\partial(C_1, C_2, \cdots, C_n)} \neq 0.$$

常微分方程的任意特解在平面上表示为一条曲线, 称为**积分曲线 (integral curve)** 或**解曲线 (solution curve)**; 同样地, 通解在平面上表示为一族曲线, 称为**积分曲线族 (family of integral curves)** 或**解曲线族 (family of solution curves)**.

一个 n 阶常微分方程的通解含有 n 个独立的任意常数, 反之我们可以证明含有 n 个独立的任意常数的函数族可以作为某个 n 阶常微分方程的通解. 对函数族

$$y = \phi(x, C_1, C_1, \cdots, C_n)$$

关于 x 求导得到

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, C_1, C_2, \cdots, C_n), \\ y''(x) &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x, C_1, C_2, \cdots, C_n), \\ &\cdots\cdots \\ y^{(n)}(x) &= \frac{\partial^n \phi}{\partial x^n}(x, C_1, C_2, \cdots, C_n). \end{aligned}$$

根据独立的定义,

$$\frac{\partial(\phi, \phi', \cdots, \phi^{(n-1)})}{\partial(C_1, C_2, \cdots, C_n)} \neq 0.$$

从隐函数定理可知, 局部上我们可以用 $x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}$ 来解出

$$\begin{aligned} C_1 &= C_1\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right), \\ C_2 &= C_2\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right), \\ &\cdots\cdots \\ C_n &= C_n\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right). \end{aligned}$$

这样就得到

$$y^{(n)} = \frac{\partial^n \phi}{\partial x^n}\left(x, C_1\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right), \cdots, C_n\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right)\right)$$

或

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right),$$

这是形如 (9.1.3) 的 n 阶常微分方程, 它实际上是 n 个独立超曲面的公共交线.

定义 9.2. (初值问题)

n 阶常微分方程的**初值问题 (initial value problem)** 或 **Cauchy 问题 (Cauchy problem)** 形如

$$\begin{cases} F\left(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right) = 0, \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \end{cases} \tag{9.1.4}$$

这里 x_0 是自变量 x 的指定初值. 我们把

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \tag{9.1.5}$$

称为**初值条件 (initial value condition)** 或**初始条件 (initial condition)**. ♣

9.1.2 几个典型例子

本小节参考了Sasser的论文[4]、Krishnachandran的论文[5]以及Johann Bernoulli著作《Lectiones mathematicae de methodo integralium》(《积分法中的数学课程》, 1691 - 1692) 节选部分的英文翻译[6].

例 9.1. (典型例子)

(1) **(Logistic 方程)** 用 $P(t)$ 表示 t 时刻的人口数. 我们假设人口的变化仅考虑出生和死亡, 而不考虑移民的其他因素. 定义

- $\beta(t)$ 表示在 t 时刻起的一个单位时间内出生人数与 $P(t)$ 的比率,
- $\delta(t)$ 表示在 t 时刻起的一个单位时间内死亡人数与 $P(t)$ 的比率.

在时间间隔 $[t, t+\Delta t]$ 内人口的变化为

$$\Delta P \approx \beta(t)P(t)\Delta t - \delta(t)P(t)\Delta t$$

即

$$\frac{dP(t)}{dt} = [\beta(t) - \delta(t)]P(t). \tag{9.1.6}$$

如果 $\beta(t) \equiv b$ 和 $\delta(t) \equiv= d$ 都为常数, 则 (9.1.6) 单位通解为

$$P(t) = P(t_0)e^{(b-d)(t-t_0)} \tag{9.1.7}$$

这里 t_0 是任意给定的初始时刻. 这种人口增长模型称为 **Malthus 模型**. 这个模型当 t 很大时是不合理的.

实际上, 随着人口数量增加到一定规模后出生率反而会下降, 原因有很多方面. 现在假设出生率函数 $\beta(t)$ 是人口函数 $P(t)$ 的线性递减函数, 则 $\beta(t) = \beta_0 - \beta_1 P(t)$, 其中 β_0, β_1 都是正常数. 如果死亡率函数 $\delta(t) \equiv \delta_0$ 是常数, 则 (9.1.7) 变成

$$\frac{dP(t)}{dt} = [\beta_0 - \beta_1 P(t) - \delta_0]P(t) = aP(t) - bP(t)^2, \tag{9.1.8}$$

其中 $a := \beta_0 - \delta_0$ 和 $b := \beta_1$. 这个模型称为 **Logistic 模型**.

(2) **(放射性物质的衰变问题)** 1898 年 12 月, Marie Curie(玛丽 · 居里) 和Pierre Curie(皮埃尔 · 居里) 从沥青铀矿提取铀后的矿渣中分离出氯化镭 ($RaCl_2$), 1907 年测出镭元素 (Radium) 的新的原子量, 1910 年又用电解氯化镭的方法制得了金属镭 (白色金属). 它的英文名称来源于拉丁文 radius, 含义是 "射线". 镭在化学元素周期表中位于第 7 周期, 第 IIA 族, 原子序数 88, 原子量 226.0254.

镭在地壳中的含量为 $1 \times 10^{-9}\%$, 至今已发现质量数为 206 - 230 的同位素中, 除

[4] Sasser, J. E. *History of ordinary differential equations: the first hundred years*, Proceedings of the Midwest Mathematics History Society, 1992. 电子版参见 http://www2.fiu.edu/yuasun/ ODE History.pdf

[5] Krishnachandrsn, V. N. *Differential equations: a historial refresher*, arXiv:2012.06938v1, 2020.

[6] Johann Bernoulli (Translated by William A. Ferguson, Jr.), "Lectures on The Integral Calculus", 21st Century Science & Technology, 2004. Available at http://21sci-tech.com/translations/Bernoulli.p

镭-223、镭-224、镭-226、镭-228 是天然放射性同位素外, 其余都是用人工方法合成的. 镭存在于所有的铀矿中, 每 2.8 吨铀矿中含 1 克镭. 纯的金属镭是几乎无色的, 但是暴露在空气中会与氮气反应产生黑色的氮化镭 (Ra_3N_2). 镭的所有同位素都具有强烈的放射性, 其中最稳定的同位素为镭-226, 半衰期约为 1600 年, 会衰变成氡-222.

假设放射性物质在存放期间的衰减速率与当时的质量成正比. 我们再假设放射性物质镭开始时的质量为 m_0, 其半衰期为 1600 年, 即 1600 年后其质量变为 $m_0/2$. 如果 t 时刻镭的质量为 $m(t)$, 则其衰减速率为 $dm(t)/dt$, 从而得到

$$\frac{dm(t)}{dt} = -km(t), \quad m(0) = m_0, \tag{9.1.9}$$

其中 $k > 0$ 时常数. 由此我们得到通解

$$m(t) = m_0 e^{-kt}, \quad t \geq 0. \tag{9.1.10}$$

把 $t = 1600$ 和 $m(t) = m_0/2$ 得到 $k = \ln 2/1600$, 因此

$$m(t) = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{1600}t}, \quad t \geq 0.$$

这样 100 年后, 镭的质量大约为 $m_0 e^{-\ln 2/100} \approx 0.9576 m_0$.

(3) **(物体冷却问题)** 把一个 $100C^\circ$ 的物体放在 $20C^\circ$ 的房间内, 经过 20 分钟后, 测量物体的温度已降为 $60C^\circ$. 因为物体冷却遵从 Newton 冷却定律, 即物体冷却速率正比于物体与周围环境的温度差. 如果 t 时刻物体的温度为 $T(t)$, 则得到

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k[T(t) - 20], \quad T(0) = 100, \tag{9.1.11}$$

这里 $k > 0$ 为正常数. 该常微分方程的通解为

$$T(t) = 20 + Ce^{-kt}, \quad k \geq 0. \tag{9.1.12}$$

把 $T(0) = 100$ 代入得到 $C = 80$ 和

$$T(t) = 20 + 80e^{-kt}, \quad t \geq 0.$$

再把 $T(20) = 60$ 代入得到 $k = \ln 2/50$ 和

$$T(t) = 20 + 80e^{-\frac{\ln 2}{20}t}, \quad t \geq 0.$$

如果令 $T(t) = 30$ 就得到 $t = 60$, 即还需要经过 40 分钟物体的温度降至 $30C^\circ$. ♠

9.1.3 悬链线

假设有一均匀、柔软的绳索, 两端固定, 绳索仅受重力作用而下垂; 绳索处于平衡状态时的曲线叫做悬链线 (Leibniz). 这个问题早在十五世纪已经被Leonardo da Vinci所考虑过. 而 "**悬链线** (catenary)" 一词源自拉丁语 catēna, 意思是 "链". 英文单词 "catenary" 通常归因于Thomas Jefferson(托马斯 · 杰斐逊), 他在给Thomas Paine(托马斯 · 潘恩) 的一封信中写道:" 我最近从意大利收到了一篇关于拱门平衡的论文, 作者是Abbé Mascheroni. 这似乎是一个非常科学化的工作。我还没有时间参与它; 但我发现他的论证得出的结论是,

悬链线的每一部分都处于完美的平衡状态."

人们总是说Galileo认为吊链的曲线是抛物线的，然而Galileo在他的《Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze》(《两门新科学》, 1638) 中写道吊绳只是一个近似的抛物线. Joachim Jungius证明了链后的曲线不是抛物线这一事实, 但这一结果在他死后的 1669 年发表.

悬链线在拱门建造中的应用归功于Robert Hooke(罗伯特 · 胡克), 他在重建圣保罗大教堂的背景下“真正的数学和机械形式”暗示了悬链线. 1671 年, Hooke向皇家学会宣布他已经解决了拱形最佳形状的问题, 并于 1675 年在他的《Description of Helioscopes》(《日光镜描述》, 1675) 的附录中以拉丁字谜的形式发表了一个加密的解决方案, 他写道“他发现了各种建筑拱门的真正数学和机械形式”。他有生之年没有公布这个字谜的解决方案，但在 1705 年, Hooke的执行人将其提供为“ut pendet continuum flexile, sic stabit contigumrigidum inversum”, 意思是“像悬挂一根柔性电缆一样, 倒置, 站立着拱形的接触部分”.

Jacob Bernoulli 在 1690 年 5 月的《Acta Eruditorum》上提出了求悬链线的公开问题. 一年后的 1691 年, Leibniz、Huygens和Johann Bernoulli为响应Jacob Bernoulli 的挑战推导出了该方程; 他们的解决方案发表在 1691 年 6 月的《Acta Eruditorum》上, 其中Huygens的解答是几何的且是含糊不清的, 而Johann Bernoulli利用微积分建立微分方程给出了一个解答. David Gregory在 1697 年写了一篇关于悬链线的论文[7], 其中他提供了正确微分方程的错误推导. Johann Bernoulli能够解决他哥哥Jacob Bernoulli提出来的悬链线问题, 而他哥哥却不能, 这令他非常自豪.

在 1691 年到 1692 年间, Jacob Bernoulli和Johann Bernoulli还解决了不均匀柔软绳索处于平衡状态时的曲线形状问题, 以及在每点上的作用力都指向一固定中心的绳索处于平衡状态时的曲线形状问题. Johann Bernoulli还解决了逆问题, 即已知平衡状态下绳索形状的曲线方程, 来求绳索密度相对于弧长的变化规律. Jacob Bernoulli在 1691 年的《Acta Eruditorum》上发表了一个证明, 即如果一根给定的绳索悬挂在两固定上, 它能够取到的所有形状中, 以悬链线的重心为最低. Euler在 1744 年证明了悬链线是一条曲线, 当它绕 x 轴旋转时, 给出了给定圆边界的最小表面积（悬链面）的表面. Nicolas Fuss在 1796 年给出了描述链在任何力下保持平衡的方程.

接下来我们来推导悬链线方程, 这个过程基本上是要归功于Johann Bernoulli. 在平面上建立直角坐标系使得绳索的最低点 A 在 y 轴表示为 $(0, a)$, $a > 0$ 且待定. 假设绳索曲线方程为 $y = y(x)$, $M = (x, y)$ 为绳索上任一点, 则曲线段 $\overset{\frown}{AM}$ 的受力分析为: A 点和 M 点分别有张力 H 和 T, 即曲线在这两点处的切线, 但方向相反; 除此之外, 还有重力 μgs, 其中 μ 为绳索的线密度, s 为 $\overset{\frown}{AM}$ 的弧长. 在平衡状态下我们得到

$$T\cos\theta - H = 0, \quad T\sin\theta - \mu gs = 0,$$

这里 θ 为张力 T 与 x 正轴的夹角, 由此得到

$$y'(x) = \tan\theta = \frac{\mu gs}{H} = \frac{1}{a}s, \quad a := \frac{H}{\mu g}.$$

[7]Gregorii, Davidis. *Catenaria*, Philosophical Transactions, **231**(1697), no. 19, 637 –652.

把弧长

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

代入得到

$$y'(x) = \frac{1}{a} \int_0^x \sqrt{1 + y'(t)^2} dt,$$

即

$$y''(x) = \frac{1}{a}\sqrt{1 + y'(x)^2}, \quad y(0) = a, \quad y'(0) = 0. \tag{9.1.13}$$

若令 $p(x) := y'(x)$ 得到

$$\frac{dp(x)}{dx} = \frac{1}{a}\sqrt{1 + p(x)^2}, \quad p(0) = 0.$$

这个微分方程解为

$$p(x) = \mathrm{sh}\frac{x}{a},$$

从而 (9.1.13) 的解为 $y(x) = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$.

9.1.4 弹性曲线

本小节主要参考了Raph Levien的论文[8]《The elastica: a mathematical history》和Ramaiyengar Sridharan的论文[9]. **弹性曲线** (elastica, 拉丁语是指松紧带, 表示细条弹性材料) 的研究吸引了历史上许多著名数学家的注意, 包括Galileo、Bernoulli家族、Euler等. 它出现在众多重要领域诞生之初, 最著名的是弹性理论、变分法和椭圆积分.

研究弹性曲线有很多方法. 最早的, 也是数学上最容易处理的, 是力矩平衡，利用了静力学的基本原理. 另一种方法, 最后也产生相同曲线方程, 是弹性曲线中弯曲能量的最小值.

A. Jordanus de Nemore: 十三世纪. 文献记载表明, 弹性曲线问题最早是由十三世纪数学家Jordanus de Nemore在《De ratione ponderis》(《重量》) 上提出来的. 这本书第四卷性质 13 指出“当中间握紧时, 末端部分更容易弯曲”, 但是他给出了错误的解答——圆。

B. Galilieo: 1638 年. 将弹性曲线表示为力矩平衡需要三个基本概念: 力矩 (静力学的基本原理)、曲线的曲率以及这两个概念间的关系. 在理想化弹性条的情况下, 这些量是线性相关的.

1638 年, Galilieo《Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno a due nuove scienze》(《论两种新科学及其数学演化》, 1648) 提出了建立弹性曲线数学研究的基本问题. 给定一根棱柱形梁, 一端固定在墙上, 另一端由重物加载, 重量需要是多少时才可以破坏梁? Galilieo从一些基本原理得出了许多结果, 主要是缩放关系. 他不考虑梁的位移; 对于这些

[8]电子文档参见 https://www2.eecs.berkeley.edu/Pubs/TechRpts/2008/EECS-2008-103.pdf

[9]Ramaiyengar, S. *Physics to mathematics: from lintearia to lemniscate –I*, Resonance. **9**(2004), no. 4, 21 –29; *From lintearia to lemniscate II: Gauss and Landen's Work*, Resonance, **9**(2004), no. 6, 11 –20.

类型的结构梁, 位移是微不足道的. 即便如此, 这代表了弹性问题的第一个数学处理, 并且牢固地建立了力矩的概念来确定弹性材料上的力.

Ignace-Gaston Pardies 在 1673 年提出了一种弹性曲线问题并且还尝试给出了一个解答: 对于一端固定而在另一端加载重物的梁来说, 它是一条抛物线. 可惜的是, 这个解答甚至不是近似正确的, 并且后来被Jacob Bernoulli斥为几个 “纯粹的谬论” 之一. Truesdell认为, 把梁的弹性引入到其阻力计算中应当归功于Pardies, 并且他还影响了之后的研究人员——特别是Leibniz和Jacob Bernoulli.

C. Hooke 的弹簧定律: 1678 年. Hooke 在 1678 年发表了他关于弹性曲线的著作《De potentia restitutiva》(《恢复力》, 1678), 其中也包含他著名的弹簧定律, 但是却没有给出纤维曲率和弯矩的关系. 事实上, 当时对曲率的研究仍处于发展阶段, 原因是微积分还没有成熟. Newton在《The method of fluxions and infinite series》(写于 1671 年, 出版于 1736 年) 中给出了曲率公式 (按照目前的形式)

$$\rho = \frac{(1+(y')^2)^{3/2}}{y''}. \tag{9.1.14}$$

1673 年, Huygens发表了《Horologium oscillatorium: sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae》(《振荡时钟: 调整钟摆运动的几何演示》, 1673), 其中使用了纯几何结构, 特别是曲线的渐开线, 来建立包含曲率的结果.

基于曲率的扎实理解, 并假设力和长度变化之间存在线性关系, 那么计算出力矩和曲率之间的关系确实 “容易”, 但即使是James Bernoulli也不得不在这两个概念上挣扎. 一方面, James Bernoulli并没有简单地接受弹簧的线性定律, 而是觉得有必要亲自测试一下. 而且, 由于他不幸使用了肠线, 而不是金属等更理想的弹性材料, 他发现了显着的非线性。1687 年 12 月 15 日, James Bernoulli给Leibniz的一封信, 以及近三年后Leibniz的回信, 这表明了弹性曲线理论的诞生. Leibniz曾提出 “从其他地方证实的假设来看, 延伸与拉伸力成正比 $\cdots$” 这在今天被归结为胡克弹簧定律. James Bernoulli对这种关系提出了质疑, 正如我们将看到的, 他对弹性的解甚至可以推广到非线性位移.

D. Jacob Bernoulli 提出弹性曲线问题: 1691 年. Jacob Bernoulli 在 1691 年提出了准确的弹性曲线问题 (图 9.1): “Si lamina elastica gravitatis espers AB, uniformis ubique crassitiei & latitudinis, inferiore extremitate A alicubi firmetur, & superiori B pondus appendatur, quantum sufficit ad laminam eousque incurvandam, ut linea directionis ponderis BC curvatae laminae in B sit perpendicularis, erit curvatura laminae sequentis naturae: Portio axis applicatam inter et tangentem est ad ipsam tangentem sicut quadratum applicatae ad constans quoddam spatium(假设一个厚度和宽度均匀且自身重量可忽略不计的椎板 AB. 在 A 处支撑在其下周边, 并在 B 处从其顶部悬挂重物, 来自重物沿线 BC 的力足以使椎板垂直弯曲, 薄片的曲线遵循这样的性质: 由轴线与其自身切线间的切线所形成的矩形具有常数面积).”

这提出了一般弹性曲线问题的一个特定实例, 现在通常称为**矩形弹性问题 (rectangular elastica)**, 因为施加在曲线一端的力使其弯曲成直角, 而另一端保持固定. 通过他 1694 年的解释, 我们可以提取出基本思想: 在曲线上的每一点, 它的曲率半径和到直线 BC 的

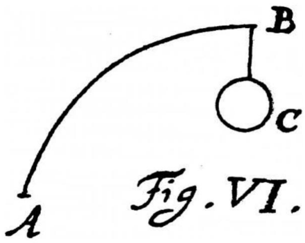

图 9.1: Jacob Bernoulli 提出的弹性曲线问题

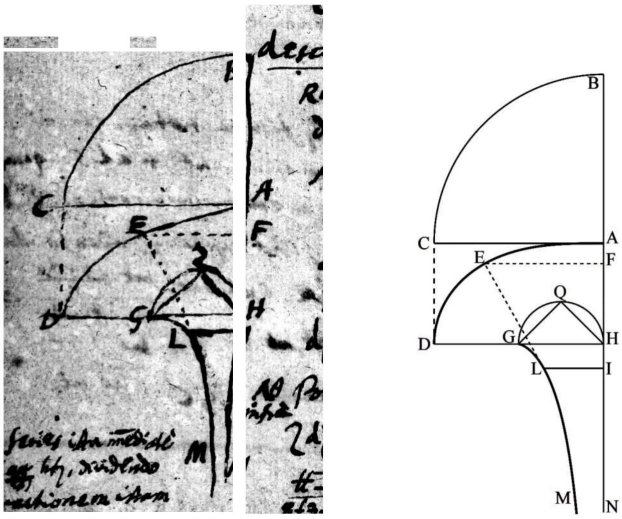

图 9.2: Jacob Bernoulli 原图和现代重构图

距离的乘积为一个常数, 即两个量成反比.

E. Jacob Bernoulli 部分解决了弹性曲线问题: 1692 年. 在《Meditatione CLXX》(1692 年), Jacob Bernoulli 完全解决了矩形弹性问题, 论文题目是《Quadratura Curvae, e cujus evolutione describitur inflexae laminae curvatura》(《曲线的正交, 通过它的演变描绘出弯曲层的曲线》, 1692 年).

他绘制了图 9.2, 并给出了微分方程. 假设圆半径 $AB = a$, AED 是由 A 处的悬重而弯曲的弹性薄片, 而曲线 GLM 的渐开线描述了 AED. 令 $AF = y$, $FE = x$, $AI = p$, $IL = z$. 从而利用 (9.1.14) 得到曲线 AED 所满足的微分方程

$$dy = \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}. \tag{9.1.15}$$

F. Jacob Bernoulli 发表弹性曲线问题的第一个解答: 1694 年. Jacob Bernoulli 把他的解答私藏了几年, 直到 1694 年才以《Curvatura Laminae Elasticae》(《弹性层的曲率》, 1694) 为名出版发行.

值得注意的是, 虽然Jacob Bernoulli对描述弹性曲线的数学研究是完整而合理的, 但作为弹性理论的更一般性工作, 还是存在着一些问题。特别是, Jacob Bernoulli假设 (这个假

设是错误地) 弹性体的内部曲线是 “中性纤维”, 在弹性材料弯曲时保持其长度. 事实上, 确定是否为中性纤维是一个相当棘手的问题, 其一般解决方案仍然只能通过数值技术来确定. 幸运的是, 在厚度接近零的理想情况下, 中性纤维的确切位置并不重要, 重要的是力矩和曲率之间的关系. Huygens 当时就注意到了Jacob Bernoulli 方法的局限性, 他在 1694 年的《Acta Eruditorum》上发表了一篇短文说明了弹性曲线可能呈现的几种可能的形状, 并指出Jacob Bernoulli利的求积仅表示矩形弹性曲线.

Jacob Bernoulli承认这一批评 (同时指出他在论文中明确描述了其他这些情况, Huygens显然忽略了这一点) 并指出他的技术可以扩展到处理其他这些情况 (通过使用非零常数来整合方程), 然后给出一个具有通解的方程

$$\pm dy = \frac{(x^2 \pm ab)dx}{\sqrt{a^4 - (x^2 \pm ab)^2}}.$$

尚不清楚这个通解是否产生了多大影响. Jacob Bernoulli没有画出其他情况, 似乎也没有意识到解的其他重要性质, 特别是它的周期性, 也没有意识到它包括有和没有拐点的解. 这些结果并不广为人知的另一个迹象出现在Daniel Bernoulli 1738 年 11 月 8 日写给Euler的一封信中, 当时他正与Euler就弹性曲线进行了大量通信, 他写道: “除此之外, 我注意到我叔叔Jacob Bernoulli先生的想法包括所有的弹性曲线.”

G. Daniel Bernoulli 提出了变分技巧: 1742 年. 毫无疑问, Bernoulli家族为Euler对弹性问题的明确分析奠定了基础. 下一个突破出现在 1742 年 10 月, 当时Daniel Bernoulli在信中向Euler提议解决一般弹性问题的技术: 变分法. 这个一般问题包含由任意给定长度的弹性带和端点处任意给定切线约束所产生的曲线族. 信中提到: “Ich möchte wissen ob Ew. die curvaturam laminae elasticae nicht könnten sub hac facie solviren, dass eine lamina datae longitudinis in duobus punctis positione datis fixirt sey, also dass die tangentes in istis punctis such positione datae seyen. $\cdots$ Dieses ist die idea generalissima elasticarum; hab aber sub hac facie noch keine Solution gefunden, als per methodum isoperimetricorum, da ich annehme, dass die vis viva potentialis laminae elasticae insita mĺusse minima seyn, wie ich Ew. schon einmal gemeldet. Auf diese Weise bekomme ich eine aequationem differentialem 4ti ordinis, welche ich nicht hab genugsam reduciren können, um zu zeigen, dass die aequatio ordinaria elastica general sey(我想知道在这种情况下你是否可以解决弹性层的曲率, 在弹性层的长度上, 两个点的位置是固定的, 并且这些点的切线是给定的. $\cdots$ 这是一般弹性的想法; 然而, 鉴于我假设弹性层的势能必须是最小的, 我还没有通过等周方法找到这种情况下的解决方案, 正如我之前向你提到的那样. 通过这种方式, 我得到了一个四阶微分方程, 我无法将其减少到足以显示一般弹性方程的正则方程).”

“正如我之前向你提到的那样” 是指 1739 年 3 月 7 日他写给Euler的信, 在这份信中他给出了一个不太优雅的弹性层势能公式, 并提出了 “等周法” ——变分法的早期称呼.

在 1742 年的信的最后, Daniel Bernoulli 提出了弹性问题的第一个清晰的数学陈述——关于储存能量的变分问题: “Ew. reflectiren ein wenig darauf, ob man nicht köonne, sine interventu vectis, die curvaturam ABC immediate ex principiis mechanicis deduciren. Sonsten exprimire ich die vim vivam potentialem laminae elasticae naturaliter rectae et incurvatae durch $\int ds/RR$, sumendo elementum ds pro constante et indicando radium osculi per R. Da Niemand die methodum isoperimetricorum so weit perfectionnieret, als Sie, werden Sie dieses problema, quo requiritur ut $\int ds/RR$ faciat minimum, gar leicht solviren(你思考一下, 如果没有一些杠杆的干预, 是否不能立即从力学原理推导出 ABC 的曲率. 否则的话, 我会把弯曲弹性层的势能 (在自然位置时是直的) 表示为 $\int ds/RR$, 这里假设元素 ds 是常数并用 R 表示曲率半径. 没有人像你一样完美, 利用等周法可以轻松解决 $\int ds/RR$ 的极小化问题)."

Daniel Bernoulli是对的! 凭借这种洞察力, Euler确实能够在一年内最终解决一般问题 (Daniel Bernoulli在 1743 年 9 月 4 日的一封信中感谢Euler在 "补充" 中提到了他的能量最小化原理), 不久之后以著作的形式发表了这个解答.

H. Euler 的分析: 1744 年. 基于Bernoulli 的工作, Euler率先完全刻画了称为弹性曲线的这组曲线, 并作为附录发表在关于变分技巧的开创性著作《Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti》(《一种寻找具有最大或最小属性的曲线的方法, 或者是最广义上易于解决的问题的解决方案》, 1744) 上.

紧跟Daniel Bernoulli的建议, Euler以变分形式把弹性曲线问题非常清楚地表达出来. 他写道: "ut, inter omnes curvas ejusdem longitudinis, quæ non solum per puncta A & B transeant, sed etiam in his punctis a rectis positione datis tangantur, definiatur ea in qua sit valor hujus expressionis $\int ds/RR$ minimus(在所有相同长度的曲线中, 这些曲线不仅通过点 A 和 B 而且在这些点与给定的直线相切, 它被定义为最小化表达式 $\int df/RR$ 的值)." 这里, s 表示弧长, R 是曲率半径 (或 κ^{-1}, 这里 κ 是曲率). 如今, 我们把弹性曲线写成能量 $\mathcal{E}[\kappa]$ 关于曲线长度 $0 \le s \le l$ 的最小值:

$$\mathcal{E}[\kappa(s)] := \int_0^l \kappa(s)^2 ds.$$

在直角坐标系下, Euler 利用公式

$$ds = \sqrt{1+(y')^2}dx, \quad \frac{1}{R} = \frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}}$$

把变分问题变成求

$$\int \frac{(y'')^2}{(1+(y')^2)^{5/2}}dx$$

的最小值. 最小值给出了如今称之的 **Euler-Poisson 方程**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2-c^2+x^2}{\sqrt{(c^2-x^2)(2a^2-c^2+x^2)}},$$

这里 a 和 c 是参数. 这和Jacob Bernoulli 所导出的方程本质上是一样的.

Euler 依据参数 a 和 c 来分类上述方程的解. 引入

$$\lambda := \frac{a^2}{2c^2}.$$

他首先观察到由无数钟弹性曲线, 而且 "列举此类曲线中包含的所有不同类型是值得的. 因为这样不仅可以更深刻地理解这些曲线的特征, 而且在任何情况下, 都可以从单纯的图

形中决定应该将所形成的曲线归为哪一类. 我们还将在这里列出不同种类的曲线, 就像通常列举给定顺序中包含的代数曲线的种类一样." Euler 发现了九类,

(1) $c = 0$ 或 $\lambda = \infty$, 直线,
(2) $0 < c < a$ 或 $\lambda > 0.5$,
(3) $c = a$ 或 $\lambda = 0.5$, 矩形弹性曲线,
(4) $a < c < a\sqrt{1.651868}$ 或 $0.302688 < \lambda > 0.5$,
(5) $c = a\sqrt{1.651868}$ 或 $\lambda = 0.302688$, 类柠檬,
(6) $a\sqrt{1.651868} < c < a\sqrt{2}$ 或 $0.25 < \lambda < 0.302688$,
(7) $c = a\sqrt{2}$ 或 $\lambda = 0.25$, 罪犯曲线 (1729 年, syntractrix of Poleni 或 la courbe des forcats(法语)),
(8) $a\sqrt{2} < c$ 或 $0 < \lambda < 0.25$,
(9) $a = 0$ 或 $\lambda = 0$, 圆.

对第七种曲线, Euler 给出的解答是

$$y = \sqrt{c^2 - x^2} - \frac{c}{2} \ln \frac{c + \sqrt{c^2 - x^2}}{x}.$$

I. 椭圆积分 即使弹性曲线的积分被揭示出来, 但是它们长度的解析公式仍然难以捉摸. 十八世纪上半叶已知的函数, 即使是被了解很好的椭圆, 也很难求出曲线的长度. 弹性曲线弧长和数学另一分支——椭圆积分, 有着密切的关系.

如果单位偏移矩形弹性曲线的面积为

$$y = \int_0^x \frac{t^2 dt}{\sqrt{1 - t^4}},$$

那么它的弧长为

$$s = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}}.$$

这个机房内现在称为 "双扭线积分 (lemniscate integral)" , 这是因为和Jacob Bernoulli所研究的**双扭线 (lemniscate)** 有关. 在直角坐标系下, 双扭线的方程为

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2. \tag{9.1.16}$$

Jacob Bernoulli利用级数展开近似计算了双扭线的弧长积分并且确定了上、下数值界, 但是实际上双扭线弧长之后可以后 Jacobi 椭圆函数来表示. Jacobi 把椭圆函数诞生之日设定为 1751 年 12 月 23 日, 这天是Euler 审查Fagnano关于双扭线弧长的工作.

Fagnano观察到积分

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}} \tag{9.1.17}$$

看起来和积分

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \sin^{-1}\theta \tag{9.1.18}$$

非常相似. 对积分 (9.1.18) 做变换

$$t \longrightarrow \frac{2t}{1 + t^2}$$

得到

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\int_0^{F(x)} \frac{dt}{1+t^2}, \quad F(x) := \frac{2x}{1+x^2}.$$

受此启发, 我们对积分 (9.1.17) 做变换

$$t^2 \longrightarrow \frac{2t^2}{1+t^4}$$

得到

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \sqrt{2}\int_0^{F(x)} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}, \quad F^2(x) = \frac{2x^2}{1+x^4}.$$

再做变换

$$t^2 \longrightarrow \frac{2t^2}{1-t^4}$$

得到

$$2\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^{F(x)} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}, \quad F(x) = \frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}. \tag{9.1.19}$$

这个双扭线加倍公式, Fagnano早在 1718 年就得到了.

实际上, Euler 早在 1738 年就开始研究椭圆积分, 在他写给Jacob Bernoulli的信中 “他已经注意到了矩形弹性曲线的一个奇特性质”,

$$\text{长度}\cdot\text{高度} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}.$$

Euler 在接收到Fagnano的工作后, 开始了他著名的工作——发现了椭圆函数 (中双扭线) 的加法定理:

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} + \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^{F(x,y)} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}, \tag{9.1.20}$$

这里

$$F(x,y) = \frac{x\sqrt{1-y^4}+y\sqrt{1-x^4}}{1+x^2y^2}.$$

当 $x=y$ 时, (9.1.20) 就变成 (9.1.19). 现在令

$$v = F(u,c) = \frac{u\sqrt{1-c^4}+c\sqrt{1-x^4}}{1+c^2u^2},$$

其中 $c\in[-1,1]$ 为常数而 u,v 为变量. 简单化简得到

$$c^2u^2v^2+u^2+v^2-2uv\sqrt{1-c^4}-c^2=0, \tag{9.1.21}$$

这是微分方程

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^4}}+\frac{dv}{\sqrt{1-v^4}}=0 \tag{9.1.22}$$

的通解. 若在 (9.1.21) 中令 $c=1$ 得到椭圆曲线 $u^2v^2+u^2+v^2-1=0$.

若引入双扭线常数

$$\widetilde{\omega} = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right) \approx 2.62205755429211981046483958\cdots, \tag{9.1.23}$$

则得到双扭线的周长为 $2\widetilde{\omega}$. 在 (9.1.23) 中令 $x=\cos\theta$ 就得到

$$\frac{\widetilde{\omega}}{2} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{2\cos^2\theta+\sin^2\theta}}.$$

给定实数 $a \geq b > 0$, Gauss考虑了一般形式

$$G(a,b) := \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}.$$

当 $a = b$ 时得到 $G(a,a) = \pi/2a$. Gauss利用 a 和 b 的“算术几何平均”来计算: 定义

$$a_1 := \frac{a+b}{2}, \quad a_n := \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\ (n \geq 2), \quad b_1 := \sqrt{ab}, \quad b_n := \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}\ (n \geq 2).$$

数列 $\{a_n\}$ 单调递减而数列 $\{b_n\}$ 单调递增, 且满足 $0 \leq a_n - b_n \leq (a-b)/2^n$, 因此这两个数列均收敛到同一值, $M(a,b)$——称为**a 和 b 的算术几何平均**. Gauss证明了

$$G(a,b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}} = \frac{\pi}{2M(a,b)}. \tag{9.1.24}$$

事实上, 做变换 $t = b\tan\theta$ 得到

$$\begin{aligned} G(a,b) &= \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}} = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a_1^2)(x^2+b_1^2)}} \\ &= \cdots = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t^2+M^2(a,b))^2}} = \int_0^\infty \frac{dt}{t^2+M^2(a,b)}, \end{aligned}$$

这里 $x = (t - b_1^2/t)/2$. 从而得到

$$\frac{\widetilde{\omega}}{2} = \frac{\pi}{2M(\sqrt{2},1)}, \quad \int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{M(\sqrt{2},1)}{2}. \tag{9.1.25}$$

Gauss 也对复数对定义了“算术几何平均”[10], 从而研究了“模函数”.

人们把常数

$$G := \frac{\widetilde{\omega}}{\pi} = \frac{1}{M(\sqrt{2},1)} = 0.8346\cdots \tag{9.1.26}$$

称为 **Gauss 常数**. 该常数的无穷级数和无穷乘积分别为

$$G = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \prod_{1\leq k\leq n}\frac{(2k-1)^2}{(2k)^2}, \quad G = \prod_{n\geq 1}\left(\frac{4n-1}{4n}\cdot\frac{4n+2}{4n+1}\right).$$

J. Laplace 关于毛细管: 1807 年. 弹性曲线也出现在毛细管形状这个基本物理问题中. Pierre Simon Laplace 在他 1807 年的论文《Supplément au dixième livre du Traité de mécanique céleste. Sur l'action capillaire》中, 考虑了夹在两块垂直单板的流体表面并得到了毛细管形状所满足的方程

$$z'' = 2(az + b^{-1})(1 + (z')^2)^{3/2}$$

这里 z 表示高度, z' 和 z'' 表示相对于水平坐标的第一和第二导数. 他注意到上述方程至少有一个特例等价于椭圆曲线方程.

尚不清楚毛细管表面和弹性曲线的一般等价性. 一块垂直单板的情形是William Hallowes Miller 在 1831 年出版的《The elements of hydrostatics and hydrodynamics》中所考虑的. 一般情形是James Clerk Maxwell 所考虑的,

K. 弹性曲线问题解的闭形式: Jacobi 椭圆函数, 1880 年. 基于 Jacobi 椭圆函数, Saalschütz 在 1880 年的著作《Der belastete stab unter einwirkung einer seitlichen kraft》(《在

[10] 可参考 Tomack Gilmore 的文章 https://homepage.univie.ac.at/tomack.gilmore/papers/Agm.pdf

横向力作用下的加载杆》, 1880) 中给出了弹性曲线的闭形式解.

Jacobi 振幅 (Jacobi amplitude) $\mathbf{am}(u,k)$ 定义为第一类 Jacobi 椭圆积分的反函数:

$$\mathbf{am}(u,m):=\phi,\quad \text{其中}\quad u=\int_0^{\phi}\frac{dt}{\sqrt{1-m\sin^2 t}}.$$

这里 m 是非负参数. 有时候我们也用**椭圆模 (elliptic modulus)** $k:=\sqrt{m}$ 也表示参数. 引入如下的三角函数的双周期推广:

$$\begin{aligned}\mathbf{sn}(u,m) &:= \sin(\mathbf{am}(u,m)),\\ \mathbf{cn}(u,m) &:= \cos(\mathbf{am}(u,m)),\\ \mathbf{dn}(u,m) &:= \sqrt{1-m\sin^2(\mathbf{sm}(u,m))}.\end{aligned}$$

注意到, 当 $m=0$ 时, **sn** 和 **cn** 就是通常的 sin 和 cos.

弹性曲线问题解的闭形式分为拐点和非拐点两种情形. 我们仅考虑拐点情形. 作为弧长 s 的函数, 此时曲率 κ 满足

$$\frac{d\theta}{ds}=\kappa=2\sqrt{m}\,\mathbf{cn}(s,m),$$

从而得到

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{m}\,\mathbf{sn}(s,m).$$

如果引入第二类椭圆积分

$$\mathbf{E}(\phi,k):=\int_0^{\phi}\sqrt{1-m\sin^2\theta}\,d\theta,$$

那么弹性曲线可表示为

$$x(s)=s-2\,\mathbf{E}(\mathbf{am}(s,m),m),\quad y(s)=-2\sqrt{m}\,\mathbf{cn}(s,m).$$

9.2 一阶常微分方程求解: 积分法

本节我们主要介绍求解一阶常微分方程的初等方法, **积分法**, 这个方法在常微分方程早期被Newton、Leibniz、Euler和Bernoulli 家族广泛使用. 另一方面, Liouville 在 1841 年证明了, 除了某些特殊类型的常微分方程外, 大不多常微分方程不能用积分法求解.

在Marie-Jean-Antoine-Nicolas Caritat de Condorcet(孔多塞)1765 年的著作《Du calcul intfgral》(《积分计算》, 1765) 里, 他企图把求解常微分方程的所有孤立的方法和技巧整理出一个条理来, 但是最后失败了.

1769 年, Euler证明了凡是可以用变量分离法额地方都可用积分因子法, 但是反之不然; 同时他还证明了变量分离法对高阶微分方程来说是不可能的. Euler 发现常微分方程中的变量替换, 是没有一般的原则可言, 但是变量替换可降低常微分方程的阶.

寻找常微分方程的一般积分法大约到 1775 年就结束了, 而新的、重要的方法 (算子方法和 Laplace 变换) 直到十九世纪末才被引入.

对最简单的一阶常微分方程

$$y'(x)=f(x),$$

利用微积分基本定理可知, 如果 $f(x)$ 是连续函数, 则通解为

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + C.$$

对一般的一阶常微分方程

$$y'(x) = f(x, y), \tag{9.2.1}$$

我们希望通过某种变换转化成

$$\frac{dY}{dx} = g(x),$$

这里 Y 是关于 (x, y) 的二元函数而 $g(x)$ 是仅依赖于 x 的连续函数. 此时通解为

$$Y(x, y) = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt + C.$$

由此所确立的隐函数 $y = y(x, C)$ 为 (9.2.1) 的通解.

9.2.1 一阶线性常微分方程

一阶线性常微分方程的一般形式为

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x), \tag{9.2.2}$$

其中 $p(x)$ 和 $q(x)$ 是定义在区间 $I = (a, b)$ 上的给定的连续函数, 即 $p, q \in C(I)$. 当 $q(x) \equiv 0$ 时, (9.2.2) 称为**一阶线性齐次常微分方程**, 否则的话, 就称为**一阶线性非齐次常微分方程**.

A. 一阶线性齐次常微分方程. 一阶线性齐次常微分方程为

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y, \tag{9.2.3}$$

其中 $p \in C(I)$, $I = (a, b)$. 如果 $y \neq 0$, 则 (9.2.3) 等价于

$$\frac{d}{dx} \ln|y| = p(x),$$

从而两边积分得到

$$\ln|y| = \int_{x_0}^{x} p(t)\,dt + C_1,$$

其中 $x_0 \in I$ 而 C_1 是任意常数. 若引入任意非零常数 $C_2 = \pm e^{C_1}$, 就得到

$$y(x) = C_2 e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt}.$$

但是 $y = 0$ 显然是 (9.2.3) 的一个解, 因此 (9.2.3) 的通解为

$$y(x) = Ce^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt}, \tag{9.2.4}$$

其中 C 是任意常数. 这样对初值问题

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y, \quad y(x_0) = y_0, \tag{9.2.5}$$

的通解为

$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt}. \tag{9.2.6}$$

除此之外, 我们注意到 (9.2.3) 的解满足如下性质:

(1) 一阶线性齐次常微分方程的解要么恒为零, 要么恒不为零.

(2) 一阶线性齐次常微分方程的解在 I (系数 $p(x)$ 有定义且连续的区间) 上存在.

(3) 一阶线性齐次常微分方程任何有限个解的线性组合仍是解, 且通解可表示为 $y(x) = C\varphi(x), C \in \mathbb{R}$, 这里 $\varphi(x)$ 任意一个非零解, 因此所有解构成一个一维线性空间.

B. 一阶线性非齐次常微分方程. 一阶线性非齐次常微分方程为

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x), \tag{9.2.7}$$

其中 $p, q \in C(I)$, $I = (a, b)$, q 不恒为零. 为了利用求解 (9.2.1) 的一般方法, 我们首先把 (9.2.7) 改写成

$$y' - p(x)y = q(x).$$

为了求得 $Y = Y(x, y)$ 满足 $Y' = y' - p(x)y$, 我们考虑

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} y\right) = [y' - p(x)y]e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} = e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} q(x).$$

因此得到 (9.2.7) 的通解为

$$y(x) = e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt}\left(C + \int_{x_0}^{x} q(t)e^{-\int_{x_0}^{t} p(\tau)d\tau} dt\right), \tag{9.2.8}$$

其中 C 为任意常数. 因此, 初值问题

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x), \quad y(x_0) = y_0 \tag{9.2.9}$$

的解为

$$y(x) = e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} q(t)e^{-\int_{x_0}^{t} p(\tau)d\tau} dt\right), \tag{9.2.10}$$

除此之外, 我们注意到 (9.2.7) 的解满足如下性质:

(1) 一阶线性非齐次常微分方程初值问题 (9.2.9) 的解存在且唯一. 这是因为假设 (9.2.9) 有两个解 $y = \phi(x)$ 和 $y = \psi(x)$, 则 $\phi(x) - \psi(x)$ 是对应一阶线性齐次常微分方程初值问题 (9.2.3) 的解且满足初值条件 $\phi_1(x_0) - \psi(x_0) = 0$. 根据公式 (9.2.6) 得到 $\phi(x) - \psi(x) \equiv 0$.

(2) 一阶线性非齐次常微分方程的解在 I (系数 $p(x), q(x)$ 有定义且连续的区间) 上存在.

(3) 一阶线性非齐次常微分方程的通解可写成一阶线性非齐次常微分方程的一个特解与相应的一阶线性齐次常微分方程的通解的和.

注 9.1

一阶线性常微分方程的一个重要性质是其解满足**叠加原理**: 假设 $y_1 = y_1(x)$ 和 $y_2 = y_2(x)$ 分别为两个一阶线性常微分方程

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q_1(x), \quad \frac{dy}{dx} = p(x)y + q_2(x)$$

的解, 则 $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 是一阶线性常微分方程

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + C_1q_1(x) + C_2q_2(x)$$

的解, 其中 C_1, C_2 为两个任意常数. ♣

如果在 (9.2.8) 中引入函数

$$C(x) := C + \int_{x_0}^{x} q(t)e^{-\int_{x_0}^{t} p(\tau)d\tau}dt, \tag{9.2.11}$$

则 $C(x_0) = C$ 且 (9.2.8) 可写成

$$y(x) = C(x)e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt}. \tag{9.2.12}$$

比较一阶线性齐次常微分方程的通解 (9.2.4) 和一阶线性非齐次常微分方程的通解 (9.2.12), 我们发现两者的区别仅在 C 和 $C(x)$. 由此我们得到如何从一阶线性齐次常微分方程的通解来求出对应的一阶线性非齐次常微分方程的通解, 这个方法叫**常数变易法 (variation of parameters)**. 把一阶线性齐次常微分方程通解 (9.2.4) 中的 C 换成 $C(x)$, 然后对 x 求导, 即对 (9.2.12) 两边求导得

$$[C'(x) + C(x)p(x)]e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt} = \frac{dy}{dx} = p(x)C(x)e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt} + q(x),$$

进一步化简得到

$$C'(x) = q(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}.$$

两边积分就得到

$$C(x) = C + \int_{x_0}^{x} q(t)e^{-\int_{x_0}^{t} p(\tau)d\tau}dt,$$

其中 C 是任意常数. 这样就得到一阶线性非齐次常微分方程 (9.2.7) 的通解 (9.2.12). 取 $C = 0$ 得到 (9.2.7) 的一个特解

$$y^*(x) = e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt} \int_{x_0}^{x} q(t)e^{-\int_{x_0}^{t} p(\tau)d\tau}dt.$$

这个特解与对应的一阶线性齐次常微分方程的通解 (9.2.4) 相加就得到了一阶线性非齐次常微分方程 (9.2.7) 的通解.

常数变易法可追溯[11]到Jacob Bernoulli 和Johann Bernoulli, Jacob Bernoulli在 1694 年 9 月至 1696 年 6 月间至少已经有了常数变易法的想法, 而Johann Bernoulli在 1697 年 3 月的论文[12]中就已经使用了常数变易法来求解Jacob Bernoulli 所引入的 Bernoulli 方程 (见**第 9.2.2 小节**). 实际上, Johann Bernoulli在 1696 年 8 月写给Leibniz的一份信中就已经知道了常数变易法. 因此, Jacob Bernoulli和Johann Bernoulli, 他们两兄弟应该是差不多同时掌握了常数变易法.

真正把常数变易法发扬光大的是Euler 和Lagrange, 前者在十八世纪五十年代利用常数变易法来研究木星和土星的相互扰动、地球的运动以及月球的运动, 而后者首次使用常数变易法是在 1766 年的论文[13]里. Lagrange在 1775 年至 1783 年的一系列论文中进一步发展了常数变易法, 而在 1808 年至 1810 年间他发展了更加一般的常数变易法.

[11]Parker, Adam. *Who solved the Bernoullie differential equation and how did they do it?*, College Math. J., **44**(2013), no. 2, 89-97.

[12]Bernoulli, Johann. *De conoidibus et spaeroidibus quaedam. Solutio analytica æquationis in Actis A. 1695, pag. 553 propositæ (A Fratre Jac. Bernoullio), Acta Eruditorum,* **Mar***(1697), 113 - 118.*

[13]Lagrange, J.-L. *Solution de différens problèmes du calcul integral*, Mélanges de philosophie et de mathématique de la Société royale de Turin, **3**(1766), 179 - 380.

例 9.2

(1) 求解初值问题

$$\frac{dy}{dx} = y\cot x + 2x\sin x, \quad y(\pi/2) = 0, \quad x \in (0, \pi).$$

解: 直接利用公式 (9.2.10) 得到

$$y(x) = e^{-\int_{\pi/2}^{x}\cot t\,dt}\left(0 + \int_{\pi/2}^{x} 2t\sin t\, e^{-\int_{\pi/2}^{t}\cot\tau\,dtau}dt\right) = \left(x^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)\sin x. \quad \square$$

(2) 假设 $f \in C^1((-\infty, +\infty))$ 满足积分方程

$$2\int_0^x (x+1-t)f'(t)\,dt = x^2 - 1 + f(x), \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

求函数 $f(x)$.

解: 取 $x = 0$ 得到 $f(0) = 1$. 两边求导得到

$$f'(x) + 2f(x) = 2(x+1), \quad f(0) = 1.$$

利用公式 (9.2.10) 得到

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-2x} + x + \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad \square$$

(3) 考虑初值问题

$$\epsilon y' = -y + 1 + x, \quad y(0) = 0,$$

其中 $\epsilon > 0$ 为常数, 的解 $y = y_\epsilon(x)$, 并研究极限 $\lim_{\epsilon\to 0+} y(x)$.

解: 对给定的 $\epsilon > 0$ 得到

$$y_\epsilon(x) = (\epsilon - 1)e^{-x/\epsilon} + x + (1 - \epsilon).$$

当 $\epsilon \to 0+$ 时,

$$y_*(x) := \lim_{\epsilon\to 0+} y_\epsilon(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1 + x, & x > 0, \end{cases}$$

是不连续的函数. 我们把解 $\overline{y}(x) := 1 + x$ 称为初值问题的外部解. 注意到

$$\overline{y}(x) - y_\epsilon(x) = \epsilon - \frac{\epsilon - 1}{e^{x/\epsilon}} \sim \epsilon$$

当 $\epsilon \to 0+$, 对每个固定的 x. $\square$

9.2.2 标准形式的一阶非线性常微分方程

本小节我们考虑几类简单易求解的一阶非线性常微分方程. Newton使用级数来求解常微分方程, 而变量分离法流传于Bernoulli 家族、L' Hospital、Leibniz以及Huygens等人之间. Jacob Bernoulli 在正式出版的论文中使用了这一技巧, 并称之为"**变量分离法 (separation of variables)**".

Leibniz早已用变量替换来求解齐次常微分方程. 在 1691 年和Huygens通信中, Leibniz解决了微分方程

$$y\frac{dx}{dy} = f(x)g(y),$$

只要把它写成

$$\frac{dx}{f(x)} = \frac{g(y)dy}{y},$$

然后两边再积分, 但是却没有给出一般方法. 同年, Leibniz 把一阶齐次常微分方程 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ 化成积分. Johann Bernoulli 在 1694 年的《Acta Eruditorum》中对变量分离法和齐次微分方程的求解, 做了更加完善的阐述.

A. 变量分离方程. 如下一阶常微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y), \tag{9.2.13}$$

称为**变量分离方程 (equation with separated variables)**, 其中 $f \in C((a,b))$ 和 $g \in C((c,d))$.

- 如果 $g \in C^1((c,d))$, 我们之后将会证明对任意 $(x_0, y_0) \in (a,b) \times (c,d)$, 上述常微分方程 (9.2.11) 有且仅有一个以它为初值的解.
- 如果 $g(x) = 1$, 这就是微积分基本定理; 当 $g(y) = y$, 这就是前面的一阶线性齐次常微分方程.

如果 $g(y_0) \neq 0$, 且 $y = y(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$, 是 (9.2.13) 满足初值 $y(x_0) = y_0$ 的解, 我们将会证明在区间 (α, β) 中 $g(y(x))$ 恒不为零. 这样得到

$$\frac{dy(x)}{g(y(x))} = f(x)\,dx.$$

两边从 x_0 到 x 积分得到

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \frac{dy(x)}{g(y(x))} = \int_{y_0}^{y} \frac{d\xi}{g(\xi)} =: G(y, y_0). \tag{9.2.14}$$

由于 $G(\cdot, y_0)$ 是可逆的, 故 (9.2.13) 的解为

$$y = G^{-1}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt, y_0\right). \tag{9.2.15}$$

若存在 y_0 使得 $g(y_0) = 0$, 则 (9.2.13) 的唯一解为 $y = y_0$. 这样的点 y_0 称为**平衡点**或**奇点**.

例 9.3. (解的一些特殊现象)

(1) 求解下列初值问题并指出解的存在区间:

(a) $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$, $y(0) = 0$.

(b) $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$, $y(0) = 1$.

(c) $y\frac{dy}{dx} + (1 + y^2)\sin x = 0$, $y(0) = 1$.

解: (a) 方程等价于

$$\frac{dy}{1 + y^2} = dx$$

从而从 0 到 x 积分得到

$$\tan y - 0 = x, \quad \text{或} \quad y = \tan x.$$

这样就得到解的存在区间 $(-\pi/2, \pi/2)$.

这个解 $y = \tan x$ 当 $x \to \pm\pi/2$ 时趋于无穷, 而在方程系数或定解条件中没有迹象显示出这一现象. 这就说明, 尽管方程在平面 $\mathbb{R}^2$ 内都有定义, 但非线性常微分方程的解可能只是在有限开区间内有意义, 而不一定对一切 $x \in \mathbb{R}$ 都存在.

(b) 类似可得到解

$$u=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right),\quad x\in\left(-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right).$$

从 (a) 到 (b) 可知, 同一个常微分方程在不同定解条件下解的存在区间和其它性质都可能是不同的.

(c) 方程等价于

$$\frac{y}{1+y^2}dy=-\sin x\,dx$$

从而积分得到通解

$$y=\pm\left(Ce^{-4\sin^2\frac{x}{2}}-1\right)^{1/2},\quad C>0.$$

从初值条件 $y(0)=1$ 得到初值问题的解

$$y=\left(2e^{-4\sin^2\frac{x}{2}}-1\right)^{1/2},$$

且解的存在区间为 $(-a,a)$, 这里 $a=2\sin^{-1}(\sqrt{\ln 2}/2)$.

当 $x\to\pm a$ 时, $y\to 0$ 但 $\frac{dy}{dx}\to\infty$. 这个现象说明, 当 x 趋于最大存在区间的两个端点时, 方程解的函数值可以有限而其一阶导数可能趋于无穷. □

(2) 求解常微分方程

$$y'=\frac{3}{2}y^{1/3}.$$

解: 当 $y\neq 0$ 时, 得到

$$\frac{dy}{y^{1/3}}=\frac{3}{2}dx,$$

即通解为

$$y^2=(x+C)^3,\quad x\geq -C,$$

这里 C 是任意常数. 显然 $y=0$ 也是方程的一个特解. 因此原方程的通解为

$$y=0\quad 和\quad y^2=(x+C)^3\ (x\geq -C),$$

其中 C 是任意一个常数. 当 (x_0,y_0) 不在直线 $y=0$ 上时, 初值问题

$$y'=\frac{3}{2}y^{1/3},\quad y(x_0)=y_0$$

的解存在且唯一. 但当 (x_0,y_0) 在直线 $y=0$ 上时, 初值问题的通解为

$$y(x)=\begin{cases}\pm\sqrt{(x+C)^3}, & x\geq -C,\\ 0, & x<-C,\end{cases}$$

其中 C 是满足 $C<-x_0$ 的任意常数. 这样就得到无穷多条积分曲线通过该点, 从而反映了非线性常微分方程初值问题的解的不唯一性. □

(3) 求解微分方程

$$y'=e^y\sin x.$$

解: 利用变量分离得到通解

$$y=-\ln(\cos x+C),$$

其中 $C+\cos x>0$, C 是任意常数. 如果 $C>1$, 方程的解对所有 $x\in\mathbb{R}$ 都存在且解是有界的. 当 $-1<C\leq 1$ 时, 解的存在区间有限且解在该区间内是无界的. 满足定解条件 $y(0)=\eta$ 的解为

$$y=-\ln\left(\cos x+e^{-\eta}-1\right).$$

取 $\eta=-\ln 2$ 得到

$$y=-\ln(1+\cos x).$$

这个解的存在区间为 $(-\pi,\pi)$, 且当 $x\to\pm\pi$ 时, 解趋于 $+\infty$. 如果初值 $\eta<-\ln 2$, 则解的存在区间为 $(-\cos^{-1}(1-e^{-\eta}),\cos^{-1}(1-e^{-\eta}))$, 且当 $\eta\to+\infty$ 时, 区间长度趋于 0.

这个例子表明, 同一个方程的不同解可能显示出完全不同的性态. □

(4) 求解微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(1-y^2).$$

解: 显然 $y=\pm1$ 是方程的特解. 当 $y\neq1$ 时, 两边积分得到

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|=\frac{1}{2}x+C_1$$

从而得到通解为

$$y=\frac{Ce^x-1}{Ce^x+1},$$

这里 $C=\pm e^{2C_1}$. 如果取 $C=0$ 就得到一个特解 $y=-1$, 因此原方程的解为

$$y=1,\quad 和\quad y=\frac{Ce^x-1}{Ce^x+1}$$

其中 C 为任意常数.

当 $C>0$ 时, 解曲线位于区域 $-1<y<1$ 内, 单调递增, 且分别以 $y=\pm1$ 为渐近线. 当 $C<0$ 时, 解曲线被 $x=\ln(-1/c)$ 所分开: 在区间 $(\ln(-1/C),+\infty)$ 中解曲线位于区域 $y>1$ 内, 且随 x 的增加而下降, 并分别以 $x=\ln(-1/C)$ 和 $y=1$ 为渐近线; 在区间 $(-\infty,\ln(-1/C))$ 中解曲线位于区域 $y<-1$ 内, 且随 x 的增加而下降, 并分别以 $x=\ln(-1/C)$ 和 $y=-1$ 为渐近线. □

B. 齐次方程. 如果函数 $f(x,y)$ 是关于变量 x,y 的零次齐次函数, 即对任意 $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 满足 $f(tx,ty)=f(x,y)$, 则我我们称一阶常微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

为**齐次方程 (homogeneous equation)**. 当 $x\neq0$ 时, 对零次齐次函数有

$$f(x,y)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)=:g\left(\frac{y}{x}\right),$$

因此得到

$$\frac{dy}{dx}=g\left(\frac{y}{x}\right). \tag{9.2.16}$$

引入 $u := y/x$ 得到

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{dy}{dx}=g(u). \tag{9.2.17}$$

该变量分离方程可以用积分法求解, 因此齐次方程可以求解.

例 9.4

(1) 求解齐次方程 $x^2\frac{dy}{dx}=x^2+xy+y^2$.

解: 令 $u=y/x$ 我们得到

$$x\frac{du}{dx}=1+u^2,$$

从而得到 $u=\tan(\ln|x|+C)$, 或 $y=x\tan(\ln(k|x|))$, 这里 $k:=e^C$. □

(2) 求解齐次方程

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by}{cx+dy}\right).$$

解: 令 $u=y/x$ 得到

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a+bu}{c+du}\right).$$

该变量分离方程可以用积分法求解, 因此原方程可以求解. □

(3) 求解齐次方程

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c_1}{cx+dy+c_2}\right).$$

解: 如果直线 $ax+by+c_1=0$ 和 $cx+dy+c_2=0$ 平行或重合, 则 $cx+dy=\lambda(ax+by)$.

引入 $u:=ax+by$ 得到

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{u+c_1}{\lambda u+c_2}\right).$$

这个变量分离方程可求解.

如果上述两条直线相交于 (x_1,y_1), 则令

$$\xi:=x-x_1,\quad \eta:=y-y_1.$$

这样就得到

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{dy}{x}=f\left(\frac{a\xi+b\eta}{c\xi+d\eta}\right),$$

即转化为 (2). □

(4) 求解齐次方程

$$x^2\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}.$$

解: 根据 (2) 得到

$$\frac{1-u}{1+u^2}du=\frac{dx}{x},u=\frac{y}{x}.$$

则得到 $\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\tan^{-1}(y/x)}$. □

(5) 求解齐次方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+1}{x-y+2}.$$

解: 根据 (3) 求得交点为 $(x_1, y_1) = (-3/2, 1/2)$. 令 $\eta = x + 3/2$ 和 $y = y - 1/2$ 得到

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi + \eta}{\xi - \eta}.$$

利用 (4) 得到

$$\ln\left[\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2\right]^{1/2} = C + \tan^{-1}\left(\frac{y - \frac{1}{2}}{x + \frac{3}{2}}\right). \quad \Box$$

上述例子表明, 一阶非线性常微分方程的解有时候不是显示的.

C. 恰当方程. 考虑由隐函数方程

$$F(x, y) = C,$$

其中 C 为常数, 所确立的函数族. 两边求微分 (如果微分存在的话) 得到

$$F_x(x, y)\,dx + F_y(x, y)\,dy = 0,$$

或考虑更一般的方程

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0, \tag{9.2.18}$$

其中 $M(x, y)$ 和 $N(x, y)$ 是两个连续的二元函数. 反之, 对微分方程 (9.2.18), 若可以找到一个具有一阶连续偏导数的二元函数 $F(x, y)$ 使得

$$dF(x, y) = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy, \tag{9.2.19}$$

则由 $F(x, y) = C$ 所确立的隐函数 $y = y(x, C)$ 就是方程 (9.2.18) 的通解.

定义 9.3. (恰当方程)

假设 G 是 $\mathbb{R}^2$ 中的区域. 如果 G 内存在一个具有一阶连续偏导数的二元函数 $F(x, y)$ 使得 (9.2.19) 成立, 则称一阶微分方程 (9.2.18) 为 G 内的**恰当方程 (exact differential equation)** 或**全微分方程 (total differential equation)**.

假设存在具有一阶连续偏导数的二元函数 $F(x, y)$ 使得 $dF(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$, 则得到

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N.$$

如果进一步假设 M, N 具有一阶连续偏导数, 则 F 具有二阶连续偏导数从而得到

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \text{在 } G \text{ 内}.$$

反之, 假设 M, N 在 G 内都具有一阶连续偏导数且满足

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \text{在 } G \text{ 内}.$$

为证明 (9.2.18) 是恰当方程, 我们需要找到具有一阶连续偏导数的二元函数 $F(x, y)$ 满足

$$dF(xy) = M(x, y)\,dx = N(x, y)\,dy,$$

即去求解方程

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N.$$

首先我们假设 G 为矩形区域, 此时对 G 中任意两点 (x,y) 和 (x_0,y_0) 有

$$\begin{aligned} F(x,ty)-F(x_0,y_0) &= F(x,y)-F(x_0,y)+F(x_0,y)-F(x_0,y_0)\\ =\int_{x_0}^{x}\frac{\partial F}{\partial x}(s,y)\,ds+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,t)\,dt &= \int_{x_0}^{x}M(s,y)\,ds+\int_{y_0}^{y}N(x_0,t)\,dt. \end{aligned}$$

同样可得到

$$\begin{aligned} F(x,y)-F(x_0,y_0) &= F(x,y)-F(x,y_0)+F(x,y_0)-F(x_0,y_0)\\ =\int_{y_0}^{y}\frac{\partial F}{\partial y}(x,t)\,dt+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial F}{\partial x}(s,y_0)\,ds &= \int_{y_0}^{y}N(x,t)\,dt+\int_{x_0}^{x}M(s,y_0)\,ds. \end{aligned}$$

这样我们可以取

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(s,y)\,ds+\int_{y_0}^{y}N(x_0,t)\,dt, \tag{9.2.20}$$

由此得到 $\partial F/\partial x=M$. 上述 F 同样也满足

$$F(x,y)=\int_{y_0}^{y}N(x,t)\,dt+\int_{x_0}^{x}M(s,y_0)\,ds \tag{9.2.21}$$

且 $\partial F/\partial y=N$.

对一般的单连通区域, $F(x,y)$ 可由与路径无关的曲线积分

$$F(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy \tag{9.2.22}$$

来求得. 实际上

$$\begin{aligned} & F(x,y)-\int_{y_0}^{y}N(x,t)\,dt-\int_{x_0}^{x}M(s,y_0)\,ds\\ &= \int_{x_0}^{x}[M(s,y)-M(s,y_0)]ds-\int_{y_0}^{y}[N(x,t)-N(x_0,t)]dt\\ &= \int_{x_0}^{x}\left(\int_{y_0}^{y}\frac{\partial M}{\partial y}(s,t)\,dt\right)ds-\int_{y_0}^{y}\left(\int_{x_0}^{x}\frac{\partial N}{\partial x}(s,t)\,ds\right)dt\\ &= \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\left[\frac{\partial M}{\partial y}(s,t)-\frac{\partial N}{\partial x}(s,t)\right]dsdt \;=\; 0. \end{aligned}$$

定理 9.1. (Clairaut-Euler)

如果二元函数 $M(x,y)$ 和 $N(x,y)$ 在单连通区域 $G\subset\mathbb{R}^2$ 上连续且有连续的一阶偏导数 $\partial M/\partial y$ 和 $\partial N/\partial x$, 则微分方程

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$$

是恰当方程的充要条件是

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x},\quad (x,y)\in G.$$

此时恰当方程在 G 上的通解为

$$\int_{x_0}^{x}M(x,y)\,dx+\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)\,dy=C \tag{9.2.23}$$

或

$$\int_{x_0}^{x}M(x,y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y}N(x,y)\,dy=C, \tag{9.2.24}$$

其中 (x_0, y_0) 是 G 中的任意固定点.

上述定理中的充要条件是Clairaut 在 1739 年和 1740 年得到的, 而Euler 则在 1734-1735 年独立得到的[14].

在实际求解微分方程 $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, 我们是寻找函数 $F(x,y)$ 满足

$$dF(x,y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy.$$

从而得到微分方程组

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N.$$

我们考虑如下三种方法来求解微分方程组:

- 由微分方恒 $\partial F/\partial x = M(x,y)$ 得到
$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(s,y)\,ds + \psi(y),$$
其中 $\psi(y)$ 仅和 y 有关的函数. 再由 $\partial F/\partial y = N(x,y)$ 得到
$$\psi'(y) = N(x,y) - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}(s,y)\,ds.$$
有这个关系我们可以求得 $\psi(y)$.
- 由微分方恒 $\partial F/\partial y = N(x,y)$ 得到
$$F(x,y) = \int_{y_0}^{y} N(x,t)\,dt + \phi(x),$$
其中 $\phi(x)$ 仅和 x 有关的函数. 再由 $\partial F/\partial x = M(x,y)$ 得到
$$\phi'(x) = M(x,y) - \int_{y_0}^{y} \frac{\partial N}{\partial x}(x,t)\,dt.$$
有这个关系我们可以求得 $\phi(x)$.
- 分别求
$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$$
得到
$$\int_{x_0}^{x} M(s,y)\,ds + \psi(y) = F(x,y) = \int_{y_0}^{y} N(x,t)\,dt + \phi(x).$$
由此确定函数 $\psi(y)$ 和 $\phi(x)$.

例 9.5

(1) 假设 $\varphi \in C^1((0,+\infty))$, $\varphi(1) = 0$, 且满足微分方程

$$\left(\frac{2\varphi(x) + 2x^2}{x^4}\right) y\,dx + \left(\frac{\varphi(x)}{x^2} + \sin y\right) dy = 0$$

为恰当方程, 求函数 $\varphi(x)$.

解: 令

$$M = \left(\frac{2\varphi(x) + 2x^2}{x^4}\right) y, \quad N = \frac{\varphi(x)}{x^2} + \sin y.$$

[14] Euler, L. *De infinitis curvis eiusdem generis seu methodus inveniendi aequationes pro infinitis curvis eiusdem generis* (Written in 1734), Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, **7**(1740), 174 - 189, 180 - 183.

根据 $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ 得到

$$\frac{2\varphi(x)+2x^2}{x^4} = \frac{x^2\varphi'(x)-2x\varphi(x)}{x^4}$$

或

$$\varphi'(x) = 2 + \frac{2+2x}{x^2}\varphi(x).$$

对应的齐次方程 $\varphi'(x) = \frac{2+2x}{x^2}\varphi(x)$ 的解为 $\varphi(x) = Cx^2e^{-2/x}$. 利用常数变易法我们可假设原来微分方程的解为

$$\varphi(x) = C(x)x^2e^{-2/x}.$$

代入原方程得到 $C'(x)x^2e^{-2/x} = 0$, 即 $C(x) = C - e^{2/x}$. 因此

$$\varphi(x) = -x^2 + Cx^2e^{-2/x}.$$

由 $\varphi(1) = 0$ 得到 $C = e^2$ 和 $\varphi(x) = -x^2 + e^2x^2e^{-2/x}$. □

(2) 求解初值问题

$$(3x^2y + 8xy^2)dx + (x^3 + 8x^2y + 12y^2)dy = 0, \quad y(2) = 1.$$

解: 令

$$M(x,y) := 3x62y + 8xy^2, \quad N(x,y) := x^3 + 8x^2y + 12y^2.$$

因为 $\partial M/\partial y = 3x + 16xy = \partial N/\partial x$, 所以这是一个恰当方程. 由方程 $\partial F/\partial x = M = 3x^2y + 8xy^2$ 得到 $F(x,y) = x^3y + 4x^2y^2 + \psi(y)$. 对 y 求导得到

$$x^3 + 8x^2y + \psi'(y) = \frac{\partial F}{\partial y} = N = x^3 + 8x^2y + 12y^2.$$

所以得到 $\psi'(y) = 12y^2$ 和通解为

$$x^3y + 4x^2y^2 + 4y^3 = C.$$

由于 $y(2) = 1$, 得到 $C = 28$. 因此初值问题的解为 $x^3y + 4x^2y^2 + 4y^3 = 28$. □ ♠

D. 积分因子法. 显然并不是每个微分方程都是恰当方程, 比如一阶线性齐次常微分方程 $y'(x) = p(x)y$ 不是恰当的. 我们来引入所谓的**积分因子法 (integrating factor method)** 来处理非恰当方程.

积分因子在一阶常微分方程的一些特殊问题中早已被采用, 但是Euler 在 1734 年的论文[15]中认识到这个概念提供了一种方法来求解一阶常微分方程. Clairaut 在 1739 年的论文中首次独立引入了积分因子的概念, 并在 1740 年的论文中给出了相应的理论. 1755 年, Euler在论文[16]中第一次系统研究了积分因子.

根据Leanhartdt 和Parker 的文章[17]描述, 1738 年, Alexis Fontaine 提交了一篇他自

[15]Euler, L. *De infinitis curvis eiusdem generis seu methodus inveniendi aequationes pro infinitis curvis eiusdem generis* (Written in 1734), Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, **7**(1740), 174 - 189, 180 - 183.

[16]Euler, L. *De integratione aequationum differentialium* (written in 1755), Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, **8**(1763), 3 - 63.

[17]Leanhardt, A. E.; Parker, A. E. *Fontaine's forgotten method for inexact differential equations*, Mat. Mag., **90**(2017),

己求解非恰当方程的方法的论文. 这篇论文的审稿人是Clairaut, 他马上注意到可以改进Fontaine方法的想法并在 1739 年把这个结果发表出来了.

定义 9.4. (积分因子)

如果存在非零因子 $\mu(x,y)$ 使得微分方程

$$\mu(x,y)M(x,y)\,dx+\mu(x,y)N(x,y)\,dy=0$$

成为一个恰当方程, 则称 $\mu(x,y)$ 为微分方程

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$$

的一个**积分因子 (integrating factor)** 或 **Euler 乘子 (Euler multiplier)**. ♣

首先注意到积分因子若存在必不是唯一的, 因为积分因子的任意倍数也是积分因子.

(1) 一阶常微分方程是否存在积分因子的问题, 是和一阶偏微分方程的可解性有关. 假设函数 $f=f(x,y)$ 存在且具有一阶连续偏导数, 使得 $f(x,y)=C$ 为方程 (9.2.18) 的解, 求全微分得到

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0.$$

把它和 (9.2.18) 做比较得到

$$\frac{\partial f/\partial x}{M}=\frac{\partial f/\partial y}{N}=:\mu.$$

由此得到 $df=\mu M\,dx+\mu N\,dy=0$ 是一个恰当方程, 从而得到 $\mu(x,y)$ 是 (9.2.18) 的一个积分因子.

(2) 假设 $\mu(x,y)$ 是 (9.2.18) 的一个积分因子, 而 $f(x,y)=C$ 是 (9.2.18) 的解. 对任何具有连续导数的一元函数 $F(\xi)$, $\mu F(f)$ 也是 (9.2.18) 的一个积分因子. 这样我们就得到了无穷多个非倍数关系的积分因子.

(3) 假设微分方程

$$M_1dx+N_1dy=0,\quad M_2dx+N_2dy=0$$

分别有积分因子 μ_1 和 μ_2, 则 $\mu:=\mu_1+\mu_2$ 一般来说不是微分方程

$$M\,dx+N\,dy=0,\quad M:=M_1+M_2,\ N:=N_1+N_2,$$

的一个积分因子. 比如 $\mu_1=x$ 和 $\mu_2=y$ 分别是微分方程

$$\frac{y}{x}dx+dy=0,\quad 3x^2dx+\frac{x^3}{y}dy=0$$

的积分因子, 但是 $\mu=x+y$ 不是微分方程

$$\left(\frac{y}{x}dx+dy\right)+\left(3x^2dx+\frac{x^3}{y}dy\right)=0$$

的积分因子 (利用如下 (9.2.25)).

那如何从 μ_1 和 μ_2 来构造微分方程 $Mdx+Ndy=0$ 的一个积分因子呢? 我们分别取 $\mu_1M_1dx+\mu_1N_1dy=0$ 和 $\mu_2M_2dx+\mu_2N_2dy=0$ 的通解

$$\Phi_1(x,y)=C_1,\quad \Phi_2(x,y)=C_2.$$

no. 3, 208 - 219.

如果存在可微函数 $g_1(\xi)$ 和 $g_2(\xi)$ 满足

$$\mu_1 g_1(\Phi_1) = \mu_2 g_2(\Phi_2) =: \mu,$$

则 μ 是 $M_1dx + N_1dy = 0$, $M_2dx + N_2dy = 0$, 和 $M_1dx + N_1dy + M_2dx + N_2dy = 0$ 的公共积分因子. 事实上

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\mu M_1)}{\partial y} - \frac{\partial(\mu N_1)}{\partial x} &= \frac{\partial(\mu_1 g_1(\Phi_1)M_1)}{\partial y} - \frac{\partial(\mu_1 g_1(\Phi_1)N_1)}{\partial x} \\
&= g_1(\Phi_1)\left[\frac{\partial(\mu_1 M_1)}{\partial y} - \frac{\partial(\mu_1 N_1)}{\partial x}\right] + g_1'(\Phi_1)\left(\mu_1 M_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} - \mu_1 N_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\right) \\
&= 0 + g_1'(\Phi_1)(\mu_1 M_1 \cdot \mu_1 N_1 - \mu_1 N_1 \cdot \mu_1 M_1) = 0.
\end{aligned}$$

在上述推导中, 把 $\mu_1 g_1(\Phi_1)$ 替换成 $\mu_2 g_2(\Phi_2)$ 可证明 μ 也是 $M_2dx + N_2dy = 0$ 的一个积分因子. 这样就最后得出 μ 是 $Mdx + Ndy = 0$ 的一个积分因子.

定理 9.2

假设 $M(x,y)$ 和 $N(x,y)$ 在区域 G 中连续且有连续的一阶偏导数, 则 $\mu(x,y)$ 是

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

的一个积分因子的充要条件是: $\mu = \mu(x,y)$ 满足一阶偏微分方程

$$\frac{1}{\mu}\left(N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{9.2.25}$$

♡

证: (9.2.25) 等价于 $\partial(\mu M)/\partial y = \partial(\mu N)/\partial x$. □

求解 (9.2.25) 一般来说是比较复杂的, 所以我们可以退而求其次.

- **积分因子 $\mu = \mu(x)$ 仅和 x 有关.** 此时 (9.2.25) 转化为
$$\frac{1}{\mu}\mu' = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right).$$
因为上述左边只含有 x, 所以可定义
$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) =: g(x).$$
从而得到 $\mu'(x) = g(x)\mu(x)$.
- **积分因子 $\mu = \mu(y)$ 仅和 y 有关.** 此时 (9.2.25) 转化为
$$\frac{1}{\mu}\mu' = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$
因为上述左边只含有 y, 所以可定义
$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) =: h(y).$$
从而得到 $\mu'(y) = h(y)\mu(y)$.
- **积分因子 $\mu = \mu(x+y)$ 仅和 $x+y$ 有关.** 此时 (9.2.25) 转化为
$$\frac{1}{\mu}\mu' = \frac{1}{N-M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right).$$
因为上述左边只含有 $x+y$, 所以可定义
$$\frac{1}{N-M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) =: p(x+y).$$

从而得到 $\mu' = p\mu$.

推论 9.1

(1) $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ 存在仅含 x 的积分因子 $\mu(x)$ 的充要条件为
$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) =: g(x)$$
是一个仅与 x 有关的函数. 此时积分因子可取为
$$\mu(x) = e^{\int_{x_0}^{x} g(t)dt}.$$
(2) $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ 存在仅含 y 的积分因子 $\mu(y)$ 的充要条件为
$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) =: h(y)$$
是一个仅与 y 有关的函数. 此时积分因子可取为
$$\mu(y) = e^{\int_{y_0}^{y} h(s)ds}.$$
♡

例 9.6

(1) 求微分方程 $(3x^3 + y)dx + (2x^2y - x)dy = 0$ 的通解.

解: 令 $M = 3x^3 + y$ 和 $N = 2x^2y - x$. 因为
$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1-(4xy-1)}{2x^2y - x} = \frac{2-4xy}{x(2xy-1)} = -\frac{2}{x},$$
所以一个积分因子可取为
$$\mu(x) = e^{\int_{x_0}^{x}(-2/t)dt} = \frac{C}{x^2}, \quad C := x_0^2.$$
这样就得到微分方程
$$\frac{1}{x^2}(3x^3 + y)dx + \frac{1}{x^2}(2x^2y - x)dy = 0,$$
即
$$3x\,dx + 2y\,dy + \frac{ydx - xdy}{x^2} = 0 \quad 或 \quad d\left(\frac{3}{2}x^2 + y^2 - \frac{y}{x}\right) = 0.$$
因此通解为 $\frac{3}{2}x^2 + y^2 - \frac{y}{x} = C$. □

(2) **(旋转抛物面)** 求曲面镜的形状, 使得它能把从光源发出的光线反射称平行于对称轴的光线.

解: 把直角坐标系的原点放在光源处使得对称轴为 x 轴且开口朝着 x 轴正方向, 并假设曲面镜是由 $y = y(x)$ 绕 x 轴旋转一周而得到的. 在曲线上任取一点 $P = (x,y)$, 过 P 做曲线的切线 l 和法线 n. 如果假设切线和 x 轴正方向的夹角为 α, 则得到
$$2\alpha = \theta,$$
这里 θ 是 OP 与 x 轴正方向的夹角. 因此
$$\frac{y}{x} = \tan\theta = \tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2y'(x)}{1-(y'(x))^2}.$$
求解得到
$$x\,dx + y\,dy = \pm\sqrt{x^2+y^2}dx \quad 或 \quad \pm\frac{d(x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}} = dx.$$

上面微分方程的通解为

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=x+C \quad \text{或} \quad y^2=2Cx+c^2,$$

这里 C 是任意常数. □

如下全微分形式在实际求解中是有用的:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{y}{x}\right) &= \frac{xdy-ydx}{x^2}, & d\left(\frac{x}{y}\right) &= \frac{ydx-xdy}{y^2}, \\ d(xy) &= xdy+ydx, & d(x^2+y^2) &= 2(xdx+ydy), \\ d\left(\tan^{-1}\frac{x}{y}\right) &= \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}, & d\left(\ln\frac{x}{y}\right) &= \frac{ydx-xdy}{xy}. \end{aligned}$$

E. Bernoulli 方程和 Riccati 方程. 首先 **Bernoulli 方程**是指

$$\frac{dy}{dx}+g(x)y+h(x)y^\alpha=0, \quad \alpha\neq 0,1, \tag{9.2.26}$$

其中 g 和 h 是定义在区间 I 上的连续函数. 这里我们假设 $\alpha\neq 0,1$, 是因为当 $\alpha=0$ 或 1 时 (9.2.26) 变成了一阶线性常微分方程.

显然 $y=0$ 是一个解. 下面假设 $y\neq 0$. 此时令 $z:=y^{1-\alpha}$ 就得到一阶线性常微分方程

$$\frac{dz}{dx}+(1-\alpha)g(x)z+(1-\alpha)h(x)=0. \tag{9.2.27}$$

求解得到通解

$$z(x)e^{(1-\alpha)\int_{x_0}^x g(t)dt}=z(x_0)-\int_{x_0}^x(1-\alpha)h(t)e^{(1-\alpha)\int_{x_0}^t g(s)ds}. \tag{9.2.28}$$

下面我们来详细了解下 Bernoulli 方程的历史[18]. Bernoulli 方程可追溯到法国法学家和数学家, 也是Descartes 的早期追随者Florimond de Beaune (佛罗里蒙 · 代 · 博内) 在 1638 年所研究的 **de Beaune 方程**

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\alpha}{y-x}. \tag{9.2.29}$$

1639 年 3 月 5 日, de Beanue写信给Mersenne, 其中提到他对 (9.2.29) 感兴趣只有一个真正的目的是 "证明弦振动和摆振动的等时性与振幅无关". 对 (9.2.29) 引入 $z:=y-x$ 得到

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\alpha}{z}-1 \tag{9.2.30}$$

这就是变量分离方程 (9.2.13). 和 (9.2.30) 近似的常微分方程

$$\frac{dy}{dx}=ax^my+bx^vy^r \tag{9.2.31}$$

的研究[19], 早已记录在Jacob Bernoulli的笔记《Meditationes CCXXXII》和《Varia Posthuma XII》中.

[18]主要参考了论文 Parker, Adam. *Who solved the Bernoullie differential equation and how did they do it?*, College Math. J., **44**(2013), no. 2, 89-97.

[19]Bernoulli, Jacob. *Æquationem $dy=ayx^m dx+by^u x^v dx$ construere, saltem per quadraturas; noc est, separare in illa litteras indeterminatas cum suis differentialibus a se invicem*, in Basiliensis Ommnia II, G. Cramer, ed., Geneva, 1744, 1049- 1057.

求解 Bernoulli 方程 (9.2.26) 问题, 是Jacob Bernoulli在 1695 年 12 月的论文[20]末尾提出的.

- 三个月后, Leibniz在论文[21]中给出了解答. 他声称可引入新的变量把 Bernoulli 方程转化为一阶线性常微分方程, 但是却没有给出细节. Leibniz同时也没有给出相应的一阶线性常微分方程的解; 他省略这些细节, 原因是 "求解一般一阶线性常微分方程的方法早已和我朋友交换了". Leibniz所说的 "和朋友交换方法", 是指他在 1694 年 11 月 27 日和L'Hospital的通信.
- Jacob Bernoulli在 1696 年 7 月的论文[22]中, 利用变量分离法给出了第二个证明. 同时他写道, Leibniz解决了他提出来的挑战.
- 1697 年 3 月, Johann Bernoulli发表了论文[23], 其中给出了两种求解方法. 他的第一种方法和Leibniz的变量替换法是差不多的, 只不过给出了显示的替换 $y = v^{1/(1-n)}$. 他的第二种方法采用常数变易法.

例 9.7

(1) 求解一阶常微分方程

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{1}{y}.$$

解: 令 $u := y^2$ 得到

$$\frac{du}{dx} + \frac{2}{x}u = 2.$$

直接求得

$$y^2 = u = \frac{2}{3}x + \frac{C}{x^2}. \quad \square$$

(2) 求解初值问题

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = \frac{x}{y}, \quad y(0) = 1.$$

解: 令 $u = y^2$ 得到

$$\frac{du}{dx} + 4xu = 2x.$$

直接求得

$$u = Ce^{-2x^2} + \frac{1}{2}.$$

把初始条件 $y(0) = 1$ 代入得到 $C = \frac{1}{2}$, 从而

$$y^2 = u = \frac{1}{2}\left(e^{-2x^2} + 1\right). \quad \square$$

---

[20]Bernoulli, Jacob. *Explicationes, annotationes et additiones ad ea quæin actis superiorum annorum de curva elastica, isochrona paracentrica, & velaria, hinc inde memorata, & partim controversa leguntur; ubi de linea mediarum directionum, aliisque novis*, Acta Eruditorum, **Dec**(1695), 537 - 553.

[21]Leibniz, G. W. *Notatiuncla ad Acta Decemb. 1695, p.537 et seqq.*, Acta Eruditorum, **Mar**(1696), 145 - 147.

[22]Bernoulli, Jacob. *Problema beaunianum universalius conceptum, sive solutio æquationis nupero Decembri propositæ, $ady = ypdx + by^n qdx$; cum aliis quibusdam annotatis*, Acta Eruditorum, **Jul**(1696), 332.

[23]Bernoulli, Johann. *De conoidibus et spaeroidibus quaedam. Solutio analytica æquationis in Actis A. 1695, pag. 553 propositæ (A Fratre Jac. Bernoullio)*, Acta Eruditorum, **Mar**(1697), 113 - 118.

(3) 求解

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy + x^2y^3}.$$

解: 这个微分方程等价于

$$\frac{dx}{dy} = yx + y^3x^2.$$

令 $u = x^{1-2} = \frac{1}{x}$ 得到

$$\frac{du}{dy} + yu = -y^3.$$

直接求得

$$\frac{1}{x} = u = Ce^{-\frac{y^2}{2}} - y^2 + 2. \quad \square$$

(4) 求解一阶常微分方程

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = ay^2 \ln x, \quad x > 0.$$

解: 显然 $y = 0$ 是一个解. 当 $y \neq 0$ 时, 令 $u = y^{1-2} = \frac{1}{u}$ 得到

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x} - a \ln x.$$

直接求得

$$\frac{1}{y} = u = x\left(C - \frac{a}{2}\ln^2 x\right).$$

因此通解为

$$y = \frac{1}{x\left(C - \frac{a}{2}\ln^2 x\right)} \quad 或 \quad y = 0. \quad \square$$

Riccati 方程 是指

$$\frac{dy}{dx} + g(x)y + h(x)y^2 = k(x), \tag{9.2.32}$$

其中 $g, h, k \in C(I)$ 是定义在区间 I 上的连续函数. 当 $k(x) \equiv 0$ 时, (9.2.32) 就化为 (9.2.26), 这里 $\alpha = 2$, 因此 Riccati 方程可看成是 "非齐次的 Bernoulli 方程". 微分方程 (9.2.32) 是Jean-Baptiste le Rond d'Alembert在 1763 年所考虑并命名的, 它是原始 Riccati 方程的一般形式. 原始的 Riccati 方程是意大利数学家Jacopo Francesco Riccati(雅各布 · 弗朗西斯科 · 黎卡蒂) 在 1724 年的一篇论文[24]中引入的. 在论文中, 它考虑曲率半径只依赖于纵坐标的曲线从而得到微分方程

$$x^m \frac{d^2x}{dp^2} = \frac{d^2y}{dp^2} + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2,$$

这里 x 和 y 都依赖于 p. 如果令 $q := dx/dp$ 和 $u = dy/dp$ 就得到

$$x^m \frac{dq}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{u^2}{q}.$$

[24] Riccati, Jacopo. *Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus*, Actorum Eruditorum, quae Lipsiae publicantur, Supplementa, **8**(1724), 66 - 73.

Riccati假设 $q = x^n$, 就得到了原始的 Riccati 方程

$$\frac{du}{dx} + \frac{u^2}{x^n} = nx^{m+n-1}. \tag{9.2.33}$$

Riccati在微分方程的研究中, 利用降低方程的阶数和分离变量的方法考虑了许多 (包括 (9.2.32) 在内的) 一般类型的微分方程, 并找到了被广泛采用的求解方法. 尽管他可能在 1715 年就已经开始研究 (9.2.32), 但关于微分方程的第一个书面记录似乎是在他在 1720 年写给Giovanni Rizzetti的一封信中.

在 1722 年至 1723 年间, Riccati为他两位优秀的私人学生 (Giuseppe Suzzi和 Ludovico da Riva, 后来分别成为帕多瓦大学 (University of Padua) 的数学教授和天文学教授) 讲授数学而编写了长达 154 页的详细讲义, 这份讲义随后出版为《Delia separazione delle indeterminate nelle equazionidifferenziali di prima e di secondo grado, e della riduzione delle equazionidifferenziali del secondo grado e d'altri gradi ulteriori》(《关于一阶和二阶微分方程中变量的分离, 以及二阶和更高阶微分方程的约简》), 里面详细记载了Riccati对 (9.2.32) 的讨论.

Riccati的工作影响了当时一大批杰出的数学家. 比如, Daniel Bernoulli在他著作《Exercitationes quaedam mathematicae》(《数学练习》, 1724) 的第三部分, 详细研究了 (9.2.32). 1733 年至 1755 年间, Euler至少在三篇论文[25]中考虑了

$$\frac{dz}{dx} + z^2 = ax^n, \tag{9.2.34}$$

并证明了如果 v 是一个特解, 则通过变换 $z = v + 1/u$ 就可以把 (9.2.34) 转化为 u 的一阶线性常微分方程. 这个观察其实对一般的 Riccati 方程 (9.2.32) 也成立.

例 9.8

(1) 假设 $\phi(x)$ 是 (9.2.32) 的一个特解, 令

$$u(x) := y(x) - \phi(x).$$

则得到

$$\frac{du}{dx} + [g(x) + 2\phi(x)h(x)]u + h(x)u^2 = 0,$$

这是一个 Bernoulli 方程, 可利用 (9.2.28) 来求解.

(2) 假设 $\phi(x)$ 是 (9.2.32) 的一个特解, 令

$$y(x) := \phi(x) + \frac{1}{z(x)}, \quad z(x) = -\frac{1}{u(x)}.$$

则得到

$$\frac{dz}{dx} - [g(x) + 2\phi(x)h(x)]z = h(x).$$

这是一阶线性常微分方程.

(3) 假设 $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$ 是 (9.2.32) 的两个不同特解, 且它们共同的存在区间为 $J \subset I$,

[25] Euler,, L. *Constructio aequationis differentialis* $ax^n dx = dy + y^2 dx$ (written in 1733), Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, **6**(1738), 124 - 137; Euler, L. *De resolutione aequationis* $dy + ayydx = bx^m dx$ (written in 1742), Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, **9**(1764), 154 - 169; Euler, L. *De integratione aequationum differentialium* (written in 1755), Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, **8**(1763), 3 - 63.

则 (9.2.32) 的任意解 y 满足

$$\frac{y-\phi_1(x)}{y-\phi_2(x)} = Ce^{-\int_{x_0}^{x} h(s)[\phi_1(s)-\phi_2(s)]ds},$$

其中 C 为常数, $x, x_0 \in J$.

证: 令 $u_i(x) := y - \phi_1(x)$. 根据 (1) 得到

$$\frac{du_i}{dx} + [g(x) + 2\phi_i(x)h(x)]u_i + h(x)u_i^2 = 0, \quad i = 1, 2,$$

即得到

$$\frac{u_1'}{u_1} - \frac{u_2'}{u_2} + 2(\phi_1 - \phi_2)h + h(u_1 - u_2) = 0;$$

两式相减得到

$$\frac{u_1'}{u_1} - \frac{u_2'}{u_2} = -h(\phi_1 - \phi_2).$$

两边积分就得证. □

(4) 假设 $\phi_1(x), \phi_2(x)$ 和 $\phi_3(x)$ 是 (9.2.32) 的三个不同特解, 且它们共同的存在区间为 $J \subset I$, 则 (9.2.32) 的任意解 y 满足

$$\frac{y-\phi_1(x)}{y-\phi_2(x)} = C\frac{\phi_3(x)-\phi_1(x)}{\phi_3(x)-\phi_2(x)},$$

其中 C 为常数.

证: 根据 (3) 得到

$$\frac{y-\phi_1(x)}{y-\phi_2(x)} = C_1e^{-\int_{x_0}^{x} h(s)[\phi_1(s)-\phi_2(s)]ds}$$

和

$$\frac{\phi_3(x)--\phi_1(x)}{\phi_3(x)-\phi_2(x)} = C_2e^{-\int_{x_0}^{x} h(s)[\phi_1(s)-\phi_2(s)]ds}.$$

两式相除得证. □

(5) Daniel Bernoulli 在 1725 年考虑了如下的 Riccati 方程

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = bx^m, \tag{9.2.35}$$

其中 b, m 是常数. 假设 $x \neq 0$ 且 $y \neq 0$, 则当

$$m = 0, \ -2, \ \frac{-4k}{2k+1}, \ \frac{-4k}{2k-1} \ (k = 1, 2, \cdots) \tag{9.2.36}$$

时方程 (9.2.35) 可以通过适当的变化转化成变量分离方程.

Liouville 在 1841 年证明了 (9.2.36) 也是必要条件, 这就表明就算是简单的 Riccati 方程

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - y^2,$$

一般也不能用初等积分法来求解.

证: 当 $m = 0$ 时, (9.2.35) 变成

$$\frac{dy}{dx} = b - y^2,$$

这就是一个变量分离方程.

当 $m=-2$ 时, 如果令 $z:=xy$ 则 (9.2.35) 变成

$$\frac{dz}{dx}=y+x\frac{dy}{dx}=y+x\left(\frac{b}{x^2}-y^2\right)=\frac{b+z-z^2}{x},$$

这就是一个变量分离方程.

对其它的 m, 我们首先考虑变换

$$x=\xi^{\frac{1}{m+1}},\quad y=\frac{b}{m+1}\frac{1}{\eta},$$

得到

$$\frac{d\eta}{d\xi}+\eta^2=\frac{b}{(m+1)^2}\xi^n,\quad n:=-\frac{m}{m+1}.$$

再做变换

$$\xi=\frac{1}{t},\quad \eta=t-zt^2,$$

得到

$$\frac{dz}{dt}+z^2=\frac{b}{(m+1)^2}t^{\ell},\quad \ell:=-n-4.$$

如果 $m=-4k/(2k\pm 1)$, 我们得到

$$n=-\frac{m}{m+1}=\frac{-4k}{2k\mp 1},\quad \ell=-n-4=\frac{-4(k\mp 1)}{2(k\mp 1)\pm 1}.$$

因此, 对 $m=-4k/(2k+1)$, 通过 k 次正过程可把原方程 (9.2.35) 化为 $m=0$ 情形; 对 $m=-4k/(2k-1)$, 通过 k 次反过程可把原方程 (9.2.35) 化为 $m=0$ 情形. □

系数 (9.2.36) 的选取可通过Euler的论文[26]一窥究竟 (第 44 - 58 页). 他在 (9.2.35) 中设

$$b=c^2\neq 0,\quad m=-4n,\quad n\geq 0. \tag{9.2.37}$$

则得到

$$\frac{dy}{dx}+y^2=\frac{c^2}{x^{4n}}.$$

引入新的变量 z 满足

$$y=\frac{c}{x^{2n}}+\frac{1}{z}\frac{dz}{dx}.$$

直接计算得到 z 满足二阶常微分方程

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{2c}{x^{2n}}\frac{dz}{dx}-\frac{2ncz}{x^{2n+1}}=0. \tag{9.2.38}$$

假设 (9.2.38) 有级数解

$$z=\sum_{k\geq 0}a_kx^k,$$

我们得到

$$\begin{aligned}0 \;=\;& \sum_{1\leq k\leq 2n}\frac{2c(k-n)a_k}{x^{2n+1-k}}-\frac{2nca_0}{x^{2n+1}}\\ &+\sum_{k\geq 0}\left[(k+1)(k+2)a_{k+2}+2c(k+n+1)a_{k+2n+1}\right]x^k.\end{aligned}$$

[26]Euler, L. *De integratione aequationum differentialium* (written in 1755), Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, **8**(1763), 3 - 63.

因此仅当

$$k = n, 3n-1, 5n-2, 7n-3, \cdots, (2i+1)n - i\ (i = 0, 1, 2, \cdots)$$

时系数 a_k 可能不为零, 且 (若 $n \geq 1/2$)

$$a_{(2i+1)n-i} = -\frac{((2i-1)n-i)((2i-1)n-i+1)}{2c(2in-i)} a_{(2i-1)n-i+1}, \quad i = 1, 2, \cdots.$$

因此我们得到一些特殊的数

$$n = 0, \quad n = \frac{1}{2};$$

若 $n \neq 0, 1/2$ 且令 $a_{(2i+1)n-i} = 0$ 就有

$$n = 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \cdots,$$

即

$$n = \frac{i}{2i \pm 1}, \quad i = 1, 2, \cdots.$$

这就给出了系数 (9.2.36) 的一个解释. 进一步我们得到解

$$y(x) = \frac{c}{x^{2n}} + \frac{z'(x)}{z(x)} = \frac{c}{x^{2n}} + \frac{na_n x^{n-1} + (3n-1)a_{3n-1}x^{3n-2} + (5n-2)a_{5n-2}x^{5n-3} + \cdots}{a_n x^n + a_{3n-1}x^{3n-1} + a_{5n-2}x^{5n-2} + \cdots}.$$

假设 v 是 (9.2.35) 的一个特解, 则**例 9.8** (2) 告诉我们通解为

$$\frac{1}{y-v} e^{-2\int_{x_0}^x v(t)dt} - \int_{x_0}^x e^{-2\int_{x_0}^t v(s)ds} dt = C. \tag{9.2.39}$$

按照Euler 的记号, 令

$$V(x) := \int_{x_0}^x e^{-2\int_{x_0}^t v(s)ds} dt.$$

由于 $v(x)$ 是一个特解, 因此

$$\int_{x_0}^x v(t)dt = \int_{x_0}^x \left[\frac{c}{t^{2n}} + \frac{z'(t)}{z(t)}\right] dt = \frac{-c}{(2n-1)x^{2n-1}} + \ln z(x) + C_1$$

和

$$e^{-2\int_{x_0}^x v(t)dt} = C_2 e^{\frac{2c}{(2n-1)x^{2n-1}}} \cdot \frac{1}{z(x)^2}.$$

根据 (9.2.39) 我们来求解几个特例.

- $n = 0$. 此时 (9.2.35) 化为

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = c^2.$$

  一个特解可取为 $v = c$, 从而 (令 $x_0 = 0$)

$$e^{-2\int_{x_0}^x v(t)dt} = e^{-2cx}, \quad V(x) = \int_0^x e^{-2ct}dt = \frac{-1}{2c}e^{-2cx}.$$

  代入 (9.2.39) 得到

$$\frac{e^{-2cx}}{y-c} + \frac{1}{2c}e^{-2cx} = C,$$

  或

$$\frac{y+c}{y-c} = Ce^{2cx}.$$

- $n = 1$. 此时 (9.2.35) 化为

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{c^2}{x^4}.$$

一个特解可取为

$$v=\frac{c}{x^2}+\frac{a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots}{a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots}=\frac{c}{x^2}+\frac{1}{x},$$

从而

$$e^{-2\int_{x_0}^x v(t)dt}=C_1\frac{e^{2c/x}}{x^2},\quad V(x)=\int_0^x C_1\frac{e^{2c/t}}{t^2}dt=-\frac{C_1}{2c}\left(e^{2c/x}-e^{2c/x_0}\right).$$

代入 (9.2.39) 得到

$$\frac{1}{y-\frac{c}{x^2}-\frac{1}{x}}C_1\frac{e^{2c/x}}{x^2}+\frac{C_1}{2c}\left(e^{2c/x}-e^{2c/x_0}\right)=C_2,$$

或

$$e^{2c/x}\frac{x^2y-x+c}{x^2y-x-c}=C.$$

- $n=\frac{1}{3}$. 此时 (9.2.35) 化为

$$\frac{dy}{dx}+y^2=\frac{c^2}{x^{4/3}}.$$

一个特解可取为, 因为 $a_0=(-1/3c)a_{1/3}$,

$$\begin{aligned}
v &= \frac{c}{x^2}+\frac{\frac{1}{3}a_{1/3}x^{-2/3}-\frac{1}{3}a_{-1/3}x^{-4/3}+\cdots}{a_{1/3}x^{1/3}+a_0+a_{-1/3}x^{-1/3}+\cdots}\\
&= \frac{c}{x^{2/3}}+\frac{\frac{1}{3}a_{1/3}x^{-2/3}}{a_{1/3}x^{1/3}-\frac{1}{3c}a_{1/3}}\\
&= \frac{c}{x^{2/3}}+\frac{cx^{-2/3}}{3cx^{1/3}-1} = \frac{3c^2x^{-1/3}}{3cx^{1/3}-1}
\end{aligned}$$

从而

$$e^{-2\int_{x_0}^x v(t)dt}=C_1\frac{e^{-6cx^{1/3}}}{(x^{1/3}-\frac{1}{3c})^2}=C_2\frac{e^{-6cx^{1/3}}}{(3cx^{1/3}-1)^2}$$

和

$$V(x)=\int_{x_0}^x\frac{C_2e^{-6ct^{1/3}}}{(3ct^{1/3}-1)^2}dt=\frac{C_2e^{-2}}{9c^3}\int_{3cx_0^{1/3}-1}^{3cx^{1/3}-1}\left(1+\frac{2}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}\right)e^{-2\alpha}d\alpha.$$

若令

$$I_n:=\int\frac{1}{\alpha^n}e^{-2\alpha}d\alpha,\quad n\geq 1,$$

则得到

$$I_n=-\frac{e^{-2\alpha}}{2\alpha^n}-\frac{n}{2}I_{n+1},$$

特别地

$$2I_1+I_2=-\frac{e^{-2\alpha}}{\alpha}.$$

因此

$$\begin{aligned}
V(x) &= \frac{-C_2e^{-2}}{9c^3}e^{-2\alpha}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}\right)\Big|_{3cx_0^{1/3}-1}^{3cx^{1/3}-1}\\
\frac{-C_2e^{-2}}{9c^3}\left[e^{-6cx^{1/3}+2}\frac{3cx^{1/3}+1}{2(3cx^{1/3}-1)}+C_3\right] &= -C_2e^{-6cx^{1/3}}\frac{3cx^{1/3}+1}{18c^3(3cx^{1/3}-1)}+C_4.
\end{aligned}$$

代入 (9.2.39) 得到

$$\frac{C_2\frac{e^{-6cx^{1/3}}}{(3cx^{1/3}-1)^2}}{y-\frac{3c^2x^{-1/3}}{3cx^{1/3}-1}}+C_2e^{-6cx^{1/3}}\frac{3cx^{1/3}+1}{18c^3(3cx^{1/3}-1)}=C_5$$

或

$$\frac{e^{-6cx^{1/3}}}{(3cx^{1/3}-1)^2y-3c^2x^{-1/3}(3cx^{1/3}-1)}+e^{-6cx^{1/3}}\frac{(3cx^{1/3}+1)}{18nc^3(3cx^{1/3}-1)}=C.$$

化简得到

$$\frac{(3cx^{1/3}+1)y+3c^2x^{-1/3}}{(3cx^{1/3}-1)y-3c^2x^{-1/3}}=Ce^{6cx^{1/3}}.$$

练习 9.1

(1) 当 $n=2/3$ 时, 利用上述方法证明此时一个特解可取

$$v=\frac{3c^2x^{-2/3}+3cx^{-1/3}+1}{3cx^{2/3}+x}$$

并由此求出通解

$$Ce^{-6cx^{-1/3}}=\frac{(x-3cx^{2/3})y-1+3cx^{-1/3}-3c^2x^{-2/3}}{(x+3cx^{2/3})y-1-3cx^{-1/3}-3c^2x^{-2/3}}.$$

(2) 当 $n=2/5$ 时, 利用上述方法证明此时一个特解可取

$$v=\frac{25c^3x^{-2/5}-5c^2x^{-3/5}}{25c^2x^{2/5}-15cx^{1/5}+3}$$

并由此求出通解

$$Ce^{10cx^{1/5}}=\frac{(3+15cx^{1/5}+25c^2x^{2/5})y+5c^2x^{-2/5}+25c^3x^{-2/5}}{(3-15cx^{1/5}+25c^2x^{2/5})y+5c^2x^{-2/5}-25c^3x^{-2/5}}.$$

(3) 当 $n=3/5$ 时, 利用上述方法证明此时一个特解可取

$$v=\frac{25c^3x^{-2/5}+30c^2x^{-2/5}+15cx^{-1/5}+3}{25c^2x^{3/5}+15cx^{4/5}+3x}$$

并由此求出通解

$$Ce^{-10cx^{1/5}}=\frac{(3x-15cx^{4/5}+25c^2x^{3/5})y-3+15cx^{-1/5}-30c^2x^{-2/5}+25c^3x^{-3/5}}{(3x+15cx^{4/5}+25c^2x^{2/5})y-3-15cx^{-1/5}-30c^2x^{-2/5}-25c^3x^{-3/5}}.$$

对 (9.2.36) 中的其它系数, 通解形式就很复杂, 具体可参阅Euler 的原始文章.

9.2.3 一阶隐式常微分方程

考虑平面上的一条曲线, 使得它的任意切线和两个坐标轴所围成的三角形 (若这样的三角形存在) 面积为一给定常数 c. 为求这样的曲线 $y=y(x)$, 我们任取其上的点 (x,y), 并用 (X,Y) 来表示切线上的点. 则得到切线方程为

$$Y-y=y'(x)(X-x).$$

根据要求得到

$$2c=\left|\left(x-\frac{y}{y'}\right)\cdot(y-xy')\right|,$$

即

$$(y-xy')^2=2c|y'|.$$

两边平方就得到

$$(y - xy')^4 = 4c^2(y')^2.$$

我们不能显式求出 $y' = f(x, y)$, 从而也就不能显式求出 $y = y(x)$, 但是它符合形式 $F(x, y, y') = 0$. 这样的微分方程我们称为**一阶隐式常微分方程 (implicit first order ordinary differential equation)**.

本小节主要讨论一阶隐式常微分方程

$$F(x, y, y'(x)) = 0 \tag{9.2.40}$$

的基本解法——**参数法**. 记 $p := \frac{dy}{dx}$. 如果把 (x, y, p) 看成相互独立的变量, 则 $F(x, y, p) = 0$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面 $\mathcal{S}$. 假设该曲面 $\mathcal{S}$ 可用参数化方程

$$x = \varphi(t, s), \quad y = \psi(t, s), \quad p = h(t, s), \quad (s, t) \in G \subset \mathbb{R}^2 \tag{9.2.41}$$

来表示. 如果可以找到 s 和 t 的一个关系 $s = s(t)$ 使得

$$x = \varphi(t, s(t)), \quad y = \psi(t, s(t)) \tag{9.2.42}$$

满足 $dy = h(t, s(t))dx$, 即 $s = s(t)$ 满足

$$d\psi(t, s(t)) = h(t, s(t))d\varphi(t, s(t)). \tag{9.2.43}$$

因此有参数化方程 (9.2.42) 表示的积分曲线 $y = y(x)$ 必满足 (9.2.40). 事实上, 从 (9.2.43) 得到

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + s'(t)\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)dt = h\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + s'(t)\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)dt$$

从而表明 $s'(t)$ 必须满足

$$s'\left(h\frac{\partial\varphi}{\partial s} - \frac{\partial\psi}{\partial s}\right) = \frac{\partial\psi}{\partial t} - h\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

由此我们可把参数法总结如下:

(1) 选取曲面 $F(x, y, p) = 0$ 的一个参数化表示

$$x = \varphi(t, s), \quad y = \psi(t, s), \quad p = h(t, s), \quad (s, t) \in G \subset \mathbb{R}^2,$$

使得 $F(\varphi(t, s), \psi(t, s), h(t, s)) \equiv 0$.

(2) 求解一阶常微分方程 $dy = pdx$, 即

$$d\psi(t, s) = h(t, s)\,d\varphi(t, s),$$

解出 $s = s(t, C)$ 或 $t = t(s, C)$, 其中 C 为任意常数.

(3) 最后由参数化方程

$$x = \varphi(t, s(t, C)), \quad y = \psi(t, s(t, C))$$

或

$$x = \varphi(t(s, C), s), \quad y = \psi(t(s, C), s)$$

确定函数关系 $y = y(x, C)$ 就是原微分方程 (9.2.40) 的通解.

下面我们就几种特殊情形来求解一阶隐式常微分方程.

A. $y = f(x, y')$. 这里二元函数 f 是可微的且偏导数连续. 此时

$$F(x, y, p) := y - f(x, p)$$

且 $F(x, y, p) = 0$ 的一个参数化为

$$x = x, \quad y = f(x, p), \quad p = p. \tag{9.2.44}$$

由 $dy = pdx$ 得到

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp = pdx$$

或

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} - p\right)dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp = 0. \tag{9.2.45}$$

由此解出 $p = w(x, C)$ 或 $x = w(p, C)$, 从而代入 (9.2.44) 得到原方程的通解

$$y = f(x, w(x, C)) \quad 或 \quad y = f(w(t, C), t).$$

注意, (9.2.45) 中的 p 仅是起到辅助作用. 从 $w(x, C) = dy/dx$ 求出 y 的做法是错的, 原因是求出来的解包含两个任意常数, 它是二阶常微分方程 $y' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}y''$ 的解.

A1. $y = f(y')$. 此时从 (9.2.45) 得到

$$f'(p)dp = pdx.$$

从而通解为

$$x = \int \frac{f'(p)}{p}dp. \tag{9.2.46}$$

例 9.9

(1) 求解方程 $x(y')^2 - 2yy' + 9x = 0$.

解: 令 $p = y'$, 此时

$$f(x, p) = \frac{xp^2 + 9x}{2p} = \frac{9x}{2p} + \frac{xp}{2}.$$

因为

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{p}{2p} + \frac{p}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial p} = -\frac{9x}{2p^2} + \frac{x}{2},$$

所以 (9.2.45) 可化简为

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{9}{2p^2}\right)\left(x\frac{dp}{dx} - p\right) = 0.$$

由此得到 $p^2 = 9$ 即 $p = \pm 3$, 或者 $dp/dx = p/x$ 即 $p = Cx$. 这样就得到通解

$$y = \frac{9}{2C} + \frac{C}{2}x^2,$$

其中 C 为任意常数, 和两个特解

$$y = \frac{9x}{2(\pm 3)} = \frac{x(\pm 3)}{2} = \pm 3x. \quad \square$$

(2) 求解方程 $y=(y')^2-xy'+\frac{x^2}{2}$.

解: 令 $p=y'$, 此时

$$f(x,p)=p^2-xp+\frac{x^2}{2}.$$

因为

$$\frac{\partial f}{\partial x}=x-p,\quad \frac{\partial f}{\partial p}=2p-x,$$

所以 (9.2.45) 可化简为

$$(2p-x)\left(\frac{dp}{dx}-1\right)=0.$$

由此得到 $p=x/2$, 或者 $dp/dx=1$ 即 $p=x+C$. 这样就得到通解

$$y=\frac{x^2}{2}+Cx+C^2,$$

其中 C 为任意常数, 和一个特解 $y=x^2/4$. □

在上述例子中, 通解不包含特解. 我们把这样的特解称为**奇解 (singular solution)**.

A2. Clairaut 方程. 此方程形如

$$y=xy'+g(y'),\tag{9.2.47}$$

这里 $g\in C^1(I)$ 且 I 为区间. 令 $p=y'$, 此时

$$f(x,p)=xp+g(p).$$

因为

$$\frac{\partial f}{\partial x}=p,\quad \frac{\partial f}{\partial p}=x+g'(p),$$

所以 (9.2.45) 可化简为

$$\big(x+g'(p)\big)\frac{dp}{dx}=0.$$

由此得到 $dp/dx=0$ 即 $p=C$, 或者 $x+g'(p)=0$ 即 $x=-g'(p)$. 这样就得到通解

$$y=Cx+g(C),\tag{9.2.48}$$

其中 C 为任意常数, 和一个特解 (用参数 p 来表示)

$$x=-g'(p),\quad y=-pg'(p)+g(p).\tag{9.2.49}$$

例 9.10

求解方程 $y=xy'+e^{y'}$.

解: 此时 $g(p)=e^p$, 根据 (9.2.48) 得到通解

$$y=Cx+e^C,$$

其中 C 为任意常数, 和根据 (9.2.49) 得到特解

$$x=-e^p,\ y=(1-p)e^p \quad 或 \quad y=x[\ln(-x)-1],\ x<0.$$

因为

$$\lim_{x \to 0-} x[\ln(-x) - 1] = 0,$$

所以我们可以把特解的定义域扩充到 $(-\infty, 0]$. 求导可知函数 $x[\ln(-x) - 1], x \leq 0$, 有两个零点 $x = 0$ 和 $x = -e$, 且在 $x = -1$ 处取到最大值 1. 过特解曲线上任意点 (x_0, y_0) 的切线方程为

$$y - y_0 = \ln(-x_0)(x - x_0) \quad \text{或} \quad y = \ln(-x_0)x - x_0.$$

如果令 $C_0 := \ln(-x_0)$, 我们得到切线方程为 $y = C_0 x + e^{C_0}$, 即是通解曲线族中的一条. □

微分方程 (9.2.47) 是法国数学家Alexis Claude Clairaut 在 1734 年的论文[27]中引入的, 同时给出了奇解——通解曲线族的包络.

奇解现象是Leibniz 在 1694 年观察到的, 之后Clairaut 和Euler 作了更加详细的研究. Clairaut虽然不知道奇解是通解的包络, 但是他清楚地了解到奇解不包含在通解中. Euler 在 1768 年给出了奇解的判别法, 一年后D'Alembert 加强了这个判别法. 1772 年, Laplace把奇解概念推广到高阶方程和带三个变量的方程.

1774 年, Lagrange 系统地研究了奇解和通解的联系, 并给出了从通解中求出奇解的一般方法, 也给出了奇解作为积分曲线族的包络的几何解释. 但是在奇解理论中, Lagrange没有认识到一些特殊的困难, 比如, 奇迹可能包含一支特解. 奇解的完整理论是在十九世纪发展起来的, 而它的现在形式是由Arthur Cayley 和Gaston Darboux 在 1872 年完成的.

若进一步假设 $g''(p) \neq 0$, 则函数 $x = -g'(p)$ 存在反函数 $p = w(x)$. 这样就得到通解

$$y = xw(x) + g(w(x)). \tag{9.2.50}$$

由于 $w(x)$ 不是常数, 所以特解 (9.2.50) 不能由通解 (9.2.48) 所得到.

此外, 我们可以证明过特解曲线上的任意点的切线是通解曲线族中的一条直线. 事实上, 如果 $P := (x_0, x_0 w_0 + g(w_0))$, $w_0 := w(x_0)$, 是特解曲线上的任意点, 那么过 P 点的切线方程为

$$y - x_0 w_0 - g(w_0) = w_0(x - x_0) \quad \text{或} \quad y = w_0 x + g(w_0).$$

上面直线显然包含在 (9.2.48) 中.

A3. D'Alembert 方程. 此方程形如

$$y = xh(y') + g(y'), \tag{9.2.51}$$

这里 $g, h \in C^1(I)$ 且 I 为区间. 显然当 $h(p) = p$ 时, (9.2.51) 就是 (9.2.47). 下面我们假设

[27] Clairaut, Alexis Claude. *Solution de plusieurs problèmes où il s'agit de trouver des Courbes dont la propriété consiste dans une certaine relation entre leurs branches, exprimée par une Équation donnée*, Histoire de l'Académie royale des sciences, (1734), 196 - 215.

$h(p) \neq p$. 令 $p = y'$, 此时

$$f(x,p) = xh(p) + g(p).$$

因为

$$\frac{\partial f}{\partial x} = h(p), \quad \frac{\partial f}{\partial p} = xh'(p) + g'(p),$$

所以 (9.2.45) 可化简为

$$\big(xh'(p) + g'(p)\big)\frac{dp}{dx} = p - h(p).$$

因为 $h(p) \neq p$, 所以得到

$$\frac{dx}{dp} = \frac{xh'(p) + g'(p)}{p - h(p)}. \tag{9.2.52}$$

由此解出 $x = x(p)$ 和 $y = xh(p) + g(p)$.

例 9.11

求解方程

$$y = x\left(y' + \frac{1}{y'}\right) + (y')^4.$$

解: 令 $p = y'$, 此时

$$h(p) = p + \frac{1}{p}, \quad g(p) = p^4, \quad f(x,p) = xh(p) + g(p).$$

利用 (9.2.52) 得到

$$\frac{dx}{dp} = x\left(\frac{1}{p} - p\right) - 4p^4,$$

从而解出

$$x(p) = Cpe^{-p^2/2} + 8p - 4p^3, \quad y(p) = C(1+p^2)e^{-p^2/2} + 8 + 4p^2 - 3p^4. \quad \square$$

A3. Chrystal 方程. 此方程形如

$$(y')^2 + Axy' + By + Cx^2 = 0, \tag{9.2.53}$$

这里 A, B, C 都是常数. 这个一阶非线性常微分方程是英国数学家George Chrystal在1896 年的论文[28]中引入的. 接下来我们可以证明, 系数满足一定条件时 (9.2.53) 可转化为 (9.2.47).

直接求解 (9.2.53) 得到

$$y' = \frac{-A}{2}x \pm \frac{1}{2}\sqrt{(A^2 - 4C)x^2 - 4By}.$$

引入变换

$$4By = (A^2 - AC - z^2)x^2$$

得到

$$xz\frac{dz}{dx} = A^2 + AB - 4C \pm Bz - z^2.$$

[28]Chrystal G. *On the p-discriminant of a differential equation of the first order and on certain points in the general theory of envelopes connected therewith*, Trans. Roy. Soc. Edin, **38**(1896), 803 –824.

令 $A^2+AB-4C\pm Bz-z^2=0$ 的两个根为 a 和 b, 即

$$a,b=\pm\left(\frac{B+\sqrt{(B+2A)^2-16C}}{2}\right),$$

我们得到微分方程

$$-xz\frac{dz}{dx}=(z-a)(z-b). \tag{9.2.54}$$

如果 $a\neq b$, 则求解 (9.2.54) 得到

$$x\frac{(z-a)^{a/(a-b)}}{(z-b)^{b/(a-b)}}=C,$$

其中 C 为任意常数. 如果 $a=b$, 则求解 (9.2.54) 得到

$$x(z-a)e^{a/(a-z)}=C,$$

其中 C 为任意常数.

如果 a 或 b 有一个为 0, 则必有 $A^2+AB-4C=0$ 从而得到微分方程

$$xz\frac{dz}{dx}=\pm Bz-z^2$$

其解为 $z=0$ 或 $z=\pm B-x\frac{dz}{dx}$, 即 Clairaut 方程 (只差一个负号, 本质上不影响).

B. $\boldsymbol{x=f(y,y')}$. 这里二元函数 f 是可微的且偏导数连续. 此时

$$F(x,y,p):=x-f(y,p)$$

且 $F(x,y,p)=0$ 的一个参数化为

$$x=f(y,p),\quad y,\quad p=p. \tag{9.2.55}$$

由 $dy=pdx$ 得到

$$1=p\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}=p\frac{\partial f}{\partial y}+p\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}$$

或

$$\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}=\frac{1}{p}-\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{9.2.56}$$

由此解出 $p=w(y,C)$ 或 $\Phi(y,p,C)=0$, 从而代入 (9.2.55) 得到原方程的通解

$$x=f(y,w(y,C))\quad 或\quad \Phi(y,p,C)=0.$$

例 9.12

求解方程 $(y')^3-4xyy'+8y^2=0$.

解: 从 $y=0$ 或 $y'=0$ 可知 $y=0$ 是一个特解. 为了求出通解, 记 $p=y'$. 此时

$$x=\frac{(y')^2}{4y}+\frac{2y}{y'},$$

即

$$f(y,p)=\frac{p^2}{4y}+\frac{2y}{p}.$$

因为

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{p^2}{4y^2}+\frac{2}{p},\quad \frac{\partial f}{\partial p}=\frac{p}{2y}-\frac{2y}{p^2},$$

所以得到

$$(p^3-4y^2)\left(\frac{dp}{dy}-\frac{p}{2y}\right)=0.$$

这样就有 $p=C|y|^{1/2}$ 或 $p=(4y^2)^{1/3}$. 后者给出特解为 $y=\frac{4}{27}x^3$, 而前者给出

$$x=\frac{C^2|y|}{y}+\frac{2y}{C|y|^{1/2}}=\frac{C^2|y|}{4y}+\frac{2}{C}|y|^{1/2}.$$

综上所述, 原方程的解为

$$y=C(x-C)^2 \quad 或 \quad y=\frac{4}{27}x^3,$$

其中 C 为任意常数. □

B1. $\boldsymbol{x=f(y')}$**.** 此时从 (9.2.56) 得到

$$pf'(p)dp=dy.$$

从而通解为

$$y=\int pf'(p)\,dp. \tag{9.2.57}$$

例 9.13

求解方程 $(y')^3-x^3(1-y')=0$.

解: 此时

$$f(p)=\frac{p}{(1-p)^{1/3}}, \quad f'(p)=(1-p)^{-1/3}\frac{3-2p}{3(1-p)}.$$

根据 (9.2.57) 得到

$$\begin{aligned}
y &= \int pf'(p)\,dp = \int\frac{p(3-2p)}{3(1-p)}(1-p)^{-1/3}dp \quad (t:=1-p)\\
&= -\int\frac{(1-t)(1+2t)}{3t^{4/3}}dt = -\int\frac{(1-u^3}{(1+2u^3)}u^2du \quad (u:=t^{1/3})\\
&= \int\left(-\frac{1}{u^2}-u+2u^4\right)du = \frac{1}{u}-\frac{1}{2}u^2+\frac{2}{5}u^5+C,
\end{aligned}$$

和

$$x=\frac{p}{(1-p)^{1/3}}=\frac{1-t}{t^{1/3}}=\frac{1-u^3}{u}. \quad \square$$

C. 一般参数法. 对一阶非线性常微分方程 (9.2.40) 来说, 选取什么样的参数 (9.2.41) 才合适且使得 (9.2.43) 比较容易求解, 这是一个非常复杂且困难的问题, 基本上没有任何规律可循. 一般来说, 选取恰当的参数 (9.2.41) 需要结合所给微分方程的结构.

例 9.14

(1) 求解方程 $x^3+(y')^3-3xy'=0$.

解: 令 $p=y'$ 并考虑函数 $F(x,y,p)=x^3+y^3-3xp$. 若令 $p=tx$ 则从 $F(x,y,p)=0$

得到 $x=3t/(1+t^3)$. 因此, 我们引入参数化方程

$$x=\frac{3t}{1+t^3},\quad y=y,\quad p=\frac{3t^2}{1+t^3}.$$

由 $dy=pdx$ 得到

$$dy=\frac{9t^2(1-t^3)}{(1+t^3)^3}dt$$

从而

$$y=\frac{3(1+4t^3)}{2(1+t^3)^2}+C,$$

其中 C 为任意常数. 故原方程的通解为

$$x=\frac{3t}{1+t^3},\quad y=\frac{3(1+4t^3)}{2(1+t^3)^2}+C.\quad\square$$

(2) 求解方程 $y^2+(y')^2=1$.

解: 令 $p=y'$ 并考虑函数 $F(x,y,p)=y^2+p^2-1$. 引入参数化方程

$$x=t,\quad y=\sin s,\quad p=\cos s.$$

由 $dy=pdx$ 解得

$$\cos s\,ds=\cos s\,dt,$$

即 $\cos s=0$ 或 $ds=dt$. 这样就得到

$$s=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\ (n\in\mathbb{N})\quad 或\quad s=t+C,$$

这里 C 为任意常数. 因此得到原方程解为 $y\pm 1$ 或 $y=\sin(x+C)$. $\square$

9.2.4 一阶常微分方程的几何意义

考虑一阶常微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\tag{9.2.58}$$

其中 $f\in C(G)$ 是区域 $G\subset\mathbb{R}^2$ 上的连函数续. 假设, $y=\phi(x)$, $x\in J$, 是 (9.2.58) 的一个解, 其中 $J\subset\mathbb{R}$ 是区间, 则平面点集

$$\Gamma:=\{(x,\phi(x)|x\in J\}$$

是 $\mathbb{R}^2$ 上的一条可微曲线, 称为微分方程 (9.2.58) 的一条**解曲线 (solution curve)** 或**积分曲线 (integral curve)**. 任取 $(x_0,y_0)\in\Gamma$, 则曲线 Γ 在这点的切线方程为

$$y-y_0=\phi'(x_0)(x-x_0)=f(x_0,y_0)(x-x_0).$$

因此, 该点的切线方程和具体的解 $\phi(x)$ 是没有关系, 只和微分方程的结构有关.

定义 9.5

在区域 G 中的每点 P 处作一段以 $f(P)$ 为斜率的小线段 $l(P)$, 我们把 $l(P)$ 称为微分方程 (9.2.58) 在点 P 处的**线素 (line element)**. 称 $\{(P,f(P))|P\in G\}$ 为微分方程 (9.2.58) 的**方向场 (direction field)**.

利用方向场, 我们可以得到微分方程 (9.2.58) 的近似解, 这就是之后 Euler 折线法 (**第 9.6.3 小节**) 的原始想法.

定理 9.3

平面上的连续可微曲线 $\Gamma = \{(x, \phi(x))|x \in J\}$ 是微分方程 (9.2.58) 的积分曲线的充要条件是, 对曲线 Γ 上每一点 (x, y), 曲线 Γ 在该点处的切线与由微分方程 (9.2.58) 所确定的方向场重合.

证: 必要性已证, 下证充分性. 对曲线 Γ 上的每一点 $(x, y) = (x, \phi(x))$, 其切线的斜率为 $\phi'(x)$. 根据假设条件得到 $\phi'(x) = f(x, y) = f(x, \phi(x))$. 因此 $y = \phi(x)$ 是微分方程 (9.2.58) 的一个解. □

给定微分方程 (9.2.58), 我们可以画出其方向场. **定理 9.3**告诉我们, 求解带初始条件 $y(x_0) = y_0$ 的微分方程 (9.2.58) 等价于寻找满足这个初始条件且处处与方向场相吻合的一条或几条光滑曲线.

在画出微分方程 (9.2.58) 的方向场时, 我们通常会利用 $f(x, y) = k$, k 为常数, 所确定的曲线 $L_k : f(x, y) = k$. 方向场在 L_k 上的斜率都是 k, 称曲线 L_k 为方向场的**等斜线 (slope line)**.

例 9.15

(1) 作出微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

的方向场.

解: 等斜线为 $y = kx$, 而其斜率为 k. 因此等斜线 $y = kx$, $x \neq 0$, 是原方程的一个解. 实际上, 我们知道通解就是 $y = kx$. □

(2) 作出微分方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

的方向场.

解: 等斜线为 $y = -x/k$, 因此方向场与它是互相垂直的, 从而得到处处与方向场吻合的曲线为圆心在原点的圆周. 实际上, 原方程的通解为 $x^2 + y^2 = C$, 其中 C 为任以非负常数. □

一般来说, 利用方向场只能了解微分方程解的大致走向和粗糙的性质, 不能用来准确求出微分方程的解.

9.2.5 正交轨线族

假设在平面上给定一组由参数 C 所确定曲线族

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{9.2.59}$$

试求另一个曲线族, 其中 K 为参数,

$$\Psi(x, y, K) = 0 \tag{9.2.60}$$

使得曲线族 (9.2.59) 中的任意一条曲线与曲线族 (9.2.60) 中的每一条曲线都相交成定角 $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2]$(以逆时针方向为正向). 我们称曲线族 (9.2.60) 为曲线族 (9.2.59) 的**等角轨线族**; 当 $\alpha = \pi/2$ 时, 称为**正交轨线族**.

最简单的情形是, $\Phi(x, y, C) = y - C$, 即曲线族 (9.2.59) 是平行于 x 轴的一组直线. 此时相应的正交轨线族为 $x = K$, 即取 $\Psi(x, y, K) = x - K$.

对一般情形, 我们求解如下. 由于给定是一组曲线族, 因此我们可以假设 $\partial\Phi/\partial C \neq 0$. 此时由方程 $\Phi(x, y, C) = 0$, 得到 $c = c(x, y)$. 再由

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y, C)dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y, C)dy = 0$$

得到

$$\frac{dy}{dx} = H(x, y), \quad H(x, y) := -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y, c(x, y))}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y, c(x, y))}. \tag{9.2.61}$$

令与曲线族 (9.2.59) 在点 (x, y) 处相交成 α 的曲线在该点处切线的斜率为 y'. 当 $\alpha \neq \pi/2$ 时得到

$$\tan \alpha = \frac{y' - H(x, y)}{1 + y'H(x, y)}$$

即

$$y' = \frac{H(x, y) + \tan \alpha}{1 - H(x, y) \tan \alpha}; \tag{9.2.62}$$

当 $\alpha = \pi/2$ 时,

$$y' = -\frac{1}{H(x, y)}. \tag{9.2.63}$$

求解 (9.2.62) 或 (9.2.63) 就得到所要求的曲线族 (9.2.60).

例 9.16

(1) 求抛物线族 $y = Cx^2$ 的正交曲线族.

解: 此时 $\Phi(x, y, C) = y - Cx^2$ 和 $\alpha = \pi/2$. 因为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -2Cx, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 1, \quad H(x, y) = -\frac{-2Cx}{1} = 2Cx,$$

所以根据 (9.2.63) 得到

$$y' = -\frac{1}{2Cx} = -\frac{1}{2x\frac{y}{x^2}} = -\frac{x}{2y}.$$

求得通解为 $x^2 + 2y^2 = K^2$, 即为同心椭圆族. □

(2) 求与曲线族 $y = x\ln(Cx)$ 相交成 $-\pi/4$ 的曲线族.

解: 此时 $\Phi(x, y, C) = y - x\ln(Cx)$ 和 $\alpha = -\pi/4$. 因为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\ln(Cx) - 1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 1, \quad H(x, y) = -\frac{-\ln(Cx) - 1}{1} = \ln(Cx) + 1,$$

所以根据 (9.2.62) 得到

$$y' = \frac{1+\ln(Cx)+(-1)}{1-(1+\ln(Cx))(-1)} = \frac{\ln(Cx)}{2+\ln(Cx)} = \frac{y}{2x+y}.$$

求得解为 $y=-x$ 和 $y^2=K(x+y)$. □

9.2.6 三体问题

我国作家刘慈欣于 2006 年 5 月至 12 月在《科幻世界》杂志上连载的一部长篇科幻小说《三体》(《The three-body problem》), 2008 年，该书的单行本由重庆出版社出版. 三体系列“地球往事三部曲 (Remembrance of earth’s past)”的第二部《三体 II: 黑暗森林》(《The dark forest》) 于 2008 年 5 月出版, 2010 年 11 月出版发行了第三部《三体 III: 死神永生》(《Death’s end》). 《三体》小说的英文版获得美国科幻奇幻作家协会 2014 年度“星云奖 (Nebula Award)”提名, 并荣获 2015 年雨果奖 (Hugo Award) 最佳小说奖.

《三体》内容概述[29]如下. 天体物理学女大学生叶文洁因机缘巧合进入绝密工程 (红岸工程) 基地. 在偶然发现了太阳的增益反射后, 她私下利用该原理两次向宇宙中发出了包含地球信息的电波, 信息被距地球最近的恒星系统上的居民——三体人收到, 从此, 三体世界和地球世界建立了联系.

三体世界是一个地球人完全无法想像的生存环境极端严酷的世界. 三体世界有三个质量差不多的“太阳”, 根据 Newton 运动定律, 这三个太阳的运动轨迹是完全不可预测的. 而三体人所在的行星被这三个“太阳”的引力交互作用, 导致该行星的轨道高度混沌; 当行星被一个“太阳”捕获, 并围绕之旋转时, 三体人会暂时获得一段稳定的发展期, 三体人称之为“恒纪元”. 当行星未能被一个“太阳”捕获, 太阳升落毫无规律时, 这段时期被称为“乱纪元”. 为此, 三体人进化出了在乱纪元来临时脱水的本能以应对危机. 但这并不总是有效的, 由于三个“太阳”运行无规律, 当行星过于靠近“太阳”时, 会因为温度过高而表面熔化; 过于远离“太阳”时温度又会过低; 更可怕的是, 当行星同时靠近几个“太阳”时, 会因为引力的撕扯导致星体分裂. 以上几种原因使三体文明毁灭了数百次. 但尤为恐怖的是, 因为相对“太阳”来说, 行星的质量太小, 最终会因为轨道的混乱而掉落到“太阳”中去, 使三体人和三体文明永远消失. 对于三体人来说, 宇宙移民是唯一的选择. 三体社会时刻面临毁灭的危机, 因而进化出了高度极权的社会体制和完全不同于地球道德文化的价值观, 因为唯有这样, 才能生存.

当人类社会和三体社会建立联系后, 由一群对人类文明、破坏自然不满的人发起而成立了一个地球三体组织, 旨在毁灭地球文明, 迎接三体文明. 叶文洁是该组织的精神领袖. 同时, 三体世界为保证顺利向地球移民, 消灭地球社会和地球人类, 利用“智子”技术 (将单个质子从九维展开至二维并雕刻成智能计算机) 干扰人类的高能物理试验, 将人类的科学研究锁定，使之停滞不前. 三体组织也在此时暗杀全球的科学家。为吸收会员，三体组织开发了《三体》游戏. 与此同时，各国政府也组成联盟应付可能的危机. 主人公汪淼

[29]汤哲声 主编: 中国现当代通俗小说赏析, 人文教育普及丛书, p203 - 204, 苏州大学出版社. 2012.

进入了该游戏并深入到三体组织内部. 汪淼联合警探史强, 在多国部队协助下, 于巴拿马运河以纳米线割毁了三体组织的总部——“审判日”号轮船, 最终击垮了三体组织. 后来, 多国政府在俘虏叶文洁后, 通过审讯及从“审判日”号中取得的硬盘获知三体文明的详细资料. 但地球科技的发展已经被“智子”锁死无法发展, 三体人的移民已经开始, 450 年后, 三体人将降临地球, 人类必须为此开始准备.

2020 年 9 月 1 日, 宣布《三体》将被改编为 Netflix 英文原创剧集, 创作团队很早就是原著的狂热粉丝. 原著作者刘慈欣和原著英文译者刘宇昆将一起担任该剧的制作顾问.

我们首先利用 Newton 万有引力定律来研究 **N-体问题 (N-body problem)**. 假设三维空间中有 N 个质点 $\boldsymbol{p}_i = (x_i, y_i, z_i)$, 质量为 m_i, $1 \le i \le N$, 它们在万有引力下相互作用. 根据 Newton 运动第二定律和 Newton 万有引力定律得到

$$m_i \frac{d^2 \boldsymbol{p}_i}{dt^2} = -G \sum_{1 \le j \ne i \le N} m_i m_j \frac{\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_j}{|\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_j|^3}, \quad 1 \le i \le N. \tag{9.2.64}$$

其中 G 为万有引力常数 (下面我们不妨假设 $G = 1$) 且

$$|\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_j| = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}, \quad 1 \le i \le N.$$

考虑势函数

$$U := \sum_{1 \le i \ne j \le N} \frac{m_i m_j}{|\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_j|}, \tag{9.2.65}$$

则 (9.2.64) 等价于

$$m_i \frac{d^2 \boldsymbol{p}_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{p}_i}, \quad 1 \le i \le N. \tag{9.2.66}$$

若令

$$\boldsymbol{q}_i := \frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt}, \quad 1 \le i \le N,$$

我们得到关于变量 $\boldsymbol{p}_i$ 和 $\boldsymbol{q}_i$ 的含有 $6N$ 个方程的微分方程组

$$\frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt} = \boldsymbol{q}_i, \quad \frac{d\boldsymbol{q}_i}{dt} = \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{p}_i}, \quad 1 \le i \le N. \tag{9.2.67}$$

可以证明上述微分方程组有 10 个首次积分 (首次积分定义见**第 9.8.1 小节**). 由于

$$\sum_{1 \le i \le N} \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{p}_i} = \sum_{1 \le i \le N} \sum_{1 \le j \ne i \le N} \frac{m_i m_j (\boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{p}_i)}{|\boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{p}_i|^3} = 0,$$

得到

$$\sum_{1 \le i \le N} m_i \frac{d\boldsymbol{q}_i}{dt} = \boldsymbol{0}. \tag{9.2.68}$$

因此得到 6 个首次积分

$$\sum_{1 \le i \le N} m_i \frac{dx_i}{dt} = a, \quad \sum_{1 \le i \le N} m_i \frac{dy_i}{dt} = b, \quad \sum_{1 \le i \le N} m_i \frac{dz_i}{dt} = c, \tag{9.2.69}$$

和

$$\sum_{1 \le i \le N} m_i x_i = at + a^*, \quad \sum_{1 \le i \le N} m_i y_i = bt + b^*, \quad \sum_{1 \le i \le N} m_i z_i = ct + c^*, \tag{9.2.70}$$

其中 a, b, c, a^*, b^*, c^* 为任意常数. (9.2.69) 表示系统 (9.2.67) 的动量守恒, 而 (9.2.70) 表示系统 (9.2.67) 的质心沿着直线运动.

因为

$$z_k \frac{\partial U}{\partial y_k} - y_k \frac{\partial U}{\partial z_k} = \sum_{1 \le j \le k \ne N} \frac{m_j m_k (y_j z_k - z_j y_k)}{|\boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{p}_k|^3}, \quad 1 \le k \le N,$$

所以

$$\sum_{1 \le k \le N} \left(z_k \frac{\partial U}{\partial y_k} - y_k \frac{\partial U}{\partial z_k} \right) = 0.$$

同样可得

$$\sum_{1 \le k \le N} \left(x_k \frac{\partial U}{\partial z_k} - z_k \frac{\partial U}{\partial x_k} \right) = 0, \quad \sum_{1 \le k \le N} \left(y_k \frac{\partial U}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial U}{\partial y_k} \right) = 0.$$

根据

$$\frac{d^2 \boldsymbol{p}_i}{dt^2} = \frac{d\boldsymbol{q}_i}{dt} = \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{p}_i}, \quad 1 \le i \le N,$$

我们得到

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{1 \le k \le N} m_k \left(z_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} - y_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} \right), \\ 0 &= \sum_{1 \le k \le N} m_k \left(x_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} - z_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} \right), \\ 0 &= \sum_{1 \le k \le N} m_k \left(y_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} - x_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} \right). \end{aligned}$$

因此得到另外 3 个首次积分

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{1 \le k \le N} m_k \left(z_k \frac{dy_k}{dt} - y_k \frac{dz_k}{dt} \right), \\ 0 &= \sum_{1 \le k \le N} m_k \left(x_k \frac{dz_k}{dt} - z_k \frac{dx_k}{dt} \right), \\ 0 &= \sum_{1 \le k \le N} m_k \left(y_k \frac{dx_k}{dt} - x_k \frac{dy_k}{dt} \right), \end{aligned} \tag{9.2.71}$$

其中 α, β, γ 为任意常数. (9.2.71) 表示系统 (9.2.67) 的角动量守恒.

最后我们来推导出第十个首次积分. 从 (9.2.64) 得到

$$\frac{d}{dt}(T - U) = 0, \tag{9.2.72}$$

这里

$$T := \frac{1}{2} \sum_{1 \le k \le N} m_k \left[\left(\frac{dx_k}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_k}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_k}{dt} \right)^2 \right] \tag{9.2.73}$$

表示系统 (9.2.67) 的动能, 所以得到首次积分

$$T - U = h, \tag{9.2.74}$$

其中 h 为任意常数, 称为 **Hamilton 函数 (Hamiltonian function)**. (9.2.74) 表示系统 (9.2.67) 的能量守恒.

总之, 我们得到了 10 个首次积分 (9.2.69), (9.2.70), (9.2.71) 和 (9.2.74). 我们可以证明

着 10 个首次积分是互相独立的, 且, 除了这 10 个首次积分外, 不再有与它们相互独立的其它代数首次积分. 根据微分方程组的首次积分理论, (9.2.64) 局部上有 $6N$ 个相互独立的首次积分, 从而表明其余的 $6N-10$ 个首次积分都不是 (x,y,z,t) 的代数函数.

A. 二体问题. 我们重新来推导 Kepler 三大定律. Kepler 在 1609 年分析了二体问题, 而Newton 在 1687 年解决了这个问题. 由于系统的质心做匀速直线运动, 我们把质心放在惯性系的原点; 在这个惯性系下, 假设质量为 m_i 的质点的坐标为 (x_i,y_i,z_i), $i=1,2$. 根据质心在原点的假设得到

$$0=m_1x_1+m_2x_2=m_1y_1+m_2y_2=m_1z_1+m_2z_2. \tag{9.2.75}$$

上述方程结合 (9.2.71) 得到

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{m_1}&=z_1\left(\frac{dy_1}{dt}-\frac{dy_2}{dt}\right)-y_1\left(\frac{dz_1}{dt}-\frac{dz_2}{dt}\right),\\ \frac{\beta}{m_1}&=x_1\left(\frac{dz_1}{dt}-\frac{dz_2}{dt}\right)-z_1\left(\frac{dx_1}{dt}-\frac{dx_2}{dt}\right),\\ \frac{\gamma}{m_1}&=y_1\left(\frac{dx_1}{dt}-\frac{dx_2}{dt}\right)-x_1\left(\frac{dy_1}{dt}-\frac{dy_2}{dt}\right).\end{aligned}$$

从而得到

$$\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1=0.$$

再次利用 (9.2.75) 得到

$$\alpha x_2+\beta y_2+\gamma z_2=0.$$

这说明两个质点都在同一个平面

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=0$$

上, 即二体运动是平面运动.

重新选择坐标系使得二体运动所在的平面为坐标平面 $z=0$, 此时两个质点的坐标分别为 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2). 原方程 (9.2.64), 我们还是假设 $G=1$, 变成

$$\begin{cases} m_1\dfrac{d^2x_1}{dt^2}=m_1m_2\dfrac{x_2-x_1}{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]^{3/2}},\\ m_1\dfrac{d^2y_1}{dt^2}=m_1m_2\dfrac{y_2-y_1}{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]^{3/2}},\end{cases}$$

和

$$\begin{cases} m_1\dfrac{d^2x_2}{dt^2}=m_1m_2\dfrac{x_1-x_2}{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]^{3/2}},\\ m_1\dfrac{d^2y_2}{dt^2}=m_1m_2\dfrac{y_1-y_2}{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]^{3/2}},\end{cases}$$

把 (9.2.75) 带入得到

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2}=-\dfrac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2}\dfrac{x_1}{(x_1^2+y_1^2)^{3/2}},\\ \dfrac{d^2y_1}{dt^2}=-\dfrac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2}\dfrac{y_1}{(x_1^2+y_1^2)^{3/2}},\end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -\dfrac{m_1^3}{(m_1+m_2)^2}\dfrac{x_2}{(x_2^2+y_2^2)^{3/2}}, \\ \dfrac{d^2y_2}{dt^2} = -\dfrac{m_1^3}{(m_1+m_2)^2}\dfrac{y_2}{(x_2^2+y_2^2)^{3/2}}, \end{cases}$$

所以我们只要研究下面微分方程组:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -m\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -m\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad m = \frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2}. \tag{9.2.76}$$

因为

$$x\frac{d^2y}{dt^2} = y\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] = -2m\frac{x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

我们得到

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C_1 \tag{9.2.77}$$

和

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \frac{2m}{\sqrt{x^2+y^2}} = C_2, \tag{9.2.78}$$

其中 C_1, C_2 为任意常数. 把极坐标

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

带入 (9.2.77) 和 (9.2.78) 得到

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = C_1, \quad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \frac{2m}{r} = C_2. \tag{9.2.79}$$

从而得到

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = C_2 + \frac{2m}{r} - \frac{C_1^2}{r^2},$$

即

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{C_2 + \frac{m^2}{C_1^2} - \left(\frac{C_1}{r} - \frac{m}{C_1}\right)^2}.$$

两边同除 $d\theta/dt = C_1/r^2$ 得到

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm\frac{r^2}{C_1}\sqrt{C_2 + \frac{m^2}{C_1^2} - \left(\frac{C_1}{r} - \frac{m}{C_1}\right)^2}.$$

假设 $C_1 > 0$, 即考虑质点逆时针绕质心运动. 此时引入新的变量 $\rho := C_1/r$ 就得到

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \pm\sqrt{C_2 + \frac{m^2}{C_1^2} - \left(\rho - \frac{m}{C_1}\right)^2}.$$

上面分离变量方程的通解为

$$\mp\cos^{-1}\frac{\rho - \dfrac{m}{C_1}}{\sqrt{C_2 + \dfrac{m^2}{C_1^2}}} = \theta - C_3,$$

其中 C_3 为任意常数. 根据 $r = C_1/\rho$ 得到

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}, \tag{9.2.80}$$

其中

$$e := \frac{C_1}{m}\sqrt{C_2 + \frac{m^2}{C_1^2}} > 0, \quad p := \frac{C_1^2}{m} > 0, \quad \theta_0 := C_3.$$

这就表明 (9.2.80) 表示一条圆锥曲线, 且 $0 < e < 1$ 时为椭圆, $e = 1$ 时为抛物线, $e > 1$ 时为双曲线.

如果假设 $m_2 \gg m_1$, 则 $m \approx m_2$. 此时 $C_2 < 0$ 从而 $0 < e < 1$. 这就说明地球绕着太阳的运动轨迹是椭圆, 且太阳位于这个椭圆的一个焦点上——Kepler 第一定律.

质点从 t_1 时刻的位置 (r_1, θ_1) 沿着椭圆轨道运动到 t_2 时刻的位置 (r_2, θ_2), 向径 r 扫过的面积是

$$\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} C_1 dt = \frac{1}{2}C_1(t_2 - t_1),$$

即是时间差的常数倍——Kepler 第二定律.

假设 $m_2 \gg m_1$, 从而得到 $0 < e < 1$. 此时运动周倜 T 满足

$$C_1 T = \int_0^T C_1 dt = \int_0^{2\pi}\left[\frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}\right]^2 d\theta = \frac{2p^2\pi}{\sqrt{(1-e^2)^3}},$$

这是因为对含参变量积分

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{a + e\cos(\theta - \theta_0)}d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - e^2}}, \quad a > |e| > 0,$$

关于 a 求导得到

$$\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}\right]^2 d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{(1-e^2)^3}}.$$

结合 (9.2.80) 所给出的椭圆半长轴 $p/(1-e^2)$, 我们得到

$$\frac{T^2}{[p/(1-e^2)]^3} = \frac{4p\pi^2}{C_1^2} = \frac{4\pi^2}{m} \approx \frac{4\pi^2}{m_2},$$

即运动周期的平方与椭圆运动轨道半长轴的立方之比是一常数——Kepler 第三定律.

B. 三体问题. 早期研究三体问题是想对一些特殊情形尝试着找到显式解. 1687 年, Newton开始了三体问题的第一步尝试.

1747 年, Jean le Rond d'Alembert和Alexis Clairaut共同向法国皇家科学院提交了他们关于三体问题的论文, 而 "三体问题 (法语: Problème des trois corps)" 第一次面世.

1767 年, Euler 发现了共线运动, 其中三个任意质量的物体沿一条固定的直线按比例移动. 欧拉三体问题是其中两个物体固定在空间中的特殊情况 (这不应与圆形限制三体问题混淆, 其中两个大质量物体描述了一个圆形轨道并且仅固定在一个参考系)。

1772 年, Lagrange发现了两类周期解, 每类都针对三个任意质量的物体. 在一类中, 物体位于旋转的直线上; 在另一类中, 物体位于旋转等边三角形的顶点. 在任何一种情况下, 物体的路径都是圆锥截面.

Charles-Eugène Delaunay对地球 - 月球 - 太阳系统进行了一项重大研究, 他在 1860 年和 1867 年出版了两卷关于该主题的著作, 每卷 900 页.

1887 年, 瑞典国王Oscar 二世为了祝贺自己的 60 岁寿诞而赞助了一项现金奖励的竞赛——征求太阳系的稳定性问题的解答, 这是三体问题的一个变种. 法国数学家Poincaré简

化了问题, 提出了**限制性三体问题**: 即三体中其中两体的质量极大, 以至于第三体的质量完全不能对其造成任何扰动. 对这个问题, Poincaré运用了他发明的相图理论, 并且最终发现了混沌理论. 虽然Poincaré没有成功给出一个完整的解答, 但是他的工作令人印象深刻以至于还是在 1888 年赢得了奖金. 评委之一的Weierstrass说: "这个工作不能真正视为对所求的问题的完善解答, 但是它的重要性使得它的出版将标志着天体力学的一个新时代的诞生." 在Poincaré的论文中, 他描述了例如同宿点 (homoclinic points) 之类的新思想. 这些概念在 1890 年的《Acta Mathematica》备忘录中出版, 后来该书在编辑途中被发现一个理论上的错误, 然而该错误实际上导致了Poincaré一些进一步的发现, 它们现在被视为混沌理论的开端.

2019 年, Breen等人发文[30]表示可以利用深度神经网络来求解三体问题.

进一步的参考文献:

- Poincaré, H. *Les Méthodes nouvelles de la méchanique céleste*, Tom 1 (1892), Tom 2 (1892), Tom 3 (1899). *New methods of celestial mechanics*, Parts 1 - 3, American Institute of Physics, 1993.
- Musielak, Z. E.; Quarles, B. *The three-body problem*, Rep. Prog. Phys., **77**(2014), no. 6, Article 065901. arXiv:1508.02312
- Painlevé, P. *Lecons sur la théorie analytique des équations différentielles*, Paris, Hermann, 1897.
- Xia, Zhihong. *The existence of noncollision singularities in Newtonian systems*, Annals of Mathematics, Second Series, **135**(1992), no. 3, 411 - 468.
- Xue, Jinxin. *Non-collision singularities in a planar 4-body problem*, Acta Mathematica, **224**(2020), no. 2, 253 - 388.

9.2.7 二阶自治常微分方程

自治系统 (autonomous system) 或**自治常微分方程 (autonomous ordinary differential equation)** 是指和变量无关的常微分方程 (组), 即

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(x, x', \cdots, x^{(n-1)}\right), \quad x^{(k)} := \frac{d^k x}{dt^k}.$$

任何自治系统都可以转化为动力系统, 而且在一些较弱条件下, 动力系统可转化为自治系统. 一阶自治常微分方程

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

可用变量分离法求解, 见 (9.2.13). 现在用 t 表示自变量, $x = x(t)$.

对一般的二阶自治常微分方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = f(x, x')$$

[30] Breen, Philip G; Foley, C. N.; Boekholt, T.; Portegies Zwart, S. *Newton vs the machine: solving the chaotic three-body problem using deep neural networks*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **494**(2020), no. 2, 2465 - 2470. arXiv: 1910.07291

我们引入变量 $y = x'$ 得到

$$f(x, y) = \frac{dy}{dt} = y\frac{dy}{dx},$$

即得到一阶常微分方程.

下面, 我们来考虑最简单的二阶自治常微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0, \tag{9.2.81}$$

这里 $x = x(t)$ 且 f 是关于 x 的连续函数.

- 如果 $x(t)$ 是微分方程 (9.2.81) 的解, 则对任意常数 $c \in \mathbb{R}$, $x_c(t) := x(t + c)$ 也是 (9.2.81) 的解.
- 如果存在 x_0 满足 $f(x_0) = 0$, 则 $x(t) = x_0$ 是 (9.2.81) 的解.

引入 $y = x' = dx/dt$ 得到

$$\frac{1}{2}y^2 + F(x) = C, \tag{9.2.82}$$

其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, C 为任意常数. 注意到 (9.2.82) 是 (x, y)-平面上的曲线族, 且 (9.2.81) 的每个解对应着这个曲线族的某条曲线. 因为

$$\frac{dx}{dt} = y = \pm\sqrt{2[C - F(x)]},$$

利用变量分离法得到

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2[C - F(x)]}} = \pm(t + C_1), \tag{9.2.83}$$

其中 C_1 是任意常数.

用 $y = dx/dt$ 把 (9.2.81) 重新写成

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -f(x). \tag{9.2.84}$$

如果 $(x(t), y(t))$ 是 (9.2.83) 的解且 $f(s)$ 在 $[x_0, x(t)]$ 上的积分存在, 则得到

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}y^2(t) + \int_{x_0}^{x(t)} f(s)\,ds\right] &= y(t)\frac{dy(t)}{dt} + f(x(t))\frac{dx(t)}{dt} \\
= \frac{dx(t)}{dt}\left[\frac{dy(t)}{dt} + f(x(t))\right] &= y(t)\cdot 0 \;=\; 0,
\end{aligned}$$

即函数

$$\frac{1}{2}y^2(t) + \int_{x_0}^{x(t)} f(s)\,ds \tag{9.2.85}$$

和时间 t 无关.

现在我们假设

$$f \text{ 至少定义在 } [0, +\infty) \text{ 上}, \quad f(0) = 0, \quad xf(x) > 0\ (x \neq 0). \tag{9.2.86}$$

此时取 $f(x)$ 的原函数为

$$F(x) = \int_0^x f(s)\,ds.$$

从而可知 $F(0)=0$ 和

$$F(x)>0, \quad x\neq 0.$$

因此, 利用 (9.2.85),

$$\Gamma_h : \frac{1}{2}y^2+F(x)=h, \tag{9.2.87}$$

其中 h 为正常数, 是 (x,y)-平面上的闭曲线族, 而且 (9.2.84) 的每个解都在曲线族 $\{\Gamma_h\}_{h>0}$ 中的某条曲线上. 这个闭曲线族和 y 轴的两个交点为 $(0,\pm\sqrt{h})$. 令这个闭曲线族和 x 轴的两个交点为 $(x_+(h),0)$ 和 $(x_-(h),0)$ 使得到 $x_-(h)<0<x_+(h)$.

定理 9.4

(1) 微分方程组 (9.2.84) 的每个解 (除去 $(0,0)$ 外) 都是周期解. 假设位于曲线族 Γ_h 上的解的周期为 T_h.

(2) T_h 和 h 无关的充要条件是, 存在常数 $c_0>0$ 使得对任意 $h>0$ 都有

$$x_+(h)-x_-(h)=c_0\sqrt{h}. \tag{9.2.88}$$

♡

证: 因为只要 $h>0$ 必有[31] $(dx/dt,dy/dt)\neq(0,0)$, 所以 (9.2.84) 的每个解 (除去 $(0,0)$ 外) 都是周期解.

对于任意 $h>0$, 闭曲线 $\frac{1}{2}y^2+F(x)=h$ 关于 x 轴对称, 从而得到

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}T_h &= \int_0^{T_h/2} dt = \int_{x_-(h)}^{x_+(h)} \frac{dx}{\sqrt{2[h-F(x)]}} \\
&= \int_0^{x_+(h)} \frac{dx}{\sqrt{2[h-F(x)]}} + \int_{x_-(h)}^0 \frac{dx}{\sqrt{2[h-F(x)]}} \\
&= \int_0^h \frac{1}{\sqrt{2(h-s)}}\frac{ds}{f(x_+(s))} + \int_0^h \frac{1}{\sqrt{2(h-s)}}\frac{-ds}{f(x_-(s))} \\
&= \int_0^h \frac{1}{\sqrt{2(h-s)}}\left[\frac{1}{f(x_+(s))}-\frac{1}{f(x_-(s))}\right]ds,
\end{aligned}$$

这里作了变换 $s=F(x)$. 对任何 $H>h$ 得到

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^H \frac{T_h}{\sqrt{H-h}}dh &= \int_0^H \frac{dh}{\sqrt{H-h}}\int_0^h \frac{1}{\sqrt{2(h-s)}}\left[\frac{1}{f(x_+(s))}-\frac{1}{f(x_-(s))}\right]ds \\
&= \int_0^H \left[\frac{1}{f(x_+(s))}-\frac{1}{f(x_-(s))}\right]ds\int_s^H \frac{dh}{\sqrt{(H-h)(h-s)}} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^H \left[\frac{1}{f(x_+(s))}-\frac{1}{f(x_-(s))}\right]ds \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[\int_0^{x_+(H)} \frac{f(x_+(s))}{f(x_+(s))}dx + \int_{x_-(H)}^0 \frac{f(x_-(s))}{f(x_-(s))}dx\right] \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}}[x_+(H)-x_-(H)].
\end{aligned}$$

因此得到

$$x_+(H)-x_-(H)=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_0^H \frac{T_h}{\sqrt{H-h}}dh. \tag{9.2.89}$$

[31] 否则的话, 假设 $(dx/dt,dy/dt)$ 在某时刻 t_0 为 $(0,0)$, 根据 (9.2.86) 得到 $F(x(t_0))=h>0$. 另一方面, $F(x(t_0))=f(x(t_0))=-y'(t_0)=0$, 矛盾!

如果 $T_h = T$ 和 h 无关, 则从 (9.2.89) 得到

$$x_+(H) - x_-(H) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \cdot 2T\sqrt{H} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}T\sqrt{H}, \quad H > h.$$

根据 H 的任意性得到

$$x_+(h) - x_-(h) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}T\sqrt{h}, \quad h > 0.$$

反之, 假设 (9.2.88) 成立, 则对任意 $H > h$ 也有

$$x_+(H) - x_-(H) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \cdot 2T\sqrt{H} = c_0T\sqrt{H}, \quad H > h.$$

由 (9.2.89) 得到

$$\int_0^H \frac{T_h}{\sqrt{H-h}}dh = \sqrt{2}\pi c_0\sqrt{H}, \quad H > h.$$

上式两天同乘以 $dH/\sqrt{(\beta-H)(H-h)}$ 得到

$$\begin{aligned}\pi\int_0^\beta T_h dh &= \int_0^\beta T_j dh \int_0^\beta \frac{dH}{\sqrt{(\beta-H)(H-h)}} \\ &= \sqrt{2}\pi c_0 \int_0^\beta \frac{\sqrt{H}}{\sqrt{\beta-H}}dH = 2\sqrt{2}\pi c_0\beta \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi^2 c_0\beta,\end{aligned}$$

即得到

$$\int_0^\beta T_h dh = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi c_0\beta, \quad T_\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi c_0. \quad \square$$

例 9.17

(1) 证明微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + ax^+ - bx^- = 0$$

的每个解都是周期的且周期相同. 这里 a, b 都是正常数, $x^+ := \max\{x, 0\}$, 而 $x^- := x - x^+$.

证: 因为 x^+ 的原函数为

$$\int x^+ dx = \begin{cases} x^2/2 + C, & x > 0, \\ C, & x \le 0. \end{cases}$$

所以易得

$$x_+(h) = \sqrt{\frac{2h}{a}}, \quad x_-(h) = -\sqrt{\frac{2h}{b}}.$$

故

$$x_+(h) - x_-(h) = \left(\sqrt{\frac{2}{a}} + \sqrt{\frac{2}{b}}\right)\sqrt{h}.$$

根据**定理 9.4**可知

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{2}{a}} + \sqrt{\frac{2}{b}}\right) = \pi\left(\sqrt{\frac{1}{a}} + \sqrt{\frac{1}{b}}\right). \quad \square$$

(2) 证明微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x+1}{4} - \frac{1}{4(1+x)^3} = 0$$

的每个解都是周期的且周期为 2π.

证: 此时

$$f(x) = \frac{x+1}{4} - \frac{1}{4(1+x)^3}, \quad x \neq -1, \quad f(0) = 0.$$

显然有

$$xf(x) > 0, \quad x \neq 0.$$

原函数 $F(x)$ 满足

$$F(x) = \int_0^x f(s)\,ds = \frac{(x+1)^2}{8} + \frac{1}{8(1+x)^2} - \frac{1}{4}, \quad x \neq -1.$$

不妨假设 $x > -1$. 此时从

$$\frac{1}{2}y^2 + F(x) = h$$

得到

$$x_{\pm}(h) = -1 + \sqrt{4h + 1 \pm \sqrt{((4h+1)^2 - 1}}.$$

从而得到

$$x_+(h) - x_-(h) = 2\sqrt{2}\sqrt{h}$$

和周期

$$T_h = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{2} = 2\pi. \quad \square$$

(3) **(单摆振动)** 求解单摆方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a^2 \sin x = 0,$$

其中 $a > 0$ 为常数.

解: 将质量不计、不可伸缩的细绳一端固定, 而另一端放置一个小球, 这样就构成了单摆. 假设小球只在铅直平面内摆动, 我们称为平面单摆. 重力对单摆的力矩为

$$M = -mgl \sin x,$$

这里 m 为小球质量, g 为重力加速度, l 是摆长, x 是单摆和垂直方向的夹角. 由角动量定理得到

$$M = I\beta,$$

这里 $I = ml^2$ 是单摆的转动惯量, 而 $\beta = d^2x/dt^2$ 是角加速度. 这样就得到

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin x = 0,$$

即

$$a = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

解为

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2(c + a^2\cos x)}} = \pm(t + c_1).$$

假设 $x(0) = x_0, x'(0) = x_0'$. 进一步假设解的振幅为 A, 即存在时刻 t_1 使得 $x(t_1) =$

$A, x'(t_1) = 0$. 若令单摆振动的周期为 T_A, 得到

$$\frac{1}{4}T_A = \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{2a(\cos x - \cos A)}}.$$

为了研究周期 T_A, 我们首先看一个近似模型. 当 $x \approx 0$ 时, $\sin x \approx x$, 于是得到原方程的近似解

$$x = C_1 \sin(at) + C_2 \cos(at),$$

其中 C_1, C_2 为任意常数. 这个近似解的周期为 $2\pi/a$, 因此我们猜测 T_A 的某种极限是 $2\pi/a$. 事实上,

$$\lim_{A\to 0+} T_A = \frac{2\pi}{a}, \quad \lim_{A\to\pi-} T_A = +\infty.$$

这样当振幅 A 很小时就得到了周期的近似值

$$T_A \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

根据 Lebesgue 控制收敛定理得到

$$\lim_{A\to 0+} T_A = \frac{2\sqrt{2}}{a}\int_0^1 \lim_{A\to 0+} \frac{A}{\sqrt{\cos(At) - \cos A}}dt = \frac{2\sqrt{2}}{a}\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{2\pi}{a}.$$

另一方面, 利用

$$\cos x - \cos A = 2\cos^2\frac{x}{2} - 2\cos^2\frac{A}{2} \le 2\cos^2\frac{x}{2}$$

得到

$$T_A = \frac{2\sqrt{2}}{a}\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos A}} \ge \frac{2}{a}\int_0^A \frac{dx}{\cos\frac{x}{2}}.$$

因此 $\lim_{A\to\pi-} T_A = +\infty$. □

9.3 常微分方程基本定理

我们知道并不是每个常微分方程都有解, 就算有解也不一定是唯一解.

例 9.18

(1)**(解不存在)** 初值问题

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, \quad y(0) = 0$$

不存在解.

解: 这个微分方程的通解是

$$y = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

但是显然不满足初值条件. □

(2)**(解不唯一)** 初值问题

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}, \quad y(0) = 0$$

有两个不同解.

解: 显然 $y\equiv 0$ 是一个解. 当 $y\neq 0$ 时,

$$\frac{dy}{\sqrt{y}}=2dx$$

从而得到另一个解 $y=x^2$. □

(3)(**无穷多个解**) 初值问题

$$\frac{dy}{dx}=2\sqrt{y},\quad y(0)=0$$

有无穷多个不同解.

解: 对任何常数 $c>0$, 定义

$$y_c:=\begin{cases}0, & x\le c,\\ (x-c)^2, & x>c,\end{cases}$$

则 y_c 满足上述初值问题. □

考虑初值问题

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0. \tag{9.3.1}$$

这里 f 是连续函数.

- 如果 $y(x)$ 是 (9.3.1) 在区间 I 上的一个解, 则由 $f(x,y(x))$ 的连续性可知 $y(x)$ 也是连续可微的且满足积分方程
$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))\,dt,\quad x\in I. \tag{9.3.2}$$
- 如果 $y=y(x)$ 是 (9.3.2) 在 I 上的一个连续解 (即 $y(x)$ 连续, $y(x)$ 的导数存在且满足 (9.3.2)), 则根据 $f(t,y(t))$ 的连续性可知 $y(x)$ 是连续可微的且满足初值条件 $y(x_0)=y_0$.
- 这就表明, 在 f 连续的假设条件下, 求解初值问题 (9.3.1) 等价于求解积分方程 (9.3.2).
- 注意到, 积分方程 (9.3.2) 的成立并不要求 f 是连续的; f 的连续性是为了保证解是连续可微的.

现在我们回到初值问题 (9.3.1). 由于一般不能得到显式解, 我们用简单的函数列来找到解. 步骤如下:

(a) 设法构造一个越来越接近初值问题解的函数列 $\{y_n(x)\}_{n\ge 0}$;

(b) 证明在适当区间 I (包含 x_0) 上该函数列 $\{y_n(x)\}_{n\ge 0}$ 有极限 $y(x)$;

(c) 证明在这个区间 I 上 $y(x)$ 是初值问题 (9.3.1) 的解.

一般来说, 难点在于如何完成步骤 (b). 实际上, 我们考虑如下的 **Picard 逐次迭代列 (Picard's successive approximations sequence)**

$$\begin{aligned}y_0(x)&:=y_0,\\ y_n(x)&:=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y_{n-1}(t))\,dt,\quad n=1,2,\cdots.\end{aligned}$$

如果步骤 (b) 成立, 则得到

$$y(x)=\lim_{n\to\infty}y_n(x),\quad x\in I,$$

且

$$\begin{aligned} y(x) &= \lim_{n\to\infty} y_{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,dt\right] \\ &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, \lim_{n\to\infty} y_n(t)\right) dt = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt. \end{aligned}$$

这里我们假设求极限和求积分可以交换. 因此一旦步骤 (b) 成立, 那么解的存在性就得证了.

当然 $\{y_n(x)\}_{n\geq 0}$ 不一定要按照上面的作法, 其实有很多种不同的构造.

9.3.1 Peano 存在定理

1886 年, Giuseppe Peano 在论文[32]证明了初值问题 (9.3.1) 有解, 如果假设 f 是连续的, 但是这个证明是不正确的. 1890 年的论文[33]中, Peano 利用完全不同的方法 (逐次逼近法), 把他 1886 年的结果推广到一阶微分方程组. 通过Mie的论文[34], Peano 1890 年的逐次逼近法才变成如今的样子. 然而, Peano 1886 年的原始证明直到 1915 年才被Osker Perron重拾[35].

其实 Peano 存在定理在Giuseppe Peano之前就已经被研究过. 1884 年, Cauchy 证明了[36]存在性, 如果 f 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 都是连续, 或者 f 是**同源的 (synectic)**(是指连续的、单调的且可导的). 1856 年, Charles Briot 和Jean Bouquet 改进了[37]Cauchy 的结果. 1868 年, Rudolf Lipschitz 给出了一个存在性定理[38], 这里关于 f 的限制条件较少些.

因此 Peano 存在定理又称作 Cauchy-Peano 定理. Peano 存在定理有不少不同证明或初等证明, 比如

- Osgood, W. F. *Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung $dy/dx = f(x, y)$ ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitzchen Bedingung*, Monatshefte für Mathematik., **9**(1898), 331 - 345.
- Perron, O. *Ein neuer existenzbeweis für die integrale der differentialgleichung $y' = f(x, y)$*, Math. Ann., **76**(1915), 471 - 484.
- Grunsky, H. *Ein konstrucktiver beweis für die lösbarkeit der differentialgleichung $y' = f(x, y)$ bei stetigem $f(x, y)$*, Jahresber. Deutsch. Math. Ver., **63**(1960), no. 1, 78 - 84.

---

[32]Peano, G. *Sull'integrabilità delle equazioni differenziali del primo ordine*, Atti Accad. Sci. Torino., **21**(1886), 437 - 445.

[33]Peano, G. *Demonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires*, Mathematische Annalen. **37**(1890), no. 2, 182 - 228.

[34]Mie, G. *Beweis der integrierbarkeit gewöhnlicher differentialgleichungssysteme nach Peano*, Math, Ann., **43**(1893), 553 - 568.

[35]Perron, O. *Ein neuer existenzbeweis für die integrale der differentialgleichung $y' = f(x, y)$*, Math. Ann., **76**(1915), 471 - 484.

[36]参见 Moigno, F. *Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral*, vol. **2**, Paris, 1844, pp. 395 - 396.

[37]Briot, C.; Bouquet, J. *Sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles*, J. École Polytechnique, **21**(1856), 133 - 198.

[38]Lipschitz, R. *Disamina della possibilità d'integrare completamente un dato sistema di equazioni differenziali ordinarie*, Ann. Mat. Pura Appl., **2**(1868), no. 2, 288 - 302. 法语翻译见 Lipschitz, R. *Sur la possibilité d'intégrer complètement un système donné d'équations difféentielles*, Bull. Sci. Math., **10**(1876), 149 - 159.

- Kennedy, Hubert C. *Is there an elementary proof of Peano's existence theorem for first order differential equations?*, Amer. Math. Monthly, **76**(1969), no. 9, 1043 - 1045.
- Walter, W. *There is an elementary proof of Peano's existence theorem*, Amer. Math. Monthly, **78**(1971), no. 9, 170 - 173.
- Walter, J. *On elementary proofs of Peano's existence theorem*, Amer. Math. Monthly, **80**(1973), no. 3, 282 - 286.
- Dow, M. A.; Výborný, R. *Elementary proofs of Peano's existence theorem*, J. Aust. Math. Soc., **15**(1973), no. 3, 366 - 372.
- Gardner, C. *Another elementary proof of Peano's existence theorem*, Amer. Math. Monthly, **83**(1976), no. 7, 556 - 560.
- Pouso, R. L. *Peano's existence theorem revisted*, arXiv: 1202.1152v1

假设函数 $f(x,y)$ 在矩形区域

$$D := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x-x_0|\le a,\ |y-y_0|\le b\right\}$$

内连续, 其中 a, b 是两个给定的正常数. 令

$$M := \max_{(x,y)\in D}|f(x,y)|, \quad O := (x_0, y_0).$$

过 O 做斜率分别为 M 和 $-M$ 的两条直线

$$y = \pm M(x-x_0)+y_0$$

交矩形 D 的上下边 $y = y_0 \pm b$ 于四个点; 这四个点的横坐标为 $x_0 \pm \frac{b}{M}$ (此时 $a \ge \frac{b}{M}$). 记 $B = (x_0 + b/M, y_0 + b)$ 和 $C = (x_0 + b/M, y_0 - b)$. 如果 $\alpha < \frac{b}{M}$, 此时两条直线 $y = \pm M(x-x_0)+y_0$ 交矩形 D 的左右边 $x = x_0 \pm a$ 于四个点; 这四个点的横坐标为 $x_0 \pm a$. 记 $B = (x_0 + a, y_0 + aM)$ 和 $C = (x_0 + a, y_0 - aM)$.

令

$$\alpha := \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \quad \mathcal{N} := \Delta OBC,$$

并把区间 $[x_0, x_0+\alpha]$ 进行 n 等分得到

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n = x_0 + \alpha, \quad x_i := x_0 + \frac{i}{n}\alpha.$$

从 $O = (x_0, y_0)$ 出发向右作斜率为 $f(x_0, y_0)$ 的直线段到点 (x_1, y_1), 显然这个直线段含在 $\mathcal{N}$ 内. 从点 (x_1, y_1) 出发向右作斜率为 $f(x_1, y_1)$ 的直线段到点 (x_2, y_2), 显然这个直线段含在 $\mathcal{N}$ 内. 继续这个过程直到 (x_n, y_n), 就得到了从点 (x_0, y_0) 出发的右折线——Euler-Cauchy 右折线 (Euler-Cauchy right polyline). 类似地, 我们可到从点 (x_0, y_0) 出发的左折线——Euler-Cauchy 左折线 (Euler-Cauchy left polyline). 两者合起来就得到了 **Euler-Cauchy 折线 (Euler-Cauchy polyline)**.

下面我们来研究当 n 很大时 Euler-Cauchy 折线的形态, 为此我们需要如下的等度连续概念和 Ascoli-Arzelà 定理, 即如何从给定连续函数列中找到一个收敛的函数子列.

定义 9.6. (等度连续和一致有界)

假设 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 是定义在区间 $I=[a,b]$ 上的连续函数列.

- 称 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ **等度连续的 (equicontinuous)**, 如果对任意给定的 $\epsilon>0$, 存在正数 $\delta>0$, 使得对任意满足 $|x_1-x_2|<\delta$ 的 $x_1,x_2\in I$ 及任意 n, 都有
$$|f_n(x_1)-f_n(x_2)|<\epsilon.$$
- 称 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ **一致有界的 (uniformly bounded)**, 如果存在与 x 和 n 都无关的常数 K, 使得
$$|f_n(x)|\leq K,\quad x\in I,\ n=1,2,\cdots$$
成立.

♣

等度连续的概念是由两位意大利数学家Ascoli Giulio在论文[39]中和Arzelà Cesare在论文[40]中提出的, 而Arzelà在 1895 年的论文[41]中首次给出了定理的完整证明. 1906 年，法国数学家Fréchet Maurice在论文[42]中又将这个定理进行了推广.

定理 9.5. (Ascoli-Arzelà 定理)

(1) 假设 $A\subset I$ 是有限区间 I 中的稠密点集. 如果 I 上的连续函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 是等度连续的, 且对任意 $x\in A$, $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 都收敛, 则该函数列在 I 上是一致收敛的且其极限函数 $f(x)$ 在 I 中连续.
(2) 有限闭区间 I 上一致有界、等度连续的函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 至少有一个在 I 上一致收敛的函数子列 $\{f_{n_k}(x)\}_{k\geq 1}$ 且其极限函数 $f(x)$ 在 I 上连续.

♡

证: (1) 任给 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对任意满足 $|x_1-x_2|<\delta$ 的 $x_1,x_2\in I$ 及任意 n, 都有
$$|f_n(x_1)-f_n(x_2)|<\epsilon.$$
把区间 I 分成长度小于 δ 的 p 个闭子区间 I_i, $1\leq i\leq p$, 并在每个 I_i 中取 $x_i\in I\cap A$. 对上述 $\epsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得对任意 $m,n\geq N$ 和所有 x_i 有
$$|f_m(x_i)-f_n(x_i)|<\epsilon,\quad 1\leq i\leq p.$$
这样对任意 $x\in I$, 存在 I_i 和 $x_i\in I_i\cap A$ 满足 $x\in I_i$ 且 $|x-x_i|<\delta$. 从而对任意 $m,n\geq N$ 得到
$$|f_m(x)-f_n(x)|=|f_m(x)-f_m(x_i)|+|f_m(x_i)-f_n(x_i)|+|f_n(x_i)-f_n(x)|<3\epsilon.$$
这就表明连续函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 是一致收敛的, 从而得到其极限函数存在且是连续的.

(2) 任取 I 中的一个稠密点集, 比如取 $A=\{x_1,x_2,\cdots\}$ 为 I 中所有有理数的集合.

[39] Ascoli, G. *Le curve limiti di una varietà data di curve*, Atti della R. Accad. Dei Lincei Memorie della Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., **18**(1883-1884), no. 3, 521 - 586.

[40] Arzelà, C. *Un'osservazione intorno alle serie di funzioni*, Rend. Dell' Accad. R. Delle Sci. Dell'Istituto di Bologna, (1882-1883), 142 - 159.

[41] Arzelà, C. *Sulle funzioni di linee*, Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna Cl. Fis. Mat., **5**(1895), no. 5, 55 - 74.

[42] Fréchet, M. *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **22**(1906), 1 - 74.

根据 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 的一致有界性, 存在正常数 K 使得对任意 $x \in I$ 和任意 $n \geq 1$ 都有 $|f_n(x)| \leq K$. 因为 $|f_n(x_1)| \leq K$, 所以从 $\{f_n(x_1)\}_{n\geq 1}$ 中找到一个收敛子列 $\{f_{1n}(x_1)\}_{n\geq 1}$. 而 $|f_{1n}(x)| \leq K$, 所以从 $\{f_{1n}(x_2)\}_{n\geq 1}$ 中找到一个收敛子列 $\{f_{2n}(x_2)\}_{n\geq 1}$. 根据子列的选取, 我们知道下面两个数列

$$\{f_{2n}(x_j)\}_{n\geq 1}, \quad 1 \leq j \leq 2,$$

都是收敛的. 继续这个过程, 我们得到函数列 $\{f_{kn}(x)\}_{n\geq 1}, k \geq 1$, 使得下面 k 个数列

$$\{f_{kn}(x_j)\}_{n\geq 1}, \quad 1 \leq j \leq k,$$

都收敛. 利用对角线法构造函数列 $\{f_{nn}(x)\}_{n\geq 1}$, 使得对任意 $x_j \in A$ 数列 $\{f_{nn}(x_j)\}_{n\geq 1}$ 都收敛.

最后结合 (1) 得到一致收敛的函数子列. □

定理 9.6. (Peano 存在定理)

假设 $f(x, y)$ 在矩形区域

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\}$$

上连续, 则初值问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

在区间 $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ 上至少存在一个解, 其中

$$\alpha := \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \quad M := \max_{(x,y)\in D} |f(x, y)|.$$

♡

证: 在区间 $[x_0, x_0 + \alpha]$ 上的 Euler-Cauchy 右折线 $y = \phi_n(x)$ 为

$$\phi_n(x) = y_0 + \sum_{1\leq i\leq N} f(x_{i-1}, y_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + f(x_N, y_N)(x - x_N),$$

其中 N 是满足 $x \in (x_N, x_{N+1}]$ $(0 \leq N \leq n - 1)$ 的正整数.

(1) Euler-Cauchy 右折线在区间 $[x_0, x_0 + \alpha]$ 上是初值问题的近似解, 即 $\phi_n(x)$ 满足

$$\phi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \phi_n(x))\, dx + \delta_n(x),$$

其中 $\{\delta_n(x)\}n \geq 1$ 在 $[x_0, x_0 + \alpha]$ 上是一致收敛到 0. 事实上,

$$\begin{aligned}
\delta_n(x) &= \phi_n(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(x, \phi_n(x))\, dx \\
&= \sum_{1\leq i\leq N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x_{i-1}, y_{i-1}) - f(x, \phi_n))]dx + \int_{x_N}^{x} [f(x_N, y_N) - f(x, \phi_n(x))]dx.
\end{aligned}$$

根据构造, 在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上成立不等式

$$|x - x_{i-1}| \leq \frac{\alpha}{n}, \quad |\phi_n(x) - y_{i-1}| \leq M|x - x_{i-1}| \leq \frac{M\alpha}{n}.$$

因为 $f(x, y)$ 在矩形区域 D 上是连续的, 所以 $f(x, y)$ 在 D 上是一致连续的, 即对任意给定 $\epsilon > 0$, 存在 $K \in \mathbb{N}$, 使得对任意 $n > K$ 和任意 $x \in [x_{i-1}, x_i]$, 都有

$$|f(x_{i-1}, y_{i-1}) - f(x, \phi_n(x))| < \frac{\epsilon}{\alpha}.$$

从而得到

$$
\begin{aligned}
|\delta_n(x)| &\leq \sum_{1\leq i\leq N}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x_{i-\text{‘}},y_{i-1})-f(x,\phi_n(x))|dx \\
&\quad +\int_{x_N}^{x}|f(x_N,y_N)-f(x,\phi_n(x))|dx \\
&\leq \sum_{1\leq i\leq N}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{\epsilon}{\alpha}dx+\int_{x_N}^{x}\frac{\epsilon}{\alpha}dx \leq \sum_{1\leq i\leq N}\frac{\epsilon}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{n}+\frac{\epsilon}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{n} \\
&= N\cdot\frac{\epsilon}{n}+\frac{\epsilon}{n} = \frac{N+1}{n}\epsilon \leq \epsilon.
\end{aligned}
$$

(2) Euler-Cauchy 右折线函数列 $\{\phi_n(x)\}_{n\geq 1}$ 在区间 $[x_0,x_0+\alpha]$ 上是一致有界且等度连续的. 事实上, 这个函数列包含在区域 D 内, 因此对任意 $x\in[x_0,x_0+\alpha]$ 和 $n\geq 1$ 都有 $|\phi_n(x)-y_0|\leq b$. 又因为 Euler-Cauchy 右折线的斜率介于 $-M$ 到 M 间, 所以 $|\phi_n(s)-\phi_n(t)|\leq M|s-t|$.

(3) 利用**定理 9.5**, 我们可以找到在 $[x_0,x_0+\alpha]$ 上一致收敛的函数子列 $\{\phi_{n_j}(x)\}_{j\geq 1}$, 其极限函数

$$\phi(x)=\lim_{j\to\infty}\phi_{n_j}(x),\quad x\in[x_0,x_0+\alpha]$$

在 $[x_0,x_0+\alpha]$ 上是连续函数. 在 (1) 中令 $n\to\infty$ 得到

$$\phi(x)=y_0+\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}f(x,\phi_n(x))dx=y_0+\int_{x_0}^{x}f\left(x,\lim_{n\to\infty}\phi_n(x)\right)dx=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,\phi(x))dx.$$

这样我们在 $[x_0,x_0+\alpha]$ 上得到了初值问题的一个连续解 (从而是连续可微解) $y=\phi(x)$. 同样可证, 初值问题在 $[x_0-\alpha,x_0]$ 上也至少又有一个连续可微解, 这样合起来就得到了初值问题在区间 $[x_0-\alpha,x_0+\alpha]$ 的一个解. □

注 9.2

(1) 当函数 $f(x,y)$ 不是连续时, 初值问题 (9.3.1) 不一定有连续解. 比如, 考虑二元函数

$$
f(x,y):=\begin{cases}
1, & 1\leq|x+y|<+\infty, \\
(-1)^n, & \frac{1}{n+1}\leq|x+y|<\frac{1}{n},\ n\geq 1, \\
0, & |x+y|=0.
\end{cases}
$$

容易验证此时初值问题

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\quad y(0)=0,$$

没有连续解.

(2) 上世纪三十年代, 前苏联数学家Mikhail Alekseevich Lavrentyev 在矩形区域 D 内构造了一个连续函数 $f(x,y)$, 使得微分方程 $dy/dx=f(x,y)$ 在 D 内每一点处至少有两条积分曲线通过. 这就表明**定理 9.6** 不能保证解的唯一性.

(3) 我们可以利用**定理 9.6** 来证明隐函数定理: 假设函数 $F(x,y)$ 在平面上区域 G 内是连续可微的, 且存在 $(x_0,y_0)\in G$ 使得

$$F(x_0,y_0)=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0,$$

则存在常数 $h>0$ 使得方程

$$F(x,y)=0$$

在区间 $[x_0-h,x_0+h]$ 上有唯一解 $y=\phi(x)$, 满足 $\phi(x_0)=y_0$.

证: 因为 $F(x,y)$ 在 G 上是连续可微的且 $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$, 所以存在 $a,b>0$ 使得对任何 $(x,y)\in D$ 都有 $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\neq 0$, 这里

$$D:=\{(x,y)\in G:|x-x_0|\leq a,\ |y-y_0|\leq b\}.$$

考虑 D 上的初值问题

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)},\quad y(x_0)=y_0.$$

根据**定理 9.6**, 存在 $h>0$ 使得上述初值问题在区间 $[x_0-h,x_0+h]$ 上至少有一个解 $y=\varphi(x)$, 即

$$\phi'(x)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,\phi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,\phi(x))},\quad \phi(x_0)=y_0.$$

从而得到 $dF(x,\phi(x))=0$. 利用 $F(x_0,\phi(x_0))=0$, 可知 $F(x,\phi(x))=0$, $x\in[x_0-h,x_0+h]$.

假设在区间 $[x_0-h,x_0+h]$ 上有第二个解 $y=\psi(x)$ 满足 $F(x,\psi(x))=0$ 和 $\psi(x_0)=y_0$. 则得到

$$0=F(x,\phi(x))-F(x,\psi(x))=[\phi(x)-\psi(x)]\int_0^1\frac{\partial F}{\partial y}(x,t\phi(x)+(1-t)\psi(x))\,dt.$$

因为 $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$ 且 $(c,t\phi(x)+(1-t)\psi(x))\in D$, 所以

$$\int_0^1\frac{\partial F}{\partial y}(x,t\phi(x)+(1-t)\psi(x))\,dt\neq 0.$$

事实上, 不妨假设 $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)>0$, 则 $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)>0$ 对任何 $(x,y)\in D$ 都成立, 从而导致上述积分也为正. 这样我们就得到 $\phi(x)=\psi(x)$. □

♣

我们考察一个特殊的初值问题

$$\frac{dy}{dx}=H(x),\quad y(0)=0,$$

这里 H 表示 **Heaviside 函数 (Heaviside function)**, 即

$$H(x):=\begin{cases}0, & \leq 0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

为了求解这个微分方程, 我们很自然地想到**斜坡函数 (ramp function)**

$$y=\int_0^x H(t)\,dt=\begin{cases}0, & x\leq 0,\\ x, & x>0,\end{cases}$$

但是这个解在 $x=0$ 处不可导. 注意到上述斜坡函数地不可导点只有一个 $x=0$, 换而言之, 斜坡函数是几乎处处可导. 因此, 我们可以引入广义解的概念.

称函数 $y=y(x)$ 是初值问题 (9.3.1) 的**广义解 (solution in the extended sense)**, 如果 y 是绝对连续 (从而推出 y 的导数是几乎处处存在的)、满足初值条件 $y(x_0)=y_0$ 且几乎处

处满足微分方程 $dy/dx = f(x, y)$.

Constantin Carathéodory把**定理 9.6**作了如下的推广, 即不一定要求 $f(x, y)$ 是连续的.
假设 $f(x, y)$ 在矩形区域

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\}$$

上满足 Carathéodory 条, 则初值问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

在 x_0 附近上至少存在一个广义解.

我们称二元函数 $f : D \to \mathbb{R}$ 满件足 **Carathéodory 条件 (Carathéodory condition)**, 如果

- 对每个固定的 x, $f(x, y)$ 作为 y 的函数是连续的,
- 对每个固定的 y, $f(x, y)$ 作为 x 的函数是 Lebesgue-可测的,
- 存在 Lebesgue-可测函数 $F : [x_0 - a, x_0 + a] \to [0, +\infty)$ 满足 $|f(x, y)| \leq F(x)$ 对任何 $(x, y) \in D$ 都成立.

9.3.2 Picard 存在唯一定理

根据**注 9.2**, 对初值问题 (9.3.1) 来说二元函数 $f(x, y)$ 的连续性不足以保证解的唯一性. 因此我们要对 $f(x, y)$ 加上比连续性更强的条件, 比如 Lipschitz 条件.

在本小节, 我们介绍 Picard 存在唯一定理. 这个定理又叫做 Cauchy-Lipschitz (法语文献) 定理或 Picard-Lindelöf 定理 (英语文献), 而在有些文献中被称为 Cauchy-Lipschitz-Picard 定理或 Cauchy-Lipschitz-Picard-Lindelöf 定理.

该定理处理的问题由来已久[43], 最初被称为 "切线反问题": 在空间的每一点处放置一条直线, 寻找曲线使得在每一点的切线和所给定的直线重合. 有人认为, Kepler在 1615 年对酒桶容量进行研究时提出了这个问题[44]. 1768 年, colorredEuler 在《Institutionum calculi integralis》中研究了如何解决这个问题, 基本想法就是之前我们讲过的 Euler-Cauchy 折线法.

Cauchy建立了第一个一般结果. 起初, 他详细说明了他的方法: "在我综合理工学院的课程中, 正如我发表的关于积分微积分的大部分著作或回忆录一样, 我认为我应该颠倒这个顺序并首先将搜索放在首位, 不是针对一般积分, 而是针对特定积分; 因此, 常数或任意函数的确定 [对于偏微分方程] 不再与积分搜索分开. Cauchy在这里描述的是柯西问题. Cauchy在 1820 年发表的论文[45]中, 证明了初值问题的存在唯一性, 当然他假设 f 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 是连续且有界的. 1835 年, 他的方法被推广到全纯函数情形.

Rudolf Lipschitz在显然不知道Cauchy工作内容的情况下, 通过引入现在以他名字命名的条件 (Lipschitz 条件), 证明了一个与 Cauchy 局部定理"本质上等价"的定理[46]. 继Lazarus

[43]主要参考了 https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème de Cauchy-Lipschitz

[44]Kepler, J. *Nova Stereometria doliorum vinariorum*, J. Plancus, 1615.

[45]Cauchy, A. *Note sur la nature des problèmes que présente le calcul intégral*, dans Exercices d'analyse et de physique mathématique, vol. **2**, Bachelier, 1841, p. 230 - 237.

[46]Lipschitz, R. *Disamina della possibilità d'integrare completamente un dato sistema di equazioni differenziali ordi-*

Fuchs 的工作之后, Émile Picard、Paul Painlevé[47] 和Henri Poincaré 开发了现代版本的微分方程分析, 特别是Poincaré在研究太阳系稳定性后提出的动力系统理论. 为此, Cauchy 和Lipschitz 的定理就变得不够充分, 人们要寻找新的定理.

我们目前看到的定理内容及证明, 是Ernst Lindlöf在 1894 年的论文[48]中所给出了——还是借助 Picard 逐次逼近法, 这是对Charles Émile Picard在 1893 年发表的论文[49]的推广 (Picard 逐次逼近法可追溯到他 1890 年的论文[50]). Picard 原文还包括对二阶微分方程的研究——还是利用逐次逼近法.

定义 9.7. (Lipschitz 条件, 1868)

假设 $f(x,y)$ 是定义在平面区域 G 内的二元函数. 如果对 G 中的每个有界闭集 $K\subset G$, 存在常数 $L_K>0$ 使得对所有 $(x,y_1),(x,y_2)\in G$ 函数 $f(x,y)$ 满足

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L_K|y_1-y_2|, \tag{9.3.3}$$

则称 $f(x,y)$ 在 G 中**对 y 满足局部 Lipschitz 条件 (local Lipschitz condition relative to y)**, L_K 称为**局部 Lipschitz 常数 (local Lipschitz constant)**. 如果常数 L_K 是和 K 无关的常数 L, 则称 $f(x,y)$ 在 G 中**对 y 满足整体 Lipschitz 条件 (global Lipschitz condition relative to y)**, L 称为**整体 Lipschitz 常数 (global Lipschitz constant)**. ♣

9.3.3 Osgood 存在唯一定理

Osgood, W. F. *Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung* $dy/dx=f(x,y)$ *ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitzchen Bedingung*, Monatshefte für Mathematik., **9**(1898), 331 - 345.

narie, dans Annali di Matematica Pura ed Applicata, vol. **2**, 1868 - 1869, p. 288 - 302.

[47]Painlevé, P. *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles*, Hermann, Paris, 1897.

[48]Lindelöf, E. *Sur l'application de la méthode des approximations successives aux équations différentielles ordinaires du premier ordre*, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, **118**(1894), 454 - 457. 原文电子版参见 https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3074r/f454.item

[49]Picard, C. E. *Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles ordinaires*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, **9**(1893), 217 - 272. 原文电子版参见 http://portail.mathdoc.fr/JMPA/PDF/JMPA 1893 4 9 A4 0.pdf

[50]Picard, C. E. *Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et l méthode des approximations successives*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, **6**(1890), 145 - 210. 原文电子版参见 http://sites.mathdoc.fr/JMPA/PDF/JMPA 1890 4 6 A3 0.pdf

9.3.4 Cauchy 存在定理

9.3.5 解的延拓和整体解

9.3.6 比较定理和解的存在区间

9.3.7 奇解

9.3.8 一阶常微分方程组和高阶常微分方程

9.3.9 解的连续依赖性

9.4 一阶线性常微分方程组

9.4.1 矩阵函数

9.4.2 线性常微分方程组解的结构

9.4.3 线性常微分方程组的通解

9.4.4 线性周期系数常微分方程组

9.5 高阶线性常微分方程

9.5.1 高阶线性常微分方程解的结构

9.5.2 高阶常系数线性常微分方程的通解

9.5.3 高阶变系数线性常微分方程的通解

9.5.4 二阶线性常微分方程解的 Strum 零点分布定理

9.6 常微分方程的几类实效求法

9.6.1 幂级数求解法

9.6.2 Laplace 变换求解法

9.6.3 Euler 数值法

9.6.4 Runge-Kutta 数值法

9.6.5 常微分方程组的数值法

9.7 常微分方程的边值问题

9.7.1 边值问题的分类和可解性

9.7.2 二阶线性常微分方程的边值问题

9.7.3 Sturm-Liouville 边值问题

9.7.4 Green 函数

9.7.5 上、下解方法

9.8 一阶偏微分方程

9.8.1 首次积分

9.8.2 一阶齐次线性偏微分方程

9.8.3 一阶拟线性偏微分方程

9.8.4 一阶非线性偏微分方程

9.8.5 一阶偏微分方程解的几何意义

第 十 章　常微分方程定性理论

第三部分

多变量理论

第十一章 多变量极限理论

亦非有心者所能得远, 亦非无心者所能得近. —-《冲虚至德真经》, 卷第四 (仲尼第四)

11.1 Euclidean 空间及其子集

本节引入 Euclidean 空间中的一些基本概念. 作为自然的推广, 我们介绍一般拓扑学的定义. 拓扑学的一般理论是Fleix Hausdorff 在其《Grundzüge der mengenlehre》(1914) 中提出的. 但是在他的 1906 年的博士论文《Sur quelques points de calcul fonctionnel》中, Maurice Fréchet 就已经有了类似的概念. 在博士论文中, Fréchet 引入了点集 E 的极限、E 的导集、E 的内点、E 是闭集的、E 是紧集等概念, 并将闭区间套定理作了推广.

11.1.1 Euclidean 空间

回顾下 **n 维 Euclidean 空间 (n-dimensional Euclidean space)** 的定义:

$$\mathbb{R}^n := \left\{\boldsymbol{x} = (x^1, \cdots, x^n) : x^i \in \mathbb{R},\ 1 \le i \le n\right\}. \tag{11.1.1}$$

$\mathbb{R}^n$ 中的元素称为 **n 维向量**或简称为**向量 (vector)**. 定义 n 个自然映射如下

$$\pi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{x} \longmapsto x^i, \tag{11.1.2}$$

其中 $1 \le i \le n$. 我们把 π_i 称为 $\mathbb{R}^n$ 上的**第 i 个投影 (i-th projection)**.

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ 构成了一个**向量空间 (vector space)**:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} := (x^1 + y^1, \cdots, x^n + y^n), \tag{11.1.3}$$

$$\lambda\boldsymbol{x} \equiv \lambda \cdot \boldsymbol{x} := (\lambda x^1, \cdots, \lambda x^n). \tag{11.1.4}$$

定义 11.1. (群)

称集合 G 为**群 (group)** 如果存在映射, 称为**乘法** $\cdot$,

$$G \times G \longrightarrow G, \quad (x, y) \longmapsto x \cdot y \equiv xy,$$

满足条件

(1) **(结合律)** 任意 $x, y, z \in G \Longrightarrow (xy)z = x(yz)$;

(2) **(单位元)** 存在 $e \in G$, 称为**单位元 (identity)**, 对任意 $x \in G$ 都有 $xe = ex = x$ 成立;

(3) **(逆元)** 对任意 $x \in G$, 存在唯一的 $x^{-1} \in G$ 使得 $xx^{-1} = e = x^{-1}x$ 成立.

群 G 称为 **Abelian 群 (Abelian group)** 如果 $xy = yx$ 对任意 $x, y \in G$ 都成立. ♣

练习 11.1

证明 $(\mathbb{R}^n, +)$ 是群.

练习 11.2

证明所有 $n \times n$ 实矩阵组成的集合 $\mathbf{Max}(n, \mathbb{R})$ 在矩阵乘法下是群, 但不是 Abel 群.

练习 11.3

证明所有 $n \times n$ 非奇异实矩阵组成的集合 $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ 在矩阵乘法下是群.

练习 11.4

定义映射如下:

$$\mathbf{Max}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2}, \quad A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \longmapsto (a_{11}, \cdots, a_{1n}, \cdots, a_{n1}, \cdots, a_{nn}).$$

证明上述映射是同构.

练习 11.5

定义映射如下:

$$\det : \mathbf{Max}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad A \longmapsto \det(A).$$

证明 $\det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$. 定义

$$\mathbf{GL}^{\pm}(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) | \det(A) = \pm 1\}, \quad \mathbf{SL}(n, \mathbb{R}) := \mathbf{GL}^{+}(n, \mathbb{R}).$$

证明

$$\mathbf{SU}(2, \mathbb{R}) := \{A \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{R}) | AA^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}}A = I_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ 可作用在复平面 $\mathbb{C}$ 上:

$$\mathbf{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \left(A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, z \right) \longmapsto Az := \frac{az + b}{cz + d}.$$

证明若 $z \in \mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ 则 $Az \in \mathcal{H}$ 对任意 $A \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ 都成立.

定义 11.2. (群同态和群同构)

两个群 G_1, G_2 之间的映射 $f : G_1 \to G_2$ 称为**群同态 (group homomorphism)** 如果

$$f(x_1 y_1) = f(x_1) f(y_1), \quad 任意\ x_1, y_1 \in G_1,$$

这里左边是用 G_1 中的乘法而右边是用 G_2 中的乘法. 称 G_1 **群同构于 (group isomorphic)** G_2 如果存在群同态 $f_1 : G_1 \to G_2$ 和 $f_2 : G_2 \to G_1$ 满足恒等式 $f_1 \circ f_2 = 1_{G_2}$ 和 $f_2 \circ f_1 = 1_{G_1}$. 如果两个群 G_1 和 G_2 群同构, 则记作 $G_1 \cong G_2$.

练习 11.6

证明群和群同态构成了一个范畴 **Group**.

定义 11.3. (子群)

假设 H 是群 G 的子集. 称 H 为 G 的**子群 (subgroup)** 如果 $xy^{-1} \in H$ 对恩任意 $x, y \in H$ 都成立. 此时记作 $H < G$.

练习 11.7

证明 $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ 是 $\mathbf{Max}(n, \mathbb{R})$ 的子群.

定义子群 $H < G$ 的**左/右陪集 (left/right coset)** 如下:

$$gH := \{gh : h \in H\}, \quad Hg := \{hg : h \in H\}. \tag{11.1.5}$$

称子群 H 是 G 的**正规子群 (normal subgroup)** 如果 $ghg^{-1} \in H$ 对任意 $h \in H$ 和 $g \in G$ 都成立. 此时记作 $H \lhd G$.

练习 11.8

证明 $H \lhd G$ 当且仅当 $Hg = gH$ 对任意 $g \in G$ 都成立.

练习 11.9

证明 $\Lambda(n, \mathbb{R}) \lhd \mathbf{Max}(n, \mathbb{R})$, 其中

$$\Lambda(n, \mathbb{R}) := \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} =: \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \middle| \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R} \right\}$$

如果 $H \lhd G$ 我们可以定义**商群 (quotient group)** 如下

$$G/H := \{gH : g \in G\}, \tag{11.1.6}$$

这里 $(xH)(yH) := (xy)H$, $x, y \in G$.

练习 11.10

证明 $\mathbb{Z} \lhd \mathbb{R}$ 且 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

在 $\mathbb{R}^n$ 中可引入**内积 (inner product)** 的概念:

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \equiv \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle := \sum_{1 \le i \le n} x^i y^i. \tag{11.1.7}$$

其几何意义 (直观地可考虑 $n = 2$) 就是来衡量什么时候两个向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 垂直. 一般地, 定义两个向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是**垂直的 (perpendicular)**, 记作 $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$, 如果 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$. 记号:

$$\mathbb{E}^n := (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle). \tag{11.1.8}$$

定理 11.1

对任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$, 和任意 $a, b \in \mathbb{R}$, 有如下性质:

(1) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \ge 0$ 且等号取到当且仅当 $\boldsymbol{x} = 0$;

(2) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$;

(3) $\langle a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\rangle = a\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle + b\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\rangle$;

(4) **(Schwarz 不等式)** $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle^2 \le \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle$ 且等号取到当且仅当 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 平行, 即存在常数 a,b 满足 $a^2+b^2\ne 0$ 和 $a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$.

证明: 只给出 (4) 的证明. 如果 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 则结论显然成立, 故我们不妨假设 $\boldsymbol{x}\ne\boldsymbol{0}$. 考虑关于 $t\in\mathbb{R}$ 的一元二次多项式

$$P(t) := \langle t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle t^2 + 2\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle t + \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle.$$

由于多项式 $P(t)$ 非负, 所以判别式 $\Delta = 4\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle^2 - 4\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle \le 0$.

当 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 平行时, 存在不全为零的数 a,b 满足 $a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}=0$. 不妨假设 $b\ne 0$ 从而得到

$$\boldsymbol{y} = -\frac{a}{b}\boldsymbol{x}$$

和

$$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle^2 = \left(-\frac{a}{b}\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\right)^2 = \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\left(\frac{a^2}{b^2}\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\right) = \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle.$$

反之, 假设 (4) 中等号取到, 则多项式 $P(t)$ 的判别式 $\Delta = 0$. 因此仅有一个根 t_0 满足 $P(t_0)=0$, 即 $t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=0$. □

定义 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 的**范数 (norm)** 如下:

$$|\boldsymbol{x}| := \sqrt{\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle} = \left(\sum_{1\le i\le n}|x^i|^2\right)^{1/2}. \tag{11.1.9}$$

利用 Schwarz 不等式立即得到

命题 11.1. (三角不等式)

对任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ 有如下三角不等式成立

$$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}| \le |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|. \tag{11.1.10}$$

事实上 $\mathbb{R}^n$ 上面存在很多 “范数” 也满足不等式 (11.1.10):

(1) **p-范数 (p-norm)**, 这里 $p\ge 1$:

$$|\boldsymbol{x}|_p := \left(\sum_{1\le i\le n}|x^i|^p\right)^{1/p}. \tag{11.1.11}$$

特别地, $|\boldsymbol{x}|_2 = |\boldsymbol{x}|$.

(2) **∞-范数 (∞-norm)**:

$$|\boldsymbol{x}|_\infty := \max_{1\le i\le n}|x^i|. \tag{11.1.12}$$

(3) **对数范数 (ln-norm)**:

$$|\boldsymbol{x}|_{\ln} := \ln(1+|\boldsymbol{x}|). \tag{11.1.13}$$

(4) **商范数 (quotient-norm)**:

$$|\boldsymbol{x}|_{\mathbf{q}} := \frac{|\boldsymbol{x}|}{1+|\boldsymbol{x}|}. \tag{11.1.14}$$

练习 11.11

证明 (11.1.11) – (11.1.14) 都满足相应的三角不等式 (11.1.10).

对任意两个非零向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ 定义它们之间的**夹角 (angle)** 为

$$\theta := \arccos\frac{\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}\in[0,\pi]. \tag{11.1.15}$$

显然 $\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$ 当且仅当 $\theta=\pi/2$.

$\mathbb{R}^n$ 中两个向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 间的**距离 (distance)** 定义为

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| = \left(\sum_{1\le i\le n}|x^i-y^i|^2\right)^{1/2}. \tag{11.1.16}$$

定理 11.2. ($\mathbb{R}^n$ 是距离空间)

(11.1.16) 中定义的距离 d 满足:

(1) **(正定性) (positivity)**: $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\ge 0$ 且等号取到当且仅当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$;

(2) **(对称性) (symmetry)**: $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$, 任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$;

(3) **(三角不等式) (triangle inequality)**: $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\le d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$, 任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^n$.

证明: 显然. □

假设 X 是非空集合. 映射 $d: X\times X\to\mathbb{R}$ 称为 X 上的**度量 (metric)** 或**距离 (distance)** 如果 d 满足条件:

(1) **(正定性) (positivity)**: $d(x,y)\ge 0$ 且等号取到当且仅当 $x=y$;

(2) **(对称性) (symmetry)**: $d(x,y)=d(y,x)$, 任意 $x,y\in X$;

(3) **(三角不等式) (triangle inequality)**: 对任意 $x,y,z\in X$ 有

$$d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z).$$

称偶对 (X,d) 为**度量空间 (metric space)**. 如果把条件 (1) 换成

(1′) **(非负性) (Nonnegativity)**: $d(x,y)\ge 0$ 且 $d(x,x)=0$, 对任意 $x,y\in X$ 都成立.

则称 d 为**半度量 (semi-metric)** 且 (X,d) 为**半度量空间 (semi-metric space)**.

练习 11.12

假设 (X,d) 是半度量空间. 定义 $\sim$ 如下:

$$x\sim y \iff d(x,y)=0.$$

证明 $\sim$ 是等价关系. 把 x 的等价类记作 $[x]$, 并令 $\widetilde{X}\equiv X/\sim := \{[x]: x\in X\}$. 定义映射 $\widetilde{d}: \widetilde{X}\times\widetilde{X}\to\mathbb{R}$ 为

$$\widetilde{d}([x],[y]) := d(x,y), \quad [x],[y]\in\widetilde{X}.$$

证明 $\widetilde{d}$ 的定义不依赖等价类的代表元, 且 $(X/d,d) := (\widetilde{X},\widetilde{d})$ 是度量空间.

练习 11.13

根据 (11.1.11) – (11.1.14) 定义

$$d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|_p, \quad d_\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$$

和

$$d_{\ln}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|_{\ln}, \quad d_{\mathbf{q}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|_{\mathbf{q}}$$

都是 $\mathbb{R}^n$ 上的度量.

练习 11.14

证明 $(\mathbb{R}^2, d)$ 是半距离空间但不是距离空间, 其中

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := |(x^1-y^1)+(x^2-y^2)|, \quad 任意\ \boldsymbol{x}=(x^1,x^2), \boldsymbol{y}=(y^1,y^2)\in\mathbb{R}^2.$$

度量空间之间的映射 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 称为**等距映射 (isometry)** 如果 f 是双射且满足条件

$$d_X(x_1,x_2) = d_Y(f(x_1),f(x_2)), \quad 任意\ x_1,x_2\in X.$$

两个度量空间 (X,d_X) 和 (Y,d_Y) 是**等距的 (isometric)** 如果它们之间存在一个等距映射.

练习 11.15

证明 $(\mathbb{R}^2/d, d)$ 和 $(\mathbb{R}, d_1)$ 是等距的, 其中 $(\mathbb{R}^2, d)$ 由**练习 11.14** 给出.

11.1.2 Euclidean 空间中的点列收敛

令 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$. 称

$$\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r) := \{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n : |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|<r\} \tag{11.1.17}$$

为**以 $\boldsymbol{x}$ 为球心 r 为半径的球 (ball of radius r at point $\boldsymbol{x}$)**. 如果 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 则简记为 $\mathbb{B}^n_r := \mathbb{B}^n(\mathbf{0},r)$; 特别的 $\mathbb{B}^n := \mathbb{B}^n_1 = \mathbb{B}^n(\mathbf{0},1)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的**单位球 (unit ball)**.

定义 11.4. (有界点列和收敛点列)

假设 $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i\geq1}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的点列, 即 $\boldsymbol{x}_i\in\mathbb{R}^n, i\geq1$.

(1) 称点列 $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i\geq1}$ 是**有界的 (bounded)** 如果存在 $M>0$ 使得 $|\boldsymbol{x}_i|\leq M$ 对任意 $i\geq1$ 都成立, 即如果 $\boldsymbol{x}_i\in\mathbb{B}^n_M$.

(2) 称 $\boldsymbol{x}$ 是点列 $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i\geq1}$ 的**极限 (limit)**, 记作 $\lim_{i\to\infty}\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{x}$, 如果 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, 且对任意 $\epsilon>0$ 存在 $I\in\mathbb{N}$ 使得不等式

$$|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}|<\epsilon \quad\Longleftrightarrow\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},\epsilon),$$

对任意 $i\geq I$ 都成立.

(3) 称点列 $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i\geq1}$ 是**发散的 (divergent)** 如果它不收敛到 $\mathbb{R}^n$ 中的任何点.

利用映射 (11.1.2) 对给定的点列 $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i\geq 1}$ 得到 n 个数列

$$\{x_i^j = \pi_j(\boldsymbol{x}_i)\}_{i\geq 1}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

定理 11.3

$\lim_{i\to\infty} \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x} \Longleftrightarrow \lim_{i\to\infty} x_i^j = x^j \ (1 \leq j \leq n)$.

证明: 利用不等式

$$|x_i^j - x^j| \leq |\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}| = \sqrt{\sum_{1\leq k\leq n} (x_i^k - x^k)^2} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{1\leq k\leq n} |x_i^k - x^k|. \quad \square$$

这个定理表明了我们可以利用数列来研究 $\mathbb{R}^n$ 中点列的性质.

11.1.3 Euclidean 空间中的有界集、开集和闭集

假设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中的点集.

(1) 称 S 是**有界集 (bounded set)** 如果存在 $M > 0$ 使得 $S \subseteq \mathbb{B}_M^n$ 成立.

(2) 称 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 是 S 的**内点 (interior point)** 如果存在 $r > 0$ 满足 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}, r) \subseteq S$. S 的所有内点组成的集合记作 S° 或 $\mathrm{Int}(S)$, 称为 S 的**内部 (interior)**.

(3) 称 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 是 S 的**外点 (exterior point)** 如果存在 $r > 0$ 满足 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}, r) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus S$. S 的所有外点组成的集合记作 $\mathrm{Ext}(S)$, 称为 S 的**外部 (exterior)**.

(4) 称 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 是 S 的**边界点 boundary point)** 如果 $\boldsymbol{x} \notin \mathrm{Int}(S) \cup \mathrm{Ext}(S)$. S 的所有边界点组成的集合记作 ∂S 或 $\mathrm{Bdy}(S)$, 称为 S 的**边界 (boundary)**. 等价地, $\boldsymbol{x} \in \partial S$ 当且仅当对任意 $r > 0$ 球 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}, r)$ 即包含 S 的点又包含了 $\mathbb{R}^n \setminus S$ 的点.

显然成立关系: $\mathrm{Int}(S) = \mathrm{Ext}(\mathbb{R}^n \setminus S)$, $\mathrm{Ext}(S) = \mathrm{Int}(\mathbb{R}^n \setminus S)$, $\partial(S) = \partial(\mathbb{R}^n \setminus S)$, 和

$$S^\circ \subseteq S \quad 但是 \quad \partial S \text{ 可能不属于 } S. \tag{11.1.18}$$

比如 $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ 的边界 $\partial S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ 就不属于 S.

(5) 称 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 是 S 的**孤立点 (isolated point)** 如果存在 $r > 0$ 满足 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}, r) \cap S = \{\boldsymbol{x}\}$. S 的所有孤立点组成的集合记作 $\mathrm{Iso}(S)$. 显然 $\mathrm{Iso}(S) \subseteq \partial S \cap S$.

(6) 称 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 是 S 的**聚点 (cluster point)** 如果对任意 $r > 0$ 球 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}, r)$ 都包含无穷多个 S 中的点. S 的所有聚点组成的集合记作 S', 称为 S 的**导集 (derived set)**.

(7) S 的**闭包 (closure)** 定义为 $\overline{S} := S \cup S'$.

(8) 称 S 为**开集 (open set)** 如果 $S^\circ = S$.

(9) 称 S 为**闭集 (closed set)** 如果 $\overline{S} = S$.

命题 11.2

(a) $\boldsymbol{x} \in S' \Longleftrightarrow$ 对任意 $r > 0$ 都有 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}, r) \cap (S \setminus \{\boldsymbol{x}\}) \neq \emptyset \Longleftrightarrow$ 存在互异的点列 $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i\geq 1}$ 满足 $\boldsymbol{x}_i \in S$, $\boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{x}$ (任意 i) 且 $\lim_{i\to\infty} \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}$.

(b) $S^\circ \subseteq S'$ 且 $\partial S \setminus \mathrm{Iso}(S) \subseteq S'$.

(c) $\overline{S} = S \cup \partial S$.

证明: (a): $\Longrightarrow$ 显然. 假设对任意 $r>0$ 都有 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)\cap(S\setminus\{\boldsymbol{x}\})\neq\emptyset$. 取 $r_1=1$ 得到 $\boldsymbol{x}_1\neq\boldsymbol{x}$ 且 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},1)\cap S$. 令 $r_2:=|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}|>0$. 则得到 $\boldsymbol{x}_2\neq\boldsymbol{x}$ 且 $\boldsymbol{x}_2\in\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r_2)\cap S$. 令 $r_3:=|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}|>0$. 则得到 $\boldsymbol{x}_3\neq\boldsymbol{x}$ 且 $\boldsymbol{x}_3\in\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r_3)\cap S$. 这个过程一直下去就得到 S 中的无穷多个点.

(b): 显然.

(c): 根据 (b) 得到 $S\cup\partial S=S\cup(\partial S\setminus\mathrm{Iso}(S))\subseteq S\cup S'=\overline{S}$. 反之, 因为 $S'\subseteq S^\circ\cup\partial S$ 所以结论得证. □

例 11.1

考察集合

$$S:=\mathbb{B}^2\cup\{(\cos\theta,\sin\theta):\theta\in[0,\pi/2)\cup(\pi,3\pi/2]\}\cup\{(0,2),(-2,0)\}.$$

则

$$\begin{aligned}
S^\circ &= \mathbb{B}^2,\\
\partial S &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2=1\}\cup\{(0,2),(-2,0)\},\\
\mathrm{Iso}(S) &= \{(0,2),(-2,0)\},\\
S' &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2\leq 1\},\\
\overline{S} &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2\leq 1\}\cup\{(0,2),(-2,0)\}.
\end{aligned}$$

例 11.2

(1) $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)$ 是开集.

(2) $\boldsymbol{n}$ **维开矩形 ($\boldsymbol{n}$-dimensional open rectangle)**

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\equiv\prod_{1\leq i\leq n}(a^i,b^i):=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:a^i<x^i<b^i,\ 1\leq i\leq n\right\} \tag{11.1.19}$$

是开集.

(3) $\boldsymbol{n}$ **维闭矩形 ($\boldsymbol{n}$-dimensional closed rectangle)**

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\equiv\prod_{1\leq i\leq n}[a^i,b^i]:=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:a^i\leq x^i\leq b^i,\ 1\leq i\leq n\right\} \tag{11.1.20}$$

是闭集.

(4) $\boldsymbol{n}$ **维闭球 ($\boldsymbol{n}$-dimensional closed ball)**

$$\overline{\mathbb{B}}^n(\boldsymbol{x},r)\equiv\overline{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)}:=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n:|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|\leq r\} \tag{11.1.21}$$

是闭集.

(5) 假设 $S\neq\emptyset$. S 是开集 $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{R}^n\setminus S$ 是闭集. 因为 $\mathbb{R}^n$ 即开又闭, 如果规定 $\emptyset$ 也是即开又闭的集合, 则上述等价刻画对任何集合都成立.

定理 11.4

开集和闭集具有如下性质:

(i) 任意一族开集 $\{S_\alpha\}_\alpha$ 的并集 $\cup_\alpha S_\alpha$ 是开集;

(*ii*) 任意一族闭集 $\{T_\alpha\}_\alpha$ 的交集 $\cap_\alpha S_\alpha$ 是闭集;

(*iii*) 任意有限个开集 $S_1, \cdots, S_k$ 的交集 $\cap_{1\le i\le k} S_i$ 是开集;

(*iv*) 任意有限个闭集 $T_1, \cdots, T_k$ 的并集 $\cup_{1\le i\le k} T_i$ 是闭集。

证明: 显然. □

集合 X 上的**拓扑 (topology)** 是指 2^X 中的子集 $\mathcal{T}$, 其满足如下条件:

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;

(2) 任意 $U_\alpha \in \mathcal{T} \Longrightarrow \cup_\alpha U_\alpha \in \mathcal{T}$;

(3) 有限个 $U_1, \cdots, U_k \in \mathcal{T} \Longrightarrow \cap_{1\le i\le k} U_i \in \mathcal{T}$.

显然 $\mathcal{T}$ 至少包含两个元素 $\emptyset, X$. $\mathcal{T}$ 中的元素称为**开集 (open set)**. 开集的补集称为**闭集 (closed set)**. 偶对 $(X, \mathcal{T})$ 称为**拓扑空间 (topological space)**.

对任何集合 X 来说, 它上面的拓扑至少有两个:

- **平凡拓扑 (trivial topology)**: $\mathcal{T}_{\rm tri} = \{\emptyset, X\}$;
- **离散拓扑 (discrete topology)**: $\mathcal{T}_{\rm dis} = 2^X$.

一个是最小的拓扑, 而另一个是最大的拓扑.

练习 11.16

证明 $\mathcal{T}_{\rm tri}$ 和 $\mathcal{T}_{\rm dis}$ 都是拓扑.

如果取 $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上所有开集组成的集合, 则 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T})$ 就是一个拓扑空间.

假设 $(X, \mathcal{T})$ 是拓扑空间. $U \subseteq X$ 称为 $x \in X$ 的**邻域**[1]**(neighborhood)** 如果 $U \in \mathcal{T}$.

定义 11.5. (Hausdorff 空间)

拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 是 **Hausdorff** 如果对任意 $x, y \in X$ 且 $x \neq y$, 都分别存在相应的邻域 $U, V \in \mathcal{T}$ 满足 $x \in U$, $y \in V$, 和 $U \cap V = \emptyset$.

练习 11.17

证明 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n})$ 是 Hausdorff.

当然存在非 Hausdorff 的拓扑空间, 这需要**商拓扑 (quotient topology)** 的概念 (在之后的章节中会详细展开).

假设 (X, d) 是度量空间. 定义

$$B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}, \quad \overline{B}(x, r) := \{y \in X : d(x, y) \le r\}. \tag{11.1.22}$$

定义 (X, d) 上的拓扑, 称为**度量拓扑 (metric topology)**, 如下: $U \subseteq X$ 是**开集**如果任意 $x \in U$ 存在 $r > 0$ 满足 $B(x, r) \subseteq U$. $S \subseteq X$ 是**闭集**如果 $X \setminus S$ 是**开集**.

[1]有些书上定义 U 是 x 的邻域如果存在开集 $A \in \mathcal{T}$ 满足 $x \in A \subset U$. 本讲义采用第一种定义.

假设 $(X,\mathcal{T})$ 是拓扑空间, Y 是 X 的子集. 定义 $\mathcal{T}_Y$ 如下:

$$\mathcal{T}_Y := \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}, \tag{11.1.23}$$

称为由 $\mathcal{T}$ 诱导出来的 Y 上的**子空间拓扑 (subspace topology)**. 则 $(Y,\mathcal{T}_Y)$ 本身就是拓扑空间.

练习 11.18

证明 $(Y,\mathcal{T}_Y)$ 是拓扑空间.

11.2 Euclidean 空间中的连续性

定义在区间上的函数的连续性等可平行地搬到多元区间 (即 (11.1.19) 或 (11.1.20)) 上来, 本节给出多元函数连续性的一般定义.

11.2.1 闭区域套定理、Bozalno-Weierstrass 定理和 Cauchy 收敛准则

我们将闭区间定理、Bozalno-Weierstrass 定理和 Cauchy 收敛准则推广到多元情形.

定理 11.5. (闭矩形套定理)

$\Delta_k := \prod_{1\le i\le n}[a_k^i, b_k^i]$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一列闭矩形, $k \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$. 如果

(1) $\Delta_{k+1} \subseteq \Delta_k$, 即, $[a_k^{i+1}, b_k^{i+1}] \subset [a_k^i, b_k^i]$ $(1 \le i \le n, k \ge 1)$, 且

(2) $\sum_{1\le i\le n}(b_k^i - a_k^i)^2 \to 0$ 当 $k \to \infty$,

则存在唯一的 $\boldsymbol{\xi} \in \cap_{k\ge 1}\Delta_k$ 满足

$$\lim_{k\to\infty} a_k^i = \lim_{k\to\infty} b_k^i = \xi^i, \quad 1 \le i \le n.$$

证明: 对任意 i 利用映射 (11.1.2) 得到闭区间列 $\{\Delta_k^i := \pi_i(\Delta_k) = [a_k^i, b_k^i]\}_{k\ge 1}$. 上述条件 (1) 和 (2) 等价于 $\Delta_{k+1}^i \subset \Delta_k^i$ 和 $\lim_{k\to\infty}(b_k^i - a_k^i)^2 = 0$. 利用闭区间套定理, **定理 3.12**, 得到唯一点 $\xi^i \in \cap_{k\ge 1}\Delta_k^i$ 满足 $\lim_{k\to\infty} a_k^i = \lim_{k\to\infty} b_k^i = \xi^i$. 从而得到点 $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \cdots, \xi^n) \in \cap_{k\ge 1}\Delta_k$. □

定理 11.6. (Bozalno-Weierstrass 定理/致密性定理)

$\mathbb{R}^n$ 中任意有界点列必有收敛子列.

证明: 假设该有界点列为 $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k\ge 1} \subset \mathbb{R}^n$. 令 $x_k^i := \pi_i(\boldsymbol{x}_k)$. 对数列 $\{x_k^1\}_{k\ge 1}$ 应用 Bolzano-Weierstrass 定理, **定理 2.15**, 得到一收敛子列 $\{x_{k_1}^1\}_{k_1\ge 1}$. 因为点列 $\{\boldsymbol{x}_{k_1}\}_{k_1\ge 1}$ 也是有界的, 从而对数列 $\{x_{k_1}^2\}_{k_1\ge 1}$ 应用 Bolzano-Weierstrass 定理得到一收敛子列 $\{x_{k_2}^2\}_{k_2\ge 1}$. 这个过程一直下去就得到 $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k\ge 1}$ 的收敛子列 $\{\boldsymbol{x}_{k_n}\}_{k_n\ge 1}$. □

推论 11.1. (聚点定理)

$\mathbb{R}^n$ 的任意有界无限点集至少有一个聚点.

$\mathbb{R}^n$ 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k\geq 1}$ 称为 **Cauchy 列 (Cauchy sequence)** 若对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $N \geq 1$ 使得 $|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_\ell| < \epsilon$ 对任何 $k, \ell > N$ 都成立.

定理 11.7. (Cauchy 收敛原理/Cauchy 判别准则)

$\mathbb{R}^n$ 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k\geq 1}$ 收敛当且仅当它是 Cauchy 列. ♡

证明: $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k\geq 1}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 Cauchy 列当且仅当 $\{x_k^i\}_{k\geq 1}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列 $(1 \leq i \leq n)$. 从而利用数列的 Cauchy 收敛原理, **定理 2.17**, 得证. □

我们可把 Cauchy 列的定义推广到度量空间上去, 这在**第一卷第 1.6.4 小节** 已见过.

定义 11.6. (Cauchy 列)

假设 (X, d) 是度量空间.

(i) 点列 $\{x_k\}_{k\geq 1}$ 称为 **Cauchy 列 (Cauchy sequence)** 如果对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $N \geq 1$ 使得 $d(x_k, x_\ell) < \epsilon$ 对任何 $k, \ell > N$ 都成立.

(ii) 点列 $\{x_k\}_{k\geq 1}$ **收敛 (converge)** 到 $x \in X$, 记作 $\lim_{k\to\infty} x_k =_d x$, 如果对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $N \geq 1$ 使得 $d(x_k, x) < \epsilon$ 对任何 $k > N$ 都成立.

显然收敛点列 $\{x_k\}_{k\geq 1}$ 必是 Cauchy 的. ♣

对一般的度量空间 (X, d) 上 Cauchy 列不一定是收敛的, 比如 $(\mathbb{Q}, d_1)$ 其中 $d_1(x, y) := |x - y|$. 显然点列 $\{x_n := 1 + \sum_{1\leq i\leq n} 1/i!\}_{n\geq 1}$ 是 $\mathbb{Q}$ 中的 Cauchy 列但不收敛. 称度量空间 (X, d) 是**完备的 (complete)** 如果 X 中的任意 Cauchy 列都收敛. 比如 $\mathbb{R}^n$ 在 d_2 下是完备的.

定理 11.8

对任意度量空间 (X, d) 存在完备空间 (X^*, d^*) 满足 $X \subset X^*$ 且 $d^*|_X = d$. ♡

证明: 定义集合 $\widetilde{X}$ 为 $\widetilde{X} := \{\{x_k\}_{k\geq 1}$ 是 Cauchy 列$\}$. 对任意 $x \in X$, 点列 $\{x_k = x\}_{k\geq 1}$ 是 Cauchy 列, 从而存在映射

$$\iota : X \longrightarrow \widetilde{X}, \quad x \longmapsto \{x_k = x\}_{k\geq 1}.$$

对任意 $\{x_k\}_{k\geq 1}, \{y_k\}_{k\geq 1} \in \widetilde{X}$ 定义 $\widetilde{d}(\{x_k\}_{k\geq 1}, \{y_k\}_{k\geq 1}) := \lim_{k\to\infty} d(x_k, y_k)$. 对任意 $k, \ell \geq 1$ 有 $d(x_k, y_k) \leq d(x_k, x_\ell) + d(x_\ell, y_\ell) + d(y_\ell, y_k)$, 从而得到

$$|d(x_k, y_k) - d(x_\ell, y_\ell)| \leq d(x_k, x_\ell) + d(y_\ell, y_k).$$

因此 $\{d(x_k, y_k)\}_{k\geq 1}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列, 故极限 $\lim_{k\to\infty} d(x_k, y_k)$ 存在. 显然 $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ 是半度量空间. 根据**练习 11.12** 得到度量空间 $(X^*, d^*) := (\widetilde{X}/\widetilde{d}, \widetilde{d})$. 作为练习请证明存在单射 $X \to X^*$. □

对任何子集 $S \subset \mathbb{R}^n$ 定义

$$\operatorname{diam}(S) := \sup\{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| : \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S\}, \tag{11.2.1}$$

称为 S 的**直径 (diameter)**.

定理 11.9. (Cantor 闭区域套定理)

如果 $\{S_k\}_{k\geq 1}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的递缩非空闭集列, 即满足

$$S_1 \supseteq S_2 \supset \cdots \supseteq S_k \supseteq S_{k+1} \supseteq \cdots,$$

和 $\lim_{k\to\infty} \mathrm{diam}(S_k) = 0$, 则 $\cap_{k\geq 1} S_k$ 是单点集. ♡

证明: 由于 $\mathbb{R}^n$ 是完备的, 结论有下面更一般的定理给出. □

度量空间 (X, d) 中子集 S 的直径定义为

$$\mathrm{diam}(S) := \sup_{x,y\in S} d(x, y). \tag{11.2.2}$$

定理 11.10

度量空间 (X, d) 是完备的 $\iff$ 满足条件 $\lim_{k\to\infty} \mathrm{diam}(S_k) = 0$ 和 $S_{k+1} \subseteq S_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$ 的任何非空闭集列 $\{S_k\}_{k\geq 1}$ 其交集 $\cap_{k\geq 1} S_k$ 是单点集. ♡

证明: (1) 假设 (X, d) 是度量空间且 $\{S_k\}_{k\geq 1}$ 是满足条件 $S_{k+1} \subseteq S_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$ 和 $\lim_{k\to\infty} \mathrm{diam}(S_k) = 0$ 的非空闭集列. 取点 $x_k, y_k \in S_k$ 使得 $d_k := \mathrm{diam}(S_k) = d(x_k, y_k)$ 成立, 这是由于 S_k 是闭的. 考虑点列 $\{x_k\}_{k\geq 1}$ 和 $\{y_k\}_{k\geq 1}$. 对任意 $k > \ell$ 有

$$d(x_k, x_\ell) \leq d(x_k, y_\ell) + d(y_\ell, x_\ell) \leq d_\ell + d_\ell = 2d_\ell,$$

因为 $x_k \in S_k \subseteq S_\ell$. 因此 $\{x_k\}_{k\geq 1}$ 是 Cauchy 列从而收敛到 $x_\infty \in X$. 类似可证明 $\lim_{k\to\infty} y_k = y_\infty \in X$. 根据不等式 $d(x_\infty, y_\infty) \leq d(x_\infty, x_k) + d(x_k, y_k) + d(y_k, y_\infty)$, 得到 $x_\infty = y_\infty =: x \in X$. 前面计算表明

$$d(x, x_\ell) \leq 2d_\ell \implies x \in \overline{B}(x_\ell, 2d_\ell) = S_\ell.$$

故 $x \in \cap_{k\geq 1} S_k$.

(2) 反之, 任给 X 中的 Cauchy 列 $\{x_k\}_{k\geq 1}$. 对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $N \in \mathbb{N}$ 满足 $d(x_k, x_\ell) < \epsilon$ 只要 $k > \ell \geq N$. 故存在递增数列 $\{k_\ell\}_{\ell\geq 1}$ 使得不等式 $d(x_k, x_{k_\ell}) \leq \frac{1}{2^\ell}$ 对任意 $k \geq k_\ell$ 都成立. 令 $S_\ell := \overline{B}(x_{k_\ell}, 2^{-\ell+1})$ 为 X 中的一非空闭集. 则对任意 $y \in S_{\ell+1}$ 得到

$$d(y, x_{k_\ell}) \leq d(y, x_{k_{\ell+1}}) + d(x_{k_{\ell+1}}, x_{k_\ell}) \leq \frac{1}{2^\ell} + \frac{1}{2^\ell} = \frac{1}{2^{\ell-1}}.$$

即 $y \in \overline{B}(x_{k_\ell}, 2^{-\ell+1})$ 从而 $S_{\ell+1} \subseteq S_\ell$. 因为 $\mathrm{diam}(S_\ell) \leq 2^{2-\ell} \to 0$, 所以根据假设条件存在点 $x \in \cap_{\ell\geq 1} S_\ell$. 对每个 ℓ 得到

$$d(x, x_{k_\ell}) \leq \frac{1}{2^{\ell-1}} \implies d(x, x_k) \leq d(x, x_{k_\ell}) + d(x_{k_\ell}, x_k) \leq \frac{1}{2^{\ell-1}} + \frac{1}{2^\ell} = \frac{3}{2^\ell}$$

只要 $k \geq k_\ell$. 因此 $\lim_{k\to\infty} x_k = x$. 即 (X, d) 是完备的. □

11.2.2 紧致度量空间的刻画和道路连通集

考虑函数

$$f : [0, 2] \longrightarrow [0, 2], \quad x \longmapsto \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ x - 1, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

显然这是一个连续函数, 且 $f((1/2,3/2))=[0,1/2)$. 这个例子告诉我们, 连续函数不一定把开区间映成开区间.

另一方面, 考虑函数

$$g:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\quad (x,y)\longmapsto x.$$

虽然 g 是连续的 (多元函数的连续性参见**第 11.4 节**) 和 $C:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: xy=1\}$ 是闭的, 但是 $g(C)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 却不是闭的.

上面两个例子让我们去寻找什么样的集合能被连续函数所保持. 之后将要证明的**定理 11.16** 表明连续函数保持 “紧集” 性质. 我们首先来定义紧集的概念.

定义 11.7. (开覆盖)

假设 $(X,\mathcal{T})$ 是拓扑空间.

(1) X 上的**开覆盖 (open covering)** 是指一族开集 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset\mathcal{T}$ 且满足条件 $\cup_{\alpha\in A}U_\alpha=X$.

(2) X 上的开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的**开子覆盖 (open sub-covering)** 是指一族开集 $\{U_\beta\}_{\beta\in B}\subset\mathcal{T}$ 满足 $B\subset A$ 且 $\cup_{\beta\in B}U_\beta=X$. 这个开子覆盖 $\{U_\beta\}_{\beta\in B}$ 是**有限的 (finite)** 如果 B 是有限集.

(3) X 称为**紧的 (compact)** 如果任意开覆盖都包含一个有限开子覆盖.

(4) X 称为**非紧的 (non-compact)** 如果 X 不是紧的. ♣

假设 S 是拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 的子集. 称 S 是 X 的**紧子集 (compact subset)** 如果 S 在子空间拓扑 $\mathcal{T}_S$ 下是紧的. 也就是说, $S\subset X$ 是紧的当且仅当对任意满足条件 $\cup_{\alpha\in A}U_\alpha\supset S$ 的开集族 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset\mathcal{T}$ 存在一个有限集 $B\subset A$ 使得 $\cup_{\beta\in B}U_\beta\supset S$ 成立.

定义 11.8. (全有界集)

假设 (X,d) 是度量空间.

(1) 给定 $\epsilon>0$. 子集 $S\subset X$ 称为 **ϵ-网 (ϵ-net)** 如果

$$\mathrm{dist}(x,S)=\inf_{y\in S}d(x,y)\le\epsilon$$

对任何 $x\in X$ 都成立.

(2) 给定 $\epsilon>0$ 和子集 $Y\subset X$. 子集 $S\subset X$ 称为 **(ϵ,Y)-网 (ϵ-net for Y)** 如果

$$\mathrm{dist}(y,S)=\inf_{z\in S}d(y,z)\le\epsilon$$

对任何 $y\in Y$ 都成立.

(3) (X,d) 称为**全有界的 (totally bounded)** 如果对任意 $\epsilon>0$ 存在 X 中的有限 ϵ-网. ♣

命题 11.3

如果 (X,d) 是度量空间, 则下面性质成立:

(1) 给定 $\epsilon>0$ 和 $Y\subset X$. 如果存在有限 (ϵ,Y)-网, 则存在包含于 Y 的 $(2\epsilon,Y)$-网.

(2) X 全有界的 $\Longrightarrow$ X 的任意子集, 本身也是度量空间, 也是全有界的.

(3) $X=\mathbb{R}^n \Longrightarrow$ 任何有界子集必是全有界的.

证明: 只给出 (3) 的证明. 假设 U 是有界子集. 任取 $r>0$ 且考虑集合

$$S:=\{\boldsymbol{x}=(x^1,\cdots,x^n)\in\mathbb{R}^n : x^i\in r\mathbb{Z}\}.$$

选择 r 充分小后可以把 U 相对于 S 分解成有限多个子集 $U_1,\cdots,U_k$ 使得

$$\mathrm{diam}(U_i)\leq\epsilon,\quad 1\leq i\leq k.$$

对任意 $\boldsymbol{y}\in U$ 有 $\mathrm{diam}(\boldsymbol{y},S)\leq\mathrm{diam}(U_i)\leq\epsilon, U_i\ni\boldsymbol{y}$. □

定理 11.11. (紧度量空间的刻画定理)

假设 (X,d) 是度量空间. 则下面结论等价:

(1) X 是紧的;

(2) X 的任何无限子集必有聚点;

(3) X 是完备的和全有界的;

(4) X 中的任何点列必有收敛子列.

证明: 参看任何一本拓扑书. □

推论 11.2

如果 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中的子集, 则下面结论等价:

(1) S 是紧的;

(2) S 的任何无限子集必有聚点且聚点在 S 中;

(3) S 是有界闭的.

练习 11.19

证明**推论 11.2**.

定义 11.9. (连续映射)

给定两个拓扑空间 $(X,\mathcal{T}_X)$ 和 $(Y,\mathcal{T}_Y)$. 称映射 $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$ 是**连续的 (continuous)** 或**$\mathcal{T}_X/\mathcal{T}_Y$- 连续的 ($\mathcal{T}_X/\mathcal{T}_Y$-continuous)** 如果对任意 $V\in\mathcal{T}_Y$ 都有 $f^{-1}(V)\in\mathcal{T}_X$.

称连续映射 $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$ 是**拓扑同构的 (topologically isomorphic)** 如果存在连续映射 $g:(Y,\mathcal{T}_Y)\to(\mathcal{X},\mathcal{T}_X)$ 满足 $f\circ g=1_Y$ 和 $g\circ f=1_X$.

$[0,1]$ 作为 $\mathbb{R}$ 的子集本身就是拓扑空间.

定义 11.10. (连通空间)

拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 是**连通的 (connected)** 如果不存在非空开集 U 和 V 满足 $U\cap V=\emptyset$ 和 $U\cup V=X$. X 的子集 U 是**连通子集 (connected subset)** 如果 U 在子空间拓扑下是连通的.

下面是连通拓扑空间的例子:

(1) 空集和任何单点集都是连通的.

(2) 在相对拓扑下, $\mathbb{N}$ 不是连通的. 这是因为我们可以取

$$U=\{0\}=\mathbb{N}\cap(-\infty,1/2),\quad V:=\mathbb{N}\setminus\{0\}=\mathbb{N}\cap(1/2,+\infty).$$

(3) 在相对拓扑下, $\mathbb{Q}$ 不是连通的. 这是因为我们可以取

$$U:=\mathbb{Q}\cap(-\infty,\sqrt{2}),\quad V:=\mathbb{Q}\cap(\sqrt{2},+\infty).$$

定理 11.12

(1) 拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 是连通的当且仅当 X 中即是开的又是闭的非空子集只能是 X 本身.

(2) 假设 A 是拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 的连通子集. 如果 $A\subset B\subset\overline{A}$, 则 B 也是连通的.

(3) $\mathbb{R}$ 中的连通子集只能是区间.

证: (3) 将在之后关于拓扑学的章节中给出. 下证 (2) 和 (3). 对 (2), 假设 $B=U\cup V$, 其中 U,V 是非空互不相交的 B 中的开集且满足 $U\cup V=B$. 则 $A\subseteq U$ 或者 $A\subseteq V$. 不妨假设 $A\subseteq U$, 从而得到 $\overline{A}\subseteq\overline{U}$. 故 $V\subseteq B\subseteq\overline{A}\subseteq\overline{U}$, 矛盾.

(1) 假设 A 是一个即开又必的非空真子集, 令 $U:=A$ 和 $V:=X\setminus A$. 则 U,V 的存在性和连通的定义发生矛盾, 因此这样的 A 不存在.

如果 X 不是连通的, 则存在非空互不相交的开集 U,V 满足 $U\cup V=X$. 这样 U 即是非空真子集, 又是开的和闭的. □

定义 11.11. (道路连通)

假设 $(X,\mathcal{T})$ 是拓扑空间.

(1) X 中的**道路 (path)** 是指连续映射 $\gamma:[0,1]\to X$. 分别称 $\gamma(0),\gamma(1)$ 为道路的**起点 (start point)** 和**终点 (end point)**. γ 称为**圈 (loop)** 如果 $\gamma(0)=\gamma(1)$.

(2) 称 X 是**道路连通的 (path-connected)** 如果对任意 $x,y\in X$ 存在道路 $\gamma:[0,1]\to X$ 使得 $\gamma(0)=x$ 和 $\gamma(1)=y$.

X 的子集 A 是道路连通的, 如果它在子空间拓扑下是道路连通的.

假设 $\gamma_1:[0,1]\to X$ 和 $\gamma_2:[0,1]\to X$ 是两个道路分别连接 x,y 和 y,z. 从几何直观上我们马上得到 x 到 z 的道路. 下面我们具体给出道路的表达式. 定义

$$(\gamma_1*\gamma_2)(t)=\begin{cases}\gamma_1(2t), & 0\le t\le\frac{1}{2},\\ \gamma_2(1-2t), & \frac{1}{2}\le t\le 1.\end{cases}\tag{11.2.3}$$

则 $\gamma_1*\gamma_2$ 是连续的且连接 x 和 z.

命题 11.4

任意道路连通空间必是连通的.

证: 假设道路连通空间 $(X,\mathcal{T})$ 不是连通的. 则存在非空互不相交开集 U,V 满足 $U\cup V=X$. 任取 $a\in U,b\in V$, 和连续映射 $f:[0,1]\to X$ 满足 $f(0)=a$ 和 $f(1)=b$. 根据**定理 11.12** (2) 可知 $[a,b]$ 是连通的, 从而利用**定理 11.17** (2) 得到 $f([0,1])$ 的连通性. 这

样必有 $f([0,1])\subset U$ 或者 $f([0,1])\subset V$, 矛盾! □

例 11.3

(1) 单位球 $\mathbb{B}^n$ 是道路连通的. 给定两个点 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{B}^n$, 定义连续映射

$$f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{B}^n,\quad t\longmapsto(1-t)\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y}.$$

因为

$$|f(t)|=|(1-t)\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y}|\le(1-t)|\boldsymbol{x}|+t|\boldsymbol{y}|\le(1-t)+t=1,$$

所以 f 是有定义的.

(2) **去心 Euclidean 空间 (punctured Euclidean space)** $\mathbb{R}^n\setminus\{\boldsymbol{0}\}$ 当 $n\ge 2$ 是道路连通的, 显然当 $n=1$ 时它不是连通的. 因为任给两点 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$, 可以找到一个平面包含它们. 所以只要对 $n=2$ 进行证明即可. 此时如果连接 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的直线不经过 $\boldsymbol{0}$, 则取道路 $\boldsymbol{f}$ 就是这条直线; 如果直线经过 $\boldsymbol{0}$, 就任取第三点 $\boldsymbol{z}$ 得到所需要的折线 .

(3) 单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$ 是道路连通的. 考虑连续满射

$$\mathbb{R}^n\setminus\{\boldsymbol{0}\}\longrightarrow\mathbb{S}^{n-1},\quad\boldsymbol{x}\longmapsto\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}.$$

根据**定理 11.17** (1), $\mathbb{S}^{n-1}$ 是道路连通的.

(4) **(存在连通但不是道路连通的例子)** 考虑子集

$$S:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:y=\sin\frac{1}{x},\ 0\le x\le 1\right\}.$$

因为 S 是连续映射 $f(x)=\sin(1/x), 0\le x\le 1$, 的像, 所以 S 是连通的. 根据**定理 11.12** (2), $\overline{S}$ 也是连通的. 在拓扑学上把 $\overline{S}$ 称为**拓扑学家的 sine 曲线 (topologist's sine curve)**. 显然

$$\overline{S}=S\cup(0\times[-1,1]).$$

下证 $\overline{S}$ 不是道路连通的. 假设存在连续映射 $f:[0,1]\to\overline{S}$ 连接 $(0,0)$ 和 $(1,\sin 1)$. 记 $f(t)=(x(t),y(t))$, 则 $x(t),y(t)$ 都是连续的. 对任给 $n\ge 1$, 存在 $u_n\in(0,x(1/n))$ 满足 $\sin(1/u)=(-1)^n$. 根据连续函数介值定理得到存在 $t_n\in(0,1/n)$ 满足 $x(t_n)=u_n$. 因此 $x(t_n)\to 0$ 但是 $y(t_n)=\sin[1/x(t_n)]=(-1)^n$. 从而与映射 f 的连续性发生矛盾.

命题 11.5

假设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的连通开子集. 则 U 是道路连通的.

证: 取定 $x_0\in U$ 并考虑集合 $\Gamma:=\{\boldsymbol{x}\in U:$ 存在道路连接 $\boldsymbol{x}_0$ 和 $\boldsymbol{x}\}$. 显然 $\Gamma\ne\emptyset$. 我们先证 Γ 是开的. 取定 $\boldsymbol{x}\in\Gamma$, 则存在道路 $f:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ 连接 $\boldsymbol{x}_0$ 和 $\boldsymbol{x}$. 因为 U 是开的, 所以存在球邻域 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},\delta)\subset U$. 根据**例 11.3** (1) 可知对任意 $\boldsymbol{y}\in\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},\delta)$ 存在道路 g 连接 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$. 从而 $f*g$ 是连接 $\boldsymbol{x}_0$ 和 $\boldsymbol{y}$. 故 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},\delta)\subset\Gamma$, 即 Γ 是开的.

其次我们来证明 Γ 是闭的, 即证 $U\setminus\Gamma$ 是开的. 任取 $\boldsymbol{x}\in U\setminus\Gamma$. 因为 U 是开的, 故存在球邻域 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},\delta)\subset U$. 如果存在 $\boldsymbol{y}\in\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},\delta)\cap\Gamma$, 则根据**例 11.3** (1) 我们可以把 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}_0$ 用道路连起来, 这就和 $\boldsymbol{x}\notin\Gamma$ 发生矛盾, 因此 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},\delta)\subset U\setminus\Gamma$. 最后根据**定理 11.12** 得

到 $\Gamma = U$. □

推论 11.3

在 $\mathbb{R}^n$ 空间中, 开集的连通性和道路连通性是一样的.

$\mathbb{R}^n$ 中道路连通的开集称为**(开) 区域 ((open) domain)**. 区域的闭包称为**闭区域 (closed domain)**. 比如开球 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}, r)$ 和开矩形 $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \prod_{1\le i\le n}[a_i, b_i]$ 都是区域.

11.2.3 * 基本群简介

从直观的几何上来看, 我们知道球面 $\mathbb{S}^2$ 和环面 $\mathbb{T}^2 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ 是不一样的. 那么如何从数学上来严格证明这件事呢? 为此我们来引入基本群的概念.

假设 $(X, \mathcal{T})$ 是拓扑空间, $x_0 \in X$. 定义集合

$$L(x_0) := \{x_0 \text{ 上的圈}\}.$$

称 $\gamma_0, \gamma_1 \in L(x_0)$ 是**同伦的 (homotopic)**, 并记作 $\gamma_0 \simeq \gamma_2$, 如果存在映射

$$F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X, \quad (s,t) \longmapsto F(s,t) = F_s(t),$$

满足

$$F_0 = \gamma_0, \quad F_1 = \gamma_1, \quad F_s(0) = F_s(1) = x_0.$$

练习 11.20

证明同伦关系 “$\simeq$” 是等价关系.

把 $\gamma \in L(x_0)$ 的等价类记作

$$[\gamma] := \{\gamma' \in L(x_0) : \gamma' \simeq \gamma\}. \tag{11.2.4}$$

对两个等价类 $[\gamma_1]$ 和 $[\gamma_2]$ 定义乘法 “$\cdot$” 如下

$$[\gamma_1] \cdot [\gamma_2] := [\gamma_1 * \gamma_2], \tag{11.2.5}$$

其中 $*$ 由 (11.2.3) 给出. 可以证明 (在之后的拓扑学章节中给出) 上述乘法的定义和等价类的表示元选取无关. 把等价类全体

$$\pi_1(X, x_0) := \{[\gamma] : \gamma \in L(x_0)\} \tag{11.2.6}$$

称为拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 在 x_0 处的**基本群 (fundamental group)**. 因为 x_0 的恒等映射 $c_{x_0} : [0,1] \to X$, $t \mapsto x_0$, 是 L_{x_0} 中的元素, 因此 $[c_{x_0}] \in \pi_1(X, x_0)$. 称拓扑空间 (X, x_0) 是**单连通的 (simply-connected)**, 如果它本身是道路连通的且对某个 $x_0 \in X$ 有 $\pi_1(X, x_0) = \{[c_{x_0}]\}$. 根据下面定理, 拓扑空间的单连通性和基点 $x_0 \in X$ 的选取无关, 故此时我们记作 $\pi_1(X) = 0$.

定理 11.13

(1) $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$ 构成了一个乘法群.

(2) 假设 $f: X \to Y$ 是拓扑同构且 $f(x_0) = y_0$, 则

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0).$$

(3) 如果 $(X, \mathcal{T})$ 是道路连通的, 则对任意 $x_0, x_1 \in X$ 有

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1).$$

从而对道路连通空间, 我们用 $\pi_1(X)$ 来表示其基本群.
(4) $\pi(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$, 但是 $\pi_1(\mathbb{S}^n) = 0$ 如果 $n \geq 2$.
(5) 对任意拓扑空间 $(X, \mathcal{T}_X)$ 和 $(Y, \mathcal{T}_Y)$, 有

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

特别地, $\pi_1(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z}^2$. ♡

在上述定理中, 群的定义参见**定义 11.1**, 群同构的定义参见**定义 11.2**. 定理具体的证明在拓扑学章节中给出.

因为 $\pi_1(\mathbb{S}^2) = 0 \neq \mathbb{Z}^2 \cong \pi_1(\mathbb{T}^2)$, 所以 $\mathbb{S}^2 \ncong \mathbb{T}^2$.

11.3 多元函数的极限

本节引入多元函数的极限, 重点是区分累次极限和重极限之间的关系.

11.3.1 向量值函数

双曲线 $y = 1/x$, $x \neq 0$, 可以看成 $\mathbb{R}^2$ 中的集合

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}.$$

如果定义映射

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto y,$$

则 $f(x, y) = 1/x$ 就是双曲线方程. 上面映射是二元函数的一个例子.

下面我们将二元函数的概念推广到向量值函数的概念.

定义 11.12. (向量值函数)
假设 $D \subset \mathbb{R}^n$. 映射

$$\boldsymbol{f}: D \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \boldsymbol{x} = (x^1, \cdots, x^n) \longmapsto \boldsymbol{y} = (y^1, \cdots, y^m), \tag{11.3.1}$$

称为 n 元 **维向量值函数 (vector-valued function)**, 记为 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, 其中 D 称为 $\boldsymbol{f}$ 的**定义域 (domain)**, $\boldsymbol{f}(D) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in D\}$ 称为 $\boldsymbol{f}$ 的**像域 (image)**, $\mathbb{R}^m$ 称为**值域 (range)**, 而

$$\mathrm{Graph}(\boldsymbol{f}) := \left\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} : \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in D\right\} \tag{11.3.2}$$

称为 $\boldsymbol{f}$ 的**图像 (graph)**.

令 $y^i := f^i(\boldsymbol{x})$ 为 $\boldsymbol{f}$ 的第 i 个坐标函数, 从而 $\boldsymbol{f}$ 可表示成:

$$\boldsymbol{f} = (f^1, \cdots, f^m) \quad 或 \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f^1(\boldsymbol{x}), \cdots, f^m(\boldsymbol{x})). \tag{11.3.3}$$

当 $m = 1$ 时, 映射 $f : D \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} = (x^1, \cdots, x^n) \mapsto y$, 称为**$n$ 元函数 (function with n variables)**, 记为 $y = f(\boldsymbol{x}) = f(x^1, \cdots, x^n)$. 另一方面当 $n = 1$ 时, 映射 $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto \boldsymbol{y} = (y^1, \cdots, y^m)$, 称为**向量值函数 (vector-valued function)**, 记为 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(x) = (f^1(x), \cdots, f^m(x))$.

例 11.4

(向量值函数的例子) (1) 定义**投影 (projection)** 如下:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\mathbf{proj}_1} & \mathbb{R}^m \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathbf{proj}_2} & & \\ \mathbb{R}^n & & \end{array} \tag{11.3.4}$$

这里

$$\mathrm{proj}_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \boldsymbol{x}, \quad \mathrm{proj}_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \boldsymbol{y}.$$

(2) 映射

$$\boldsymbol{f} : [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (r, \theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, r). \tag{11.3.5}$$

(4) 映射

$$\boldsymbol{f} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto (\cos t, \sin t). \tag{11.3.6}$$

11.3.2 多元函数的极限

回顾球邻域

$$\mathbb{B}^n(\boldsymbol{a}, r) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < r\}$$

和方邻域

$$\mathbb{O}^n(\boldsymbol{a}, r) := \left\{\boldsymbol{x} = (x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n : |x^i - a^i| < r,\ 1 \le i \le n\right\}.$$

根据如下关系

$$\mathbb{B}^n(\boldsymbol{a}, r) \subset \mathbb{O}^n(\boldsymbol{a}, r) \subset \mathbb{B}^n(\boldsymbol{a}, \sqrt{n}r), \tag{11.3.7}$$

我们就不加区别地把上述两种邻域统称为**邻域**并记作 $U(\boldsymbol{a}, r)$.

定义 11.13. (重极限)

假设 $D \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} \in D'$ 是 D 的聚点, $z = f(\boldsymbol{x})$ 是 D 上的 n 元函数, $A \in \mathbb{R}$. 如果对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使得当 $\boldsymbol{x} \in (U(\boldsymbol{a}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{a}\}) \cap D$ 时, 不等式

$$|f(\boldsymbol{x}) - A| < \epsilon \tag{11.3.8}$$

成立, 则称 $f(\boldsymbol{x})$ 在 D 上当 $\boldsymbol{x}$ 趋于 $\boldsymbol{a}$ 时以 A 为**极限 (limit)**, 或称为 $\boldsymbol{n}$ **重极限**, 并记为

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = A \quad \text{或} \quad f(\boldsymbol{x}) \to A\ (\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}). \tag{11.3.9}$$

♣

由于在定义中 $\boldsymbol{x}$ 趋于 $\boldsymbol{a}$ 的方式有无穷多种, 从而导致多元函数的极限很复杂.

注 11.1

和一元函数极限一样, 多元函数的极限也有唯一性、局部有界性、局部保号性、夹逼性质及四则运算法则等.

(1) **(极限唯一性)** 如果 $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = A$ 存在, 则极限必唯一.

(2) **(局部有界性)** 如果 $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = A$ 存在, 则存在 $M > 0$ 和 $\delta > 0$ 使得不等式 $|f(\boldsymbol{x})| \le M$ 对任意 $\boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{a}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{a}\}$ 都成立.

(3) **(局部保号性)** 如果 $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = A > 0$, 则存在 $\delta > 0$ 对任意 $\boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{a}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{a}\}$ 都有 $f(\boldsymbol{x}) > 0$.

如果存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $\boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{a}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{a}\}$ 都有 $f(\boldsymbol{x}) > 0$ 且极限 $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = A$ 存在, 则 $A \ge 0$.

(4) **(夹逼定理)** 如果存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $\boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{a}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{a}\}$ 都有

$$h(\boldsymbol{x}) \le f(\boldsymbol{x}) \le g(\boldsymbol{x})$$

且 $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} h(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = A$, 则 $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = A$.

(5) **(四则运算法则)** 假设极限 $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = A$ 和 $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = B$ 都存在, 则我们有

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} [f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})] = A + B, \quad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}) = AB$$

和, 如果 $B \neq 0$,

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})} = \frac{A}{B}.$$

同样可证, 多元函数极限的 Heine 定理以及 Cauchy 定理也成立. 请诸位叙述之.

♣

例 11.5

(1) 证明

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

证: 这可以由不等式 $|x^2 y/(x^2 + y^2)| \le |x|$ 得到. □

(2) 证明下列极限不存在:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{x}.$$

证: 事实上, 考虑特殊情形 $y = kx$ $(k \neq 0)$, 即 (x, y) 沿着直线 $y = kx$ 趋于 $(0, 0)$. 带入得到

$$\lim_{(x,y=kx)\to(0,0)} \frac{y}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{kx}{x} = k.$$

但是根据**注 11.1**, 极限若存在必唯一, 所以上述函数极限不存在. □

(3) 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y}.$$

解: 因为

$$(x^2+y^2)^{x^2y}=e^{x^2y\ln(x^2+y^2)}=\exp\left[\frac{x^2y}{x^2+y^2}\cdot(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)\right],$$

所以根据 (1) 和极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)=\lim_{r\to 0+}r\ln r=0,$$

得到 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y}=1$.

(4) 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}.$$

解: 令

$$f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y}.$$

则 $f(x,x)=2x^2/(1+x)$ 从而

$$\lim_{x\to 0}f(x,x)=0.$$

另一方面,

$$\lim_{x\to 0}f(x,x^3-x^2)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+(x^3-x^2)^3}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left[1+(x^2-x)^3\right]=1. \quad \square$$

(5) 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\sin(x^3+y^2)}{\sqrt{e^x+e^y}}.$$

解: 利用四则运算得到

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\sin(x^3+y^2)}{\sqrt{e^x+e^y}} &= \lim_{(x,y)\to(0,2)}\sin(x^3+y^2)\Big/\lim_{(x,y)\to(0,2)}\sqrt{e^x+e^y}\\ &= \frac{\sin 4}{\sqrt{1+e^2}}. \quad \square\end{aligned}$$

(6) 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}.$$

解: 利用分子有理化得到

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(xy+1)-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}\\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{xy+1}+1}=\frac{1}{2}. \quad \square\end{aligned}$$

(7) 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0+,0+)}(1+xy)^{\frac{1}{\sin(xy)}}.$$

解: 利用取对数法得到

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0+,0+)}(1+xy)^{\frac{1}{\sin(xy)}} &= \exp\left[\lim_{(x,y)\to(0+,0+)}\frac{\ln(1+xy)}{\sin(xy)}\right]\\ &= \exp\left[\lim_{(x,y)\to(0+,0+)}\frac{xy}{\sin(xy)}\cdot\frac{\ln(1+xy)}{xy}\right] = e^{1\cdot 1} = e. \quad\square\end{aligned}$$

(8) 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{xy-y}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}.$$

解: 令 $u := x-1$ 和 $v := y$ 得到

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{xy-y}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = \lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{uv}{\sqrt{u^2+v^2}} = 0. \quad\square$$

(9) 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2).$$

解: 用变量替换 $t = x^2+y^2 \to 0$ 得到

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) = \lim_{t\to 0} t\ln t = 0. \quad\square$$

11.3.3 二元函数的累次极限

考虑平面 $\mathbb{R}^2$ 上连接点 $A=(1,1)$ 和原点 $O=(0,0)$ 的所有可能的曲线. 在这些曲线中, 有三种曲线最特殊也最明显, 即 $(1,1)\to(1,0)\to(0,0)$, $(1,1)\to(0,1)\to(0,0)$, 和直线 $y=x$. 比如研究二元函数

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

当 $(x,y)\to(0,0)$ 时的极限. 沿着第一条曲线或者第二条曲线得到的极限为 0, 但沿着第三条曲线得到的极限为 1/2.

由此可见多元函数的极限是很复杂的, 为了更好的理解极限, 我们首先引入较简单的累次极限来区别重极限.

定义 11.14. (累次极限)

假设 $D = D_1\times D_2\subset\mathbb{R}^2$, $z=f(x,y)$ 是定义在 D 上的二元函数, x_0 是 D_1 的聚点, y_0 是 D_2 的聚点. 如果对每个固定的 $y\in D_2$ 且 $y\neq y_0$, 作为 x 的一元函数 $f(x,y)$, 极限

$$\lim_{D_1\ni x\to x_0} f(x,y)$$

存在且第二个极限

$$\lim_{D_2\ni y\to y_0}\lim_{D_1\ni x\to x_0} f(x,y) \tag{11.3.10}$$

也存在, 则称后者为 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点先对 x 后对 y 的**累次极限 (repeated limit)**,

并记作

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y). \tag{11.3.11}$$

类似地可定义先对 y 后对 x 的累次极限

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y). \tag{11.3.12}$$

例 11.6

重极限和累次极限的关系是很复杂的.

(1) 重极限存在, 但两个累次极限都不存在. 比如

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \text{ 且 } y\neq 0,\\ 0, & x=0 \text{ 或 } y=0.\end{cases}$$

则重极限为 0.

(2) 重极限存在, 但两个累次极限一个存在而另一个不存在. 比如

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}, & y\neq 0,\\ 0, & y=0.\end{cases}$$

则重极限为 0, $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0=f(0,0)$, 但是 $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$ 不存在.

(3) 两个累次极限都存在且相等, 但是重极限不存在. 比如

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

则重极限不存在, 但是

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=0=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=f(0,0).$$

(4) 两个累次极限都存在, 但不相等. 比如

$$f(x,y)=\frac{x^2(1+x^2)-y^2(1+y^2)}{x^2+y^2}$$

在原点 $(0,0)$ 处两个累次极限为 $1,-1$.

定理 11.14

假设二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点处存在重极限

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A.$$

这里 A 是一实数.

(1) 如果当 $y\neq y_0$ 时存在极限

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\phi(y), \tag{11.3.13}$$

则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点处的先 x 后 y 的累次极限存在, 且

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\phi(y)=A. \tag{11.3.14}$$

(2) 如果当 $x \neq x_0$ 时存在极限

$$\lim_{y \to y_0} f(x,y) = \varphi(x), \tag{11.3.15}$$

则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点处的先 y 后 x 的累次极限存在, 且

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x,y) = \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = A. \tag{11.3.16}$$

证明: 对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使得不等式 $|f(x,y) - A| < \frac{\epsilon}{2}$ 对任何 $(x,y) \in U((x_0,y_0),\delta) \setminus \{(x_0,y_0)\}$ 都成立. 令 $x \to x_0$ 得到

$$|\varphi(y) - A| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon, \quad 0 < |y - y_0| < \delta.$$

这就表明 $\lim_{y \to y_0} \varphi(y) = A$. □

推论 11.4

(1) 如果两个累次极限和重极限都存在, 则三者必相等.

(2) 如果两个累次极限都存在但不相等, 则重极限必不存在.

例 11.7

(1) 求二元函数

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & |y| \leq x^2 \text{ 或 } y \neq 0, \\ 1, & |y| > x^2 \text{ 或 } y = 0. \end{cases}$$

的累次极限.

解: $\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x,y) = \lim_{x \to 0} 0 = 0$ 和 $\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x,y) = \lim_{y \to 0} 1 = 1$. □

(2) 求二元函数 $f(x,y) = x^2 e^{-(x^2 - y)}$ 沿着曲线族 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = t^2\}$ 当 $t \to +\infty$ 时的极限.

解: 曲线族上的点可写成 $(x,y) = (t\cos\theta, t\sin\theta)$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$. 令

$$F(t,\theta) := f(t\cos\theta, t\sin\theta) = t^2 \cos^2\theta e^{-t^2\cos^2\theta + t\sin\theta}.$$

如果 $\theta = \pm\pi/2$, 则 $F(t,\pm\pi/2) = 0$ 从而得到 $\lim_{t \to +\infty} F(t,\pm\pi/2) = 0$. 如果 $\theta \neq \pm\pi/2$ 则 $\cos\theta \neq 0$ 故 $t^2\cos^2\theta - t\sin\theta \to +\infty$. 直接计算得到

$$\lim_{t \to +\infty} F(t,\theta) = \cos^2\theta \lim_{t \to +\infty} \frac{t^2}{e^{t^2\cos^2\theta - t\sin\theta}} = 0. \quad \square$$

(3) 假设定义在 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ 上的函数 $f(x,y)$ 满足

- 对任意 $\theta \in [0,2\pi]$ 有 $\lim_{r \to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0$, 和
- 存在 $M > 0$ 使得对任意 $(x_i,y_i) \in D$, $i = 1,2$, 有

$$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| \leq M\left(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|\right),$$

则 $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0$.

证: 对任意点列 $\{(x_n,y_n)\}_{n \geq 1}$ 存在 $N \in \mathbb{N}$ 当 $n,m \to N$ 时有

$$|x_n - x_m| + |y_n - y_m| < \frac{\epsilon}{M}$$

从而得到

$$|f(x_n, y_n) - f(x_m, y_m)| \leq M \cdot \frac{\epsilon}{M} = \epsilon, \quad n, m \geq N.$$

从而 $\{f(x_n, y_n)\}_{n\geq 1}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 数列, 故极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = A$ 存在. 而第一个假设条件表明 $A = 0$. □

11.4 多元函数的连续性

假设 $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ 是拓扑空间 $(X, \mathcal{T}_X)$ 和 $(Y, \mathcal{T}_Y)$ 之间的映射, 我们已经给出了 f 是 $\mathcal{T}_X/\mathcal{T}_Y$-连续的定义, 即 f 是 $\mathcal{T}_X/\mathcal{T}_Y$- 连续当且仅当对任意 $V \in \mathcal{T}_Y$ 都有 $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$.

称映射 f 在 $x \in X$ 处**连续**如果对任意 $V \in \mathcal{T}_Y$ 且满足条件 $f(x) \in V$, 都有 $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$ 和 $x \in f^{-1}(V)$.

11.4.1 多元函数连续的定义及基本性质

令 $(X, \mathcal{T}_X) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n})$ 和 $(\mathcal{Y}, \mathcal{T}_Y) = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$. $\mathbb{R}^n$ 内的任意点集 D 在子空间拓扑 $\mathcal{T}_D$ 下本身就是一个拓扑空间. 此时函数 $f : D \to \mathbb{R}$ 在 $\boldsymbol{x}_0 \in D$ 处**连续** 就等价于:

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ 使得当 } \boldsymbol{x} \in \mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0, \delta) \cap D \text{ 时有 } |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)| < \epsilon.$$

根据点 $\boldsymbol{x}_0$ 的类型, 我们得到如下两种情形:

- $\boldsymbol{x}_0$ 是 D 的聚点 $\Longrightarrow$ f 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 连续当且仅当 $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0)$.
- $\boldsymbol{x}_0$ 是 D 的孤立点 $\Longrightarrow$ f 自动在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续.

练习 11.21

证明上述两种关于函数 $f : D \to \mathbb{R}$ 在 $\boldsymbol{x}_0 \in D$ 处连续的定义是等价的.

多元连续函数 $f : D \to \mathbb{R}$ 具有如下基本性质:

(1) **局部有界性:** f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续 $\Longrightarrow$ 存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 U(根据子空间拓扑的定义, 此时 $U = \mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0, r) \cap D$, 存在 $r > 0$) 使得 f 在 U 上有界.
如果假设点集 D 是开集, 则根据定义上述 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 U 可取成球邻域 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0, r)$.

(2) **局部保号性:** f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续且 $f(\boldsymbol{x}_0) > 0 \Longrightarrow$ 存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 U 使得对任意 $\boldsymbol{x} \in U$ 都有 $f(\boldsymbol{x}) > 0$.
如果假设点集 D 是开集, 则根据定义上述 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 U 可取成球邻域 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0, r)$.

(3) **四则运算:** 若有限个多元函数 $f_1, \cdots, f_k$ 都在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续, 则 $f_1, \cdots, f_k$ 之间进行有限次的加、减、乘、除运算 (做除法运算时要假设分母不为零) 后, 所得到的多元函数在 $\boldsymbol{x}_0$ 也连续.

(4) **复合函数的连续性:** 多元函数的复合运算保持连续性. 比如

(4.1) 假设函数 $z = f(u, v)$ 在 $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ 连续, $u = u(x, y)$ 和 $v = v(x, y)$ 都在 (x_0, y_0) 连续, 其中 $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$, 且它们能够复合, 则复合函数

$z = f(u(x,y), v(x,y))$ 在 (x_0, y_0) 连续.

(4.2) 假设函数 $z = f(u,v)$ 在区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 内连续, $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ 都在区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 内连续, 且对任何 $(x,y) \in D$ 都有 $(u(x,y), v(x,y)) \in \Omega$, 则复合函数 $z = f(u(x,y), v(x,y))$ 在 D 内连续.

(4.3) 假设函数 $z = f(x,y)$ 在区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 内连续, $C: x = x(t), y = y(t)$ $(\alpha < t < \beta)$ 是连续曲线 (即 $x(t), y(t)$ 在 (α, β) 内连续) 且 $(x(t), y(t)) \in \Omega$, 则 $f(x(t), y(t))$ 在 (α, β) 内连续.

多元初等函数 (elementary functions of several variables) 是指固定其它自变量后, 函数作为剩下自变量的一元函数是初等函数. 比如

$$f(x,y) = \sin(x^2 + xy)\ ((x,y) \in \mathbb{R}^2), \quad f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}),$$

和

$$f(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|\boldsymbol{x}|^2/4t}, \quad (\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty).$$

命题 11.6

多元初等函数在其定义域内是连续的.

例 11.8

(1) 对函数

$$f(x,y) := \begin{cases} (x+y)\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

可知其仅在 $D := (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}) \cup \{(0,0)\}$ 上连续. 该函数在 $D \setminus \{(0,0)\}$ 内的连续性是显然的. 而在 $(0,0)$ 处, 根据极限义可知

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

(2) 根据**性质 11.6** 易得到

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\ln(0 + e^1)}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \ln e = 1.$$

(3) 考虑特殊路径 $y = kx$ $(k \neq 0$ 且 $x > 0)$ 趋于 $(0,0)$, 即从第一或第四象限趋于原点. 因此函数 $\ln(x + e^y)/\sqrt{x^2 + y^2}$ 沿着这条路径趋于 $(0,0)$ 的极限为

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x + e^{kx})}{\sqrt{1+k^2}x} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \lim_{x\to 0+} \frac{1 + ke^{kx}}{x + e^{kx}} = \frac{1+k}{\sqrt{1+k^2}}.$$

这表明函数 $\ln(x + e^y)/\sqrt{x^2 + y^2}$ 在 $(0,0)$ 处极限不存在.

(4) 考察函数

$$f(x,y) := \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ y, & x \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}. \end{cases}$$

令 $D = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$. 下证函数只在 D 上连续. 任取 $(x_0, y_0) \notin D$, 则 $y_0 \neq 0$. 若 $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 则 $f(x_0, y_0) = 0$; 此时存在两个数列 $\{x_{0,n}\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 和

$\{x'_{0,n}\}_{n\geq 1}\subset\mathbb{Q}$ 满足条件 $\lim_{n\to\infty}x_{0,n}=\lim_{n\to\infty}x'_{0,n}=x_0$; 但是

$$\lim_{n\to\infty}f(x_{0,n},y_0)=0\neq y_0=\lim_{n\to\infty}f(x'_{0,n},y_0);$$

故在 (x_0,y_0) 不连续. 类似地可以证明当 $x_0\in\mathbb{Q}$ 时函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 也不连续.

最后来证明函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续. 任取 $(x_0,0)\in D$ 则 $f(x_0,y_0)=0$. 如果 $(x,y)\in\mathbb{B}^2((x_0,0),\epsilon)$ 时, 即 $(x-x_0)^2+y^2<\epsilon^2$ 时, 有

$$|f(x,y)-f(x_0,0)|=|f(x,y)|\leq|y|<\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}<\epsilon.$$

故函数 $f(x,y)$ 在 $(x_0,0)$ 连续.

(5) 讨论下列函数的连续性:

$$f(x,y)=\begin{cases}\sin(xy)/\sqrt{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

和

$$g(x,y)=\begin{cases}x\sin(1/y), & y\neq 0,\\ 0, & y=0.\end{cases}$$

解: 因为

$$|\sin(xy)|\leq|xy|\leq\frac{x^2+y^2}{2},$$

所以得到

$$|f(x,y)-0|\leq\frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}.$$

因此函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

对二元函数 $g(x,y)$, 任取 $x_0\neq 0$. 考虑点列

$$(x_n,y_n)=\left(\frac{n}{n+1}x_0,\frac{2}{(4n+1)\pi}\right)\to(x_0,0).$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx_0}{n+1}\sin\frac{(4n+1)\pi}{2}=x_0\neq 0=f(x_0,0),$$

f 在 $(x_0,0)$, $x_0\neq 0$, 不连续. 因为 $|x\sin(1/y)|\leq|x|$, 函数 f 在 $(0,0)$ 处连续. □

11.4.2 向量值函数的极限和连续

多元函数的极限和连续概念可平行的推广到向量值函数. 假设 $D\subseteq\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x}_0$ 是 D 的聚点, $\boldsymbol{f}:D\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}\to\mathbb{R}^m$ 向量值函数, 且 $\boldsymbol{A}$ 是 m 维向量. 若对任意 $\epsilon>0$ 存在 $\delta>0$ 使得当 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,\delta)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$ 时 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in\mathbb{B}^m(\boldsymbol{A},\epsilon)$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的极限, 并记作

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=A.$$

假设 $D\subseteq\mathbb{R}^n$ 为点集, $\boldsymbol{x}_0\in D$, $\boldsymbol{f}:D\to\mathbb{R}^m$ 向量值函数. 如果对任意 $\epsilon>0$ 存在 $\delta>0$ 使得当 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,\delta)\cap D$ 时 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in\mathbb{B}^n(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0),\epsilon)$, 则称 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续.

(1) 若映射 $\boldsymbol{f}$ 在 D 上每一点都连续则称 $\boldsymbol{f}$ 在 D 上连续.

(2) 若 $\boldsymbol{x}_0 \in D$ 为聚点, 则 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点连续 $\Leftrightarrow \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$.

定理 11.15

令 $\boldsymbol{x}_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$. 向量值函数 $\boldsymbol{f} = (f^1, \cdots, f^m) : D \to \mathbb{R}^m$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续 $\Longleftrightarrow$ 每个分量函数 f^i 都在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续, $1 \le i \le m$.

证明: 利用定理 11.3 中的不等式. □

对向量值函数同样可以定义加法、减法、数乘、乘法 (当然乘法有不同类型的定义), 且这些运算保持连续性.

11.4.3 向量值连续函数的三大定理

我们现在将连续函数的三大性质, 有界性、最值性、介值性, 参见第一卷第 3.3.3 小节, 推广到向量值函数情形.

定理 11.16. (向量值连续函数的三大定理)

(1) **(紧性不变性)** 连续映射将紧集合映为紧集.

(2) **(有界性)** 紧集上的连续映射必有界.

(3) **(最值定理)** 紧集上的连续函数必有最大值和最小值.

证明: (1) 假设 $\boldsymbol{f} : K \to \mathbb{R}^m$ 是紧集 K 上的连续映射. 根据推论 11.2, 取 $\boldsymbol{f}(K)$ 中的点列 $\{\boldsymbol{y}_k\}_{k\ge1}$. 从而 $\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k), \boldsymbol{x}_k \in K$. 但是 K 是紧的, 故存在子列 $\{\boldsymbol{x}_{k_i}\}_{i\ge1}$ 及 $\boldsymbol{a} \in K$ 满足 $\lim_{i\to\infty} \boldsymbol{x}_{k_i} = \boldsymbol{a} \in K$. 连续性告诉我们

$$\lim_{i\to\infty} \boldsymbol{y}_{k_i} = \lim_{i\to\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{k_i}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \in \boldsymbol{f}(K),$$

即 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ 是 $\{\boldsymbol{y}_k\}_{k\ge1}$ 的聚点. 因此 $\boldsymbol{f}(K)$ 是紧集.

(2) 再次利用推论 11.2.

(3) 现在 $f : K \to \mathbb{R}$ 是紧集 K 上的连续函数. 数集 $f(K) \subset \mathbb{R}$ 是紧的从而是有界且闭的. 根据确界原理必存在上确界和下确界; 数集 $f(K)$ 是闭的告诉我们上、下确界必在 $f(K)$ 内, 故数集 $f(K)$ 必有最大值和最小值. □

定理 11.17

(1) 连续函数将道路连通集映为道路连通集.

(2) 连续函数将连通集映为连通集.

(3) 连续函数将有界闭区域与有界闭连通集映为有界闭区间. 特别地, 一元连续函数将有界闭区间映为有界闭区间.

(4) **(介值定理)** 设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 为有界闭区域或有界闭连通集, 则其上的连续函数 f 可取到它在 K 上的最大值 M 和最小值 m 之间的一切值.

证明: (1) 假设函数 $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^m$ 是道路连通集 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上的连续映射. 对任意 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{f}(D)$, 存在道路 $\gamma : [0, 1] \to D$ 使得 $\gamma(0) = \boldsymbol{x}$ 和 $\gamma(1) = \boldsymbol{y}$. 从而连续映射 $\boldsymbol{f} \circ \gamma$ 连接 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$.

(2) 假设函数 $\boldsymbol{f}: D \to \mathbb{R}^m$ 是连通集 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上的连续映射. 下证 $\boldsymbol{f}(D)$ 也是连通的. 假设 $\boldsymbol{f}(D)$ 不是连通的, 则根据**定义 11.10**, 存在非空不相交的开子集 $A, B \subset (\mathbf{D})$ 满足 $\boldsymbol{f}(D) = A \cup B$. 因此 $\boldsymbol{f}^{-1}(A)$ 和 $\boldsymbol{f}^{-1}(B)$ 都是 D 的非空不交子集, 且 $\boldsymbol{f}^{-1}(A) \cup \boldsymbol{f}^{-1}(B) = X$. $\boldsymbol{f}$ 的连续性告诉我们 $\boldsymbol{f}^{-1}(A)$ 和 $\boldsymbol{f}^{-1}(B)$ 都是开的. 故 D 不是连通的, 矛盾!.

(3) 连通紧集关于连续函数的像是 $\mathbb{R}$ 上的连通紧集, 故根据**推论 11.2** 和**定理 11.12**, 必是有界闭区间.

(4) 考察最大值点和最小值点的连线, 并应用一元的介值定理. □

例 11.9

(1) 假设函数 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上是连续的且 $\lim_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y) = +\infty$. 证明 f 有最小值.

证: 定义 $A := f(0,0)$. 假设条件 $\lim_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y) = +\infty$ 得到存在 $R > 0$ 使得 $f(x,y) > A$ 在 $\mathbb{R}^2 \setminus D$ 上都成立, 这里 $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le R\}$. 另一方面, 由于 D 是有界闭集故必为紧集, 从而连续函数 f 在 $(x_0, y_0) \in D$ 上取到最小值, 即

$$f(x_0, y_0) \le f(x,y), \quad \forall\, (x,y) \in D.$$

特别的

$$f(x_0, y_0) \le f(0,0) = A < f(x,y), \quad \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D.$$

因此函数 f 在 (x_0, y_0) 达到最小值. □

(2) 用有限覆盖定理证明零点定理: 如果连续函数 f 定义在闭区间 $[a,b]$ 上且满足条件 $f(a) > 0 > f(b)$ 则存在 $x_0 \in (a,b)$ 使得 $f(x_0) = 0$ 成立.

证: 否则的话, 对任意 $x \in [a,b]$ 都有 $f(x) \ne 0$. 如果 $f(x) > 0$ 则存在一个关于 x 的邻域 I_x 使得 $f|_{I_x} > 0$; 如果 $f(x) < 0$ 则存在一个关于 x 的邻域 I_x 使得 $f|_{I_x} < 0$. 因此对任意 $x \in [a,b]$ 存在 I_x 使得 $f|_{I_x}$ 和 $f(x)$ 同号. 这样 $\{I_x\}_{\in[a,b]}$ 构成了紧集 $[a,b]$ 的一个开覆盖, 利用有限覆盖定理可知存在一个有限子覆盖 $\{I_{x_i}\}_{1\le i\le n}$. 因为 $a \in [a,b]$ 存在邻域 I_{x_i} 包含 a, 同样存在邻域 I_{x_j} 包含 b. 如果 $i = j$, 则 a, b 在同一个邻域内, 根据邻域的构造 $f(a), f(b)$ 必同号, 矛盾. 如果 $i \ne j$, 那么 I_{x_i} 必被第三个邻域 I_{x_k} 所连接, 这样根据 $f(a) > 0$ 得到 $f|_{I_{x_i} \cup I_{x_k}} > 0$, 经过有限步之后得到 $f|_{I_{x_1} \cup \cdot I x_n} > 0$, 这和 $f(b) < 0$ 矛盾. □

(3) 利用 $[a,b]$ 的连通性证明零点定理.

证明: 否则对任意 $x \in [a,b]$ 都有 $f(x) \ne 0$. 定义两个集合

$$U := \{x \in [a,b] : f(x) > 0\}, \quad V := \{x \in [a,b] : f(x) < 0\}.$$

则根据假设得到 $a \in U$ 和 $b \in V$. 根据函数 f 的连续性可知 U, V 都是开的, 从而得到 $[a,b] = U \cup V$ 且 $U \cap V = \emptyset$. 矛盾! □

多元函数和一元函数的区别:

- **一元函数:** 连续 $\Leftarrow$ 可导 $\Leftarrow$ 可微 $\Rightarrow$ 连续, 可导 $\Rightarrow$ 可微
- **多元函数:** 连续 $\not\Leftarrow$ 可偏导 $\Leftarrow$ 可微 $\Rightarrow$ 连续, 可偏导 $\not\Rightarrow$ 可微

11.4.4 一致连续

假设 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 且 $\boldsymbol{f}: D \to \mathbb{R}^m$ 是向量值函数. 如果对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使得对满足 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| < \delta$ 的所有 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$, 都有 $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})| < \epsilon$ 成立, 则称 $\boldsymbol{f}$ 在 D 上是**一致连续的 (uniformly continuous)**.

定理 11.18

假设 $D \subset \mathbb{R}^n$, 则向量值函数 $\boldsymbol{f}: D \to \mathbb{R}^m$ 在 D 上是一致连续的 $\Longleftrightarrow$ 对 D 中任何点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\geq 1}$ 和 $\{\boldsymbol{y}_n\}_{n\geq 1}$ 只要满足 $\lim_{n\to\infty} |\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_n| = 0$ 就有 $\lim_{n\to\infty} |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_n)| = 0$. ♡

证明: 证明和一元函数一模一样, 只要把绝对值换成范数. □

定理 11.19. (Cantor 定理)

紧集上的连续函数必一致连续. ♡

证明: 假设函数 f 在紧集 D 上连续但不是一致连续. 根据**定理 11.18** 存在 $\delta_0 > 0$ 和存在点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\geq 1}, \{\boldsymbol{y}_n\}_{n\geq 1}$ 虽然 $\lim_{n\to\infty} |\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_n| = 0$ 但 $|f(\boldsymbol{x}_n) - f(\boldsymbol{y}_n)| \geq \epsilon_0$. 因为 $\{\boldsymbol{y}_n\}_{n\geq 1}$ 在紧集 D 中有界, 故根据**定理 11.6** 可知存在收敛子列 $\{\boldsymbol{y}_{n_k}\}_{k\geq 1}$ 满足 $\boldsymbol{y}_{n_k} \to \boldsymbol{y}_0 \in D$. 因此 $\boldsymbol{x}_{n_k} \to \boldsymbol{y}_0$ 故

$$0 < \epsilon_0 \leq |f(\boldsymbol{x}_{n_k}) - f(\boldsymbol{y}_{n_k})| \to |f(\boldsymbol{y}_0) - f(\boldsymbol{y}_0)| = 0.$$

矛盾表明紧集上的连续函数必一致连续. □

例 11.10

(1) 函数 $z = \sin(xy)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 不是一致连续.

证: 这是因为函数 $\sin(x^2)$ 在非一致连续, 参见**注 3.9**. □

(2) 研究下列函数的一致连续性:

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\ ((x,y) \in \mathbb{R}^2), \quad g(x,y) = \sin\frac{\pi}{1-x^2-y^2}\ (x^2+y^2<1).$$

解: 对 $f(x,y)$ 和任取两点 $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2, i = 1,2$, 得到

$$\begin{aligned} |f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| &= \left|\sqrt{x_1^2+y_1^2} - \sqrt{x_2^2+y_2^2}\right| \\ = \frac{|(x_1^2+y_1^2)-(x_2^2+y_2^2)|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}} &= \frac{|(x_1^2-x_2^2)+(y_1^2-y_2^2)|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}} \\ = \frac{|x_1-x_2||x_1+x_2| + |y_1-y_2||y_1+y_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}} &\leq |x_1-x_2| + |y_1-y_2|. \end{aligned}$$

故 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 是一致连续的. □

(3) 假设二元函数 $f(x,y)$ 在 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y \in \mathbb{R}\}$ 上一致连续, 证明对任意 $y_0 \in \mathbb{R}$ 极限 $\lim_{(x,y)\to(0+,y_0)} f(x,y)$ 都存在.

证: 因为考虑极限 $(x,y) \to (0+, y_0)$, 所以我们可以把 (x,y) 限制在区域 $(0,1) \times (y_0-1, y_0+1)$ 内. 任取 $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset (0,1)$ 和 $\{y_n\}_{n\geq 1} \subset (y_0-1, y_0+1)$, 且满足

$x_0 \to 0+$ 和 $y_n \to y_0$. f 的一致连续性推出 $\{f(x_n, y_n)\}_{n\geq 1}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 Cauchy 数列. 根据注 **11.1** 中多元函数的 Heine 定理, $\lim_{(x,y)\to(0+,y_0)} f(x,y)$ 存在. □

(4) 假设 $g \in C((-\infty, +\infty))$ 并令 $f(x,y) := g(xy)$. 证明如果 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上是一致连续的, 则 g 是常值函数.

证: 否则的话, 存在 $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ 满足 $|g(x_0) - g(y_0)| =: \epsilon_0 > 0$. 对此 ϵ_0 根据一致连续性可知存在 $\delta > 0$ 使得

$$|f(x,y) - f(x', y')| < \epsilon_0$$

只要 $|x - x'| + |y - y'| < \delta$. 任取 $N \in \mathbb{N}$ 满足 $|x_0 - y_0|/N < \delta$ 从而得到

$$|g(x_0) - g(y_0)| = \left|g\left(N\frac{x_0}{N}\right) - g\left(N\frac{y_0}{N}\right)\right| = \left|f\left(N, \frac{x_0}{N}\right) - f\left(N, \frac{y_0}{N}\right)\right| < \epsilon_0$$

发生矛盾. □

11.5 习题

11.6 参考文献

1. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis I*, Translated from the 1988 German original by Gary Brookfield, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. xiv+426 pp. ISBN: 3-7643-7153-6
2. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis II*, Translated from the 1999 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. xii+400 pp. ISBN: 978-3-7643-7472-3; 3-7643-7472-3
3. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis III*, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. xii+468 pp. ISBN: 978-3-7643-7479-2; 3-7643-7479-2
4. Munkres, James R. *Topology*, Second edition, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000. xvi+537 pp. ISBN: 0-13-181629-2
5. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis I*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+574 pp. ISBN: 3-540-40386-8
6. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis II*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xvi+681 pp. ISBN: 3-540-40633-6
7. 布鲁斯 · C. 伯恩特 (Bruce C. Berndt) 主编: **拉玛努金笔记** (第 1, 2, 3, 4 卷), 哈尔滨工业大学出版社, 2019.
8. 常庚哲, 史济怀 编: **数学分析教程** (上、下册), 高等教育出版社, 2003.
9. 陈天权 编著: **数学分析讲义** (第一、二、三册), 北京大学出版社, 2009.
10. 邓建平 编: **微积分 I 和 II**, 科学出版社, 2019.

11. Duhham, William 著 (李伯民, 汪军, 张怀勇 译): **微积分的历程** – 从牛顿到勒贝格, 人民邮电出版社, 2013.
12. 吉米多维奇 著 (李荣[F], 李植 译): **数学分析习题集** (根据 2010 年俄文版翻译), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.
13. Kline, Morris 著 (张理京, 张炎热, 江泽涵等 译): **古今数学思想** (第一、二、三册), 上海科学技术出版社, 2014.
14. 李傅山, 王培合 编著: **数学分析习题课讲义** (1、2、3), 北京大学出版社, 2018.
15. 林源渠, 方企勤 编: **数学分析解题指南**, 北京大学出版社, 2003.
16. 梅加强 编著: **数学分析**, 高等教育出版社, 2015.
17. 裴礼文 编著: **数学分析中的典型问题与方法** (第二版), 高等教育出版社, 2015.
18. 汪林 著: **数学分析中的问题和反例**, 现代数学基础 **56**, 高等教育出版社, 2015.
19. Weir, D. Maurice; Hass, R. Joel; Giordano, R. Frank. *Thomas' calculus*, Eleventh Edition, (影印版, 上、下册), 高等教育出版社, 2016.
20. 徐森林, 薛春华 编著: **数学分析**, 清华出版社, 2005.
21. 杨小远, 孙玉泉, 薛玉梅, 杨卓琴 编著: **工科数学分析教程** (上、下册), 科学出版社, 2011.
22. 张福保, 薛金美, 潮小李 主编: **数学分析讲义**, 科学出版社, 2019.
23. 张筑生 编著: **数学分析新讲** (第一、二、三册), 北京大学出版社, 1990.
24. 周民强 编著: **数学分析习题演练** (第一、二、三册), 科学出版社, 2018.
25. 朱尧辰 编著: **数学分析例选通过范例学技巧**, 哈尔滨工业大学出版社, 2013.

第十二章 多变量导数理论

Read Euler, read Euler, he is the master of us all. – P. S. Laplace

12.1 多元函数的微分和偏导数

本节引入多元函数的偏导数和可微性, 和一元情形不同的是此时可微和可偏导是不等价的.

多变量微积分在十八世纪初期就已经出现了. Newton 从关于 x 和 y 的多项式方程 $f(x,y)=0$ 求出了我们今天由 f 对 x 或 y 取偏导数而得到的表达式, 但是这个工作未发表. 偏导数理论的创立者是Alexis Fontaine des Bertins、Euler、Clairaut和D'Alembert. Clairaut 在 1739 年证明了微分 $p\,dx+q\,dy$ 是正合的 (即存在函数 f 满足 $\partial f/\partial x=p$ 和 $\partial f/\partial y=q$) 当且仅当 $\partial p/\partial y=\partial q/\partial x$. Euler 在 1734 年证明了如果 $z=f(x,y)$ 则

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

在 1748 年到 1766 年的一系列文章中, Euler 处理了变量替换、偏导数的反演及多元函数的行列式. D'Alembert 在 1744 年到 1745 年关于动力学的工作中, 推广了偏导数的计算. 多重积分实际上已经包含在Newton 写进《Philosophi Naturalis Principia Mathematica》中的关于球与球壳作用在质点上的万有引力, 但是Newton 用的是几何论证. 在十八世纪上半叶, 重积分出现被用来表示 $\partial^2 z/\partial x\partial y=f(x,y)$ 的解. Euler 对由圆弧围成的有界区域上的二重积分有了明确的概念, 并给出了用累次积分来计算的方法. Lagrange 在 1773 年用三重积分来表示引力, 并用球坐标来计算这个三重积分. Laplace 在 1772 年也同时给出了球坐标变换.

12.1.1 多元函数的微分

回顾下一元函数 $y=f(x)$ 在 a 处的微分

$$f(a+\Delta x)=f(a)+f'(a)\Delta x+o(|\Delta x|).$$

根据无穷小的定义得到

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)-f'(a)\Delta x}{|\Delta x|}=0.$$

由此可以推广到多元函数情形: 把绝对值换成范数, 把乘积换成内积.

定义 12.1. (多元函数的微分)

假设 n 元函数 $y=f(\boldsymbol{x})=f(x^1,\cdots,x^n)$ 在点 $\boldsymbol{a}=(a^1,\cdots,a^n)$ 的某邻域内有定义, 若存在 n 维向量 $\boldsymbol{b}=(b^1,\cdots,b^n)$ 使得

$$\lim_{\Delta\boldsymbol{x}\to\mathbf{0}}\frac{f(\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})-\langle\boldsymbol{b},\Delta\boldsymbol{x}\rangle}{|\Delta\boldsymbol{x}|}=0,\tag{12.1.1}$$

成立, 其中 $\Delta\boldsymbol{x}$ 是 n 维变量, 即

$$f(\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})=\langle\boldsymbol{b},\Delta\boldsymbol{x}\rangle+o(|\Delta\boldsymbol{x}|), \tag{12.1.2}$$

则称函数 f 在 $\boldsymbol{a}$ 处**可微的**或**可导的 (differentiable)**, 向量 $\boldsymbol{b}$ 为函数 f 在 $\boldsymbol{a}$ 处的**导数 (derivative)**, 记为

$$\boldsymbol{b}=f'(\boldsymbol{a})=\nabla f(\boldsymbol{a}). \tag{12.1.3}$$

把 $\langle\boldsymbol{b},\Delta\boldsymbol{x}\rangle=\sum_{1\le i\le n}b^i\Delta x^i$ 称为 f 在 $\boldsymbol{a}$ 处的**全微分 (total differential)** 并记作

$$df(\boldsymbol{a})=\langle\boldsymbol{b},\Delta\boldsymbol{x}\rangle. \tag{12.1.4}$$

若函数 f 在区域 D 内每点都可微, 则称函数 f 在 D 内可微. ♣

因为对每个 $1\le i\le n$, 有 $dx^i=\Delta x^i$, 故

$$\Delta\boldsymbol{x}=(\Delta x^1,\cdots,\Delta x^n)=(dx^1,\cdots,dx^n)=:d\boldsymbol{x}. \tag{12.1.5}$$

从而 (12.1.4) 可记成

$$df(\boldsymbol{a})=\langle f'(\boldsymbol{a}),d\boldsymbol{x}\rangle=\langle\nabla f(\boldsymbol{a}),d\boldsymbol{x}\rangle=\langle\boldsymbol{b},d\boldsymbol{x}\rangle=\sum_{1\le i\le n}b^i dx^i. \tag{12.1.6}$$

注 12.1

(1) 若 f 在 D 内可微, 则 df 是 D 上的函数.

(2) 对**仿射函数 (affine function)** $f(\boldsymbol{x})=\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\rangle+C$, 有 $f'(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}$.

(3) **(导数的几何意义)** 如果函数 f 在 $\boldsymbol{a}$ 可微, 考察超平面, 称为**切平面**,

$$\pi: y=f(\boldsymbol{a})+\langle f'(\boldsymbol{a}),\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\rangle. \tag{12.1.7}$$

显然 π 经过 $(\boldsymbol{a},f(\boldsymbol{a}))$, 且当 $\boldsymbol{x}$ 趋于 $\boldsymbol{a}$ 时 π 可近似代替曲面 $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})$.

(4) 和一元可微函数一样, 多元函数在一点可微必在这点连续.

(5) 多元函数在一点连续 $\not\Rightarrow$ 在这点可微: 考察函数

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2},\quad \boldsymbol{a}=(0,0).$$

显然函数 f 在 $(0,0)$ 连续, 但不可微. 反之假设函数 f 在 $\boldsymbol{a}$ 可微, 则存在 $\boldsymbol{b}=(b^1,b^2)$ 满足

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to0}\frac{\sqrt{x^2+y^2}-(b^1x+b^2y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

即

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to0}\frac{b^1x+b^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}=1.$$

但是上述极限是不存在, 因为取特殊路径 $y=kx, x>0$ 得到

$$1=\frac{b^1+kb^2}{\sqrt{1+k^2}},\quad 任意\ k>0.$$

这个等式不可能对任意 k 都成立. 矛盾表明函数 f 在 $(0,0)$ 不可微. ♣

12.1.2 多元函数的偏导数

定义 12.2. (多元函数的偏导数)

假设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是开集, $z = f(x, y)$ 是定义在 D 上的二元函数, $(x_0, y_0) \in D$ 是固定点. 如果存在极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \tag{12.1.8}$$

则称函数 f 在 (x_0, y_0) 关于x **可偏导**, 并称极限为 f 在 (x_0, y_0) 处关于 x 的**偏导数 (partial derivative)**, 记为

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0). \tag{12.1.9}$$

显然 f 在 (x_0, y_0) 处关于 x 的偏导数就是一元函数 $f(x, y_0)$ 在 x_0 的导数.

如果函数 f 在 D 中的每点都关于 x 可偏导, 则得到 D 上的二元函数, 称为 f 关于 x 的**偏导函数**, 记为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y). \tag{12.1.10}$$

类似可定义 f 在 (x_0, y_0) 处关于 y 的偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) \tag{12.1.11}$$

和关于 y 的偏导函数

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y). \tag{12.1.12}$$

如果函数 f 在 (x_0, y_0) 处关于 x 和 y 都可偏导, 称 f 在 (x_0, y_0) 处**可偏导**. ♣

根据偏导数定义, 为了求 $\partial f/\partial x$ 可把变量 y 暂时看成是常数, 这样求偏导数就变为普通的一元函数求导.

假设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是开集, $z = f(\boldsymbol{x})$ 是定义在 D 上的 n 元函数, $\boldsymbol{x}_0 \in D$ 是固定点. 如果存在极限

$$\lim_{\Delta x^i \to 0} \frac{f(x_0^1, \cdots, x_0^{i-1}, x_0^i + \Delta x^i, x_0^{i+1}, \cdots, x_0^n) - f(x_0^1, \cdots, x_0^{i-1}, x_0^i, x^{i+1}, \cdots, x_0^n)}{\Delta x^i}$$

则称函数 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 关于x^i **可偏导**, 并称极限为 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处关于 x^i 的偏导数并记为

$$\frac{\partial z}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}_0) = f_{x^i}(\boldsymbol{x}_0).$$

如果函数 f 在 D 中的每点都关于 x^i 可偏导, 则得到 D 上的 n 元函数, 称为 f 关于 x^i 的偏导函数并记为

$$\frac{\partial z}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial x^i} = f_{x^i}(\boldsymbol{x}).$$

例 12.1

(1) **(偏导数存在但不可微)** 研究函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

在 $(0,0)$ 的偏导数和可微性.

解: $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$, 但是 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续, 故不可微. □

(2) **(连续但不存在偏导数)** 研究函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 的偏导数和连续性.

解: 计算可得

$$f_x(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad f_y(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad (x,y)\neq(0,0).$$

另一方面

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{|x|}{x}$$

故 $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$ 都不存在. 但是 f 在 $(0,0)$ 是连续的.

注意到

$$f''_{xx}(x,y)+f''_{yy}(x,y)=\frac{1}{f(x,y)},\quad (x,y)\neq(0,0).$$

这表明函数 f 是偏微分方程 $\Delta f=1/f$ 在 $D:=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 上的一个解, 其中算子 Δ 定义在 (12.1.20). □

(3) **(可微但偏导数不连续)** 研究函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=0,\end{cases}$$

在 $(0,0)$ 处的可微性和偏导数的连续性.

解: 根据 sin 的有界性立即得到函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 是可微的. 但是

$$f_x(x,y)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

如果取 $x_k=y_k=1/2k\pi\sqrt{2}$, $k\in\mathbb{Z}_{\geq1}$, 则得到

$$\lim_{k\to\infty}f_x(x_k,y_k)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\neq0=f_x(0,0).$$

所以偏导数 f_x 在 $(0,0)$ 处不连续. 类似可证 f_y 在 $(0,0)$ 处也不连续. □

定理 12.1

如果函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{a}$ 处可微, 则在 $\boldsymbol{a}$ 处必存在偏导数且满足

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a}):=\left(f'_{x^1}(\boldsymbol{a}),\cdots,f'_{x^n}(\boldsymbol{a})\right),\quad df(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})\cdot d\boldsymbol{x}=\sum_{1\leq i\leq n}f'_{x^i}(\boldsymbol{a})dx^i.\tag{12.1.13}$$

但是反之则不一定成立.

证: 可微推出存在 $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$ 满足 $f(\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})=\langle\boldsymbol{b},\Delta\boldsymbol{x}\rangle+o(|\Delta\boldsymbol{x}|)$. 取特殊的无穷小 $\Delta\boldsymbol{x}=(0,\cdots,\Delta x^i,\cdots,0)$ 得到

$$f(a^1,\cdots,a^i+\Delta x^i,\cdots,0)-f(a^1,\cdots,a^n)=b^i\Delta x^i+o(|\Delta x^i|).$$

根据定义得到 $b^i=f'_{x^i}(\boldsymbol{a})$. 反之不成立的反例参见例 **12.1** (1). □

上述定理告诉我们, 可微必定可偏导, 但反之不一定成立. 那一个很自然的问题是: 什么时候可偏导函数是可微的? 下面定理就告诉我只要加上偏导数的连续性就可以了. 故

$$\text{可微} \Longrightarrow \text{可偏导}, \qquad \text{可偏导} + \text{偏导连续} \Longrightarrow \text{可微}.$$

定理 12.2

如果函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{a}$ 的某个邻域上存在 (全部) 偏导数且 (全部) 偏导数在 $\boldsymbol{a}$ 处连续, 则 f 在 $\boldsymbol{a}$ 处可微. ♡

证: 令 $\Delta z := f(\Delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})-f(\boldsymbol{a})$ 得到

$$\begin{aligned}
\Delta z &= \left[f(\Delta x^1+a^1,a^2,\cdots,a^n)-f(a^1,a^2,\cdots,a^n)\right] \\
&+ \left[f(\Delta^1+a^1,\Delta x^2+a^2,\cdots,\Delta x^n+a^n)-f(\Delta x^1+a^1,a^2,\cdots,a^n)\right] \\
&= f'_{x^1}(\boldsymbol{a})\Delta x^1+o(|\Delta x^1|)+[f(\Delta x^1+a^1,\Delta x^2+a^2,a^3,\cdots,a^n)- \\
&f(\Delta x^1+a^1,a^2,a^3,\cdots,a^n)]+[f(\Delta x^1+a^1,\Delta x^2+a^2,\Delta x^3+a^3,\cdots,\Delta x^n+a^n) \\
&-f(\Delta x^1+a^1,\Delta x^2+a^2,a^3,\cdots,a^n)] \\
&= f'_{x^1}(\boldsymbol{a})\Delta x^1+o(|\Delta x^1|)+f'_{x^2}(\Delta x^1+a^1,a^2,a^3,\cdots,a^n)\Delta x^2+o(|\Delta x^2|)+ \\
&[f(\Delta x^1+a^1,\Delta x^2+a^2,\Delta x^3+a^3,\cdots,\Delta x^n+a^n)-f(\Delta x^1+a^1,\Delta x^2+a^2,a^3,\cdots,a^n)].
\end{aligned}$$

利用偏导数连续性可以进一步得出

$$\begin{aligned}
\Delta z &= f'_{x^1}(\boldsymbol{a})\Delta x^1+o(|\Delta x^1|)+\left[f'_{x^2}(\boldsymbol{a})+o(|\Delta x^1|)\right]\Delta x^2+o(|\Delta x^2|)+ \\
&[f(\Delta x^1+a^1,\Delta x^2+a^2,\Delta x^3+a^3,\cdots,\Delta x^n+a^n)-f(\Delta x^1+a^1,\Delta x^2+a^2,a^3,\cdots,a^n)] \\
&= f'_{x^1}(\boldsymbol{a})\Delta x^1+f'_{x^2}(\boldsymbol{a})\Delta x^2+o(|\Delta\boldsymbol{x}|)+ \\
&[f(\Delta x^1+a^1,\Delta x^2+a^2,\Delta x^3+a^3,\cdots,\Delta x^n+a^n)-f(\Delta x^1+a^1,\Delta x^2+a^2,a^3,\cdots,a^n)].
\end{aligned}$$

这个计算过程继续下去就得到

$$\Delta z = \sum_{1\le i\le n} f'_{x^i}(\boldsymbol{x})\Delta x^i + o(|\Delta\boldsymbol{x}|).$$

即函数 f 在 $\boldsymbol{a}$ 处可微. □

12.1.3 多元函数的方向导数

偏导数 f_{x^i} 是函数 f 沿着 x^i-轴方向的变化率. 一般地, 我们可以考虑函数沿着某个固定方向的变化率. 假设 n 元函数 $z=f(\boldsymbol{x})$ 定义在 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上, $\boldsymbol{x}_0$ 是 D 内的点. 对任意 $\boldsymbol{x}\in D$ 考虑商

$$\frac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}=\frac{f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)-f(\boldsymbol{x}_0)}{\rho}, \quad \rho := |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|>0.$$

由于 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$ 的范数是 ρ, 我们可记作 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0=\rho\boldsymbol{\nu}$, 其中 $\boldsymbol{\nu}:=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)/\rho$. 从而得到如下

定义 12.3. (方向导数)

假设 n 元函数 $z=f(\boldsymbol{x})$ 定义在 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上, $\boldsymbol{x}_0$ 是 D 的内点, 且 $\boldsymbol{\nu}=(\nu^1,\cdots,\nu^n)$ 是一单位向量, 即满足 $|\boldsymbol{\nu}|=1$. 如果极限

$$(D_{\boldsymbol{\nu}}f)(\boldsymbol{x}_0)\equiv\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{x}_0):=\lim_{t\to0+}\frac{f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{\nu})-f(\boldsymbol{x}_0)}{t}\tag{12.1.14}$$

存在, 则称函数 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处沿着方向 $\boldsymbol{\nu}$ 是**方向可导的**并称该极限为函数 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处沿着方向 $\boldsymbol{\nu}$ 的**方向导数 (directional derivative)**. ♣

按照 (12.1.14) 的定义得到

$$(D_{-\boldsymbol{\nu}}f)(\boldsymbol{x}_0)=\lim_{t\to0+}\frac{f(\boldsymbol{x}_0-t\boldsymbol{\nu})-f(\boldsymbol{x}_0)}{t}=-\lim_{s\to0-}\frac{f(\boldsymbol{x}_0+s\boldsymbol{\nu})-f(\boldsymbol{x}_0)}{s},$$

因此一般来说 $(D_{-\boldsymbol{\nu}}f)(\boldsymbol{x}_0)\neq-(D_{\boldsymbol{\nu}}f)(\boldsymbol{x}_0)$.

例 12.2

(1) **(方向导数存在但偏导数不存在)** 求函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 处的方向导数.

解: 对任意方向 $\boldsymbol{\nu}=(\nu^1,\nu^2)$ 得到

$$\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\nu}}(0,0)=\lim_{t\to0+}\frac{f(t\boldsymbol{\nu})}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{t}{t}=1.$$

但是之前计算表明偏导数不存在. □

(2) **(偏导数的刻画)** n 元函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处关于 x^i 的偏导数存在 $\Longleftrightarrow$ n 元函数 $f(\boldsymbol{x})$ 沿着方向 $(0,\cdots,1,\cdots,0)$ 和 $(0,\cdots,-1,\cdots,0)$ 的两个方向导数存在且互为相反数.

解: 先假设 $f_{x^i}(\boldsymbol{x}_0)$ 存在, 则极限

$$\lim_{t\to0}\frac{f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{\nu})-f(\boldsymbol{x}_0)}{t}=f_{x^i}(\boldsymbol{x}_0)$$

存在, 其中 $\boldsymbol{\nu}=(0,\cdots,1,\cdots,0)$. 特别地,

$$f_{x^i}(\boldsymbol{x}_0)=\lim_{t\to0+}\frac{f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{\nu})-f(\boldsymbol{x}_0)}{t}=\lim_{t\to0-}\frac{f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{\nu})-f(\boldsymbol{x}_0)}{t}.$$

故得到 $f_{x^i}(\boldsymbol{x}_0)=(D_{\boldsymbol{\nu}}f)(\boldsymbol{x}_0)$ 和

$$f_{x^i}(\boldsymbol{x}_0)=\lim_{t\to0-}\frac{f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{\nu})-f(\boldsymbol{x}_0)}{t}=-(D_{-\boldsymbol{\nu}}f)(\boldsymbol{x}_0).$$

反之, 就把上述过程逆过来. □

(3) 求 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的梯度 $\mathbf{grad}(r)$, 梯度定义参见 (12.1.16).

解: 因为

$$r_x=\frac{x}{r},\quad r_y=\frac{y}{r},\quad r_z=\frac{z}{r},$$

所以 $\mathbf{grad}(r)=(x,y,z)/r$ 从而 $\mathbf{grad}(r)$ 是一个方向. □

(4) **(方向导数存在但函数本身不连续)** 如果函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处沿着任意方向都存在方向导数, 是否蕴含着 f 在 (x_0,y_0) 处连续.

解: 考察函数

$$f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y},\quad(x_0,y_0)=(0,0).$$

在例 11.5 (4) 中已证该函数在 $(0,0)$ 处不连续. 但是对任意方向 $\boldsymbol{\nu}=(\alpha,\beta)$ 有

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\nu}}(0,0)=\lim_{t\to 0+}\frac{f(\alpha t,\beta t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{t^3\alpha^3+t^3\beta^3}{t(t^2\alpha^2+t\beta)}=\lim_{t\to 0+}\frac{t(\alpha^3+\beta^3)}{t\alpha^2+\beta}=0.$$

即所有的方向导数均为 0. □

接下来证明:方向可导的 $\Longleftarrow$ 可微 $\Longrightarrow$ 可偏导.

定理 12.3

假设 $D\subset\mathbb{R}^n$ 为开集, $\boldsymbol{x}_0\in D$, $f(\boldsymbol{x})$ 定义在 D 上且在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微. 则对任意方向 $\boldsymbol{\nu}$, 函数 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处沿着方向 $\boldsymbol{\nu}$ 的方向导数存在且满足

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{x}_0)=\sum_{1\le i\le n} f'_{x^i}(\boldsymbol{x}_0)\nu^i. \tag{12.1.15}$$

证: 可微性推出

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{x}_0)&=\lim_{t\to 0+}\frac{f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{\nu})-f(\boldsymbol{x}_0)}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}\left[\sum_{1\le i\le n} f'_{x^i}(\boldsymbol{x}_0)t\nu^i+o(t)\right]\\&=\sum_{1\le i\le n} f'_{x^i}(\boldsymbol{x}_0)\nu^i+\lim_{t\to 0+}\frac{o(t)}{t}=\sum_{1\le i\le n} f'_{x^i}(\boldsymbol{x}_0)\nu^i.\ \square\end{aligned}$$

定义 12.4. (梯度)

假设 $D\subset\mathbb{R}^n$ 为开集, $\boldsymbol{x}_0\in D$, 函数 $f(\boldsymbol{x})$ 定义在 D 上且在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的偏导数存在. 函数 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的**梯度 (gradient)** 定义为

$$\mathbf{grad}_{\boldsymbol{x}_0}f\equiv\nabla_{\boldsymbol{x}_0}f:=\left(f_{x^1}(\boldsymbol{x}_0),\cdots,f_{x^n}(\boldsymbol{x}_0)\right). \tag{12.1.16}$$

显然当函数 f 可微时, $\mathbf{grad}_{\boldsymbol{x}_0}f=f'(\boldsymbol{x}_0)$ 且

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{x}_0)=\left\langle \mathbf{grad}_{\boldsymbol{x}_0}f,\boldsymbol{\nu}\right\rangle. \tag{12.1.17}$$

从 (12.1.17) 得到

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{x}_0)\right|\le\left|\mathbf{grad}_{\boldsymbol{x}_0}f\right||\boldsymbol{\nu}|=\left|\mathbf{grad}_{\boldsymbol{x}_0}f\right|$$

且等号取到当且仅当 $\boldsymbol{\nu}\parallel\mathbf{grad}_{\boldsymbol{x}_0}f$. 故当梯度非零时, 函数绝对值沿着梯度方向增加最快.

12.1.4 多元函数的高阶导数

给定 n 元函数 $f(\boldsymbol{x})$, 其**高阶偏导数 (higher order partial derivatives)** 可定义如下: f 的 k 阶偏导数为

$$f_{x^{i_1}\cdots x^{i_k}}=\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\cdots\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}f. \tag{12.1.18}$$

这里要注意求偏导的顺序:

$$f_{x^ix^j}\ne f_{x^jx^i}. \tag{12.1.19}$$

我们把 $f_{x^ix^j}$, $i\ne j$, 称为**混合二阶偏导数 (mixed second order partial derivatives)**.

例 12.3

(1) 求函数 $f(x,y)=x\cos y+ye^x$ 的所有二阶偏导数.

解: 直接计算得到

$$f_x=\cos y+ye^x,\quad f_y=-x\sin y+e^x.$$

从而得到

$$f_{xx}=ye^x,\quad f_{yy}=-x\cos y,\quad f_{xy}=f_{yx}=-\sin y+e^x.\quad\square$$

(2) 函数

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

在原点的所有二阶偏导数存在但两个混合偏导数却不相等.

解: 直接计算得到

$$f_x(x,y)=\begin{cases} \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=0,\end{cases}$$

和

$$f_y(x,y)=\begin{cases} \frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=0,\end{cases}$$

故得到

$$f_{xx}=f_{yy}=0,\quad f_{xy}(0,0)=1,\quad f_{yx}=-1.\quad\square$$

定义 **Laplace 算子 (Laplacian operator)** 为

$$\Delta:=\sum_{1\le i\le n}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^i}=\sum_{1\le i\le n}\frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}.\tag{12.1.20}$$

开集 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上的函数 f 称为**调和的 (harmonic)** 如果 f 所有二阶偏导数都存在且满足

$$\Delta f(\boldsymbol{x})\equiv 0,\quad \text{任意 } \boldsymbol{x}\in D.\tag{12.1.21}$$

命题 12.1

定义 $D:=\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$ 上的函数

$$f(\boldsymbol{x}):=\begin{cases} |\boldsymbol{x}|^{2-n}, & n\ge 3,\\ -\ln|\boldsymbol{x}|, & n=2.\end{cases}\tag{12.1.22}$$

则 f 在 D 上调和函数.

证: 一个计算复杂的练习, 请诸位验证. $\square$

定理 12.4. (Clairaut - Euler)

假设函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的混合二阶偏导数 $f_{x^ix^j}$ 和 $f_{x^jx^i}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续, 则必有 $f_{x^ix^j}(\boldsymbol{x}_0)=f_{x^jx^i}(\boldsymbol{x}_0)$.

证: 不失一般性不妨假设 $n=2$, 这样只要证明若 f_{xy} 和 f_{yx} 在 (x_0,y_0) 连续则必相

等. 回顾定义

$$\begin{aligned}
f_{xy}(x_0,y_0) &= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(x_0,y_0+\Delta y)-f_x(x_0,y_0)}{\Delta y}\\
&= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y}\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)}{\Delta x}\right.\\
&\quad\left.-\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}\right]\\
&= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y}\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(\Delta x,\Delta y)}{\Delta x}\right] = \lim_{\Delta y\to 0}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(\Delta x,\Delta y)}{\Delta y\Delta x}
\end{aligned}$$

这里

$$F(\Delta x,\Delta y):=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)+f(x_0,y_0).$$

类似可得到

$$f_{yx}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{F(\Delta x,\Delta y)}{\Delta x\Delta y}.$$

如果 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$ 则本质上是说两个累次极限相等, 但是这件事不一定成立. 因此一般情形下两个混合偏导数不相等.

下面假设混合偏导数在 (x_0,y_0) 处连续. 引入两个辅助函数

$$\varphi(x):=f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0),\quad \psi(y):=f(x_0+\Delta x,y)-f(x_0,y).$$

则利用一元函数的微分中值定理得到, 存在 $\alpha,\beta\in[0,1]$,

$$\begin{aligned}
F(\Delta x,\Delta y) &= \varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0) = \varphi'(x_0+\alpha\Delta x)\Delta x\\
&= \left[f_x(x_0+\alpha\Delta x,y_0+\Delta y)-f_x(x_0+\alpha\Delta x,y_0)\right]\Delta x\\
&= f_{xy}(x_0+\alpha\Delta x,y_0+\beta\Delta y)\Delta y\Delta x.
\end{aligned}$$

同样计算得到, 存在 $\mu,\nu\in[0,1]$,

$$F(\Delta x,\Delta y)=f_{yx}(x_0+\mu\Delta x,y_0+\nu\Delta y)\Delta x\Delta y.$$

从而最后得到

$$f_{xy}(x_0+\alpha\Delta x,y_0+\beta\Delta y)=f_{yx}(x_0+\mu\Delta x,y_0+\nu\Delta y).$$

偏导数连续性推出 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$. □

定义 12.5

假设 $D\subset\mathbb{R}^n$ 是开集. 记号 $f\in C^k(D)$ 表示函数 f 的直到 k 阶的所有高阶偏导数存在且连续. 比如

$$\begin{aligned}
C^1(D) &= \{f:D\to\mathbb{R}|f_{x^i}\text{ 连续},\ 1\le i\le n\},\\
C^2(D) &= \{f:D\to\mathbb{R}|f_{x^ix^j}\text{ 连续},\ 1\le i,j\le n\}.
\end{aligned}$$

根据定理 12.4, 若 $D\subset\mathbb{R}^2$, 则 $C^2(D)$ 可写成

$$C^2(D)=\{f:D\to\mathbb{R}|f_x,\ f_y,\ f_{xx},\ f_{xy}=f_{yx},\ f_{yy}\text{ 连续}\}.$$

♣

在上述定义中把所有直到 k 阶的偏导数放入 $C^k(D)$ 的定义中, 主要是因为多元函数偏导数的存在性不一定可以推出原来函数的连续性. 如果 $n=1$, 即考虑一元函数, 则上

述定义自动回到之前 $C^k(I)$ 的定义, 这里 I 是某个开区间.

12.1.5 多元函数的高阶微分

如果 $f \in C^1(D)$ 则根据定理 12.2 可知函数 f 是可微的且

$$df = f_x dx + f_y dy = dx\frac{\partial f}{\partial x} + dy\frac{\partial f}{\partial y}.$$

故很自然地引入算子

$$d = dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}. \tag{12.1.23}$$

回忆二项式展开公式

$$(a+b)^k = \binom{k}{i} a^i b^{k-i}.$$

对任意 $f \in C^k(D)$ 引入算子

$$d^k f \equiv \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f := \sum_{0\le i\le k}\binom{k}{i}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^i\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k-i} f\right] dx^i dy^{k-i}. \tag{12.1.24}$$

这个称为 f 的**高阶微分 (higher order differentials)**.

12.1.6 向量值函数的微分和偏导数

现在我们结论推广到向量值函数上来. 方便起见, 在这里我们把向量表示成列向量. 假设 $D \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x}_0 = (x_0^1, \cdots, x_0^n)^\top$ 且

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}: D &\longrightarrow \mathbb{R}^m, \\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} &\longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f^1(x^1,\cdots,x^n) \\ \vdots \\ f^n(x^1,\cdots,x^n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

定义 12.6. (向量值函数的微分和偏导数)

(1) 如果存在和 $\Delta\boldsymbol{x}$ 无关的 $m\times n$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 使得

$$\Delta\boldsymbol{y} := \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0 + \Delta\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{A}\Delta\boldsymbol{x} + o(\Delta\boldsymbol{x}), \tag{12.1.25}$$

则称**向量值函数 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微或可导**并称 $\mathbf{A}$ 是 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的**导数**, 记为 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ 或 $\mathbf{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$, 而 $d\boldsymbol{y} := \mathbf{A}\Delta\boldsymbol{x}$ 称为 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的**微分**.

(2) 如果 $\boldsymbol{f}$ 的每个分量函数 $f^i, 1\le i\le m$, 都在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可偏导, 则称**向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可偏导**. 此时引入向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的 **Jacobi 矩阵**

$$\mathbf{Jac}_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{f}) \equiv \frac{\mathbf{D}(y^1,\cdots,y^m)}{\mathbf{D}(x^1,\cdots,x^n)}(\boldsymbol{x}_0) := \begin{bmatrix} f^1_{x^1} & f^1_{x^2} & \cdots & f^1_{x^n} \\ f^2_{x^1} & f^2_{x^2} & \cdots & f^2_{x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^m_{x^1} & f^m_{x^2} & \cdots & f^m_{x^n} \end{bmatrix}(\boldsymbol{x}_0) \tag{12.1.26}$$

♣

类似多元函数情形有

$$dy = \mathbf{A}\,dx.$$

定理 12.5

向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微 $\Longleftrightarrow$ 它的坐标分量函数 $f^i, 1 \le i \le m$, 都在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微. 此时有等式

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{Jac}_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{f}). \tag{12.1.27}$$

证: $\Longrightarrow$: 则存在矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$ 使得 $\Delta \boldsymbol{y} = \mathbf{A}\Delta\boldsymbol{x} + o(\Delta\boldsymbol{x})$ 成立. 写成分量形式得到

$$\Delta y^i = \sum_{1\le j\le n} a_{ij}\Delta x^j + o^i(\Delta\boldsymbol{x}), \quad 1 \le i \le m,$$

这里 $o(\Delta\boldsymbol{x}) = (o^1(\Delta\boldsymbol{x}), \cdots, o^m(\Delta\boldsymbol{x}))^\mathsf{T}$ 且

$$\lim_{\Delta\boldsymbol{x}\to 0}\frac{o^i(\Delta\boldsymbol{x})}{|\Delta\boldsymbol{x}|} = 0, \quad 1 \le i \le m.$$

取特殊的 $\Delta\boldsymbol{x} = (0, \cdots, \Delta x^j, \cdots, 0)^\mathsf{T}$ 得到 $f^i_{x^j}(\boldsymbol{x}_0) = a_{ij}$.

$\Longleftarrow$: 根据 $f^i, 1 \le i \le m$, 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的可微性得到

$$\Delta y^i = \Delta f^i = \sum_{1\le j\le n} f^i_j(\boldsymbol{x}_0)\Delta x^j + o(|\Delta\boldsymbol{x}|).$$

故有 $\mathbf{A} = (a_{ij}) = (f^i_j(\boldsymbol{x}_0))$. □

例 12.4

(1) 求函数 $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{x+y}$ 的高阶偏导数 $\partial^{p+q}f/\partial x^p\partial y^q, p, q \ge 2$.

解: 根据 (12.1.24) 和 $\partial^k(e^{x+y})/\partial y^k = e^{x+y}$ 得到

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^q f}{\partial y^q} &= (x^2+y^2)e^{x+y} + q(x^2+y^2)_y e^{x+y} + \frac{q(q-1)}{2}(x^2+y^2)_{yy}e^{x+y} \\
&= [x^2+y^2+2qy+q(q-1)]e^{x+y}, \\
\frac{\partial^{p+q}f}{\partial x^p\partial y^q} &= [x^2+y^2+2qy+q(q-1)]e^{x+y} + p(2x)e^{x+y} + q(q-1)e^{x+y} \\
&= [x^2+y^2+2(p+q)y+p(p-1)+q(q-1)]e^{x+y}. \quad \square
\end{aligned}$$

(2) 假设 $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (\sin xy, x^2+y^2, x^2y^2z^2)$, 求 $\boldsymbol{f}'(1,0,0)$.

解: 直接计算得到

$$\boldsymbol{f}'(x,y,z) = \begin{bmatrix} y\cos xy & y\cos xy & 0 \\ 2x & 2y & 0 \\ 2xy^2z^2 & 2x^2yz^2 & 2x^2y^2z \end{bmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{f}'(1,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =: A$$

观察到 $A^{2n+1}/2^n = A$ 和 $A^{2n+2}/2^n = A^2, n \ge 0$. □

12.2 多元复合函数的求导法则

多元复合函数的求导, 满足所谓的**链式法则 (chain rule)**. 其大意是把每个分量上的求导算到底, 再相加.

12.2.1 多元复合函数求偏导的链式法则

假设函数 $z=f(u,v)$ 是区域 $D_f\subset\mathbb{R}^2$ 上的二元函数, $\boldsymbol{g}:D_{\boldsymbol{g}}\to\mathbb{R}^2$ 是区域 $D_{\boldsymbol{g}}\subset\mathbb{R}^2$ 上的二元二维向量值函数: $\boldsymbol{g}(x,y)=(u(x,y),v(x,y))$, 并假设 $\boldsymbol{g}(D_{\boldsymbol{g}})\subset D_f$. 从而得到复合函数 $f\circ\boldsymbol{g}$:

$$f\circ\boldsymbol{g}(x,y)=f(u(x,y),v(x,y)),\quad (x,y)\in D_{\boldsymbol{g}}. \tag{12.2.1}$$

定理 12.6. (链式法则)

如果函数 f 在 (u_0,v_0) 处可微, $\boldsymbol{g}$ 在 $(x_0,y_0)\in D_{\boldsymbol{g}}$ 处可偏导, 其中 $u_0=u(x_0,y_0)$, $v_0=v(x_0,y_0)$, 则复合函数 $f\circ\boldsymbol{g}$ 在 (x_0,y_0) 处可偏导且

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0)\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0)\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0), \tag{12.2.2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0)\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0)\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0). \tag{12.2.3}$$

♡

证: 根据定义

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(u(x_0+\Delta x,y_0),v(x_0+\Delta x,y_0))-f(u_0,v_0)}{\Delta x}$$

引入记号

$$\Delta u:=u(x_0+\Delta x,y_0)-u_0,\quad \Delta v:=v(x_0+\Delta x,y_0)-v_0$$

得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(u_0+\Delta u,v_0+\Delta v)-f(u_0,v_0)}{\Delta x}.$$

由于函数 f 在 (u_0,v_0) 处可微, 故

$$f(u_0+\Delta u,v_0+\Delta v)-f(u_0,v_0)=f_u(u_0,v_0)\Delta u+f_v(u_0,v_0)+o\left(\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}\right).$$

定义

$$\alpha(\Delta u,\Delta v):=o\left(\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}\right)\Big/\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2},$$

则 $\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\alpha(\Delta u,\Delta v)=0$. 所以

$$\begin{aligned}&f(u_0+\Delta u,v_0+\Delta v)-f(u_0,v_0)\\ =\ &f_u(u_0,v_0)\Delta u+f_v(u_0,v_0)+\alpha(\Delta u,\Delta v)\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}.\end{aligned}$$

又因为 u 和 v 都存在偏导数, 得到

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u_x(x_0,y_0),\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v_x(x_0,y_0),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta u,\Delta v)=\lim_{(\Delta u,\Delta v)\to(0,0)}\alpha(\Delta u,\Delta v)=0.$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0) &= f_u(u_0,v_0)u_x(x_0,y_0)+f_v(u_0,v_0)v_x(x_0,y_0)\\ &\quad+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta u,\Delta v)\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\sqrt{\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)^2}\\ &= f_u(u_0,v_0)u_x(x_0,y_0)+f_v(u_0,v_0)v_x(x_0,y_0).\quad\square\end{aligned}$$

根据 (12.2.2) – (12.2.3), 如果函数 f 在区域 D_f 上可微且 $\boldsymbol{g}$ 在区域 $D_{\boldsymbol{g}}$ 上可偏导, 则

$$z_x=f_uu_x+f_vv_x,\quad z_y=f_uu_y+f_vv_y. \tag{12.2.4}$$

在矩阵记号下可写成

$$(f\circ\boldsymbol{g})'=(z_x,z_y)=(f_u,f_v)\begin{bmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{bmatrix}=f'\boldsymbol{g}' \tag{12.2.5}$$

这个形式我们可以推广到多元情形.

假设函数 $z=f(\boldsymbol{y})=f(y^1,\cdots,y^m)$ 定义在区域 $D_f\subset\mathbb{R}^m$ 上, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{g}(x^1,\cdots,x^n)$ 是 $D_{\boldsymbol{g}}\subset\mathbb{R}^n$ 上的 n 元 m 维向量值函数, 且 $\boldsymbol{g}(D_{\boldsymbol{g}})\subset D_f$, 则定义复合函数为

$$f\circ\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=f(y^1(x^1,\cdots,x^n),\cdots,y^m(x^1,\cdots,x^n)). \tag{12.2.6}$$

定理 12.7. (链式法则)

如果 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0\in D_{\boldsymbol{g}}$ 处可偏导, 且 $z=f(\boldsymbol{y})$ 在 $\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)$ 处可微, 则 $z=f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可偏导且

$$z_{x^i}(\boldsymbol{x}_0)=\sum_{1\le j\le m}f_{y^j}(\boldsymbol{y}_0)y^j_{x^i}(\boldsymbol{x}_0),\quad 1\le i\le n. \tag{12.2.7}$$

在矩阵记号下可写成

$$(f\circ\boldsymbol{g})'(\boldsymbol{x}_0)=f'(\boldsymbol{y}_0)\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}_0)=f'(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0))\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}_0). \tag{12.2.8}$$

♡

练习 12.1

(1) 如果 $u=u(x,y)$ 可微, 求 Δu 在极坐标下的表达式.

(2) 如果 $u=u(x,y,z)$ 可微, 求 Δu 在极坐标下的表达式.

(3) 假设 $z=(1+u^2)^v$, $u=x+y$, $v=x^2$. 求 z_x,z_y.

(4) 假设 $z=f(xy,x/y,x)$ 其中 f 是二阶连续可微的, 求 z_{xx},z_{xy},z_{yy}.

♠

12.2.2 多元函数的一阶全微分的不变性

假设 $z=f(x,y)$ 是可微的, 则得到 $dz=z_xdx+z_ydy$. 如果 $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$, 那么根据定理 12.6 得到

$$\begin{aligned}dz &= z_udu+z_vdv = (z_x\varphi_u+z_y\psi_u)\,du+(z_x\varphi_v+z_y\psi_v)\,dv\\ &= z_x\,(\varphi_udu+\varphi_vdv)+z_y\,(\psi_udu+\psi_vdv) = z_xdx+z_ydy.\end{aligned}$$

从而说明多元复合函数也具有**一阶全微分的形式不变性**.

例 12.5

(1) 假设可微函数 $f(x,y,z)$ 满足

$$f(tx,t^ky,t^mz)=t^nf(x,y,z)$$

其中 $t>0$, $k,m,n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$. 则

(1.1) $f(x,y,z)=x^nf(1,y/x^k,z/x^m)$.

(1.2) $xf_x(x,y,z)+kyf_y(x,y,z)+mzf(x,y,z)=nf(x,y,z)$.

证: 根据定义得到

$$f(x,y,z)=f(x\cdot 1,x^k\cdot(y/x^k),x^m\cdot(z/x^m))=x^nf(1,y/x^k,z/x^m).$$

对 $f(tx,t^ky,t^mz)=t^nf(x,y,z)$ 两边关于 t 求导得到

$$\begin{aligned}nt^{n-1}f(x,y,z) &= xf_x(tx,t^ky,t^mz)+kt^{k-1}yf_y(tx,t^ky,t^mz)\\ &\quad+mt^{m-1}zf_z(tx,t^ky,t^mz);\end{aligned}$$

两边同乘以 t 得到

$$nt^nf(x,y,z)=xf_x(tx,t^k,t^mz)+kt^kyf_y(tx,t^ky,t^mz)+mt^mzf_z(tx,t^ky,t^mz).$$

最后两边令 $t=1$ 得到 (1.2). □

(2) 假设 $u=f(r)=u(x^1,\cdots,x^n)$ 为二阶连续可微, $r^2=\sum_{1\leq i\leq n}(x^i)^2$. 证明

$$\Delta u=f''(r)+\frac{n-1}{r}f'(r).$$

证: u 的一阶偏导数为

$$u_{x^i}=f'(r)r_{x^i}=f'(r)\frac{x^i}{r},\quad 1\leq i\leq n.$$

从而得到二阶偏导数

$$u_{x^ix^j}=f''(r)r_{x^j}r_{x^i}+f'(r)r_{x^ix^j}=f''(r)\frac{x^ix^j}{r^2}+f'(r)\frac{\delta_{ij}r-x^ix^j/r}{r^2}$$

特别地

$$\begin{aligned}\Delta u &= \sum_{1\leq i\leq n}u_{x^ix^i} = \sum_{1\leq i\leq n}\left[f''(r)\frac{(x^i)^2}{r^2}+f'(r)\frac{r^2-(x^i)^2}{r^3}\right]\\ &= f''(r)\frac{r^2}{r^2}+f'(r)\frac{nr^2-r^2}{r^3} = f''(r)+f'(r)\frac{n-1}{r}.\ \square\end{aligned}$$

(3) 假设 $g\in C^2$ 且 $v=g(t-r/c)/r=v(x,y,z)$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 其中 c 是常数. 证明

$$\Delta v=\frac{1}{c^2}v_{tt}.$$

证: 计算得到

$$v_x=\frac{1}{r^2}\left[g'\left(t-\frac{r}{c}\right)\cdot\frac{-x}{cr}\cdot r-g\left(t-\frac{r}{c}\right)\frac{x}{r}\right]=-\frac{1}{r^2}\left[\frac{x}{c}\cdot g'\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{x}{r}\cdot g\left(t-\frac{r}{c}\right)\right],$$

和

$$v_{xx}=\frac{x^2}{c^2r^3}g''\left(t-\frac{r}{c}\right)+\left(\frac{3x^2}{cr^4}-\frac{1}{cr^2}\right)g'\left(t-\frac{r}{c}\right)+\left(\frac{3x^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}\right)g\left(t-\frac{r}{c}\right).$$

故

$$\Delta v = \frac{1}{c^2 r} g''\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{1}{c^2} v_{tt}. \quad \square$$

12.3 多元函数的微分中值定理和 Taylor 公式

本节引入多元函数的 **Taylor 公式 (Taylor's formula)**, 我们将它从形式上写成和一元函数的 Taylor 公式 (参见**第一卷第 4.7 节**) 一样, 便于记忆和应用.

12.3.1 多元函数的微分中值定理

称区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是**凸的 (convex)**, 如果对任意 $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1 \in D$ 都有

$$\overline{\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_1} := \{(1-t)\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 + t(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0) : 0 \le t \le 1\} \subset D.$$

称区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是 **(关于 $\boldsymbol{x}_0$) 星形的 (star-shaped relative to $\boldsymbol{x}_0$)**, 如果 $\boldsymbol{x}_0 \in D$ 且对任意 $\boldsymbol{x}_1 \in D$ 都有 $\overline{\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_1} \subset D$.

练习 12.2

证明凸区域一定是星形区域, 但是反之不一定成立.

定理 12.8. (中值定理)

若多元函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在凸区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 内可微, 则对 D 内的任意两点 $\boldsymbol{x}_0$ 和 $\boldsymbol{x}$, 存在 $\theta \in (0,1)$ 使得

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) &= \left\langle \mathbf{grad}_{\boldsymbol{x}_0+\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}(f), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \right\rangle \\ &= \sum_{1 \le i \le n} f_{x^i}(\boldsymbol{x}_0 + \theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0))(x^i - x_0^i). \end{aligned} \tag{12.3.1}$$

证: 凸性得到 $\boldsymbol{x}_0 + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \in D$ 对任意 $t \in [0,1]$ 都成立. 定义一元辅助函数

$$F(t) := f(\boldsymbol{x}_0 + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)), \quad t \in [0,1].$$

f 在 D 上的可微性推出 $F \in C([0,1]) \cap D((0,1))$. 从而利用一元函数的 Lagrange 微分中值定理, **定理 4.9**, 得到, 存在 $\theta \in (0,1)$ 满足 $F'(\theta) = F(1) - F(0) = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)$. 另一方面利用链式法则, **定理 12.7**, 得到 $F'(t) = f_{x^i}(\boldsymbol{x}_0 + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0))(x^i - x_0^i)$. $\square$

推论 12.1

若多元函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上可微且偏导数恒为 0, 则 f 在 D 上恒为常数.

证: 任取 $\boldsymbol{x}_0 \in D$, 则根据定义存在球邻域 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0, r) \subset D$. 因为 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0, r)$ 是凸区域, 利用**定理 12.7** 可知对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0, r)$ 存在 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0, r)$ 满足

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}) = \left\langle \mathbf{grad}_{\boldsymbol{\xi}}(f), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \right\rangle = 0.$$

从而得到

$$f \equiv f(\boldsymbol{x}_0) \quad \text{在 } \mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0, r) \text{ 内成立}.$$

任取 D 中的两点 $\boldsymbol{x}_0$ 和 $\boldsymbol{y}_0$. 根据道路连通性可知存在连续映射 $\boldsymbol{\gamma}:[0,1]\to D$ 使得 $\boldsymbol{\gamma}(0)=\boldsymbol{x}_0$ 和 $\boldsymbol{\gamma}(1)=\boldsymbol{y}_0$. 区间 $[0,1]$ 是紧的从而可找到有限多个点 $\boldsymbol{x}_i, 0\le i\le N$ 和有限多个正数 $r_i, 0\le i\le N$, 满足 $\boldsymbol{x}_N=\boldsymbol{y}_0, \mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_i,r_i)\subset D, \mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_i,r_i)\cap\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_{i+1},r_{i+1})\neq\emptyset$ $(0\le i\le N-1)$, 且 $\boldsymbol{\gamma}([0,1])\subset\cup_{0\le i\le N}\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_i,r_i)$. 根据前面论断可知

$$f(\boldsymbol{x}_0)=f|_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,r_0)}=f(\boldsymbol{x}_1)=f|_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_1,r_1)}.$$

经过有限步骤后得到 $f(\boldsymbol{x}_0)=f(\boldsymbol{y}_0)$. 即证明了 f 在 D 上恒为常数. □

例 12.6

(1) 假设函数 $f(x,y)$ 在区域 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\le 5\}=\overline{\mathbb{B}}^2(\mathbf{0},\sqrt{5})$ 上连续可微, $f(0,0)=0$, 且对任意 $(x,y)\in D$ 都有 $|\mathbf{grad}_{(x,y)}(f)|\le 1$. 证明 $|f(1,2)|\le\sqrt{5}$.

证: 定理 12.8 告诉我们存在 $\theta\in(0,1)$ 满足

$$\begin{aligned}|f(1,2)-f(0,0)| &= |f_x(\theta,2\theta)\cdot 1+f_y(\theta,2\theta)\cdot 2| = \left|\left\langle\mathbf{grad}_{(\theta,2\theta)}(f),(1,2)\right\rangle\right|\\ &\le \left|\mathbf{grad}_{(\theta,2\theta)}(f)\right||(1,2)| \le 1\cdot\sqrt{5} = \sqrt{5}.\quad\square\end{aligned}$$

(2) 对函数 $F(x,y)=(x^2-2xy+1)^{-1/2}$ 应用中值定理证明存在 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$-\sqrt{2}\theta+(\sqrt{2}-1)(1+\theta^2)^{3/2}=0$$

成立.

证: 直接计算得到

$$F(0,0)=1,\quad F(x,0)=(1+x^2)^{-1/2}$$

和

$$F_x=(y-x)(x^2-2xy+1)^{-3/2},\quad F_y=x(x^2-2xy+1)^{-3/2}.$$

根据定理 12.8 得到

$$\frac{1}{\sqrt{2}}-1=F(1,0)-F(0,0)=F_x(\theta,0)\cdot 1+F_y(\theta,0)\cdot 0=-\theta(1+\theta^2)^{-3/2}.$$

化简得到 $(\sqrt{2}-1)(1+\theta^2)^{3/2}=\sqrt{2}\theta$. □

12.3.2 多元函数的 Taylor 公式

回忆一元函数的 Taylor 公式:

$$f(x_1)-f(x_0)=\sum_{1\le i\le k}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x_1-x_0)^i+R_k,$$

其中 R_k 是余项. 在证明 n 元函数的 Taylor 公式之前, 我们引入如下记号.

- $\mathbb{R}^n$ 空间中的 **n 重指标 $\boldsymbol{\alpha}$** 定义为

$$\boldsymbol{\alpha}:=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),\quad \alpha_i\in\mathbb{N}.$$

对此 n 重指标定义

$$\boldsymbol{\alpha}!:=\prod_{1\le i\le n}\alpha_i!,\quad |\boldsymbol{\alpha}|:=\sum_{1\le i\le n}\alpha_i. \tag{12.3.2}$$

- 给定 n 重指标 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 n 元变量 $\boldsymbol{x}=(x^1,\cdots,x^n)$, 定义

$$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}:=\prod_{1\le i\le n}(x^i)^{\alpha_i}. \tag{12.3.3}$$

- 给定 n 重指标 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 n 元函数 f, 定义

$$\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{\alpha}}f\equiv f^{(\boldsymbol{\alpha})}:=\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^{\alpha_n}f\equiv\frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}}{\partial\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}}f. \tag{12.3.4}$$

定理 12.9. (带 Lagrange 型余项 Taylor 公式)

假设 n 元函数 $f(\boldsymbol{x})\in C^{k+1}(D)$, 其中 D 是 $\boldsymbol{x}_0$ 的某个球邻域 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,r)$, 则对任意 $\boldsymbol{x}_1\in D$ 有

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x}_1)&=f(\boldsymbol{x}_0)+\sum_{1\le i\le k}\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=i}\frac{f^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x}_0)}{\boldsymbol{\alpha}!}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)^{\boldsymbol{\alpha}}+R_k\\&\equiv f(\boldsymbol{x}_0)+\sum_{1\le|\boldsymbol{\alpha}|\le k}\frac{f^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x}_0)}{\boldsymbol{\alpha}!}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)^{\boldsymbol{\alpha}}+R_k,\end{aligned} \tag{12.3.5}$$

其中 R_k 为 Lagrange 型余项

$$R_k=\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=k+1}\frac{f^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x}_0+\theta(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0))}{\boldsymbol{\alpha}!}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)^{\boldsymbol{\alpha}},\quad 存在\ \theta\in(0,1). \tag{12.3.6}$$

♡

证: D 是球邻域推出 $\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)\in D$ 对任意 $t\in[-1,1]$ 都成立. 引入辅助函数

$$F(t):=f(\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)),\quad -1\le t\le 1.$$

则 $F\in C^{k+1}([-1,1])$ 并在 $t=0$ 处 Taylor 展开

$$F(t)=F(0)+\sum_{1\le i\le k}\frac{F^{(i)}(0)}{i!}t^i+\frac{F^{(k+1)}(\theta t)}{(k+1)!}t^{k+1},\quad 0<\theta<1.$$

根据链式法则得到, 这里 $\boldsymbol{x}_t:=\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)$,

$$\begin{aligned}F^{(i)}(t)&=\left(\sum_{1\le j\le n}(x_1^j-x_0^j)\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^i f(\boldsymbol{x}_t)\\&=\sum_{i_1+\cdots+i_n=i}\binom{i}{i_1\cdots i_n}(x_1^1-x_0^1)^{i_1}\cdots(x_1^n-x_0^n)^{i_n}\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{i_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^{i_n}f(\boldsymbol{x}_t)\\&=\sum_{i_1+\cdots+i_n=i}\frac{i!}{i_1!\cdots i_n!}\cdot\prod_{1\le j\le n}(x_1^j-x_0^j)^{i_j}\cdot\prod_{1\le j\le n}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^{i_j}f(\boldsymbol{x}_t)\\&=\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=i}\frac{i!}{\boldsymbol{\alpha}!}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)^{\boldsymbol{\alpha}}f^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x}_t).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x}_1)&=f(\boldsymbol{x}_0)+\sum_{1\le i\le k}\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=i}\frac{f^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x}_0)}{\boldsymbol{\alpha}!}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)^{\boldsymbol{\alpha}}\\&\quad+\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=k+1}\frac{f^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x}_\theta)}{\boldsymbol{\alpha}!}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)^{\boldsymbol{\alpha}}.\end{aligned}$$

从而得到 (12.3.5). □

推论 12.2. (带 Peano 型余项的 Taylor 公式)

设 n 元函数 $f(\boldsymbol{x}) \in C^{k+1}(D)$, 其中 D 是 $\boldsymbol{x}_0$ 的某个球邻域 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0, r)$, 则当 $\boldsymbol{x}_1$ 充分靠近 $\boldsymbol{x}_0$ 时有

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}_1) &= f(\boldsymbol{x}_0) + \sum_{1\le i\le k}\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=i} \frac{f^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x}_0)}{\boldsymbol{\alpha}!}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)^{\boldsymbol{\alpha}} + o(|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0|^k) \\ &\equiv f(\boldsymbol{x}_0) + \sum_{1\le|\boldsymbol{\alpha}|\le k} \frac{f^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x}_0)}{\boldsymbol{\alpha}!}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)^{\boldsymbol{\alpha}} + o(|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0|^k). \quad (12.3.7) \end{aligned}$$

♡

例 12.7

(1) 近似计算 $(1,08)^{3.96}$.

解: 取 $\boldsymbol{x}_0 = (1,4)$ 和 $\boldsymbol{x}_1 = (1.08, 3.96)$, 并考虑二元函数 $f(x,y) = x^y$. 根据 (12.3.7) 得到

$$f(\boldsymbol{x}_1) \approx f(\boldsymbol{x}_0) + \sum_{1\le|\boldsymbol{\alpha}|\le 2} \frac{f^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x}_0)}{\boldsymbol{\alpha}!}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)^{\boldsymbol{\alpha}}.$$

如果 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ 满足 $|\boldsymbol{\alpha}| = 1$, 则 $\boldsymbol{\alpha} = (1,0)$ 或 $(0,1)$:

$\boldsymbol{\alpha}$	$(1,0)$	$(0,1)$
$f^{(\boldsymbol{\alpha})}$	$f_x = yx^{y-1}$	$f_y = x^y \ln x$
$f^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x}_0)$	4	0
$\frac{f^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x}_0)}{\boldsymbol{\alpha}!}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^{\boldsymbol{\alpha}}$	$4\cdot 0.08$	0

如果 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ 满足 $|\boldsymbol{\alpha}| = 2$, 则 $\boldsymbol{\alpha} = (2,0)$ 或 $(1,1)$ 或 $(0,2)$:

$\boldsymbol{\alpha}$	$(2,0)$	$(1,1)$	$(0,2)$
$f^{(\boldsymbol{\alpha})}$	$f_{xx} = y(y-1)x^{y-2}$	$f_{xy} = x^{y-1}(1+y\ln x)$	$f_{yy} = x^y(\ln x)^2$
$f^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x}_0)$	12	1	0
$\frac{f^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^{\boldsymbol{\alpha}}}{\boldsymbol{\alpha}!}$	$6\cdot(0.08)^2$	$-0.08\cdot 0.04$	0

因此得到

$$1.35630721\cdots = (1.08)^{3.96} \approx 1 + 4\cdot 0.08 + 6\cdot(0.08)^2 - 0.08\cdot 0.04 = 1.3552. \quad \square$$

(2) 求函数 $f(x,y) = xy$ 在 $(1,1)$ 处的 3 阶 Taylor 公式.

解: 根据 (12.3.5) 得到

$$f(\boldsymbol{x}_1) \approx f(\boldsymbol{x}_0) + \sum_{1\le|\boldsymbol{\alpha}|\le 3} \frac{f^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x}_0)}{\boldsymbol{\alpha}!}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)^{\boldsymbol{\alpha}}.$$

取 $\boldsymbol{x}_0 = (1,1)$ 并计算

$$f_x = y, \quad f_y = x, \quad f_{xx} = 0, \quad f_{xy} = 1, \quad f_{yy} = 0.$$

因此

$$f(x,y) = 1 + (x-1) + (y-1) + (x-1)(y-1). \quad \square$$

(3) 求函数 $f(x,y) = \ln(1+x)\ln(1+y)$ 在 $(0,0)$ 处的带 Peano 型余项的 2 阶 Taylor

公式.

解: 计算可得

$$f_x = \frac{1}{1+x}\ln(1+y), \quad f_y = \frac{1}{q+y}\ln(1+x)$$

和

$$f_{xx} = -\frac{1}{(1+x)^2}\ln(1+y), \quad f_{yy} = -\frac{1}{(1+y)^2}\ln(1+x), \quad f_{xy} = \frac{1}{(1+x)(1+y)}.$$

因此

$$\ln(1+x)\ln(1+y) \approx xy. \quad \square$$

(4) 求函数 $f(x,y) = \ln(1+x+y)$ 在 $(0,0)$ 处的带 Lagrange 型余项的 n 阶 Taylor 公式.

解: 两种计算方法:

$$\begin{aligned}\ln(1+x+y) &= \sum_{1\le k\le n}(-1)^{k-1}\frac{(x+y)^k}{k} + \frac{(-1)^n(x+y)^{n+1}}{(n+1)(1+\theta(x+y))^{n+1}}\\ &= \sum_{1\le k\le n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sum_{\alpha_1+\alpha_2=k}\frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!}x^{\alpha_1}y^{\alpha_2} + \frac{(-1)^n(x+y)^{n+1}}{(n+1)(1+\theta(x+y))^{n+1}}\\ &= \sum_{1\le|\boldsymbol{\alpha}|\le n}\frac{(-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|-1}(|\boldsymbol{\alpha}|-1)!}{\boldsymbol{\alpha}!}(x,y)^{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{(-1)^n(x+y)^{n+1}}{(n+1)(1+\theta(x+y))^{n+1}}.\end{aligned}$$

直接利用 (12.3.5) 也得到一样的结果. $\square$

(5) 假设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是包含原点的凸区域, f 在 D 上连续可微, 且满足 $xf_x + yf_y = 0$. 则 f 在 D 内为一常数. 如果 D 是不包含原点的凸区域, 则上述结论不一定成立.

证: 根据凸性和 Taylor 公式或中值定理得到

$$f(x,y) = f(0,0) + x\cdot f_x(\theta x,\theta y) + y\cdot f_y(\theta x,\theta y) = f(0,0), \quad (x,y)\in D.$$

故函数 f 在 D 内恒为常数.

如果 D 不包含原点则结论不成立: 考虑定义在 $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 上的函数

$$f(x,y) = \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

计算可得

$$f_x = \frac{y^2+xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad f_y = -\frac{x^2+xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

从而对 $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 内的任意凸区域都有 $xf_x + yf_y = 0$ 但是函数 f 本身不恒为常数. $\square$

12.4 隐函数定理

隐函数定理是分析里面很重要的定理之一, 其一般版本在之后的章节中会给出.

12.4.1 隐函数

隐函数定理 (implicit function theorem) 基本想法是如何从 $n+1$ 元函数方程

$$F(\boldsymbol{x}, y) = 0, \tag{12.4.1}$$

这里 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 和 $y \in \mathbb{R}$, 中求得 $y = f(\boldsymbol{x})$. **假设这样的 $\boldsymbol{y} = f(x^1, \cdots, x^n)$ 存在且我们可以取任意可能的偏导数**. 则两边对 x^i 求偏导得到

$$0 = F_{x^i}(\boldsymbol{x}, y) + F_y(\boldsymbol{x}, y) f_{x^i}(\boldsymbol{x}).$$

从而得到

$$f_{x^i}(\boldsymbol{x}) = -\frac{F_{x^i}(\boldsymbol{x}, y)}{F_y(\boldsymbol{x}, y)}, \quad 1 \le i \le n. \tag{12.4.2}$$

这里事先假设 $F_y(\boldsymbol{x}, y) \neq 0$.

例 12.8

(1) 如果不加任何条件, 显然这样的 $\boldsymbol{y}$ 不一定在整体上是唯一存在的. 考虑函数方程

$$0 = F(x, y) = x - y^2.$$

这个方程关于 y 有两个解, 即 $y = \sqrt{x}$ 和 $y = -\sqrt{x}x$. 这两个解的交点只有一个 $x = 0$. 注意到此时

$$F_y(0,0) = -2y|_{(0,0)} = 0$$

不满足条件 $F_y(\boldsymbol{x}, y) \neq 0$.

(2) 另一方面 $F_y(\boldsymbol{x}, y) \neq 0$ 不是必要条件, 比如考察函数方程

$$0 = F(x, y) = x - |y|.$$

显然 $F_y(0,0)$ 不存在, 但是 $F(x,y) = 0$ 有两个解 $y = x$ 和 $y = -x$.

定义 12.7. (隐函数)

假设 $F(\boldsymbol{x}, y)$ 是区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 上的 $n+1$ 元函数. 如果存在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 和开区间 $E \subset \mathbb{R}$ 使得 $D \times E \subset \Omega$ 且对每个 $\boldsymbol{x} \in D$ 都唯一存在 $y \in E$ 满足 (12.4.1), 则称 (12.4.1) 确定了**从 D 到 E 的隐函数 (implicit function)**, 记为 $y = f(\boldsymbol{x})$. 注意到

$$F(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) = 0, \quad 任意\ \boldsymbol{x} \in D.$$

12.4.2 隐函数定理

下面首先证明一元函数的隐函数定理, 然后将其推广到多元函数情形.

定理 12.10. (一元隐函数定理)

假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是区域, $(x_0, y_0) \in \Omega$, $F(x, y)$ 是定义在 Ω 上的二元函数, 且

(i) $F(x_0, y_0) = 0$;

(ii) $F(x, y)$ 在闭矩形 $\Box_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b\} \subset \Omega$ 上有连

续偏导数;

(iii) $F_y(x_0, y_0) \neq 0$.

则存在 (x_0, y_0) 的某个邻域 $U_0 \subset \square_0$, 使得方程 $F(x,y)=0$ 在 U_0 唯一确定可导的隐函数, 即存在 $\rho>0, \rho'>0$ 和函数

$$y=f(x), \quad x \in (x_0-\rho, x_0+\rho) \text{ 且 } (x,y) \in (x_0-\rho, x_0+\rho)\times(y_0-\rho', y_0+\rho') = U_0,$$

满足

(a) $F(x, f(x)) = 0$;

(b) $y_0 = f(x_0)$;

(c) $f \in C^1((x_0-\rho, x_0+\rho))$;

(d) 其导数满足**隐函数求导公式**

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}. \tag{12.4.3}$$

证: 不失一般性不妨假设 $F_y(x_0, y_0) > 0$. 根据 $F_y(x,y)$ 的连续性, 存在 $a_1 \in (0,a)$ 和 $b_1 \in (0,b)$ 使得偏导数 $F_y(x,y) > 0$ 在闭矩形

$$\square_1 := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \big| |x-x_0| \le a_1, \ |y-y_0| \le b_1\right\} \subset \square_0$$

上恒成立. 定义一元函数

$$\alpha(y) := F(x_0, y), \quad y \in [y_0-b_1, y_0+b_1].$$

则 $\alpha(y)$ 在 $[y_0-b_1, y_0+b_1]$ 上是严格单调递增且满足

$$\alpha(y_0-b_1) < 0 = \alpha(y_0) < \alpha(y_0+b_1).$$

又因为 $F(x,y)$ 在 $\square_1$ 上连续, 存在 $a_2 \in (0, a_1]$ 使得

$$F|_{(x_0-a_2, x_0+a_2)\times\{y_0-b_1\}} < 0, \quad F|_{(x_0-a_2, x_0+a_2)\times\{y_0+b_1\}} > 0. \tag{$*$}$$

考虑 x_0 的邻域 $(x_0-\rho, x_0+\rho) := (x_0-a_2, x_0+a_2)$ 和 y_0 的邻域 $(y_0-\rho', y_0+\rho') = (y_0-b_1, y_0+b_1)$. 对任意 $x \in (x_0-\rho, x_0+\rho)$, 一元函数 $F(x,\cdot)$ 在 $[y_0-b_1, y_0+b_1]$ 上连续且在端点处异号. 根据连续函数零点定理和 $F(x,\cdot)$ 在 $[y_0-b_1, y_0+b_1]$ 上严格递增, 则存在唯一的 $y \in (y_0-b_1, y_0+b_1)$ 使得 $F(x,y)=0$ 成立. 这样就得到如下函数

$$f: (x_0-\rho, x_0+\rho) \longrightarrow (y_0-b_1, y_0+b_1), \quad x \longmapsto y = f(x),$$

它满足恒等式 $F(x, f(x)) = 0$ 且 $y_0 = f(x_0)$.

(1) $f \in C((x_0-\rho, x_0+\rho))$. 任取 $\overline{x} \in (x_0-\rho, x_0+\rho)$, 则有 $F(\overline{x}, \overline{y}) = 0$ 这里 $\overline{y} = f(\overline{x})$. 根据 $(*)$ 可知

$$F(\overline{x}, \overline{y}-\epsilon) < 0 < F(\overline{x}, \overline{y}+\epsilon), \quad \forall\, \epsilon \in (0, b_1].$$

利用函数 $F(x,y)$ 在 $\square_1$ 上的连续性可知存在 $\delta > 0$ 使得

$$F(x, \overline{y}-\epsilon) < 0 < F(x, \overline{y}+\epsilon), \quad \forall\, x \in (\overline{x}-\delta, \overline{x}+\delta),$$

成立. 再次根据连续函数零点定理和 $F(x,\cdot)$ 的严格递增性, 可知存在唯一的 $y \in (\overline{y}-$

$\epsilon, \overline{y}+\epsilon)$ 满足 $F(x,y)=0$ 且 $y=f(x)$. 即

$$|x-\overline{x}|<\delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x)-f(\overline{x})|<\epsilon.$$

(2) $f \in D((x_0-\rho, x_0+\rho))$. 任取 $\overline{x} \in (x_0-\rho, x_0+\rho)$, 并取 Δx 充分小满足 $\overline{x}+\Delta x \in (x_0-\rho, x_0+\rho)$. 定义

$$\overline{y}=f(\overline{x}), \quad \Delta y := f(\overline{x}+\Delta x)-\overline{y}.$$

从而得到

$$F(\overline{x},\overline{y})=0=F(\overline{x}+\Delta x, \overline{y}+\Delta y).$$

根据**定理 12.8** 存在 $\theta \in (0,1)$ 满足

$$\begin{aligned} 0 &= F(\overline{x}+\Delta x, \overline{y}+\Delta y)-F(\overline{x},\overline{y}) \\ &= F_x(\overline{x}+\theta\Delta x, \overline{y}+\theta\Delta y)\Delta x+F_y(\overline{x}+\theta\Delta x, \overline{y}+\theta\Delta y)\Delta y. \end{aligned}$$

但在 $\square_1$ 上偏导数 $F_y>0$, 因此

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F_x(\overline{x}+\theta\Delta x, \overline{y}+\theta\Delta y)}{F_y(\overline{x}+\theta\Delta x, \overline{y}+\theta\Delta y)}.$$

利用偏导数 F_x 和 F_y 的连续性, 得到

$$f'(\overline{x})=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F_x(\overline{x},\overline{y})}{F_y(\overline{x},\overline{y})}.$$

(3) $f \in C^1((x_0-\rho, x_0+\rho))$. 这个性质立即从上述等式推出. □

同理可得到

定理 12.11. (多元隐函数存在定理)

假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是区域, $(\boldsymbol{x}_0, y_0) \in \Omega$, $F(\boldsymbol{x}, y)$ 是定义在 Ω 上的 $n+1$ 元函数, 且

(*i*) $F(\boldsymbol{x}_0, y_0)=0$;

(*ii*) $F(\boldsymbol{x}, y)$ 在闭矩体 $\square_0 := \{(x^1, \cdots, x^n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x^i-x_0^i| \le a^i,\ |y-y_0| \le b\} \subset \Omega$ 上有连续偏导数;

(*iii*) $F_y(\boldsymbol{x}_0, y_0) \neq 0$.

则存在 $(\boldsymbol{x}_0, y_0)$ 的某个邻域 $U_0 \subset \square_0$, 使得方程 $F(\boldsymbol{x}, y)=0$ 在 U_0 唯一确定可导的隐函数, 即存在 $\rho>0, \rho'>0$ 和函数

$$y=f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0, \rho) \text{ 且 } (\boldsymbol{x}, y) \in \mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0, \rho) \times (y_0-\rho', y_0+\rho')=U_0,$$

满足

(*a*) $F(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))=0$;

(*b*) $y_0=f(\boldsymbol{x}_0)$;

(*c*) $f \in C^1(\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0, \rho))$;

(*d*) 其导数满足**隐函数求导公式**

$$\frac{\partial y}{\partial x^i}=-\frac{F_{x^i}(\boldsymbol{x}, y)}{F_y(\boldsymbol{x}, y)}. \tag{12.4.4}$$

♡

例 12.9

(1) 求由方程 $x^3+y^3-3axy=0, a\neq 0$, 确定的隐函数的导数.

解: 此时 $F(x,y):=x^3+y^3-3axy$. 计算可得

$$F_x=3x^2-3ay,\quad F_y=3y^2-3ax.$$

联立方程 $F_x=0=F_y$, 得到 $(x,y)=(0,0),(\sqrt[3]{4}a,\sqrt[3]{2}a),(\sqrt[3]{2}a,\sqrt[3]{4}a)$. 因此在曲线上除了这三个点外, 我们都可以局部地确定隐函数 $y=y(x)$ 和 $x=x(y)$. 根据公式 (12.4.3) 得到

$$y'=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{3x^2-3ay}{3y^2-3ax}=-\frac{x^2-ay}{y^2-ax}.$$

继续求导得到

$$y''=\frac{(ay'-2x)(y^2-ax)-(ay-x^2)(2yy'-a)}{(y^2-ax)^2}=-\frac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}.\quad \square$$

(2) $x^2+y^2+z^2=4z$. 求 z_{xx},z_{xy},z_{yy}.

解: 此时 $F(x,y)=x^2+y^2+z^2-4z$. 计算得到

$$F_x=2x,\quad F_y=2y,\quad F_z=2z-4.$$

根据公式 (12.4.4) 可知

$$z_x=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{x}{2-z},\quad z_y=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{y}{2-z}.$$

继续求偏导得到

$$z_{xx}=\frac{(2-z)-x(-z_x)}{(2-z)^2}=\frac{2-z+\frac{x^2}{2-z}}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}=\frac{4-y^2}{(2-z)^3},$$

和

$$z_{xy}=\frac{xz_y}{(2-z)^2}=\frac{xy}{(2-z)^3},$$

和

$$z_{yy}=\frac{(2-z)-y(-z_y)}{(2-z)^2}=\frac{2-z+\frac{y^2}{2-z}}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)^2+y^2}{(2-z)^3}=\frac{4-x^2}{(2-z)^3}.\quad \square$$

(3) $F(xz,yz)=0$, 其中 $F\in C^2$. 求 z_{xx},z_{xy},z_{yy}.

解: 这里假设函数 $F=F(u,v)$, $u=xz$, $v=yz$. 利用链式法则得到

$$0=F_u(z+xz_x)+F_v(yz_x)\quad\Longrightarrow\quad z_x=-\frac{zF_u}{xF_u+yF_v}$$

和

$$0=F_u(xz_y)+F_v(z+yz_y)\quad\Longrightarrow\quad z_y=-\frac{zF_v}{xF_u+yF_v}.$$

继续求偏导得到

$$0=F_{uu}(z+xz_x)^2+F_u(2z_x+xz_{xx})+(2F_{vu}(z+xz_x)+F_{vv}(yz_x))(yz_x)+F_v(yz_{xx}).$$

故

$$z_{xx}=\frac{2zF_u^2(xF_u+yF_v)-y^2z^2(F_v^2F_{uu}-2F_uF_vF_{uv}+F_u^2F_{vv})}{(xF_u+yF_v)^3}.$$

同样可得

$$z_{yy} = \frac{2zF_v^2(xF_u + yF_v) - x^2z^2(F_v^2F_{uu} - 2F_uF_vF_{uv} + F_u^2F_{vv})}{(xF_u + yF_v)^3}.$$

作为练习请求出 z_{xy}. □

(4) 证明方程 $y - xe^x - \epsilon\sin y = 0$ $(0 < \epsilon < 1)$ 在 $(0,0)$ 处可确定隐函数 $y = y(x)$, 并求出 $y'(0)$.

证: 此时 $F(x,y) = y - xe^x - \epsilon\sin y$. 计算得到

$$F_x = -e^x - xe^x, \quad F_y = 1 - \epsilon\cos y$$

从而得到

$$y'(0) = -\frac{F_x(0,0)}{F_y(0,0)} = -\frac{-1}{1-\epsilon} = \frac{1}{1-\epsilon}. \quad \square$$

12.4.3 向量值隐函数定理

考虑由 $2n$ 元 n 维向量值函数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 所确定的函数方程组

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} F^1(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^n) \\ \vdots \\ F^n(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{12.4.5}$$

假设 (12.4.5) 可确定函数 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. 对方程 $0 = F^k(x^i, y^j)$ 求偏导得到

$$0 = F^k_{x^i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + F^k_{y^j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})f^j_{x^i}(\boldsymbol{x}).$$

引入矩阵函数

$$A := [a_{ki}], \quad B := [b_{kj}], \quad C := [c_{ji}], \quad a_{ki} := F^k_{x^i}, \quad b_{kj} := F^k_{y^j}, \quad c_{ji} := f^j_{x^i}.$$

那么得到

$$\boldsymbol{0} = A + BC \quad \Longrightarrow \quad C = -B^{-1}A$$

如果矩阵 B 是非奇异的.

定理 12.12. ($2n$ 元 n 维向量值隐函数存在定理)

假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ 是区域, $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0) \in \Omega$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是定义在 Ω 上的 $2n$ 元 n 维函数, 且

(i) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{0}$;

(ii) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 在闭矩体 $\square_0 := \{(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^n) \in \mathbb{R}^{2n} : |x^i - x^i_0| \le a^i, |y^j - y^j_0| \le b^j\} \subset \Omega$ 上有连续偏导数;

(iii) 矩阵

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{y}} := \begin{bmatrix} F^1_{y^1} & \cdots & F^1_{y^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F^n_{y^1} & \cdots & F^n_{y^n} \end{bmatrix}$$

在 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 处非奇异.

则存在 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 的某个邻域 $U_0\subset\Box_0$, 使得方程 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{0}$ 在 U_0 唯一确定可导的隐函数, 即存在 $\rho>0,\rho'>0$ 和函数

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,\rho)\text{ 且 }(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,\rho)\times\mathbb{B}^n(\boldsymbol{y}_0,\rho')=U_0,$$

满足

(a) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))=\boldsymbol{0}$;

(b) $\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$;

(c) $\boldsymbol{F}\in C^1(\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,\rho))$;

(d) 其导数满足**隐函数求导公式**

$$[f^j_{x^i}]=-[F^k_{y^j}]^{-1}[F^k_{x^i}]. \tag{12.4.6}$$

♡

例 12.10

(1) 研究方程组

$$F(x,y,u,v)=u^2+v^2-x^2-y=0,\quad G(x,y,u,v)=-u+v-xy+1=0$$

在 $P_0=(2,1,1,2)$ 附近的隐函数并求其偏导数.

解: 直接计算可得

$$\begin{bmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2x & -1\\ -y & -x\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2u & 2v\\ -1 & 1\end{bmatrix}.$$

则得到

$$\begin{bmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{bmatrix}_{P_0}=-\begin{bmatrix}2 & 4\\ -1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-4 & -1\\ -1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -7/6\\ 1 & 5/6\end{bmatrix}\quad\Box$$

(2) 假设 $(y=y(x),z=z(x))$ 是由方程组

$$z=xf(x+y),\quad F(x,y,z)=0,$$

所确定的向量值隐函数, 其中 $f,F\in C^1$. 求 dz/dx.

解: 因为

$$z_x=f+xf'(1+y'),\quad 0=F_x+F_yy'+F_zz'$$

得到

$$z'=\frac{-F_x-F_y(\frac{z'-f}{xf'}-1)}{F_z}=\frac{(f+xf')F_y-xf'F_x-z'F_y}{xf'F_z}.\quad\Box$$

(3) 假设 $u=u(x,y,z),v=v(x,y,z)$ 和 $x=x(s,t),y=y(s,t),z=z(s,t)$ 都有连续的一阶偏导数, 证明

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}+\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}\frac{\partial(y,z)}{\partial(s,t)}+\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)}\frac{\partial(z,x)}{\partial(s,t)}.$$

证: 直接计算可得. $\Box$

♠

12.4.4 逆映射定理

逆映射定理是保证如何从函数组

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad (u,v) \in D, \tag{12.4.7}$$

求出

$$u = u(x,y), \quad v = v(x,y), \quad (x,y) \in E. \tag{12.4.8}$$

换句话说, 映射

$$\mathbf{T} : D \to \mathbb{R}^2, \quad (u,v) \longmapsto \mathbf{T}(u,v)$$

什么时候存在逆映射? 一般来说映射 $\mathbf{T}$ 在整体上不存在逆映射, 但是局部上可以存在逆映射. 比如考察函数 $\mathbf{T}(u,v) = (u^2, v^2)$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

定理 12.13. (逆映射定理)

假设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是区域, $\boldsymbol{x}_0 \in D$, $\mathbf{T} : D \to \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y} = \mathbf{T}(\boldsymbol{x})$, 是定义在 D 上的 n 元 n 维向量值函数, 且

(i) $\boldsymbol{y}_0 := \mathbf{T}(\boldsymbol{x}_0)$,

(ii) $\mathbf{T} \in C^1(D)$,

(iii) $\mathbf{Jac}_{\boldsymbol{x}_0}(\mathbf{T}) \neq 0$.

则存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的某个邻域 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0, \rho)$ 和 $\boldsymbol{y}_0$ 的某个邻域 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{y}_0, \rho')$, 使得

$$\mathbf{T} : \mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0, \rho) \longrightarrow \mathbb{B}^n(\boldsymbol{y}_0, \rho')$$

存在逆映射 $\mathbf{S} := \mathbf{T}^{-1}$, 且满足

(a) $\mathbf{S}(\boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{x}_0$;

(b) $\mathbf{S}' = (\mathbf{T}')^{-1}$, 即

$$\mathbf{Jac}_{\boldsymbol{y}}(\mathbf{S}) = \left[\mathbf{Jac}_{\mathbf{S}(\boldsymbol{y})}(\mathbf{T})\right]^{-1}.$$

♡

证: 定义 $2n$ 元 n 维向量值函数

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \boldsymbol{y} - \mathbf{T}(\boldsymbol{x}), \quad \Omega := D \times \mathbf{T}(D) \subset \mathbb{R}^{2n}.$$

则得到 $\mathbf{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = 0$, $\mathbf{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 在任何包含在 Ω 内的闭矩体

$$\square_0 := \left\{(x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n) \in \mathbb{R}^{2n} : |x^i - x_0^i| \le a^i, \ |y^j - y_0^j| \le b^j\right\}$$

上有连续的偏导数, 且

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{x}} = -\mathbf{Jac}_{\boldsymbol{x}}(\mathbf{T})$$

在 $\boldsymbol{x}_0$ 非奇异. 从而根据定理 12.12 存在 $\boldsymbol{y}_0$ 的某个邻域 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{y}_0, \rho')$ 和某个函数 $\boldsymbol{x} = \mathbf{S}(\boldsymbol{y})$, 其中 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{B}^n(\boldsymbol{y}_0, \rho')$ 和 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0, \rho)$, 且

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{x}_0, \quad \mathbf{F}(\mathbf{S}(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{S} \in C^1(\mathbb{B}^n(\boldsymbol{y}_0, \rho')),$$

和

$$[S^j_{y^i}] = -[F^k_{x^j}]^{-1}[F^k_{y^i}].$$

化简得到 $\mathbf{T}\circ\mathbf{S}=\mathbf{1}$ 在 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{y}_0,\rho')$ 成立，且

$$[S^j_{y^i}]=[T^k_{x^j}]^{-1}[\delta^k_i]\implies \mathbf{Jac}(\mathbf{S})=[\mathbf{Jac}(\mathbf{T})]^{-1}.\ \square$$

例 12.11

(1) 对关于二元函数 $u=u(t,x)\in C^2$ 的波动方程 $u_{tt}=a^2u_{xx}$ $(a\neq 0)$ 作变量替换

$$\xi=x-at,\quad \eta=x+at.$$

求 u 关于 ξ,η 所要满足的方程.

解: 计算

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(t,x)}=\det\begin{bmatrix}1&-a\\1&a\end{bmatrix}=2a\neq 0.$$

从而变量替换是可逆的. 根据

$$u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x=u_\xi+u_\eta,\quad u_t=u_\xi\xi_t+u_\eta\eta_t=a(u_\eta-u_\xi),$$

得到

$$u_{xx}=u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+2u_{\xi\eta},\quad u_{tt}=a^2(u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta})-2a^2u_{\xi\eta}.$$

因此 $u_{tt}=a^2u_{xx}$ 推出 $u_{\xi\eta}=0$. 即 $u(\xi,\eta)=\varphi(\xi)+\eta(\eta)$, 其中 $\varphi,\psi\in C^2$. 故波动方程 $u_{tt}=a^2u_{xx}$ 且 $u\in C^2$ 的一般解是 $u(t,x)=\varphi(x-at)+\eta(x+at)$. $\square$

(2) 假设二元函数 $z=z(x,y)\in C^2$ 且满足方程

$$z_{xx}+2z_{xy}+z_{yy}=0.$$

作变量替换

$$u=x+y,\quad v=x-y.$$

求 $w:=xy-z$ 关于 u,v 所要满足的方程.

解: 计算

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\det\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}=-2.$$

从而变量替换是可逆的. 根据

$$z_x=y-w_x=y-(w_u+w_v),\quad z_y=x-w_y=x-(w_u-w_v),$$

得到

$$z_{xx}=-(w_{uu}+2w_{uv}+w_{vv}),\quad z_{xy}=(w_{uu}-2w_{uv}+w_{vv}),\quad z_{yy}=1-(w_{uu}-w_{vv})$$

从而 $w_{uu}=1/2$. $\square$

(3) 对方程

$$x^2z_{xx}-y^2z_{yy}=0$$

作变量替换 $u=xy$ 和 $v=y/x$.

解: 根据

$$u_x = y, \quad u_y = x, \quad u_x = -\frac{y}{x^2}, \quad v_y = \frac{1}{x}$$

得到

$$z_x = yz_u - \frac{y}{x^2}z_v, \quad z_y = xz_u + \frac{1}{x}z_v$$

且

$$z_{xx} = y^2 z_{uu} - \frac{2y^2}{x^2}z_{uv} + \frac{y^2}{x^4}z_{vv} + \frac{2y}{x^3}z_v, \quad z_{yy} = x^2 z_{uu} + 2z_{uv} + \frac{1}{x}z_{vv}.$$

最后得到 $2uz_{uv} = z_v$ 或者 $2u(z_v)_u = z_v$. 分部积分得到 $(z_v)^2 = \varphi(v)u$. □

12.5 偏导数的几何应用

本节中的几何应用主要是介绍如何求空间曲线的切线和法平面, 及空间曲面的法线和切平面.

12.5.1 空间曲线的切线和法平面

求空间曲面的切线与法平面.

1、参数方程表示的空间曲线的切线与法平面. 此时空间区间 γ 用参数 t 记为参数形式

$$\gamma : x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t), \quad t \in [a, b], \tag{12.5.1}$$

或可记成向量形式

$$\boldsymbol{r}(t) := (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [a, b].$$

称空间曲线 γ **光滑的**[1]如果 $\boldsymbol{r}'(t)$ 连续且 $\boldsymbol{r}'(t) \neq \boldsymbol{0}$.

假设空间曲面 γ 是光滑的. 固定 γ 上点 $\boldsymbol{P}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$. 任取其它点 $\boldsymbol{P} = (x(t), y(t), z(t))$, 则连接 $\boldsymbol{P}_0$ 和 $\boldsymbol{P}$ 的向量为 $(x(t) - x_0, y(t) - y_0, z(t) - z_0)$. 令 $t \to t_0$ 得到曲线 γ 在 $\boldsymbol{P}_0$ 处的切线的方向向量, 即**切向量 (tangent vector)**

$$\boldsymbol{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \tag{12.5.2}$$

和曲线在 $\boldsymbol{P}_0$ 处的切线方程

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}. \tag{12.5.3}$$

同时曲线在 $\boldsymbol{P}_0$ 处的**法平面 (normal plane)**(即过 $\boldsymbol{P}_0$ 且和切线垂直的平面) 为

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0. \tag{12.5.4}$$

[1]但在微分几何中光滑曲线通常是指 $\boldsymbol{r}(t)$ 的各阶导数存在且连续. 在这里光滑曲线又称为**正规曲线 (regular curve)**.

利用几何直观性可写成向量形式

$$\langle \boldsymbol{r}'(t), \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\rangle = 0. \tag{12.5.5}$$

例 12.12

(1) 如果空间曲线 γ 的方程为

$$y=y(x),\ z=z(x) \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{r}(x)=(x,y(x),z(x)).$$

则在 $\boldsymbol{P}_0=(x_0,y_0=y(x_0),z_0=z(x_0))$ 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{y'(x_0)}=\frac{z-z_0}{z'(x_0)} \tag{12.5.6}$$

且法平面方程为

$$(x-x_0)+y'(x_0)(y-y_0)+z'(x_0)(z-z_0)=0. \tag{12.5.7}$$

(2) 求螺旋线

$$x=a\cos t, \quad y=a\sin t, \quad z=bt,$$

在 $t_0=\pi/3$ 处的切线和法平面方程.

解: $x'(t)=-\cos t$, $y'(t)=a\cos t$ 和 $z'(t)=b$. 所以得到切线方程为

$$\frac{x-\frac{a}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{y-\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{1}{2}a}=\frac{z-\frac{\pi}{3}b}{b}$$

和法平面方程为

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}a\left(x-\frac{a}{2}\right)+\frac{1}{2}a\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)+b\left(z-\frac{\pi}{3}b\right)=0. \ \square$$

2、一般形式表示的空间曲线的切线与法平面. 空间曲线的一般形式可表示为两个曲面的交集:

$$\Gamma=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : F(x,y,z)=0=G(x,y,z)\right\}, \tag{12.5.8}$$

其中 F 和 G 都具有连续的偏导数. 取 Γ 上的固定 $\boldsymbol{P}_0=(x_0,y_0,z_0)$ 使得 Jacobi 矩阵

$$\mathbf{Jac}_{\boldsymbol{P}_0}(\Gamma)=\begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{bmatrix}_{\boldsymbol{P}_0}$$

在 $\boldsymbol{P}_0$ 处满秩, 即 $\operatorname{rank}(\mathbf{Jac}_{\boldsymbol{P}_0}(\Gamma))=2$. 根据秩的定义, 存在某个 2×2 的子矩阵是非奇异的. 不是一般性不妨假设

$$\begin{bmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{bmatrix}_{\boldsymbol{P}_0} \quad \text{非奇异} \quad \Longleftrightarrow \quad \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{\boldsymbol{P}_0}=\det\left(\begin{bmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{bmatrix}_{\boldsymbol{P}_0}\right)\neq 0.$$

根据定理 12.12 可知存在 (x_0,y_0,z_0) 的某个领域

$$U_0:=(x_0-\rho,x_0+\rho)\times\mathbb{B}^2((y_0,z_0),\rho')$$

使得方程 $F(x,y,z)=0=G(x,y,z)$ 在 U_0 唯一确定可导的隐函数:

$$y=y(x), \quad z=z(x), \quad x\in(x_0-\rho,x_0+\rho)$$

满足

$$F_x + F_y y' + F_z z' = 0 = G_x + G_y y' + G_z z'$$

从而得到

$$y'(x_0) = \left.\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}\right|_{\boldsymbol{P}_0}, \quad z'(x_0) = \left.\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}\right|_{\boldsymbol{P}_0}.$$

因此过 $\boldsymbol{P}_0$ 处的切线方程和法平面方程分别为

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(\boldsymbol{P}_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}(\boldsymbol{P}_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(\boldsymbol{P}_0)} \tag{12.5.9}$$

和

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(\boldsymbol{P}_0)(x - x_0) + \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}(\boldsymbol{P}_0)(y - y_0) + \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(\boldsymbol{P}_0)(z - z_0) = 0. \tag{12.5.10}$$

方程 (12.5.10) 可写成

$$\begin{vmatrix} F_x(\boldsymbol{P}_0) & F_y(\boldsymbol{P}_0) & F_z(\boldsymbol{P}_0) \\ G_x(\boldsymbol{P}_0) & G_y(\boldsymbol{P}_0) & G_z(\boldsymbol{P}_0) \\ x - x_0 & by - y_0 & z - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

定理 12.14

曲线 (12.5.8) 在 $\boldsymbol{P}_0$ 处的法平面就是梯度 $\mathbf{grad}_{\boldsymbol{P}_0}(F)$ 和 $\mathbf{grad}_{\boldsymbol{P}_0}(G)$ 所张成的经过 $\boldsymbol{P}_0$ 的平面. ♡

例 12.13

(1) 求两个柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 和 $x^2 + z^2 = R^2$ 交线在 $P = \frac{R}{\sqrt{2}}(1, 1, 1)$ 处的切线方程和法平面方程.

解: 令

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - R^2, \quad G(x, y, z) = x^2 + z^2 - R^2.$$

则得到

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} = 4yz, \quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)} = -4xz, \quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = -4xy.$$

因此得到切线方程为

$$x - \frac{R}{\sqrt{2}} = -y + \frac{R}{\sqrt{2}} = -z + \frac{R}{\sqrt{2}}$$

和法平面方程为

$$x - y - z + \frac{R}{\sqrt{2}} = 0. \quad \square$$

(2) 求曲线

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6, \quad z = x^2 + y^2$$

在点 $P = (1, 1, 2)$ 的切线和法平面.

解: 如果令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6$ 和 $G(x,y,z)=z-x^2-y^2$ 就得到

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=4zy+2y,\quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}=-4xz-2x,\quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=0.$$

因此得到切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{0}$$

和法平面方程为

$$x-y=0.\quad \square$$

12.5.2 空间曲面的切平面和法线

和曲线的切线和法平面对偶的是曲面的切平面和法线.

1、一般形式曲面的切平面和法线. 此时曲面 S 的方程为

$$S:\quad F(x,y,z)=0,\quad (x,y,z)\in D, \tag{12.5.11}$$

其中多元函数 F 在 D 上具有连续偏导数 F_x,F_y,F_z 且偏导数不全为 0. 固定曲面 S 上的点 $\boldsymbol{M}_0=(x_0,y_0,z_0)$. 对经过 $\boldsymbol{M}_0$ 的 S 上的任意光滑曲线 $\gamma:\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$, 有 $x_0=x(t_0)$, $y_0=y(t_0)$, $z_0=z(t_0)$, 且 $F(x(t),y(t),z(t))=0$. 在 t_0 处求导得到

$$F_x(\boldsymbol{M}_0)x'(t_0)+F(\boldsymbol{M}_0)y'(t_0)+F_z(\boldsymbol{M}_0)z'(t_0)=0.$$

γ 的切线构成了曲面 S 在 $\boldsymbol{M}_0$ 处的**切平面 (tangent plane)**. 由此得到切平面的法向向量是

$$\mathbf{n}:=(F_x(\boldsymbol{M}_0),F_y(\boldsymbol{M}_0),F_z(\boldsymbol{M}_0)). \tag{12.5.12}$$

从而得到切平面和法线方程为

$$F_x(\boldsymbol{M}_0)(x-x_0)+F_y(\boldsymbol{M}_0)(y-y_0)+F_z(\boldsymbol{M}_0)(z-z_0)=0 \tag{12.5.13}$$

和

$$\frac{x-x_0}{F_x(\boldsymbol{M}_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(\boldsymbol{M}_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(\boldsymbol{M}_0)}. \tag{12.5.14}$$

例 12.14

(1) 如果曲面 S 的方程表示为

$$S:\ z=f(x,y),\quad (x,y)\in E \quad\Longrightarrow\quad f(x,y)-z=0,$$

此时的切平面方程和法线方程为

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \tag{12.5.15}$$

和

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}. \tag{12.5.16}$$

(2) 求椭球面
$$\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=3$$
过点 $(-2,1,-3)$ 的切平面方程和法线方程.

解: 令 $F(x,y,z)=\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}-3$ 就得到
$$F_x=\frac{x}{2},\quad F_y=2y,\quad F_z=\frac{2z}{9}.$$
因此切平面方程和法线方程分别为
$$3x-6y+2z+18=0,\quad \frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{-\frac{2}{3}}.\quad \square$$

2、参数形式曲面的切平面和法线. 假设曲面可表示为参数形式:
$$x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v),\quad (u,v)\in D\subset\mathbb{R}^2, \tag{12.5.17}$$
其中 x,y,z 都具有连续的偏导数. 假设 Jacobi 矩阵
$$\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix}$$
在 $\boldsymbol{M}_0=(x_0=x(u_0,v_0),y_0=y(u_0,v_0),z_0=z(u_0,v_0))$ 处满秩. 不失一般性不妨假设 $\partial(x,y)/\partial(u,v)|_{(u_0v_0)}\neq 0$, 从而在 (x_0,x_0) 附近可以确定函数
$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y)\quad\Longrightarrow\quad z=z(x,y)=z(u(x,y),v(x,y))=:f(x,y).$$
由于
$$f_x=z_uu_x+z_vv_x,\quad f_y=z_uu_y+z_vv_y$$
和
$$x_uu_x+x_vv_x=1=y_uu_y+y_vv_y,\quad x_uu_y+x_vv_y=0=y_uu_x+y_vv_x,$$
得到
$$f_x=-\frac{\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}},\quad f_y=-\frac{\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}.$$
从方程 $f(x,y)-z=0$ 得到 S 在 $\boldsymbol{M}_0$ 的法向量为
$$\mathbf{n}=\left(\left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)},\left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)},\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}\right). \tag{12.5.18}$$
相应的切平面方程和法线方程为
$$\left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}(x-x_0)+\left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}(y-y_0)+\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}(z-z_0)=0 \tag{12.5.19}$$
和
$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}}. \tag{12.5.20}$$

例 12.15

(1) 求球面

$$x=\sin\varphi\cos\theta,\quad y=\sin\varphi\sin\theta,\quad z=\cos\varphi,$$

在对应于 $\theta=\varphi=\pi/4$ 处的切平面方程和法线方程.

解: 直接计算得到

$$\left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\varphi)}\right|_{(\pi/4,\pi/4)}=\left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,\varphi)}\right|_{(\pi/4,\pi/4)}=-\frac{\sqrt{2}}{4},\quad \left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\varphi)}\right|_{(\pi/4,\pi/4)}=-\frac{1}{2}.$$

故法向量为 $\mathbf{n}=(1,1,\sqrt{2})$. 从而得到切平面方程和法线方程为

$$x+y+\sqrt{2}z=2,\quad x-\frac{1}{2}=y-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).\quad\square$$

(2) 证明曲线

$$\Gamma:\ x=ae^t\cos t,\quad y=ae^t\sin t,\quad z=ae^t$$

和锥面 $x^2+y^2=z^2$ 每条母线 $x=pt,y=qt,z=rt$, 其中 $p^2+q^2=r^2$, 相交成定角.

证: 锥面的母线方程为

$$(x,y,z)=(pt,qt,rt),\quad p^2+q^2=r^2,$$

其中 (p,q,r) 为母线的方向. 曲线 Γ 的切向量为

$$\left(ae^t(\cos t-\sin t),ae^t(\sin t+\cos t),ae^t\right)=(x-y,x+y,z).$$

因此夹角的余弦为

$$\frac{p(x-y)+q(x+y)+rz}{\sqrt{(x-y)^2+(x+y)^2+z^2}\sqrt{p^2+q^2+r^2}}=\frac{2}{\sqrt{6}}.\quad\square$$

(3) 证明对任意常数 ρ,φ, 球面 $x^2+y^2+z^2=\rho^2$ 与锥面 $x^2+y^2=\tan^2\varphi\cdot z^2$ 是正交的.

证: 球面和锥面的法向量分别为

$$\mathbf{n}_1=(x,y,z),\quad \mathbf{n}_2=(x,y,-z\tan^2\varphi).$$

因此在两个曲面交点处得到

$$\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2=x^2+y^2-z^2\tan^2\varphi=0.\quad\square$$

12.6 无条件极值问题

这一节主要讨论**无条件极值**问题. 首先来看一个实际问题. 2020 年 “特殊的” 毕业季快到了, 快递公司派快递小哥在四牌楼校区的沙塘园前取件托运, 也有在四牌楼校区的同学想通过同城快递把要甩卖的物品寄到九龙湖校区, 打算搞一场 “毕业季的夜市摆摊” . 由于受到快递车辆和学校规定的限制, 快递小哥只接受长和腰围之和不超过 108 厘米的长方形箱子. 为了尽可能多的装东西而又不难为快递小哥, 那么同学们需要购买什么样的箱子呢?

假设 x, y, z 分别表示长方形箱子的长、宽和高, 则得到限制条件 $x + 2(y + z) = 108$ (这是因为 108 是容许的最大可能). 根据题意我们只需要求出什么时候箱子的体积

$$V := xyz = (108 - 2y - 2z)yz.$$

最大.

根据一元函数求极值的经验, 我们马上会想到用偏导数来求解. 但关键的是如何用? 为何用? 下面就来具体展开讨论.

12.6.1 多元函数的极值

定义 12.8. (极值)

假设 n 元函数 $f(\boldsymbol{x})$ 定义在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上且 $\boldsymbol{x}_0 \in D$. 若存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0, \rho)$ 使得

$$f(\boldsymbol{x}_0) \geq f(\boldsymbol{x}) \quad (\text{或 } f(\boldsymbol{x}_0) \leq f(\boldsymbol{x})), \quad \text{任意 } \boldsymbol{x} \in \mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0, \rho) \cap D,$$

则称 $\boldsymbol{x}_0$ 为 f 的**极大值点 (local maximal point)**(或**极小值点 (local minimal point)**), $f(\boldsymbol{x}_0)$ 为**极大值 (local maximum)**(或**极小值 (local minimum)**). 极大值点和极小值点统称为**极值点 (local extrema)** 而极大值和极小值统称为**极值 (local extreme values)**. 如果存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的去心邻域 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0, \rho) \setminus \{\boldsymbol{x}_0\}$ 使得

$$f(\boldsymbol{x}_0) > f(\boldsymbol{x}) \quad (\text{或 } f(\boldsymbol{x}_0) < f(\boldsymbol{x})), \quad \text{任意 } \boldsymbol{x} \in (\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0, \rho) \setminus \{\boldsymbol{x}_0\}) \cap D,$$

则称 $\boldsymbol{x}_0$ 为 f 的**严格极大值点 (strictly local maximal point)**(或**严格极小值点 (strictly local minimal point)**), $f(\boldsymbol{x}_0)$ 为**严格极大值 (strictly local maximum)**(或**严格极小值 (strictly local minimum)**). 严格极大值点和严格极小值点统称为**严格极值点 (strictly local extrema)** 而严格极大值和严格极小值统称为**严格极值 (strictly local extreme values)**. ♣

定理 12.15. (多元函数 Fermat 引理)

假设 n 元函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可偏导且 $\boldsymbol{x}_0$ 为其极值点, 则 $f'(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{0}$. ♡

证: 定义一元函数 $\varphi_i(t) := f(x_0^1, \cdots, x_0^{i-1}, t, x_0^{i+1}, \cdots, x^n)$, 从而 φ_i 在 x_0^i 可导. 则根据一元函数 Fermat 引理得到 $0 = \varphi_i'(x_0^i) = f_{x^i}(\boldsymbol{x}_0)$. □

$\boldsymbol{x}_0$ 称为 n 元函数 f 的**驻点 (critical point)**, 如果 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可偏导且满足 $f'(\boldsymbol{x}_0) = 0$.

- 和一元函数一样, 多元函数的可偏导的极值点必是驻点, 但是反之不一定成立. 比如考虑函数 $f(x, y) = xy$ 和 $(x_0, y_0) = (0, 0)$.
- 多元函数的偏导数不存在的点也可能是驻点. 比如考虑函数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和 $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

定理 12.16. (n **元函数极值的充分条件**)

假设 n 元函数 $f(\boldsymbol{x})$ 定义在区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上且 $\boldsymbol{x}_0\in D$ 为其驻点, 并假设 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 附近具有二阶连续偏导数. 引入函数 f 的 Hessian 矩阵

$$\mathbf{Hess}_{\boldsymbol{x}}(f):=[f_{x^ix^j}(\boldsymbol{x})]_{1\le i,j\le n}=\begin{bmatrix} f_{x^1x^1} & \cdots & f_{x^1x^n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ f_{x^nx^1} & \cdots & f_{x^nx^n}\end{bmatrix}_{\boldsymbol{x}}. \tag{12.6.1}$$

则有如下结论:

- $\mathbf{Hess}_{\boldsymbol{x}_0}(f)$ 正定, $f(\boldsymbol{x}_0)$ 为严格极小值.
- $\mathbf{Hess}_{\boldsymbol{x}_0}(f)$ 负定, $f(\boldsymbol{x}_0)$ 为严格极大值.
- $\mathbf{Hess}_{\boldsymbol{x}_0}(f)$ 不定, $f(\boldsymbol{x}_0)$ 不是极值.

♡

证: 根据**推论 12.2** 得到

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)+o(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2)&=\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=2}\frac{f^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x}_0)}{\boldsymbol{\alpha}!}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^{\boldsymbol{\alpha}}\\
&=\sum_{1\le i\le n}\frac{f_{x^ix^i}(\boldsymbol{x}_0)}{2!}(x^i-x^i_0)^2+\sum_{1\le i<j\le n}\frac{f_{x^ix^j}(\boldsymbol{x}_0)}{1!1!}(x^i-x^i_0)(x^j-x^j_0)\\
&=\frac12\sum_{1\le i\le n}f_{x^ix^i}(\boldsymbol{x}_0)(x^i-x^i_0)^2+\frac12\sum_{1\le i\ne j\le n}f_{x^ix^j}(\boldsymbol{x}_0)(x^i-x^i_0)(x^j-x^j_0)\\
&=\frac12\sum_{1\le i,j\le n}f_{x^ix^j}(\boldsymbol{x}_0)(x^i-x^i_0)(x^j-x^j_0)=\frac12(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot\mathbf{Hess}_{\boldsymbol{x}_0}(f)\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^{\mathsf{T}}.
\end{aligned}$$

即

$$f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)=\frac12(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot\mathbf{Hess}_{\boldsymbol{x}_0}(f)\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^{\mathsf{T}}+o(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2). \tag{12.6.2}$$

假设函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在邻域 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,\rho)$ 内具有二阶连续偏导数.

(a) $\mathbf{Hess}_{\boldsymbol{x}_0}(f)$ 正定: 此时正定二次型

$$\boldsymbol{y}\cdot\mathbf{Hess}_{\boldsymbol{x}_0}(f)\cdot\boldsymbol{y}^{\mathsf{T}},\quad \boldsymbol{y}:=\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}$$

在 $\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0},1)=\mathbb{S}^{n-1}$ 上取到最小值 $m>0$. 从未得到

$$f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)\ge m|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2+o(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2),\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,\rho).$$

当 ρ 足够小得到 $f(\boldsymbol{x})>f(\boldsymbol{x}_0)$ 对任何 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,\rho)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$ 都成立. 即 $f(\boldsymbol{x}_0)$ 是严格极小值.

(b) $\mathbf{Hess}_{\boldsymbol{x}_0}(f)$ 负定: 类似可证 $f(\boldsymbol{x}_0)$ 是严格极大值.

(c) $\mathbf{Hess}_{\boldsymbol{x}_0}(f)$ 不定: 反证法, 假设 $f(\boldsymbol{x}_0)$ 为极小值. 给定非零向量 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$, 考虑一元函数

$$\varphi(t):=f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{a}),\quad |t|<\frac{\rho}{|\boldsymbol{a}|}.$$

极小值推出 $\varphi'(0)=0\le\varphi''(0)$. 另一方面

$$\varphi'(t)=\sum_{1\le i\le n}f_{x^i}(\boldsymbol{x}_0)a^i,\quad \varphi''(0)=\sum_{1\le i,j\le n}f_{x^ix^j}(\boldsymbol{x}_0)a^ia^j=\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{Hess}_{\boldsymbol{x}_0}(f)\cdot\boldsymbol{a}^{\mathsf{T}}.$$

从而得到 $\mathbf{Hess}_{\boldsymbol{x}_0}(f)\ge 0$. 矛盾表明 $f(\boldsymbol{x}_0)$ 不是极值. □

下面我们回忆下线性代数中关于正定矩阵的基本性质. 定义 Hessian 矩阵的顺序主子式 (**leading principal subdeterminant**) 为

$$\Delta_k(\boldsymbol{x}):=\det([f_{x^ix^j}(\boldsymbol{x})]_{1\le i,j\le k})=\left|\begin{bmatrix}f_{x^1x^1} & \cdots & f_{x^1x^k}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ f_{x^kx^1} & \cdots & f_{x^kx^k}\end{bmatrix}_{\boldsymbol{x}}\right|,\quad 1\le k\le n. \tag{12.6.3}$$

则得到

$$\mathbf{Hess}_{\boldsymbol{x}}(f)\ \text{正定}\iff \Delta_k(\boldsymbol{x})>0,\quad 1\le k\le n, \tag{12.6.4}$$

$$\mathbf{Hess}_{\boldsymbol{x}}(f)\ \text{负定}\iff (-1)^k\Delta_k(\boldsymbol{x})>0,\quad 1\le k\le n. \tag{12.6.5}$$

特别地, 对 $n=2$ 情形我们给出证明. 考虑 2×2 非零对称矩阵

$$M=\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix},\quad \Delta:=\det M=ac-b^2.$$

则

$$\begin{aligned}M\ \text{正定}&\iff \Delta>0\ \text{且}\ a>0,\\ M\ \text{负定}&\iff \Delta>0\ \text{且}\ a<0,\\ M\ \text{不定}&\iff \Delta<0.\end{aligned}\tag{12.6.6}$$

相应的二次型记为

$$Q(x,y):=ax^2+2bxy+cy^2,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

并注意到

$$Q(x,y)=a\left(x+\frac{b}{a}y\right)^2+\frac{\Delta}{a}y^2,\quad \text{如果}\ a\ne 0.$$

我们只给出最后两个充要条件的证明. 假设 M 负定, 则对任意 $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 都有 $Q(x,y)<0$. 若取 $(x,y)=(1,0)$ 就得到 $a=Q(1,0)<0$ 从而得到

$$0>Q\left(-\frac{b}{a},1\right)=\frac{\Delta}{a}\quad\Longrightarrow\quad \Delta>0.$$

反之假设 $\Delta>0$ 和 $a<0$, 则对任意 $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 都有

$$Q(x,y)\le 0.$$

若 $Q(x,y)=0$ 则得到 $y=0=x+(b/a)y$, 这就推出 $x=y=0$ 矛盾.

接下来证明 M 不定的充要条件. 如果 M 不定, 则必有 $\Delta\le 0$. 当 $a\ne 0$ 时, 我们有

$$Q(x,y)=a\left(x+\frac{b}{y}\right)^2\quad\Longrightarrow\quad Q\ \text{是可定的}.$$

当 $a=0$ 时, 结合 $0=\Delta=ac-b^2$, 我们得到 $b=0$; 此时 $Q(x,y)=cy^2$, 故也是可定的 (注

意到 M 是非零矩阵). 反之假设 $\Delta < 0$, 下证 M 必是不定的. 当 $a \neq 0$ 时,

$$Q\left(-\frac{b}{a}, 1\right) \cdot Q(1,0) = \frac{\Delta}{a} \cdot a = \Delta < 0,$$

此时 M 是不定的. 当 $a = 0$ 时, 此时必有 $b \neq 0$ 从而得到

$$Q\left(-\frac{1}{2} - \frac{c}{2b}, 1\right) Q\left(\frac{1}{2} - \frac{c}{2b}, 1\right) = -b^2 < 0.$$

故此时 M 也是不定的.

根据**定理 12.16** 并结合 (12.6.6) 得到如下有用的推论.

推论 12.3. (二元函数极值的充分条件)

假设二元函数 $f(x,y)$ 定义在区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上且 $(x_0, y_0) \in D$ 为其驻点, 并假设 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 附近具有二阶连续偏导数. 引入记号

$$\Delta(x_0, y_0) := (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(x_0, y_0). \tag{12.6.7}$$

则有如下结论:

- $\Delta(x_0, y_0) > 0$ 且 $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, $f(x_0, y_0)$ 为严格极小值.
- $\Delta(x_0, y_0) > 0$ 且 $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, $f(x_0, y_0)$ 为严格极大值.
- $\Delta(x_0, y_0) < 0$, $f(\boldsymbol{x}_0)$ 不是极值.
- $\Delta(x_0, y_0) = 0$, 无法判断.

♡

在**推论 12.3** 中, 当 $\Delta(x_0, y_0) = 0$ 时无法判断的例子为,

$$f(x,y) = x^2y^2, \quad g(x,y) = -x^2y^2, \quad h(x,y) = x^2y^3, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

这三个函数在 $(x_0, y_0) = (0,0)$ 的行列式 $\Delta(x_0, y_0)$ 都等于 0, 但是 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处取到极小值, $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处取到极大值, 而 $h(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处没有极值.

例 12.16

(1) 我们首先来回答本节一开始的问题, 回忆

$$V = (108 - 2y - 2z)yz.$$

则直接计算得到

$$V_y = 2z(54 - 2y - z), \quad V_z = 2y(54 - y - 2z)$$

和

$$\mathbf{Hess}_{(y,z)}(V) = -4\begin{bmatrix} z & y+z-27 \\ y+z-27 & y \end{bmatrix}$$

则合理的驻点为 $(y_0, z_0) = (18, 18)$ 从而得到

$$\mathbf{Hess}_{(18,18)}(V) = -4\begin{bmatrix} 18 & 9 \\ 9 & 18 \end{bmatrix}$$

是负定的. 因此学生们可以考虑长、宽、高分别为 36、18、18 的长方形箱子. □

(2) 求函数 $f(x,y) = 3axy - x^3 - y^3$ 的极值 $(a > 0)$.

解: 直接计算得到

$$f_x = 3ay - 3x^2, \quad f_y = 3ax - 3y^2,$$

和

$$\mathbf{Hess}_{(x,y)}(f) = -3\begin{bmatrix} 2x & -a \\ -a & 2y \end{bmatrix}$$

则得到驻点 $(0,0)$ 和 (a,a), 而函数在前者处无极值但在后者处有极大值 a^3. □

(3) 求函数 $f(x,y) = -\frac{4}{5}x^5 + x^4 - 2x^2y + \frac{1}{2}y^2$ 的极值.

解: 直接计算得到

$$f_x = -4x^4 + 4x^3 - 4xy, \quad f_y = -2x^2 + y$$

和

$$\mathbf{Hess}_{(x,y)}(f) = \begin{bmatrix} -16x^3 + 12x^2 - 4y & -4x \\ -4x & 1 \end{bmatrix}$$

两个驻点为 $(0,0)$ 和 $(-1,2)$, 从而得到

$$\mathbf{Hess}_{(0,0)}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Hess}_{(-1,2)}(f) = \begin{bmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

故极小值 $-9/5$ 在 $(-1,2)$ 处取到. 因为 $\Delta(0,0) = 0$, 故**推论 12.3** 不适用. 但是注意到

$$f(x,x^2) = -\frac{4}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 = x^4\left(-\frac{4}{5}x - \frac{1}{2}\right), \quad f(0,y) = \frac{1}{2}y^2.$$

当 (x,y) 沿着抛物线 $y = x^2$ 位于第一象限部分趋于 $(0,0)$ 时, $f(x,y) < 0$ 但 $f(0,y) > 0$. 因此 $(0,0)$ 不是极值点. □

(4) 求函数 $z = x + y + 4\sin x \sin y$ 的极值.

解: 直接计算得到

$$z_x = 1 + 4\cos x \sin y, \quad z_y = 1 + 4\sin x \cos y$$

从而得到驻点方程

$$1 - 2\sin(x-y) + 2\sin(x+y) = 0, \quad 1 + 2\sin(x-y) + 2\sin(x+y) = 0.$$

所以推出

$$\sin(x-y) = 0, \quad \sin(x+y) = -\frac{1}{2}.$$

上述方程的一般解是

$$x + y = (-1)^{m+1}\frac{\pi}{6} + m\pi, \quad x - y = n\pi, \quad m,n \in \mathbb{Z}.$$

最后得到无数个驻点

$$(x_{m,n}, y_{m,n}) = \left((-1)^{m+1}\frac{\pi}{12} + (m+n)\frac{\pi}{2}, (-1)^{m+1}\frac{\pi}{12} + (m-n)\frac{\pi}{2}\right), \ m,n \in \mathbb{Z}.$$

Hessian 矩阵为

$$\mathbf{Hess}_{(x,y)}(z)=\begin{bmatrix}-4\sin x\sin y & 4\cos x\cos y\\ 4\cos x\cos y & -4\sin x\sin y\end{bmatrix}$$

从而得到

$$\det\mathbf{Hess}_{(x,y)}(z)=16\sin^2 x\sin^2 y-16\cos^2 x\cos^2 y=-16\cos(x-y)\cos(x+y)$$

$$\det\mathbf{Hess}_{(x_{m,n},y_{m,n})}(z)=(-1)^{m+n+1}8\sqrt{3},\quad m,n\in\mathbb{Z}.$$

因此当 $m+n$ 为奇数时，函数在 $(x_{m,n},y_{m,n})$ 有极值且

$$z''_{xx}(x_{m,n},y_{m,n})=\sqrt{3}(-1)^m+2(-1)^2.$$

如果 $m=2k$ 且 $n=2j-1$, 得到极小值 $2k\pi-2-\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}$; 如果 $m=2k-1$ 且 $n=2j$, 得到极大值 $(2k-1)\pi+2+\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}$. □

(5) 求函数 $z=\tan x+\tan y-\tan(x+y)$ 的极值.

解: 直接计算得到

$$z_x=\sec^2 x-\sec^2(x+y),\quad z_y=\sec^2 y-\sec^2(x+y)$$

从而推出驻点为

$$(x,y)=(0,0),\quad \left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right),\quad \left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right),\quad (\pi,\pi),\quad (0,\pi),\quad (\pi,0).$$

Hessian 矩阵为

$$\begin{bmatrix}2[\sin x\sec^2 x-\sin(x+y)\sec^3(x+y) & -2\sin(x+y)\sec^3(x+y)\\ -2\sin(x+y)\sec^3(x+y) & 2[\sin y\sec^3 y-\sin(x+y)\sec^3(x+y)\end{bmatrix}$$

计算可得在 $(\pi/3,\pi/3)$ 处取到极小值 $3\sqrt{3}$, 在 $(2\pi/3,2\pi/3)$ 处取到极大值 $-3\sqrt{3}$. □

12.6.2 多元函数的最值

假设 n 元函数 $f(\boldsymbol{x})$ 是定义在有界闭区域 D 上的连续函数. 此时最大值和最小值存在, 且可根据如下求得最值:

(1) 求出驻点和不可偏导点和相应的函数值,

(2) 求出边界上的函数值;

(3) 最后比较 (1) 和 (2).

例 12.17

(1) 求函数 $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ 的最值.

证: 直接计算得到

$$f_x=2xe^{-(x^2+y^2)}(1-x^2-y^2),\quad f_u=2ye^{-(x^2+y^2)}(1-x^2-y^2)$$

从而推出驻点为 $(x,y)\in\mathbb{S}^1$. 因为

$$\lim_{x\to\infty,\ y\to\infty}f(x,y)=\lim_{r\to+\infty}\frac{r^2}{e^{r^2}}=0,$$

所以存在最大值且等于极大值. 由于

$$\mathbf{Hess}_{(0,0)}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

我们得到 $f_{\max} = e^{-1}$. 而最小值是 $f_{\min} = f(0,0) = 0$. □

(2) 证明二元不等式 $xy \leq x\ln x - x + e^y$, 其中 $x \geq 1$ 和 $y \geq 0$.

证: 若令 $f(x,y) = x\ln x - x + e^y - xy$ 得到

$$f_x = \ln x - y, \quad f_y = e^y - x$$

和驻点 $(x, \ln x)$, $x \geq 1$. 从而得到 Hessian 矩阵

$$\mathbf{Hess}_{(x,\ln x)}(f) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & 1 \\ -1 & x \end{bmatrix}$$

和极小值 $f(x,\ln x) = 0$. 现在考虑边界上的最值.

$$f(1,y) = e^y - y - 1 \geq 0 \quad (y \geq 0), \quad f(x,0) = x\ln x - x + 1 \geq 0 \quad (x \geq 0).$$

所以函数 $f(x,y)$ 在曲线 $y = \ln x$, $x \geq 1$, 上达到最小值 0. □

12.6.3 * 最小二乘法

假设 $\mathbb{R}^{2n}$ 内有 m 个向量对 $(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1),\cdots,(\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{y}_m)$ 其大致满足线性函数关系 $\boldsymbol{y} = a\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$. **最小二乘法 (method of least squares)** 可以告诉我们如何求出 a 和 $\boldsymbol{b}$, 即要求函数

$$Q := \sum_{1\leq i\leq m} |\boldsymbol{y}_i - a\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{b}|^2 = \sum_{1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n} |y_i^j - ax_i^j - b^j|^2 \tag{12.6.8}$$

最小. 计算

$$\begin{aligned} Q_a &= \sum_{1\leq i\leq m} 2(\boldsymbol{y}_i - a\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{b}) \cdot (-\boldsymbol{x}_i) \\ &= 2a \sum_{1\leq i\leq m} |\boldsymbol{x}_i|^2 - 2\sum_{1\leq i\leq m} \langle \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i\rangle + 2\sum_{1\leq i\leq m} \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}_i\rangle, \end{aligned}$$

和

$$Q_{b^j} = \sum_{1\leq i\leq m} -2(y_i^j - ax_i^j - b^j) = 2a\sum_{1\leq i\leq m} x_i^j - 2\sum_{1\leq i\leq m} y_i^j + 2mb^j.$$

根据多元函数极值条件得到

$$Q_a = 0 = Q_{b^j}.$$

从而得到线性方程组, 称为**法方程组 (system of normal equations)**

$$\left[\begin{array}{c|c} \sum_{1\leq i\leq m} |\boldsymbol{x}_i|^2 & \boldsymbol{\alpha} \\ \hline \boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}} & mI_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} a \\ \boldsymbol{b}^{\mathsf{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{1\leq i\leq m} \langle \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i\rangle \\ \boldsymbol{\beta}^{\mathsf{T}} \end{bmatrix} \tag{12.6.9}$$

这里 I_n 是 $n\times n$ 单位矩阵且

$$\boldsymbol{\alpha}:=\left(\sum_{1\le i\le m}x_i^1,\cdots,\sum_{1\le i\le m}x_i^n\right),\quad \boldsymbol{\beta}:=\left(\sum_{1\le i\le m}y_i^1,\cdots,\sum_{1\le i\le m}y_i^n\right)$$

根据 (12.6.9) 可以求出 a 和 $\boldsymbol{b}$.

特别地, 对平面 (即 $n=1$ 时) 上的 m 个向量对 $(x_1,y_1),\cdots,(x_m,y_m)$ 我们从 (12.6.9) 得到

$$\begin{aligned} a\sum_{1\le i\le m}x_i^2+b\sum_{2\le i\le m}x_i &= \sum_{1\le i\le m}x_iy_i,\\ a\sum_{1\le i\le m}x_i+bm &= \sum_{1\le i\le m}y_i \end{aligned}$$

从而推出

$$a = \frac{m\sum_{1\le i\le m}x_iy_i-(\sum_{1\le i\le m}x_i)(\sum_{1\le i\le m}y_i)}{m\sum_{1\le i\le m}x_i^2-(\sum_{1\le i\le m}x_i)^2}, \tag{12.6.10}$$

$$b = \frac{(\sum_{1\le i\le m}x_i^2)(\sum_{1\le i\le m}y_i)-(\sum_{1\le i\le m}x_i)(\sum_{1\le i\le m}x_iy_i)}{m\sum_{1\le i\le m}x_i^2-(\sum_{1\le i\le m}x_i)^2}. \tag{12.6.11}$$

第一位清楚地、正式地发表最小二乘法的是Legendre, 他在 1805 年发表了论文《Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes》. 在 1809 年Gauss 发表了计算天体运动轨道方法地专著,《Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientum》, 他宣称自 1795 年以来就对最小二乘法拥有优先权.

例 12.18

对如下数据

x	49.2	50.0	49.3	49.0	49.0	49.5	49.8	49.9	50.2	50.2
y	16.7	17.0	16.8	16.6	16.7	16.8	16.9	17.0	17.0	17.1

利用最小二乘法求出所模拟地线性函数 $y=ax+b$.

解: 根据公式 (12.6.10) 和 (12.6.11) 得到

$$a=0.04,\quad b=0.399.\quad\square$$

12.6.4 * 拟矩阵

一个线性方程组称为**过定的 (over-determined)** 如果方程组的数目比未知变量的数目要多. 虽然这类方程组不一定有解, 但是 **Moore–Penrose 拟矩阵 (Moore-Penrose pseudo-inverse)** 在某种意义下给出了最好的逼近解.

考虑如下的矩阵方程

$$A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}, \tag{12.6.12}$$

这里 A 是 $m\times n$ 矩阵满足 $m>n$, $\boldsymbol{X}$ 是 $n\times 1$ 向量且 $\boldsymbol{b}$ 是 $m\times 1$ 向量. 如果假设 $A^{\mathsf{T}}A$ 可

逆, 则得到

$$\boldsymbol{X} = (A^{\mathsf{T}}A)^{-1}A^{\mathsf{T}}\boldsymbol{b}.$$

因此, **$\boldsymbol{A}$ 的拟逆 (pseudo-inverse)** 定义为如下的 $n \times m$ 矩阵

$$A^{+} := (A^{\mathsf{T}}A)^{-1}A^{\mathsf{T}}. \tag{12.6.13}$$

此时过定方程 $A\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}$ 的解为 $\boldsymbol{X} = A^{+}\boldsymbol{b}$.

(1) 如果 A 是可逆的, 则 $A^{+} = A^{-1}$.

(2) 如果 $n > m$, 则 $A^{\mathsf{T}}A$ 不可能有逆矩阵, 这是因为 $\det(A^{\mathsf{T}}A) = 0$:

$$\operatorname{rank}(A^{\mathsf{T}}A) = \operatorname{rank}(A) \leq \min\{n, m\} = m < n.$$

考虑线性映射

$$\boldsymbol{F}: \mathbb{R}^{n} \longrightarrow \mathbb{R}^{m}, \quad \boldsymbol{X} \longmapsto A\boldsymbol{X}, \tag{12.6.14}$$

这里 $n < m$. 假设矩阵 A 是全秩的, 即 $\operatorname{rank}(A) = n$. 此时 $\boldsymbol{F}$ 的像集是如下 $\mathbb{R}^{m}$ 的线性子空间:

$$\mathcal{R} := \{A\boldsymbol{X} | \boldsymbol{X} \in \mathbf{R}^{n}\}, \tag{12.6.15}$$

其维数为 $\dim \mathcal{R} = \operatorname{rank}(A) = n$.

给定向量 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{m}$, 但不一定在 $\mathcal{R}$ 内, 我们来利用**最小范数解 (minimum norm solution)** 来求解矩阵方程 $A\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}$. 这个最小范数解 $\boldsymbol{X}^{*} \in \mathbb{R}^{n}$ 使得 $A\boldsymbol{X} - \boldsymbol{b}$ 达到最小, 即,

$$\boldsymbol{X}^{*} := \min_{\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{n}} |A\boldsymbol{X} - \boldsymbol{b}|. \tag{12.6.16}$$

几何上, $A\boldsymbol{X}^{*}$ 是与 $\boldsymbol{b}$ 距离最短的 $\mathcal{R}$ 中的点. 可以证明 $X^{*} = A^{+}\boldsymbol{b}$.

作为应用, 我们可以给出最小二乘法的另一个证明:

$$A\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}, \quad A := \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

直接计算得到

$$A^{\mathsf{T}}A = \begin{bmatrix} |\boldsymbol{x}|^2 & \sum_{1 \leq i \leq n} x_i \\ \sum_{1 \leq i \leq n} x_i & n \end{bmatrix}, \quad (A^{\mathsf{T}}A)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} n & -\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \\ -\sum_{1 \leq i \leq n} x_i & |\boldsymbol{x}|^2 \end{bmatrix}}{n|\boldsymbol{x}|^2 - (\sum_{1 \leq i \leq n} x_i)^2}$$

这里 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$. 故拟逆解为

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = A^{+}\boldsymbol{Y} = (A^{\mathsf{T}}A)^{-1}A^{\mathsf{T}}\boldsymbol{Y} = \frac{\begin{bmatrix} n\sum_{1 \leq i \leq n} x_i y_i - \sum_{1 \leq i \leq n} x_i \cdot \sum_{1 \leq i \leq n} y_i \\ |\boldsymbol{x}|^2 \sum_{1 \leq i \leq n} y_i - \sum_{1 \leq i \leq n} x_i \cdot \sum_{1 \leq i \leq n} x_i y_i \end{bmatrix}}{n|\boldsymbol{x}|^2 - (\sum_{1 \leq i \leq n} x_i)^2}$$

若令 $\mathbf{1}=\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$ 得到

$$a=\frac{n(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})-(\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{1})(\boldsymbol{y}\cdot\mathbf{1})}{n(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{1})^2},\quad b=\frac{(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}\cdot\mathbf{1})-(\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{1})(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})}{n(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{1})^2}. \tag{12.6.17}$$

12.7 条件极值问题

本节给出常用的 **Lagrange 乘子法**来求解条件极值问题. 这个方法是把有 n 个变量和 m 个约束条件的最优化问题转换为一个有 $n+m$ 个变量的多元函数的极值问题.

12.7.1 条件极值和 Lagrange 函数

在很多实际应用中我们往往要在 m 个**约束条件 (constraints)**

$$g_k(x^1,\cdots,x^n)=0,\quad 1\le k\le m<n,$$

下求函数 $y=f(x^1,\cdots,x^n)$ 的极值, 此时的极值称为**条件极值 (constrained extreme values)**, 并把取到条件极值的点 (必在 m 个曲面 $g_k=0$ 的交集上) 称为**条件极值点 (constrained extremal points)**.

比如在微观经济学中用来描述生产函数的 **Cobb**[2] **- Douglas**[3] **函数**

$$f:(0,+\infty)\times(0,+\infty)\longrightarrow(0,+\infty),\quad (x,y)\longmapsto Ax^a y^{1-a}, \tag{12.7.1}$$

其中 x 表示**投入的劳力 (labor input)**, y 表示**投入的资本 (capital input)**, a 表示**劳力的生产力弹性 (output elasticities of labor)**, $1-a$ 表示**资本的生产力弹性 (output elasticities of capital)**, 而 A 表示**全要素生产率 (total factor productivity)**. 我们希望求出 $f(x,y)$ 在下面约束条件下的极值:

$$px+qy=M,\quad p,q,M \text{ 都是常数}. \tag{12.7.2}$$

Cobb - Douglas 函数是Douglas 在 1927 年发展起来的, 但是函数 (12.7.1) 是其同事Cobb 建议的, 合作的论文《A theory of production》[4]于 1928 年发表在 American Economic Review. 然而函数 (12.7.1) 之前就已经被Knut Wicksell, Philip Wicksteed 和Léon Walras 使用过.

定理 12.17

假设 $D\subset\mathbb{R}^3$ 是区域, 且 (x_0,y_0,z_0) 是函数 $f(x,y,z):D\to\mathbb{R}$ 满足约束条件

$$G(x,y,z)=0=H(x,y,z)$$

的条件极值点. 进一步假设 f,G,H 具有连续偏导数且 Jacobi 矩阵

$$\mathbf{Jac}_{(x,y,z)}:=\begin{bmatrix}G_x & G_y & G_z\\ H_x & H_y & H_z\end{bmatrix}$$

在曲面 $\Gamma:=\{(x,y)\in D: G(x,y,z)=0=H(x,y,z)\}$ 内满秩. 则存在常数 λ_0,μ_0

---

[2]Charles Cobb, 1875 年 - 1949 年, 美国数学家和经济学家, 因发展经济学中的 Cobb - Douglas 生产函数而闻名.

[3]Paul Douglas, 1892 年 3 月 26 日 - 1976 年 9 月 24 日, 美国政治家和经济学家. 最著名的工作是经济学中的 Cobb - Douglas 生产函数.

[4]参见: https://assets.aeaweb.org/asset-server/journals/aer/top20/18.1.139-165.pdf

满足

$$\mathbf{grad}_{(x_0,y_0,z_0)}(f) = \lambda_0 \mathbf{grad}_{(x_0,y_0,z_0)}(G) + \mu_0 \mathbf{grad}_{(x_0,y_0,z_0)}(H).$$

证: 不妨假设 $\partial(G,H)/\partial(y,z)(x_0,y_0,z_0) \neq 0$. 从而在 (x_0,y_0,z_0) 附近可唯一确定

$$y = y(x),\ z = z(x),\quad x \in (x_0-\rho, x_0+\rho),\quad y_0 = y(x_0),\ z_0 = z(x_0).$$

此时一元函数

$$\Phi(x) := f(x, y(x), z(x)),\quad x \in (x_0-\rho, x_0+\rho)$$

在 x_0 处取得极值, 即 $\Phi'(x_0) = 0$:

$$0 = f_x(x_0,y_0,z_0) + f_y(x_0,y_0,z_0)y'(x_0) + f_z(x_0,y_0,z_0)z'(x_0).$$

换句话说, 梯度向量

$$\mathbf{grad}_{(x_0,y_0,z_0)}(f) = (f_x(x_0,y_0,z_0), f_y(x_0,y_0,z_0), f_z(x_0,y_0,z_0))$$

与 Γ 在 (x_0,y_0,z_0) 的切向量 $(1, y'(x_0), z'(x_0))$ 正交, 即 $\mathbf{grad}_{(x_0,y_0,z_0)}(f)$ 落在 (x_0,y_0,z_0) 的法平面内. 从而根据定理 12.15 得到

$$\mathbf{grad}_{(x_0,y_0,z_0)}(f) = \lambda_0 \mathbf{grad}_{(x_0,y_0,z_0)}(G) + \mu_0 \mathbf{grad}_{(x_0,y_0,z_0)}(H). \quad \square$$

上述定理可推广到多元情形.

定理 12.18

假设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是区域, 且 $\boldsymbol{x}_0$ 是函数 $f(\boldsymbol{x}): D \to \mathbb{R}$ 满足约束条件

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad g^i(\boldsymbol{x}) = 0,\ 1 \le i \le m < n,$$

的条件极值点. 进一步假设 $f, g^1, \cdots, g^m$ 具有连续偏导数且 Jacobi 矩阵

$$\mathbf{Jac}_{\boldsymbol{x}} := \begin{bmatrix} g^1_{x^1} & \cdots & g^1_{x^n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g^m_{x^1} & \cdots & g^m_{x^n} \end{bmatrix}$$

在超曲面 $\Gamma := \{\boldsymbol{x} \in D : \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = 0\}$ 内满秩. 则存在 m 个常数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 满足

$$\mathbf{grad}_{\boldsymbol{x}_0}(f) = \sum_{1\le i\le m} \lambda_i \mathbf{grad}_{\boldsymbol{x}_0}(g^i).$$

我们把 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 称为 **Lagrange 乘子 (Lagrange multipliers)**. 接下来我们利用 **Lagrange 函数 (Lagrange function)**

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) := f(\boldsymbol{x}) - \sum_{1\le i\le m} \lambda_k g^k(\boldsymbol{x}) \tag{12.7.3}$$

来求出条件极值点. 作为 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{R}^{n+m}$ 的函数, 条件极值点满足方程

$$0 = L_{x^i} = f_{x^i} - \sum_{1\le k\le m} \lambda_k g^k_{x^i}, \tag{12.7.4}$$

$$0 = L_{\lambda_k} = -g^k. \tag{12.7.5}$$

(12.7.3) 自动满足而 (12.7.2) 就是**定理 12.18** 的结论. 把满足 (12.7.4) - (12.7.5) 的点称为**条件驻点 (constrained critical points)**.

(1) 条件极值点必落在超曲面 $\Gamma := \{\boldsymbol{x} \in D : \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = 0\}$ 内. 所以条件极值点必是极值点, 但反之不一定成立.

(2) 如果超曲面 $\Gamma := \{\boldsymbol{x} \in D : \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = 0\}$ 是有界闭集, 则结合边界上的函数值可求出最值.

定理 12.19. (条件极值的充分条件)

假设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是区域, 且 $\boldsymbol{x}_0$ 是函数 $f(\boldsymbol{x}) : D \to \mathbb{R}$ 满足约束条件

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \quad \Longleftrightarrow \quad g^i(\boldsymbol{x}) = 0,\ 1 \le i \le m < n,$$

的条件极值点. 进一步假设 $f, g^1, \cdots, g^m$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 附近具有二阶连续偏导数. 对 Lagrange 函数 (12.7.3) 引入 Hessian 矩阵

$$\mathbf{Hess}_{\boldsymbol{x}}(L) := [L_{x^i x^j}(\boldsymbol{x})]_{1 \le i,j \le n} = \begin{bmatrix} L_{x^1x^1} & \cdots & L_{x^1x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{x^nx^1} & \cdots & L_{x^nx^n} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{x}}.$$

则有如下结论:

- $\mathbf{Hess}_{\boldsymbol{x}_0}(f)$ 正定, $f(\boldsymbol{x}_0)$ 为严格条件极小值.
- $\mathbf{Hess}_{\boldsymbol{x}_0}(f)$ 负定, $f(\boldsymbol{x}_0)$ 为严格条件极大值.

♡

证: 证明和**定理 12.16** 几乎一样. 因为 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{0}$ 且我们是在约束条件 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ 上求极值, 所以取 $\boldsymbol{x}$ 充分靠近 $\boldsymbol{x}_0$ 且也同样满足 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$. 因此得到

$$L(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}_0), \quad L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}).$$

根据**推论 12.2** 得到

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \cdot \mathbf{Hess}_{\boldsymbol{x}_0}(L) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^{\mathsf{T}} + o(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^2).$$

之后的论证和**定理 12.16** 一样. □

和**定理 12.16** 不一样的是, 当 $\mathbf{Hess}_{\boldsymbol{x}_0}(L)$ 不定时, f 仍有可能取到条件极值. 比如考察下面的求条件极值问题

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2, \quad \text{其中约束条件为 } g(x, y, z) := z = 0.$$

此时得到 Lagrange 函数

$$L(x, y, z, \lambda) := x^2 + y^2 - z^2 - \lambda z.$$

显然函数 f 在 $(0, 0)$ 处取到条件极小值 0, 但是相应的驻点和 **Hessian** 矩阵分别为

$$(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0), \quad \mathbf{Hess}_{(0,0,0)}(L) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

注意到最后一个矩阵式不定的.

例 12.19

(1) 求函数 $V=8xyz, x,y,z>0$, 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的最值.

解: 作 Lagrange 函数

$$L(x,y,z,\lambda):=8xyz-\lambda(x^2+y^2+z^2-1).$$

直接计算得到

$$L_x=8yz-2\lambda x,\quad L_y=8xz-2\lambda y,\quad L_z=8xy-2\lambda z,\quad L_\lambda=1-x^2-y^2-z^2.$$

得到条件极值点为 $(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$. 因为连续函数在有界集上必取到最值, 所以

$$V_{\max}=V(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{9}.\quad\square$$

(2) 求原点到曲线

$$\gamma: x+y+z=1,\quad x+2y+3z=6$$

的距离.

解: 作 Lagrange 函数

$$L(x,y,z,\lambda,\mu):=x^2+y^2+z^2-\lambda(x+y+z-1)-\mu(x+2y+3z-6).$$

得到条件极值点和相应的 Hessian 矩阵为

$$(x_0,y_0,z_0,\lambda_0,\mu_0)=\left(-\frac{5}{3},\frac{1}{3},\frac{7}{3},-\frac{22}{3},4\right)$$

和

$$\mathbf{Hess}_{(x_0,y_0,z_0,\lambda_0,\mu_0)}(L)=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

故距离为 $5/\sqrt{3}$. $\square$

(3) 求函数 $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$ 在闭区域 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\le 1\}$ 上的最值, 其中 $b^2-ac<0$ 且 $a,b,c>0$.

解: 作 Lagrange 函数

$$L(x,y,\lambda):=ax^2+2bxy+cy^2-\lambda(x^2+y^2-1).$$

直接计算并判断得到最小值为 0 而最大值为

$$\frac{a+c+\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}.\quad\square$$

(4) 设 $a^1,\cdots,a^n$ 为 n 个常数, 求函数 $f(\boldsymbol{x})=|\boldsymbol{x}|^2$ 在约束条件 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\rangle=1$ 下的最小值.

解: 作 Lagrange 函数

$$L(\boldsymbol{x},\lambda):=|\boldsymbol{x}|^2-\lambda\left(\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\rangle-1\right).$$

计算得到

$$L_{x^i}=2x^i-\lambda a^i,\quad L_\lambda=1-\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\rangle.$$

从而得到极值点为 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|^2$ 和极小值为 $f(\boldsymbol{x}_0) = 1/|\boldsymbol{a}|^2$. □

(5) 证明椭圆
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad Ax+By+Cz=0$$
的短轴长度 r 满足方程
$$\frac{a^2}{r^2-a^2}A^2+\frac{b^2}{r^2-b^2}B^2+\frac{c^2}{r^2-c^2}C^2=0.$$

12.8 * 最优传输问题

假设在海滩上有一大堆沙子和一个深洞. 我们想把这堆沙子完全填充到洞里. 显然沙子的重量和洞的容积是一样的. 这时我们就要问如何搬运这堆沙子到洞里, 使得花费的人工成本最少?

不失一般性不妨假设沙子的总重量为 1. 工人取沙子的过程可以看成一个概率空间 $(X,\mathscr{A},\mu)$, 其中 $(X,\mathscr{A})$ 是测度空间而 μ 是其上的概率测度. 同样道理, 工人倒沙子到洞里的过程也可以看成另一个概率空间 $(Y,\mathscr{B},\nu)$, 其中 $(Y,\mathscr{B})$ 是测度空间而 ν 是其上的概率测度. 对 X 和 Y 中的可测集 A 和 B, 我们用 $\mu(A)$ 和 $\nu(B)$ 分别表示取 A 处沙子的可能方式和把沙子倒在 B 处的可能方式. 工人搬运沙子需要的成本用定义在 $X\times Y$ 上的函数 $c(x,y)$ 来表示, 这样 $c(x,y)$ 就表示把 $x\in X$ 处的 1 单位沙子倒在 $y\in Y$ 处的成本. 我们很自然假设 c 是非负可测函数, $c: X\times Y\to[0,+\infty]$. 这样所要求的问题就变成如下:

基本问题: 如何用最小的成本来实现搬运沙子?

为了从数学上理解这个问题, 我们首先给出问题的数学表述.

12.8.1 * 最优传输问题的数学表述

假设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 和 $(Y,\mathscr{B},\nu)$ 是两个概率空间. 它们的测度乘积空间为 $(X\times Y,\mathscr{A}\otimes\mathscr{B})$, 其中 $\mathscr{A}\times\mathscr{B}$ 是由形如 $A\times B$, $(A,B)\in(\mathscr{A},\mathscr{B})$, 所生成的 σ-代数. 之后将会证明, $(X\times Y,\mathscr{A}\otimes\mathscr{B})$ 上存在唯一的概率测度 $\mu\otimes\nu$, 称为乘积概率测度, 满足
$$(\mu\otimes\nu)(A\times B)=\mu(A)\nu(B), \quad (A,B)\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}.$$
我们令 $\mathbf{P}(X\times Y)$ 表示 $(X\times Y,\mathscr{A}\otimes\mathscr{B})$ 上所有概率测度构成的集合. 因为 $\mu\otimes\nu\in\mathbf{P}(X\times Y)$, 所以 $\mathbf{P}(X\times Y)$ 是非空的.

称 $\pi\in\mathbf{P}(X\times Y)$ 是**可容许的 (admissible)** 如果
$$\pi(A\times Y)=\mu(A), \quad \pi(X\times B)=\nu(B), \quad (A,B)\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}. \tag{12.8.1}$$
条件 (12.8.1) 等价于
$$\int_{X\times Y}[\varphi(x)+\psi(y)]d\pi(x,y)=\int_X\varphi(x)\,d\mu(x)+\int_Y\psi(y)\,d\nu(y), \tag{12.8.2}$$

对任意 $(\varphi,\psi)\in L^1(X,d\mu)\times L^1(Y,d\nu)$ 都成立. 定义

$$\Pi(\mu,\nu):=\{\pi\in\mathbf{P}(X\times Y)|\ (12.8.1)\ \text{成立}\}. \tag{12.8.3}$$

固定成本函数 $c: X\times Y\to[0,+\infty)$.

问题 12.1

Kantorovich 最优传输问题 (Kantorovich's optimal transportation problem):

$$\textbf{minimize}\quad \Pi(\mu,\nu)\ni\pi\longmapsto\int_{X\times Y}c(x,y)\,d\pi(x,y). \tag{12.8.4}$$

最小值问题 (12.8.4) 早在 1942 年和 1945 年被Kantorovich[5] 研究过了. 和**问题 12.1** 相关的是 **Monge 最优传输问题 (Monge's optimal transportation problem)**.

假设 $\mathbf{T}:(X,\mathscr{A})\to(Y,\mathscr{B})$ 是可测映射. 对任意概率测度 $\mu\in\mathbf{P}(X)$ 定义 $\mathbf{T}_{\#}\mu\in\mathbf{P}(Y)$ 如下

$$\mathbf{T}_{\#}\mu(B):=\mu(\mathbf{T}^{-1}(B)),\quad B\subset\mathscr{B}. \tag{12.8.5}$$

等价地说

$$\int_X f\circ\mathbf{T}\,d\mu=\int_Y f\,d\mathbf{T}_{\#}\mu \tag{12.8.6}$$

对任意 $f\in L^1(Y,d\mathbf{T}_{\#}\mu)$ 都成立. 定义

$$\Pi^*(\mu,\nu):=\{\mathbf{T}:(X,\mathscr{A})\to(Y,\mathscr{B})|\mathbf{T}\ \text{可测且}\ \mathbf{T}_{\#}\mu=\nu\}. \tag{12.8.7}$$

问题 12.2

Monge 最优传输问题 (Monge's optimal transportation problem):

$$\textbf{minimize}\quad \Pi^*(\mu,\nu)\ni\mathbf{T}\longmapsto\int_{X\times Y}c(x,\mathbf{T}(x))\,d\mu(x). \tag{12.8.8}$$

上面两个问题的细节可参见Villani 的两本专著和Ambrosio - Gigli 合写的论文.

12.8.2 * 最优传输的充要条件

本小节的大部分内容取自下列论文:

Ambrosio, L.; Gigli, N., *A user's guide to optimal transport*, Modelling and Optimisation of Flows on Networks, LNM **2062**, 1–155, 2013.

假设

$$X=Y=\mathbb{R}^n,\quad c(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}):=\frac{1}{2}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2, \tag{12.8.9}$$

并且假设 $\mu,\nu\in\mathbf{P}(\mathbb{R}^n)$ 都仅在有限多个点上取非零值. 此时可以证明 $\pi\in\Pi(\mu,\nu)$ 当且仅当对任何置换 $\sigma\in\mathfrak{S}_N$ 都有

$$\sum_{1\le i\le N}\frac{1}{2}|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{y}_i|^2\le\sum_{1\le i\le N}\frac{1}{2}|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{y}_{\sigma(i)}|^2, \tag{12.8.10}$$

[5]Leonid Kantorovich, 1912 年 1 月 19 日 - 1986 年 4 月 7 日, 前苏联数学家和经济学家, 1975 年因资源最佳分配理论和Yjalling Koopmans 一起获得 Nobel 经济学奖.

其中 $\{(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{y}_i)\}_{1\le i\le N}\subset \mathrm{supp}(\gamma)$. 把不等式 (12.8.10) 展开得到

$$\sum_{1\le i\le N}\langle \boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{y}_i\rangle \ge \sum_{1\le i\le N}\langle \boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{y}_{\sigma(i)}\rangle,\quad \sigma\in\mathfrak{S}_N. \tag{12.8.11}$$

这就是所谓的支撑集 $\mathrm{supp}(\pi)$ 是**循环单调的 (cyclically monotone)**.

定义 12.9

假设 X,Y 是任意给定集合, 而 $c:X\times Y\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 是任意给定的映射.

(1) 称子集 $\Gamma\subset X\times Y$ 是 **c-循环单调的 (c-cyclically monotone)** 如果对任意 $\{(x_i,y_i)\}_{1\le i\le N}\subset\Gamma$ 和任意置换 $\sigma\in\mathfrak{S}_N$ 都有

$$\sum_{1\le i\le N}c(x_i,y_i)\le\sum_{1\le i\le N}c(x_i,y_{\sigma(i)}) \tag{12.8.12}$$

成立.

(2) 映射 $\psi:Y\to\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ 的 **c_+- 变换 (c_+-transform)** $\psi^{c+}:X\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ 定义为

$$\psi^{c+}(x):=\inf_{y\in Y}[c(x,y)-\psi(y)], \tag{12.8.13}$$

而它的 **c_--变换 (c_--transform)** $\psi^{c-}:X\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 定义为

$$\psi^{c-}(x):=\sup_{y\in Y}[-c(x,y)-\psi(y)]. \tag{12.8.14}$$

同理对函数 $\varphi:X\to\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ 定义它的 $c_\pm$-变换 $\varphi^{c\pm}:Y\to\mathbb{R}\cup\{\mp\infty\}$ 为

$$\varphi^{c+}(y):=\inf_{x\in X}[c(x,y)-\varphi(x)],\quad \varphi^{c-}(y):=\sup_{x\in X}[-c(x,y)-\varphi(x)].$$

(3) 称函数 $\varphi:X\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ 是 **c-凹的 (c-concave)** 如果存在函数 $\psi:Y\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ 满足 $\varphi=\psi^{c+}$. 称函数 $\psi:Y\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ 是 c- 凹的如果存在函数 $\varphi:Y\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ 满足 $\psi=\varphi^{c+}$.

同样地, 称函数 $\varphi:X\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 是 **c-凸的 (c-convex)** 如果存在函数 $\psi:Y\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 满足 $\varphi=\psi^{c-}$. 称函数 $\psi:Y\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 是 c- 凸的如果存在函数 $\varphi:Y\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 满足 $\psi=\varphi^{c-}$.

(4) c-凹函数 $\varphi:X\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ 的 **c-上微分 (c-superdifferential)** 定义为

$$\partial^{c+}\varphi:=\{(x,y)\in X\times Y:\varphi(x)+\varphi^{c+}(y)=c(x,y)\}. \tag{12.8.15}$$

c-凸函数 $\varphi:X\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 的 **c-下微分 (c-subdifferential)** 定义为

$$\partial^{c-}\varphi:=\{(x,y)\in X\times Y:\varphi(x)+\varphi^{c-}(y)=-c(x,y)\}. \tag{12.8.16}$$

同样地, c-凹函数 $\psi:Y\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ 的 **c-上微分 (c-superdifferential)** 定义为

$$\partial^{c+}\psi:=\{(x,y)\in X\times Y:\psi^{c+}(x)+\psi(y)=c(x,y)\}. \tag{12.8.17}$$

c-凸函数 $\psi:Y\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 的 **c-下微分 (c-subdifferential)** 定义为

$$\partial^{c-}\psi:=\{(x,y)\in X\times Y:\psi^{c-}(x)+\psi(y)=c(x,y)\}. \tag{12.8.18}$$

♣

这是我们可以来陈述如下重要的定理.

定理 12.20. (最优传输的基本定理)

假设 $(X, \mathscr{A}, d_X)$ 和 $(Y, \mathscr{B}, d_B)$ 是 Polish 空间, 即完备可分度量空间, $c: X \times Y \to \mathbb{R}$ 是连续函数且有下界. 假设 $\mu \in \mathbf{P}(X)$ 和 $\nu \in \mathbf{P}(Y)$ 满足不等式

$$c(x, y) \leq a(x) + b(y),$$

其中 $a \in L^1(X, d\mu)$ 和 $b \in L^1(Y, d\nu)$. 令 $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$, 则下面等价:

(1) π 是最优的, 即 π 是 (12.8.4) 的极值点,

(2) $\operatorname{supp}(\pi)$ 是 c-循环单调的,

(3) 存在 c-凹函数 $\varphi: X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 满足 $\max\{\varphi, 0\} \in L^1(X, d\mu)$ 和 $\operatorname{supp}(\pi) \subset \partial^{c+}\varphi$.

♡

12.9 习题

12.10 参考文献

1. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis I*, Translated from the 1988 German original by Gary Brookfield, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. xiv+426 pp. ISBN: 3-7643-7153-6
2. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis II*, Translated from the 1999 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. xii+400 pp. ISBN: 978-3-7643-7472-3; 3-7643-7472-3
3. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis III*, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. xii+468 pp. ISBN: 978-3-7643-7479-2; 3-7643-7479-2
4. Ambrosio, Luigi; Gigli, Nicola. *A user's guide to optimal transport*, Modelling and optimisation of flows on networks, 1-155, Lecture Notes in Math., **2062**, Fond. CIME/CIME Found. Subser., Springer, Heidelberg, 2013.
5. Munkres, James R. *Topology*, Second edition, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000. xvi+537 pp. ISBN: 0-13-181629-2
6. Villani, Cédric. *Topics in optimal transportation*, Graduate Studies in Mathematics, **58**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. xvi+370 pp. ISBN: 0-8218-3312-X
7. Villani, Cédric. *Optimal transport. Old and new*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **338**, Springer-Berlag, Berlin, 2009. xxii+973 pp. ISBN: 978-3-540-71049-3
8. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis I*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+574 pp. ISBN: 3-540-40386-8
9. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis II*, Translated from the 2002 fourth Russian

edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xvi+681 pp. ISBN: 3-540-40633-6

10. 常庚哲, 史济怀 编: **数学分析教程** (上、下册), 高等教育出版社, 2003.
11. 陈天权 编著: **数学分析讲义** (第一、二、三册), 北京大学出版社, 2009.
12. 邓建平 编: **微积分 I 和 II**, 科学出版社, 2019.
13. Duhham, William 著 (李伯民, 汪军, 张怀勇 译): **微积分的历程** – 从牛顿到勒贝格, 人民邮电出版社, 2013.
14. 吉米多维奇 著 (李荣[illegible], 李植 译): **数学分析习题集** (根据 2010 年俄文版翻译), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.
15. Kline, Morris 著 (张理京, 张炎热, 江泽涵等 译): **古今数学思想** (第一、二、三册), 上海科学技术出版社, 2014.
16. 李傅山, 王培合 编著: **数学分析习题课讲义** (1、2、3), 北京大学出版社, 2018.
17. 李逸 编著: **数学分析讲义**, 上海交通大学数学分析课讲义 (未出版), 2016.
18. 林源渠, 方企勤 编: **数学分析解题指南**, 北京大学出版社, 2003.
19. 梅加强 编著: **数学分析**, 高等教育出版社, 2015.
20. 裴礼文 编著: **数学分析中的典型问题与方法** (第二版), 高等教育出版社, 2015.
21. 汪林 著: **数学分析中的问题和反例**, 现代数学基础 **56**, 高等教育出版社, 2015.
22. Weir, D. Maurice; Hass, R. Joel; Giordano, R. Frank. *Thomas' calculus*, Eleventh Edition, (影印版, 上、下册), 高等教育出版社, 2016.
23. 徐森林, 薛春华 编著: **数学分析**, 清华出版社, 2005.
24. 杨小远, 孙玉泉, 薛玉梅, 杨卓琴 编著: **工科数学分析教程** (上、下册), 科学出版社, 2011.
25. 张福保, 薛金美, 潮小李 主编: **数学分析讲义**, 科学出版社, 2019.
26. 张筑生 编著: **数学分析新讲** (第一、二、三册), 北京大学出版社, 1990.
27. 周民强 编著: **数学分析习题演练** (第一、二、三册), 科学出版社, 2018.
28. 朱尧辰 编著: **数学分析例选通过范例学技巧**, 哈尔滨工业大学出版社, 2013.

第十三章 多变量积分理论

一个幽灵，共产主义的幽灵，在欧洲游荡. 现在是共产党人向全世界公开说明自己的观点、自己的目的、自己的意图并且拿党自己的宣言来反驳关于共产主义幽灵的神话的时候了. — 《共产党宣言》，马克思和恩格斯著.

13.1 重积分

我们首先从一个简单例子来感受下重积分的定义. 假设曲顶柱体在 xoy 平面上的投影是矩形 $D=[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2$, 而其"曲顶"为一曲面 $z=f(x,y),(x,y)\in D$. 为了几何直观性, 进一步假设 f 为 D 上的非负连续函数. 仿照定积分的做法,

$$\text{分割}\longrightarrow\text{取点}\longrightarrow\text{求和}\longrightarrow\text{取极限}$$

我们来计算以 D 为底 $z=f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积.

- **分割:** 将 D 分成若干小矩形, 即在 $[a,b]$ 中任取分割

$$T_1:\quad a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

同时在 $[c,d]$ 中任取分割

$$T_2:\quad c=y_0<y_1<\cdots<y_m=b,$$

由此得到 $n\times m$ 个小矩形

$$D_{ij}:=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j],\quad 1\le i\le n,\ 1\le j\le m.$$

称 $\boldsymbol{T}:=(T_1,T_2)$ 为 D 的一个**分割**.

- **取点:** 任取 $(\xi_{ij},\eta_{ij})\in D_{ij}$. 令 $\boldsymbol{\xi}:=(\xi_{ij})_{i,j}$ 和 $\boldsymbol{\eta}:=(\eta_{ij})_{i,j}$.
- **求和:** 将每个以 D_{ij} 为底 $f(\xi_{ij},\eta_{ij})$ 为高的长方体的体积求和得到

$$V(f,\boldsymbol{T},(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})):=\sum_{1\le i\le n,\ 1\le j\le m}f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta x_i\Delta y_j.$$

- **取极限:** 让分割的模 $||\boldsymbol{T}||:=\max_{1\le i\le n,1\le j\le m}d_{ij}$ 变得越来越细, 这里

$$d_{ij}:=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_j-y_{j-1})^2},$$

得到极限

$$V:=\lim_{||T||\to 0}V(f,\boldsymbol{T},(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})).$$

这个极限若存在则就是所求的体积, 并称为区域 D 上的二重积分且记作

$$V=\iint_D f(x,y)\,dxdy.$$

13.1.1 可求面积区域

上述二重积分定义是基于被积区域是"好的区域"矩形 $[a,b]\times[c,d]$. 一个很自然的问题是如何定义一般区域上的二重积分, 当然一个最基本的想法是用有限个或可数个矩

形区域来描述一般区域.

平面上一般集合的“面积”概念，被十九世纪许多数学家所研究过，比如Du Bois-Reymond 在《Die allgemeine funktionentheorie》(1882), Axel Harnack 在《Die elemente der differential- und integralrechung》(1881), Otto Stolz (1884), Cantor (1884), Peano 在《Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale》(1887) 等.

Jordan 为了弄清楚平面区域上二重积分的理论, 在 1892 年引入了 Jordan 内面积和 Jordan 外面积的概念.

假设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是一有界子集, 并取一闭矩形 $\square = [a,b] \times [c,d]$ 包含 D. 仿照之前的做法考虑分割 $\boldsymbol{T}$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b,$$

得到 $n \times m$ 个小矩形

$$\square_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad 1 \le i \le n, \ 1 \le j \le m.$$

这些小矩形可分成 3 类:

(1) $\square_{ij}^{\circ}$: 完全包含在 D 内;

(2) $\square_{ij}^{\vee}$: 完全落在 D 外;

(3) $\square_{ij}^{\cap}$: 包含 ∂D.

定义

$$s(\boldsymbol{T}, D) := \sum_{\square_{ij}^{\circ}} |\square_{ij}^{\circ}|, \quad S(\boldsymbol{T}, D) := s(\boldsymbol{T}, D) + \sum_{\square_{ij}^{\cap}} |\square_{ij}^{\cap}|. \tag{13.1.1}$$

根据定义得到如下不等式

$$0 < s(\boldsymbol{T}, D) \le S(\boldsymbol{T}, D) \le |\square| = (d-c)(b-a). \tag{13.1.2}$$

定义

$$\mathfrak{T} := \{\square \text{ 的所有分割 } \boldsymbol{T}\}.$$

在 $\mathfrak{T}$ 上引入如下的偏序关系:

$$\boldsymbol{T} \prec \boldsymbol{T}' \iff \boldsymbol{T}' \text{ 是 } \boldsymbol{T} \text{ 的加细},$$

这里称 $\boldsymbol{T}'$ 是 $\boldsymbol{T}$ 的**加细 (refinement)** 如果 $\boldsymbol{T}'$ 是在 $\boldsymbol{T}$ 的基础上分别在 $[a,b]$ 和 $[c,d]$ 中增加有限个分点. 和定积分的 Darboux 上下和一样 (参见第一卷 (5.3.15) 和 (5.3.16)), 得到

$$\boldsymbol{T} \prec \boldsymbol{T}' \implies s(\boldsymbol{T}, D) \le s(\boldsymbol{T}', D) \quad \text{和} \quad S(\boldsymbol{T}, D) \le S(\boldsymbol{T}, D).$$

进一步有 (参见第一卷 (5.3.14))

$$s(\boldsymbol{T}, D) \le S(\boldsymbol{T}', D), \quad \text{任意 } \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}' \in \mathfrak{T}.$$

事实上, 根据 $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}' \le \boldsymbol{T} \cup \boldsymbol{T}'$ 得到

$$s(\boldsymbol{T}, D) \le s(\boldsymbol{T} \cup \boldsymbol{T}', D) \le S(\boldsymbol{T} \cup \boldsymbol{T}', D) \le S(\boldsymbol{T}', D).$$

根据确界原理得到

$$\mathfrak{m}_*(D) := \sup_{\boldsymbol{T}\in\mathfrak{T}} s(\boldsymbol{T}, D), \quad \mathfrak{m}^*(D) := \inf_{\boldsymbol{T}\in\mathfrak{T}} S(\boldsymbol{T}, D) \tag{13.1.3}$$

都存在. 注意到

$$D \text{ 是矩形} \implies \mathfrak{m}_*(D) = \mathfrak{m}^*(D) = |D|.$$

从 (13.1.3) 推出

$$0 \le \mathfrak{m}_*(D) \le \mathfrak{m}^*(D) \tag{13.1.4}$$

且 $\mathfrak{m}_*(D)$ 和 $\mathfrak{m}^*(D)$ 均与 $\square$ 的选取无关 (作为练习, 请自证).

定义 13.1. (可求面积集)

假设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是有界子集. 如果 $\mathfrak{m}_*(D) = \mathfrak{m}^*(D)$, 则称该公共值为 D 的 **Jordan 面积 (Jordan area)** 并记作 $\mathfrak{m}(D)$ 或 $|D|$. 此时称 D 是**可求面积的 (rectifiable)**. 若 $\mathfrak{m}(D) = 0$, 则称 D 是**零面积 (area-zero)**. ♣

参见**定理 5.6**, 类似的可证

$$D \text{ 是可求面积的} \iff \left(\begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0\, \exists\, U \text{ 的分割 } \boldsymbol{T} \text{ 满足} \\ S(\boldsymbol{T}, D) - s(\boldsymbol{T}, D) = S(\boldsymbol{T}, \partial D) < \epsilon \end{array} \right). \tag{13.1.5}$$

定理 13.1

有界点集 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是可求面积的 $\iff \partial D$ 是零面积的. ♡

并不是每个有界点集的边界是零面积的, 比如考察有界点集

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le D(x)\}$$

这里 $D(x)$ 是 Dirichlet 函数, 此时 $\partial S = [0, 1] \times [0, 1]$ 面积为 1.

另一方面, 如果有界点集 D 可写成两个内部互不相交的可求面积的有界点集 D_1 和 D_2 的并, 则

$$|D| = |D_1| + |D_2|. \tag{13.1.6}$$

命题 13.1

假设函数 $y = f(x)$ 在 $x \in [a, b]$ 上是非负可积. 则它与直线 $x = a$, $x = b$ 和 $y = 0$ 所围成的有界区域 D 是可求面积的且

$$|D| = \int_a^b f(x)\,dx.$$

♡

证: 因为闭区间上的可积函数必有界, 因此区域 D 是有界的. 假设 T 是闭区间 $[a, b]$ 的任意分割

$$T:\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

并记 $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$. 则得到矩形 $\square := [a, b] \times [0, M]$ 包含区域 D. 设 m_i 和 M_i 分

别是函数 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的上确界和下确界, 从而得到 $[0, M]$ 的一个分割

$$T': \ 0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = M,$$

这里 $y_1, \cdots, y_{m-1}$ 是将所有 m_i, M_i 按从大到小排列所得到的数列. 对分割 $\boldsymbol{T} = (T, T')$ 得到

$$\begin{aligned} s(\boldsymbol{T}, D) &= \sum_{1 \le i \le n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \underline{S}(f, T), \\ S(\boldsymbol{T}, D) &= \sum_{1 \le i \le n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \overline{S}(f, T). \end{aligned}$$

另一方面

$$s(\boldsymbol{T}, D) \le \mathfrak{m}_*(D) \le \mathfrak{m}^*(D) \le S(\boldsymbol{T}, D).$$

参见**定理 5.6**, 得到

$$f \in R([a, b]) \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{m}_*(D) = \mathfrak{m}^*(D) = |D| = \int_a^b f(x)\, dx$$

即 D 是可求面积的. □

我们可直接对**性质 13.1** 中的有界区域 D 证明 ∂D 是零面积的, 从而**定理 13.1** 对 D 成立. 首先注意到, $L := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x),\ a \le x \le b\}$ 和

$$\partial D = L \cup ([a, b] \times \{0\}) \cup (\{a\} \times [0, M]) \cup (\{b\} \times [0, M]) =: L \cup L_0 \cup L_a \cup L_b.$$

对 $L_0 = [a, b] \times \{0\}$, 矩形全体 $\{[x_{i-1}, x_i] \times [0, \epsilon]\}_{1 \le i \le n}$ 构成其一个分割 $\boldsymbol{T}_0$ 且包含 L_0, 同时

$$S(\boldsymbol{T}_0, L_0) = \sum_{1 \le i \le n} \epsilon \Delta x_i = \epsilon(b - a) \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{m}^*(L_0) = 0.$$

类似得可证明

$$\mathfrak{m}^*(L_a) = \mathfrak{m}^*(L_b) = 0.$$

对 L, 矩形全体 $\{[x_{i-1}, x_i] \times [m_i, M_i]\}_{1 \le i \le n}$ 构成其一个分割 $\boldsymbol{T}_L$ 且包含 $\boldsymbol{L}$, 同时

$$S(\boldsymbol{T}_L, L) = \sum_{1 \le i \le n} (M_i - m_i) \Delta x_i \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{m}^*(L) = 0.$$

因此 $|\partial D| = 0$.

13.1.2 二重积分

如果二元函数 $f(x, y)$ 的定义域 D 是可求面积的, 则函数 $f(x, y)$ 关于 D 的积分, 即二重积分, 和定积分的定义是几乎一样的.

定义 13.2. (二重积分)

假设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是可求面积的有界点集, $z = f(x, y)$ 在 D 上是有界的. 任取分割 $\boldsymbol{T}$ 把 D 分成 n 个可求面积的子区域 $D_1, \cdots, D_n$, 从而它们的内部是互不相交的, 并记

$$||\boldsymbol{T}|| := \max_{1 \le i \le n} (\mathrm{diam}(D_i)). \tag{13.1.7}$$

在每个子区域 D_i 上任取点 (ξ_i, η_i), 并求和

$$\sigma(f, \boldsymbol{T}, (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})) := \sum_{1\le i\le n} f(\xi_i, \eta_i)|D_i|. \tag{13.1.8}$$

若 $||\boldsymbol{T}|| \to 0$ 时 $\sigma(f, \boldsymbol{T}, (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}))$ 的极限存在且和分割 $\boldsymbol{T}$ 及点 (ξ_i, η_i) 的选取无关, 则称函数 $f(x, y)$ 在 D 上**可积 (integrable)**, 并称该极限为函数 $f(x, y)$ 在 D 上的**二重积分 (double integral)**, 同时记作

$$\iint_D f\,d\sigma \equiv \iint_D f(x, y)\,dxdy := \lim_{||\boldsymbol{T}||\to 0} \sum_{1\le i\le n} \sigma(f, \boldsymbol{T}, (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})). \tag{13.1.9}$$

我们称 $f(x, y)$ 是**可积函数 (integrable function)**, D 是**积分区域 (domain of integration)**, x, y 是**积分变量 (variables of integrations)**, 且 $d\sigma = dxdy$ 是**面积元 (area element)**. 把 D 上所有的可积函数做成一个集合 $R(D)$. ♣

和定积分一样引入 **Darboux 上和及 Darboux 下和**,

$$\underline{S}(f, \boldsymbol{T}) := \sum_{1\le i\le n} m_i|D_i|, \quad \overline{S}(f, \boldsymbol{T}) := \sum_{1\le i\le n} M_i|D_i|, \tag{13.1.10}$$

这里 M_i 和 m_i 分别是 $f(x, y)$ 的上确界和下确界.

命题 13.2

函数 $f(x, y)$ 在可求面积的有界子集 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上可积的 $\iff$

$$\lim_{||\boldsymbol{T}||\to 0} \left[\overline{S}(f, \boldsymbol{T}) - \underline{S}(f, \boldsymbol{T})\right] = 0, \tag{13.1.11}$$

即

$$\lim_{||\boldsymbol{T}||\to 0} \sum_{1\le i\le n} \omega(f, D_i)|D_i| = 0, \tag{13.1.12}$$

这里 $\omega(f, D_i) = M_i - m_i$ 是 $f(x, y)$ 在 D_i 上的**振幅**. 此时

$$\lim_{||\boldsymbol{T}||\to 0} \underline{S}(f, \boldsymbol{T}) = \lim_{||\boldsymbol{T}||\to 0} \overline{S}(f, \boldsymbol{T}) = \iint_D f(x, y)\,dxdy. \tag{13.1.13}$$

♡

证: 参见定义 5.8 (9). □

定积分性质告诉我们 $f \in R([a, b])$ 则 f 必有界. 而对定义在有界点集 D 上的二元函数 $f(x, y)$, 如果 D 就是矩形, 则相同的结论也成立; 但对一般的有界点集就不一定成立了.

定理 13.2

假设 D 是可求面积的有界闭区域. 则

$$f \in C(D) \quad \Longrightarrow \quad f \in R(D). \tag{13.1.14}$$

这里 $C(D)$ 是表示 D 上连续函数构成的集合.

更一般的结论是, 如果定义在 D 上的有界函数 $f(x, y)$ 它的不连续点仅在有限个零面积的曲线上, 则 $f(x, y)$ 在 D 上是可积的. ♡

证: 根据定义区域 D 是有界闭集, 故必是 $\mathbb{R}^2$ 中的紧集. 从而推出连续函数 $f(x, y)$ 在

D 上是有界的且一致连续的. 对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 满足

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D \text{ 且 } |(x_1, y_1) - (x_2, y_2)| < \delta \implies |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \epsilon.$$

任取 D 的分割 $\boldsymbol{T}$: $D_1, \cdots, D_n$. 当 $||\boldsymbol{T}|| < \delta$ 时, $\omega(f, D_i) < \epsilon$ 从而导致

$$\sum_{1 \le i \le n} \omega(f, D_i)|D_i| < \epsilon \sum_{1 \le i \le n} |D_i| = \epsilon|D|.$$

因此 $f \in R(D)$. □

例 13.1

(1) 用直线网 $x = i/n, y = j/n, 1 \le i, j \le n-1$ 分割正方形 $D = [0,1] \times [0,1]$ 并由此计算二重积分

$$\iint_D xy\,dxdy.$$

解: 根据题意得到分割 $\boldsymbol{T}_0$. 先取 $(\xi_i^0, \eta_j^0) = (i/n, j/n)$ 得到

$$\sigma(f, \boldsymbol{T}_0, (\boldsymbol{\xi}^0, \boldsymbol{\eta}^0)) = \sum_{1 \le i \le n, 1 \le j \le n} \frac{ij}{n^4} = \frac{(n-1)^2}{4n^2} \to \frac{1}{4}.$$

再取任意点 $(\xi_i, \eta_j) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ 得到

$$\begin{aligned}
\left|\sigma(f, \boldsymbol{T}, (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})) - \sigma(f, \boldsymbol{t}_0, (\boldsymbol{\xi}^0, \boldsymbol{\eta}^0))\right| &\le \sum_{1 \le i,j \le n} \left|\xi_i \eta_j - \frac{ij}{n^2}\right| \frac{1}{n^2} \\
&= \sum_{1 \le i,j \le n} \frac{1}{n^2} \left|\left[\xi_i \left(\eta_j - \frac{j}{n}\right) + \left(\xi_i - \frac{i}{n}\right) \frac{j}{n}\right]\right| \\
&\le \sum_{1 \le i,j \le n} \frac{1}{n^2} \left(\frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{j}{n}\right) = \frac{n-1}{n^2} \le \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

最后任取 D 的分割 $\boldsymbol{T}$ 使得当其模很细时满足 $\boldsymbol{T}_0 \le \boldsymbol{T}$. 从而

$$s(\boldsymbol{T}_0, D) \le s(\boldsymbol{T}, D) \le S(\boldsymbol{T}, D) \le S(\boldsymbol{T}_0, D).$$

因此

$$\iint_D xy\,dxdy = \lim_{n \to \infty} \frac{(n-1)^2}{4n^2} = \frac{1}{4}. \quad \square$$

(2) 函数

$$f(x, y) := \begin{cases} 1, & (x, y) \in [0,1] \times [0,1] \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}), \\ 0, & (x, y) \in [0,1] \times [0,1] \setminus (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}). \end{cases}$$

在 $[0,1] \times [0,1]$ 上是不可积的.

13.1.3 多重积分

为了定义三重积分和 n 重积分, 我们首先把可求面积点集和零面积点集推广到 n 维情形. 回顾 $\mathbb{R}^n$ 中的 n 维闭矩形为

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] := \prod_{1 \le i \le n} [a^i, b^i] = [a^1, b^1] \times \cdots \times [a^n, b^n].$$

定义 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ 的 n 维体积为

$$||[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]|| := \prod_{1\le i\le n}\left|[a^i,b^i]\right| = \prod_{1\le i\le n}(b^i-a^i).$$

对任给的有界点集 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 可类似地定义 $\mathfrak{m}_*(\Omega)$ 和 $\mathfrak{m}^*(\Omega)$. 我们称 Ω 是**可测的 (measurable)** 如果 $\mathfrak{m}_*(\Omega)=\mathfrak{m}^*(\Omega)$. 此时定义 Ω 的**测度 (measure)** 为

$$|\Omega|\equiv\mathfrak{m}(\Omega):=\mathfrak{m}^*(\Omega)=\mathfrak{m}_*(\Omega).$$

当 $n=3$ 时, 称 $|\Omega|=\mathfrak{m}(\Omega)$ 为 Ω 的**体积 (volume)**. 如果 $|\Omega|=0$ 则称 Ω 是**零测度的 (zero measurable)**. 同样可以证明

- $\mathbb{R}^n$ 中的光滑曲面是零测度.
- 假设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ $(n\ge 3)$ 是有界区域且其边界是由有限个光滑闭曲面构成, 则 Ω 是可测的当且仅当 $\partial\Omega$ 是零测度的.

定义 13.3. (n 重积分)

假设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是可测的闭区域且 $f(\boldsymbol{x})$ 是其上的有界函数. 任取分割 $\boldsymbol{T}$ 把 Ω 分成 m 个可测的子区域 $\Omega_1,\cdots,\Omega_m$, 从而它们的内部互不相交), 并记

$$||\boldsymbol{T}|| := \max_{1\le i\le m}(\operatorname{diam}(\Omega_i)).$$

在每个子区域 Ω_i 上任取点 $\boldsymbol{\xi}_i$, 并求和

$$V(f,\boldsymbol{T},\boldsymbol{\xi}) := \sum_{1\le i\le m} f(\boldsymbol{\xi}_i)|\Omega_i|.$$

若 $||\boldsymbol{T}||\to 0$ 时 $\sigma(f,\boldsymbol{T},\boldsymbol{\xi})$ 的极限存在且和分割 $\boldsymbol{T}$ 及点 $\boldsymbol{\xi}_i$ 的选取无关, 则称函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上**可积 (integrable)**, 并称该极限为函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上的$\boldsymbol{n}$ **重积分 (n-multiple integral)**,

$$\int_\Omega f\,dV = \int_\Omega f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int\cdots\int_\Omega f(x^1,\cdots,x^n)\,dx^1\cdots dx^n. \tag{13.1.15}$$

我们称 $f(\boldsymbol{x})$ 是**可积函数 (integrable function)**, Ω 是**积分区域 (domain of integration)**, $\boldsymbol{x}$ 是**积分变量 (variables of integration)**, 且 $dV=d\boldsymbol{x}$ 是**体积元 (volume element)**. 把 D 上所有的可积函数做成一个集合[a] $R(\Omega)$.

[a] 按照我们关于可积函数的定义, $f\in R(\Omega)$ 已经自动地蕴含了 f 是有界函数.

经常用到的是三重积分

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz.$$

13.1.4 重积分的基本性质

定积分的很多性质可平行地推广到多重积分上来.

命题 13.3

假设 Ω 是可测的闭区域.

(1) $f\in C(\Omega)\Longrightarrow f\in R(\Omega)$.

(2) **(被积函数可加性)** $f,g\in R(\Omega)\Longrightarrow$ 对任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 有 $\alpha f+\beta g\in R(\Omega)$ 且

$$\int_\Omega(\alpha f+\beta g)dV=\alpha\int_\Omega f\,dV+\beta\int_\Omega g\,dV.$$

(3) **(被积区域可加性)** 假设 Ω 可写成两个内部互不相交的子区域 Ω_1 和 Ω_2 的并，则 $f\in R(\Omega)\Longleftrightarrow f\in R(\Omega_1)\cap R(\Omega_2)$. 此时

$$\int_\Omega f\,dV=\int_{\Omega_1}f\,dV+\int_{\Omega_2}f\,dV.$$

(4) 特别的有

$$|\Omega|=\int_\Omega dV.$$

(5) **(保序性)** $f,g\in R(\Omega)$ 且 $f\le g\Longrightarrow$ 我们有

$$\int_\Omega f\,dV\le\int_\Omega g\,dV.$$

进一步得到，若 $f,g\in C(\Omega)$ 且满足 $f\le g$ 但 f 和 g 不恒相等，则

$$\int_\Omega f\,dV<\int_\Omega g\,dV.$$

作为一个直接推论得到，$f\in R(\Omega)\Longrightarrow$

$$\left(\inf_\Omega f\right)|\Omega|\le\int_\Omega f\,dV\le\left(\sup_\Omega f\right)|\Omega|.$$

(6) **(绝对可积性)** $f\in R(\Omega)\Longrightarrow|f|\in R(\Omega)$ 且

$$\left|\int_\Omega f\,dV\right|\le\int_\Omega|f|\,dV.$$

(7) **(乘积可积性)** $f,g\in R(\Omega)\Longrightarrow fg\in R(\Omega)$.

(8) **(积分中值定理)** $f,g\in R(\Omega)$ 且 g 在 Ω 上不变号 $\Longrightarrow$ 存在 $\mu\in[\inf_\Omega f,\sup_\Omega f]$ 满足

$$\int_\Omega fg\,dV=\mu\int_\Omega g\,dV.$$

如果进一步 $f\in C(\Omega)$, 则可取 $\mu=f(\boldsymbol{\xi}),\boldsymbol{\xi}\in\Omega$.

(9) **(绝对连续性)** $f\in R(\Omega)\Longrightarrow$ 对任意可测集 $\Lambda\subset\Omega$ 只要 $|\Lambda|\to0$ 就有

$$\int_\Lambda f\,dV\longmapsto0.$$

♡

证: 只给出 (9) 的证明. 根据可积定义有 $|f(\boldsymbol{x})|\le M$, 其中 M 是某正数. 故

$$\left|\int_A f\,dV\right|\le M|A|\to0.\quad\square$$

例 13.2

(1) 证明不等式

$$1.96<\iint_{|x|+|y|\le10}\frac{dxdy}{100+\cos^2x+\cos^2y}\le2.$$

解: 因为 $100\le100+\cos^2x+\cos^2y\le102$, 所以得到

$$\frac{100}{51}=\frac{200}{102}\le\iint_{|x|+|y|\le10}\frac{dxdy}{100+\cos^2x+\cos^2y}\le\frac{200}{100}=2.\quad\square$$

(2) 证明定义在 $[0,1]\times[0,1]$ 上的如下二元函数是不可积的:

$$f(x,y):=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 2y, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

证: 当 x 为无理数且 $y\neq\frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x,y)$ 在 $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$ 处是不连续的, 因此函数 $f(x,y)$ 的不连续点集的测度是 1, 故不可积.

13.2 重积分的 Fubini 定理

对 n 重积分可以用**累次积分 (iterated integral)** 来计算, 即 **Fubini 定理**[1]. 我们首先来讨论矩形区域上 n 重积分的计算.

13.2.1 矩形区域上的 Fubini 定理

假设 $z=f(x,y)$ 是闭矩形 $D=[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2$ 上的非负连续函数 (从而 f 在 D 上有界). 此时以 D 为底而以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积

$$V=\iint_D f(x,y)\,dxdy.$$

任取 $x\in[a,b]$, 用过 $(x,0,0)$ 且和 yz 平面平行的平面去截曲顶柱体得到曲边梯形. 它的面积是

$$A(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy.$$

从而得到

$$V=\int_a^b A(x)\,dx=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx=:\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy.$$

称为先对 y 再对 x 的**累次积分**.

上述公式对一般的可积函数也成立.

定理 13.3. (Fubini 定理)

(1) 假设二元函数 $f(x,y)$ 在闭矩形 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上可积, 且对任意固定的 $x\in[a,b]$, 一元函数 $f(x,\cdot)$ 在 $[c,d]$ 上可积. 若记

$$F(x):=\int_c^d f(x,y)\,dy,\quad x\in[a,b],$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且有如下公式

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_a^b F(x)\,dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy. \tag{13.2.1}$$

[1] Guido Fubini, 1879 年 1 月 19 日 - 1943 年 6 月 6 日, 今意大利威尼斯人, 意大利数学家. 因 Fubini 定理和 Fubini-Study 度量而出名. 他于 1896 年进入 Scuola Normale Superiore di Pisa 跟随Ulisse Dini 和Luigi Bianchi 学习微分几何. 1939 年, 因Benito Mussolini 的反犹政策, 身为犹太人的Fubini 应邀到 Princeton University 任教; 4 年后在纽约逝世. 浙江大学数学系教授白正国在 1942 年解决了著名的 Fibini 问题: 除了一族渐近曲线属于线形丛的曲面以外, 是否还有非直纹面的曲面, 它的一族渐近曲线是互相射影等价的.

(2) 假设二元函数 $f(x,y)$ 在闭矩形 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上可积, 且对任意固定的 $y\in[c,d]$, 一元函数 $f(\cdot,y)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 若记

$$G(y):=\int_a^b f(x,y)\,dx,\quad y\in[c,d],$$

则 $G(y)$ 在 $[c,d]$ 上可积且有如下公式

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_c^d G(y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx. \tag{13.2.2}$$

♡

证: (2) 的证明类似, 下只证 (1). 考虑 $[a,b]$ 上的任意分割 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. 证明 (13.2.1) 等价于证明

$$\lim_{||T||\to 0}\sum_{1\le i\le n}F(\xi_i)\Delta x_i=\iint_D f(x,y)\,dxdy.$$

这里 $\xi_i\in\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, 且 $||T||=\max_{1\le i\le n}\Delta x_i$. 考虑 $[c,d]$ 上的任意分割 $T': c=y_0<y_1<\cdots<y_m=d$, 并令 $\Delta y_j:=y_j-y_{j-1}$. 这样 T 和 T' 构成了区域 $[a,b]\times[c,d]$ 上的一个分割 $\boldsymbol{T}=(T,T')$:

$$D_{ij}:=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j],\quad m_{ij}:=\inf_{D_{ij}}f,\quad M_{ij}:=\sup_{D_{ij}}f.$$

则得到

$$\sum_{1\le j\le m}m_{ij}\Delta y_j\le\sum_{1\le j\le m}\int_{y_{j-1}}^{y_j}f(\xi_i,y)\,dy=F(\xi_j)\le\sum_{1\le j\le m}M_{ij}\Delta y_j,\quad 1\le i\le n.$$

两边同乘以 Δx_i 并对 i 求和得到

$$\sum_{1\le i\le n,1\le j\le m}m_{ij}\Delta x_i\Delta y_j\le\sum_{1\le i\le n}F(\xi_i)\Delta x_i\le\sum_{1\le i\le n,1\le j\le m}M_{ij}\Delta x_i\Delta y_j.$$

根据记号 (13.1.10) 上述可以写成

$$\underline{S}(f,\boldsymbol{T})\le\sum_{1\le i\le n}F(\xi_i)\Delta x_i\le\overline{S}(f,\boldsymbol{T}).$$

利用**性质 13.2** 得到

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\lim_{||T||\to 0}\sum_{1\le i\le n}F(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b F(x)\,dx.\quad\square$$

定理 13.3 的直接推论是, 如果 $f\in R([a,b])$ 和 $g\in R([c,d])$, 则

$$\int_{[a,b]\times[c,d]}f(x)g(y)\,dxdy=\int_a^b f(x)\,dx\cdot\int_c^d g(y)\,dy.$$

定理 13.4

假设 n 元函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 n 维闭矩形 $\Omega=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=\prod_{1\le i\le n}[a^i,b^i]$ 上可积. 令 $\Omega_{(i)}:=\prod_{1\le j\ne i\le n}[a^j,b^j]$. 若积分

$$F(x^i):=\int_{\Omega_{(i)}}f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}_{(i)},\quad d\boldsymbol{x}_{(i)}:=dx^1\cdots\widehat{dx^i}\cdots dx^n=\prod_{1\le j\ne i\le n}dx^j.$$

在 $[a^i, b^i]$ 上可积, 则有

$$\int_\Omega f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_{a^i}^{b^i} F(x^i)\,dx^i = \int_{a^i}^{b^i} dx^i \int_{\Omega_{(i)}} f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}_{(i)}. \tag{13.2.3}$$

证: 证明和**定理 13.3** 类似. 考虑 $[a^i, b^i]$ 上的任意分割 $T_i : a^i = x_0^{(i)} < x_1^{(i)} < \cdots < x_m^{(i)} = b^i$. 证明 (13.2.3) 等价于证明

$$\lim_{\|T_i\|\to 0} \sum_{1\le j\le m} F(\xi_j^{(i)})\Delta x_j^{(i)} = \int_\Omega f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}.$$

这里 $\xi_j^{(i)} \in \Delta_j^{(i)} = [x_{j-1}^{(i)}, x_j^{(i)}]$, $\Delta x_j^{(i)} = x_j^{(i)} - x_{j-1}^{(i)}$, 且 $\|T_i\| = \max_{1\le j\le m} \Delta x_j^{(i)}$. 考虑 $\Omega_{(i)}$ 上的任意分割 $\boldsymbol{T}^i = (D_k^{(i)})$ 从而得到区域 Ω 上的一个分割 $\boldsymbol{T} = (T_i, \boldsymbol{T}^i)$:

$$D_{jk}^{(i)} := \Delta_j^{(i)} \times D_k^{(i)}, \quad m_{jk}^{(i)} := \inf_{D_{jk}^{(i)}} f, \quad M_{jk}^{(i)} := \sup_{D_{jk}^{(i)}} f.$$

则得到

$$\begin{aligned}\sum_k m_{jk}^{(i)}|D_k^{(i)}| &\le \sum_k \int_{D_k^{(i)}} f(x^1, \cdots, x^{i-1}, \xi_j^{(i)}, x^{i+1}, \cdots, x^n)\,d\boldsymbol{x}_{(i)} \\ &= F(\xi_j^{(i)}) \le \sum_k M_{jk}^{(i)}|D_k^{(i)}|, \quad 1 \le j \le m.\end{aligned}$$

两边同乘以 $\Delta x_j^{(i)}$ 并对 j 求和得到

$$\sum_{j,k} m_{jk}^{(i)}\Delta x_j^{(i)}|D_k^{(i)}| \le \sum_{1\le j\le m} F(\xi_j^{(i)})\Delta x_j^{(i)} \le \sum_{1\le j\le m} M_{jk}^{(i)}\Delta x_j^{(i)}|D_k^{(i)}|.$$

根据记号 (13.1.10) 上述可以写成

$$\underline{S}(f, \boldsymbol{T}) \le \sum_{1\le j\le m} F(\xi_j^{(i)})\Delta x_j^{(i)} \le \overline{S}(f, \boldsymbol{T}).$$

利用**性质 13.2** 得到

$$\int_\Omega f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \lim_{\|T\|\to 0} \sum_{1\le j\le m} F(\xi_j^{(i)})\Delta x_j^{(i)} = \int_{a^i}^{b^i} F(x^i)\,d\boldsymbol{x}_{(i)}. \quad \square$$

利用递推得到

推论 13.1

假设 n 元函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 n 维闭矩形 $\Omega = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \prod_{1\le j\le n}[a^j, b^j]$ 上连续, 则

$$\begin{aligned}\int_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]} f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} &= \int_{a^1}^{b^1} dx^1 \cdots \int_{a^{n-1}}^{b^{n-1}} dx^{n-1} \int_{a^n}^{b^n} f(x^1, \cdots, x^n)\,dx^n \\ &= \left(\prod_{1\le j\le n} \int_{a^j}^{b^j} dx^j\right) f(\boldsymbol{x}) \equiv \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} d\boldsymbol{x}\, f(\boldsymbol{x}).\end{aligned} \tag{13.2.4}$$

13.2.2 特殊型区域上的 Fubini 定理

对一般区域上的重积分我们可利用“区域降维”来计算.

I. 二重积分化为累次积分. 假设二元函数 $f(x,y)$ 在**x-型区域 (domain of x-type)** 或**I-型区域 (domain of type I)**

$$D := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \varphi(x)\le y\le\psi(x),\ a\le x\le b\right\} \tag{13.2.5}$$

上连续, 其中 $\varphi,\psi\in C([a,b])$. 令

$$c := \min_{[a,b]}\varphi,\quad d := \max_{[a,b]}\psi,\quad \square := [a,b]\times[c,d]\supset D.$$

将连续函数 $f(x,y)$ 延拓到 $\square$ 上来:

$$\widetilde{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\in\square\setminus D,\end{cases}$$

则 $\widetilde{f}$ 在 $\square$ 上可积且利用**定理 13.3** 得到

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_\square \widetilde{f}(x,y)dxdy = \int_a^b dx\int_c^d \widetilde{f}(x,y)dy.$$

对任意固定 $x\in[a,b]$ 得到

$$\begin{aligned}\int_c^d \widetilde{f}(x,y)dy &= \int_c^{\varphi(x)}\widetilde{f}(x,y)dy + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\widetilde{f}(x,y)dy + \int_{\psi(x)}^d \widetilde{f}(x,y)dy\\ &= \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\widetilde{f}(x,y)dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy.\end{aligned}$$

最后得到公式

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy. \tag{13.2.6}$$

若二元函数 $f(x,y)$ 在**y-型区域 (domain of y-type)** 或**II-型区域 (domain of type II)**

$$D := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \varphi(y)\le x\le\psi(y),\ c\le y\le d\right\} \tag{13.2.7}$$

上连续, 其中 $\varphi,\psi\in C([c,d])$, 则得到

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx. \tag{13.2.8}$$

II. 三重积分化为累次积分. 考虑区域

$$\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \varphi(x,y)\le z\le\psi(x,y),\ (x,y)\in D\right\}$$

其中 D 是区域 Ω 在 xoy 平面上的投影. 同样得到公式 (即: **先 dz 后 $dxdy$**)

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_D dxdy\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz. \tag{13.2.9}$$

类似的可得到公式:

先 dy 后 $dxdz$ 或 先 dx 后 $dydz$.

上面公式是把体积元 $dxdydz$ 拆成先 1 个微元再 2 个微元, 即 $3=1+2$. 类似地, 可以拆成 $3=2+1$, 即先 2 个微元再 1 个微元:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int_e^f dz\iint_{\Omega_z} f(x,y,z)dxdy, \tag{13.2.10}$$

其中 $[e,f]$ 是 z 的取值范围, 且对每个 z_0 区域 Ω_{z_0} 是 Ω 和平面 $z=z_0$ 的交集. 同理我们可以考虑

$$\Omega=[a,b]\times\Omega_x=[c,d]\times\Omega_y=[e,f]\times\Omega_z.$$

例 13.3

(1) 计算二重积分

$$I:=\iint_D y\,dxdy,$$

其中 D 是由直线 $x=-2, y=0, y=2$ 和曲线 $x+\sqrt{2y-y^2}=0$ 所围成的区域.

解: 计算可得

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^2 ydy\int_{-2}^{-\sqrt{2y-y^2}}dx \;=\; \int_0^2 y\left(2-\sqrt{2y-y^2}\right)dy\\
&= \int_0^2 y\left(2-\sqrt{1-(1-y)^2}\right)dy=\int_0^{-1}(1-t)(2-\sqrt{1-t^2})(-dt)\\
&= \int_{-1}^0(1-t)(2-\sqrt{1-t^2})dt=3-\int_{-1}^0\sqrt{1-t^2}dt+\int_{-1}^0 t\sqrt{1-t^2}dt\\
&= 3-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_{-1}^0\sqrt{1-t^2}d(1-t^2)=3-\frac{\pi}{4}-t^{1/2}\Big|_{-1}^0=4-\frac{\pi}{2}.\quad\square
\end{aligned}$$

(2) 计算二重积分

$$I:=\iint_D e^{\max(x^2,y^2)}dxdy,$$

其中 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\le x,y\le 1\}=[0,1]\times[0,1]$.

解: 利用对称性计算得到

$$I=2\int_{0\le x\le y\le 1}e^{y^2}dxdy=2\int_0^1 e^{y^2}dy\int_0^y dx=2\int_0^1 ye^{y^2}dy=e-1.\quad\square$$

(3) 计算二重积分

$$I=\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin y}{y}dy.$$

解: 利用交换积分顺序得到

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 dy\int_{y^2}^y\frac{\sin y}{y}dx \;=\; \int_0^1(1-y)\sin y\,dy=\int_0^1(y-1)\,d\cos y\\
&= -\int_0^1\cos y\,dy=1-\sin 1.\quad\square
\end{aligned}$$

(4) 计算三重积分

$$I:=\iiint_\Omega\frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3},\quad \Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x,y,z\ge 0,\ x+y+z\le 1\right\}.$$

解: 把 Ω 投影到 xoy 平面得到 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x,y\ge 0,\ x+y\le 1\right\}$.. 从而得到

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D dxdy\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^3} \;=\; -\frac{1}{2}\iint_D\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{(1+x+y)^2}\right]\\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{(1+x+y)^2}\right]dy
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 dx\left[\left(\frac{y}{4}+\frac{1}{1+x+y}\right)\Big|_0^{1-x}\right] = -\frac{1}{2}\int_0^1 dx\left(\frac{1-x}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{1+x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{1+x}-\frac{3}{4}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}+\ln 2-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right). \ \square$$

(5) 计算三重积分, 其中 Ω 是锥面 $z^2 = h^2(x^2+y^2)/R^2$ 和平面 $z = h$ 所围的区域:

$$I := \iiint_\Omega z^2 dxdydz,$$

解: 计算得到

$$I = \int_0^h \iint_{\Omega_z} z^2 dxdy = \int_0^h z^2 dz \iint_{\Omega_z} dxdy = \int_0^h \frac{\pi R^2}{h^2} z^4 dz = \frac{\pi R^2 h^3}{5},$$

其中 $\Omega_z = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le R^2 z^2/h^2\}$. $\square$

(6) 计算二重积分

$$I := \iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{xdxdy}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

解: 计算得到

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dy\int_0^1 \frac{xdx}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 dy\int_0^1 \frac{d(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{1+y^2}-\frac{1}{2+_y^2}\right)dy = \frac{1}{2}\left(\arctan 1-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \ \square \end{aligned}$$

(7) 计算二重积分

$$I := \int_0^1 dy\int_y^1\left(\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2}\right)dx.$$

解: 对第一个被积函数利用 Fubini 定理得到

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dy\int_y^1 \frac{e^{x^2}}{x}dx - \int_0^1 dy\int_y^1 e^{y^2}dx = \int_0^1 dx\int_0^x \frac{e^{x^2}}{x}dy - \int_0^1 e^{y^2}(1-y)dy \\ &= \int_0^1 e^{x^2}dx - \int_0^1 e^{y^2}dy + \int_0^1 e^{y^2}ydy = \frac{1}{2}e^{y^2}\Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}. \ \square \end{aligned}$$

(8) 计算三重积分

$$I := \iiint_{|x|+|y|+|z|\le 1}(|x|+|y|+|z|)dxdydz.$$

解: 根据对称性得到

$$\begin{aligned} I &= 8\iiint_{x+y+z\le 1,\ x,y,z\ge 0}(x+y+z)dxdydz \\ &= 8\iint_{x+y\le 1,\ x,y\ge 0}dxdy\int_0^{1-x-y}(x+y+z)dz \\ &= 4\iint_{x+y\le 1,\ x,y\ge 0}[1-(x+y)^2]dxdy = 2-\iint_{x+y\le 1,\ x,y\ge 0}(x+y)^2dxdy \\ &= 2-\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x+y)^2dy = 2-\int_0^1\frac{1-x^3}{3}dx \\ &= 2-\frac{1}{3}+\frac{1}{12} = \frac{7}{4}. \ \square \end{aligned}$$

(9) 证明

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^4}\iiint_{r\le n}[r]dxdydz=\pi,$$

这里 $[r]$ 表示 $r:=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的整数部分.

证: 计算可得

$$\begin{aligned}I_n &:= \frac{1}{n^4}\sum_{1\le k\le n}\iiint_{k-1<r\le k}[r]dxdydz = \frac{1}{n^4}\sum_{1\le k\le n}(k-1)\iiint_{k-1<r\le k}dxdydz\\ &= \frac{1}{n^4}\sum_{1\le k\le n}(k-1)\left[\frac{4}{3}\pi k^3-\frac{4}{3}\pi(k-1)^3\right] = \frac{4\pi}{3n^4}\left(n^4-\sum_{1\le k\le n}k^3\right).\end{aligned}$$

利用 Stone 定理可得

$$\begin{aligned}I &= \lim_{n\to+\infty}I_n\frac{4\pi}{3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^4-(n-1)^4-n^3}{n^4-(n-1)^4}\\ &= \frac{4\pi}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{4n^3-n^3}{4n^3} = \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{3}{4} = \pi. \quad\square\end{aligned}$$

13.2.3 *Stieltjes 积分

本小节引入 Stieltjes 积分使得二重积分可化某种“定积分”.

I、有界变差函数. 假设函数 $f(x)$ 定义在闭区间 $[a,b]$ 上. 对任意 $[a,b]$ 上的分割 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 考虑

$$\bigvee_T f := \sum_{0\le i\le n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|. \tag{13.2.11}$$

称 f 是**有界变差函数 (function of bounded variation)**, 记为 $f\in\mathbf{BV}([a,b])$, 如果

$$\sup_T\bigvee_T f<+\infty.$$

此时定义

$$\bigvee_a^b f := \sup_T\bigvee_T f. \tag{13.2.12}$$

如果函数 $f(x)$ 定义在区间 $[a,+\infty)$, 称 $f\in\mathbf{BV}([a,+\infty))$ 如果 $(\vee_a^b f)_{b>a}$ 是有界的. 此时定义

$$\bigvee_a^{+\infty} f := \sup_{b>a}\bigvee_a^b f. \tag{13.2.13}$$

注 13.1

(1) $C([a,b])\not\Rightarrow\mathbf{BV}([a,b])$. 考虑函数

$$f(x)=\begin{cases}x\cos\frac{\pi}{2x}, & 0<x\le 1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

显然 $f \in C([0,1])$. 取分割 T 如下

$$x_0 = 0, \quad x_i = \frac{1}{2n+1-i}, \quad 1 \le i \le 2n.$$

从而得到

$$\begin{aligned}
\bigvee_T f &= \sum_{0\le i\le 2n-1} |f(x_{i+1} - f(x_i)| \\
&= \sum_{1\le i\le 2n-1} \left| x_{i+1}\cos\frac{\pi}{2x_{i+1}} - x_i\cos\frac{\pi}{2x_i} \right| + \left|\frac{1}{2n}\cos(n\pi)\right| \\
&= \frac{1}{2n} + \sum_{1\le i\le 2n-1} \left| \frac{1}{2n-i}\cos\frac{(2n-i)\pi}{2} - \frac{1}{2n+1-i}\cos\frac{(2n+1-i)\pi}{2} \right| \\
&= \frac{1}{2n} + \sum_{1\le i\le 2n-1} \left| \frac{1}{2n-i}\cos\left(n\pi - \frac{i\pi}{2}\right) - \frac{1}{2n+1-i}\cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{i\pi}{2}\right) \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} + \sum_{1\le i\le 2n-1} \left| \frac{1}{2n-i}\cos\frac{i\pi}{2} - \frac{1}{2n+1-i}\sin\frac{i\pi}{2} \right| \\
&= \frac{1}{2n} + \sum_{1\le k\le n-1} \left| \frac{1}{2n-2k}\cos(k\pi) - \frac{1}{2n+1-2k}\sin(k\pi) \right| \\
&\quad + \sum_{1\le k\le n} \left| \frac{1}{2n-2k+1}\cos\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2n-2k+2}\sin\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) \right| \\
&= \frac{1}{2n} + \sum_{1\le k\le n-1} \frac{1}{2n-2k} + \sum_{1\le k\le n} \frac{1}{2n-2k+2}
\end{aligned}$$

故

$$\bigvee_T f = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \to +\infty.$$

因此 $f \notin \mathbf{BV}([0,1])$.

(2) $\mathbf{BV}([a,b]) \not\Rightarrow C([a,b])$. 考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

则 $f \notin C([0,1])$ 但是 $\vee_0^1 f = 1$.

(3) 如果函数 f 在 $[a,b]$ 或 $[a,+\infty)$ 上有界且单调, 则 $f \in \mathbf{BV}([a,b])$ 或 $f \in \mathbf{BV}([a,+\infty))$, 这是因为

$$\bigvee_a^b f = |f(b) - f(a)| \quad \text{或} \quad \bigvee_a^{+\infty} f = [f(+\infty) - f(a)|.$$

(4) $\mathbf{Lip}([a,b]) \Rightarrow \mathbf{BV}([a,b])$. 这里 $f \in \mathbf{Lip}([a,b])$ 是表示存在 $L > 0$ 使得 $|f(x) - f(y)| \le L|x-y|$ 对任意 $x, y \in [a,b]$ 都成立. 从而

$$\bigvee_T f = \sum_{0\le i\le n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \le \sum_{0\le i\le n-1} L|x_{i+1} - x_i| = L(b-a)$$

即 $\vee_a^b f \le L(b-a)$.

(5) 如果 f' 在 $[a,b]$ 上有界, 则根据 (4) 得到 $f \in \mathbf{BV}([a,b])$.

(6) 若对任意 $x \in [a,b]$ 有

$$f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)\,dt, \quad |\varphi| \in R([a,b]),$$

则 $f \in \mathbf{BV}([a,b])$ 且

$$\bigvee_a^b f \le \int_a^b |\varphi(t)|dt.$$

事实上,

$$\bigvee_T f = \sum_{0\le i\le n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \sum_{0\le i\le n+1} \left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(t)\,dt\right| \le \int_a^b |\varphi(t)|dt.$$

♣

定理 13.5

假设 $a, b \in \mathbb{R}$ 和 $a < b$.

(1) $\mathbf{BV}([a,b]) \subset B([a,b])$, 即 $[a,b]$ 上的有界函数构成的集合.

(2) $f, g \in \mathbf{BV}([a,b]) \Rightarrow f \pm g \in \mathbf{BV}([a,b])$.

(3) $f, g \in \mathbf{BV}([a,b])$ 且 $|g| \ge \sigma > 0 \Rightarrow f/g \in \mathbf{BV}([a,b])$.

(4) 给定 $c \in (a,b)$. 则 $f \in \mathbf{BV}([a,b]) \Leftrightarrow f \in \mathbf{BV}([a,c])$ 和 $f \in \mathbf{BV}([c,b])$. 此时

$$\bigvee_a^b f = \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f.$$

(5) $f \in \mathbf{BV}([a,b]) \Rightarrow g(x) := \vee_a^x f$ 在 $[a,b]$ 上有界且递增.

(6) $f \in \mathbf{BV}([a,b] \Leftrightarrow$ 存在 $[a,b]$ 上的有界递增函数 F 满足

$$|f(x) - f(y)| \le F(x) - F(y), \quad a \le y < x \le b.$$

(7) $f \in \mathbf{BV}([a,b]) \Leftrightarrow$ 存在 $[a,b]$ 上的有界递增函数 g 和 h 满足 $f = g - h$.

(8) $f \in \mathbf{BV}([a,b])$ 且 f 在 $x_0 \in [a,b]$ 处连续, 则 $\vee_a^x f$ 在 x_0 处连续.

(9) $f \in \mathbf{BV}([a,b]) \cap C([a,b]) \Rightarrow$ 存在 $[a,b]$ 上的连续递增函数 g 和 h 满足 $f = g - h$.

(10) $f \in \mathbf{BV}([a,b]) \cap C([a,b]) \Rightarrow$ 对 $[a,b]$ 上的任意分割 T 有

$$\bigvee_a^b f = \lim_{||T|| \to 0} \sum_{0\le i\le n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|.$$

♡

证: (1) - (3) 和 (10) 是显然的.

(4) 令 $f \in \mathbf{BV}([a,b])$ 和 $c \in (a,b)$. 考虑两个分割

$$T_y : a = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = c, \quad T_z : c = z_0 < z_1 < \cdots < z_n = b.$$

则 $T := T_y \cup T_z$ 构成了 $[a,b]$ 的分割. 从而

$$\bigvee_T f = \sum_{0\le i\le m-1} |f(y_{i+1}) - f(y_i)| + \sum_{0\le j\le n-1} |f(y_{j+1}) - f(y_j)| = \bigvee_{T_y} f + \bigvee_{T_z} f$$

和 $\vee_a^c f + \vee_c^b f \le \vee_a^b f$. 另一方面, 假设 $f \in \mathbf{BV}([a,c])$ 和 $f \in \mathbf{BV}([c,b])$. 考虑 $[a,b]$ 上的分

割 $T: a < x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. 如果 $c = x_{i_0}$ (存在 i_0) 则

$$\bigvee_T f = \sum_{0\le i\le i_0-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + \sum_{i_0\le i\le n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \le \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f.$$

如果 $c \ne x_i$, 对任意 $0 \le i \le n$, 定义 $T' := T \cup \{c\}$. 则

$$\begin{aligned}\bigvee_{T'} f &= \sum_{0\le i\le i_0-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + |f(c) - f(x_0)| + |f(x_{i_0+1}) - f(c)| \\ &+ \sum_{i_0+1\le i\le n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \le \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f.\end{aligned}$$

最后得到 $\vee_a^b f = \vee_a^c f + \vee_c^b f$.

(5) 对任意 $a \le x < y \le b$ 有 $\vee_a^y f = \vee_a^x f + \vee_x^y f$, 从而得到 $g(y) - g(x) = \vee_x^y f \ge 0$, 即 $g(x) \le \vee_a^b f < +\infty$.

(6) 若 $f \in \mathbf{BV}([a,b])$, 定义 $F(x) := \vee_a^x f$. 根据 (5), 函数 F 有界递增且

$$F(y) - F(x) = \bigvee_x^y f \ge |f(y) - f(x)|, \quad \forall\, x < y.$$

反之, 对任意 $[a,b]$ 上的分割 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ 有

$$\begin{aligned}\bigvee_T f &= \sum_{0\le i\le n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \\ &\le \sum_{0\le i\le n-1} |F(x_{i+1}) - F(x_i)| = F(b) - F(a).\end{aligned}$$

(7) 如果 $f \in \mathbf{BV}([a,b])$, 定义 $g(x) := \vee_a^x f$. 根据 (5) 函数 g 是有界递增的. 取 $h := g - f$. 对任意 $x < y$, 有

$$h(y) - h(x) = [g(y) - g(x)] - [f(y) - f(x)] \ge [g(y) - g(x)] - \bigvee_x^y f \ge 0.$$

如果 $f = g - h$, 这里 g, h 都是有界递增的, 则 $F := g + h$ 递增且

$$|f(x) - f(y)| \le [g(x) - g(y)] + [h(x) - h(y)] = F(x) - F(y), \quad a \le y < x \le b.$$

(8) 不妨假设 $a < x_0 < b$. 对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $[x_0, b]$ 上的分割 $T: x_0 < x_1 < \cdots x_n = b$:

$$\sum_{0\le i\le n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \bigvee_T f \ge \bigvee_{x_0}^b f - \epsilon \quad 且 \quad |f(x_1) - f(x_0)| < \epsilon.$$

因此得到

$$\begin{aligned}\bigvee_{x_0}^b f &< \epsilon + \sum_{0\le i\le n-1} |f(x_{i+1} - f(x_i)| \\ &< 2\epsilon + \sum_{1\le i\le n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \le 2\epsilon + \bigvee_{x_1}^b f\end{aligned}$$

根据函数 $g(x) := \vee_a^x f$ 的定义对任意 $x_1 \searrow x_0$ 有 $g(x_1) - g(x_0) < 2\epsilon$. 特别地 $g(x_0+0) = g(x_0)$. 同理可证 $g(x_0 - 0) = g(x_0)$.

(9) 因为 $f \in \mathbf{BV}([a,b]) \cap C([a,b])$, 所以根据 (7) 得到 $f = g - h$, 这里 g, h 都是有界递增的. 根据 (8) 得到 $g \in C([a,b])$ 故 $h \in C([a,b])$. $\square$

II、Stieltjes 积分. 假设函数 f,g 在闭区间 $[a,b]$ 上有界. 考虑 $[a,b]$ 上的一个分割

$$T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,\quad \Delta x_i=x_i-x_{i-1},\quad ||T||=\max_{1\le i\le n}\Delta x_i.$$

对任意 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 定义 **Stieltjes 和 (Stieltjes sum)** 为

$$S(f,T,\boldsymbol{\xi};g):=\sum_{1\le i\le n}f(\xi_i)\Delta g(x_i),\quad \Delta g(x_i):=g(x_i)-g(x_{i-1}). \tag{13.2.14}$$

类似 Riemann 积分的定义, f 关于 g 的 **Stieltjes 积分 (Stieltjes integral)** 定义为

$$\int_a^b f(x)\,dg(x)=\lim_{||T||\to 0}S(f,T,\boldsymbol{\xi};g), \tag{13.2.15}$$

如果极限存在且和分割 T 和点 ξ_i 选择都无关.

- 如果 $g(x)=x$, 则 Stieltjes 积分就是通常的 Riemann 积分.
- 如果 g 递增, 则
$$\int_a^b f(x)\,dg(x)\ \text{存在}\quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{||T||\to 0}\sum_{1\le i\le n}\omega(f,\Delta_i)\Delta g(x_i)=0,$$
这里 $\omega(f,\Delta_i)=M_i-m_i$, $M_i=\sup_{\Delta_i}f$, $m_i=\inf_{\Delta_i}f$, 和 $\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$.

定理 13.6

如果 $f\in C([a,b])$ 且 $g\in\mathbf{BV}([a,b])$, 则

$$\int_a^b f(x)\,dg(x)$$

存在.

证: 首先假设 g 是递增的. 对任意 $\epsilon>0$ 都存在 $\delta>0$ 满足 $|f(x)-f(y)|<\epsilon$ 只要 $|x-y|<\delta$. 考虑 $[a,b]$ 上的任意分割 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 使得 $||T||<\delta$. 从而

$$\sum_{1\le i\le n}\omega(f,\Delta_i)\Delta g(x_i)\le\epsilon\sum_{1\le i\le n}\Delta g(x_i)=[g(b)-g(a)]\epsilon.$$

此时 Stieltjes 积分存在.

对一般的 g, 根据定理 13.5 作分解 $g=g_1-g_2$, 这里 g_1,g_2 是有界递增的. 故此时 Stieltjes 积分也存在. □

推论 13.2

(1) 如果 $f\in R([a,b])$ 且 $g\in\mathbf{Lip}([a,b])$, 则

$$\int_a^b f(x)\,dg(x)$$

存在.

(2) $f\in R([a,b])$ 且

$$g(x)=c+\int_a^x\varphi(t)\,dt,\quad |\varphi|\le L,$$

则

$$\int_a^b f(x)\,dg(x)$$

存在.

定理 13.7

当 Stieltjes 积分存在时，下列公式成立：

$$\begin{aligned}\int_a^b dg(x) &= g(b)-g(a),\\ \int_a^b [f_1(x)\pm f_2(x)]dg(x) &= \int_a^b f_1(x)dg(x)\pm\int_a^b f_2(x)dg(x),\\ \int_a^b f(x)d[g_!(x)\pm g_2(x)] &= \int_a^b f(x)dg_1(x)\pm\int_a^b f(x)dg_2(x),\\ \int_a^b kf(x)d[\ell g(x)] &= k\ell\int_a^b f(x)dg(x),\\ \int_a^b f(x)dg(x) &= \int_a^c f(x)dg(x()+\int_c^b f(x)dg(x).\end{aligned}$$

♡

定理 13.8. (分部积分法)

如果函数 f,g 在 $[a,b]$ 上有界且 Stieltjes 积分

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

存在，则

$$\int_a^b f(x)dg(x)=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)df(x). \tag{13.2.16}$$

♡

证: 作为练习请自证. □

作为简单例子考虑函数

$$\rho(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

注意到 0 是该函数的第一类间断点 (跳跃间断点). 假设 $c\in[a,b)$, 函数 f 在 c 处连续, 且 $f\in R([a,b])$. 定义

$$I:=\int_a^b f(x)d\rho_c(x),\quad \rho_c(x):=\rho(x-c)=\begin{cases}0, & x\le c,\\ 1, & x>c.\end{cases}$$

则 I 存在且

$$\begin{aligned}S &= \sum_{1\le i\le n} f(\xi_i)\Delta\rho_c(x_i) = \left(\sum_{i\ne k}+\sum_{i=k}\right) f(\xi_i)[\rho_c(x_i)-\rho_c(x_{i-1})]\\ &= f(\xi_k)[\rho_c(x_k)-\rho_c(x_{k-1})] = f(\xi_k),\end{aligned}$$

这里 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 是 $[a,b]$ 上的分割且 $x_{k-1}<c<x_k$. 令 $\|T\|\to 0$ 得到

$$\int_a^b f(x)d\rho_c(x)=f(c),\quad a\le c<b.$$

此结果可推广到如下形式.

定理 13.9. (广义分部积分法)

假设 $f\in C([a,b])$, $g\in C([a,b])\setminus\{c_0,\cdots,c_m\}$, 这里 $a=c_0<\cdots<c_m=b$ 是 g 的第一类间断点, $g'(x)$ 除了在有限个点外存在, 且 $|g'|\in R([a,b])$. 则

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dg(x) &= \int_a^b f(x)g'(x)dx\\ &+\sum_{1\le k\le m-1} f(c_k)[g(c_k+0)-g(c_k-0)] \\ &+f(a)[g(a+0)-g(a)]+f(b)[g(b)-g(b-0)].\end{aligned}\tag{13.2.17}$$

证: 作为练习请自证. □

练习 13.1

(1) 计算

$$I=\int_{-2}^{2} x\,dg(x),\quad g(x)=\begin{cases} x+2, & -2\le x\le -1,\\ 2, & -1<x<1,\\ x^2-1, & 1\le x\le 2.\end{cases}$$

(2) 证明定理 13.10 中的 (1) 和 (2).

定理 13.10

(1) 假设函数 f 在 $[a,b]$ 上有界, g 递增, 且 Stieltjes 积分

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

存在, 则

$$\int_a^b f(x)dg(x)=\mu\int_a^b dg(x)=\mu[g(b)-g(a)],$$

这里 $\mu\in[m_f,M_f]$. 当 $f\in C([a,b])$, 我们可以取 $\mu=f(\xi)$, 这里 $\xi\in[a,b]$.

(2) 如果 $f\in C([a,b])$ 且 $g\in\mathbf{BV}([a,b])$, 则

$$\left|\int_a^b f(x)dg(x)\right|\le M\bigvee_a^b g,$$

这里 $M:=\sup_{a\le x\le b}|f(x)|$.

(3) 如果 $(f_n)_{n\ge1}\subset C([a,b])$, $f_n\rightrightarrows f$ (一致收敛), 且 $g\in\mathbf{BV}([a,b])$, 则

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dg(x)=\int_a^b f(x)dg(x).$$

(4) 如果 $f\in C([a,b])$, $(g_n)_{n\ge1}\subset\mathbf{BV}([a,b])$ 满足 $g_n\to g$ 和 $\vee_a^b g_n\le V$, 则 $g\in\mathbf{BV}([a,b])$ 且

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)dg_n(x)=\int_a^b f(x)dg(x).$$

证: (1) 和 (2) 作为练习请自证.

(3) 对任意 $\epsilon>0$ 存在 $N\in\mathbb{N}$ 满足

$$\max_{a\le x\le b}|f_n(x)-f(x)|<\epsilon,\quad n>N.$$

因此

$$\left|\int_a^b f_n(x)dg(x) - \int_a^b f(x)dg(x)\right| \le \max_{a\le x\le b}|f_n(x)-f(x)|\bigvee_a^b g \le \epsilon \bigvee_a^b g, \quad n > N.$$

(4) 考虑 $[a,b]$ 上的任意分割 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$. 则

$$\bigvee_T g_n = \sum_{1\le i\le m} |g_n(x_i) - g_n(x_{i-1})| \le \bigvee_a^b g_n \le V.$$

令 $n\to+\infty$ 得到

$$\sum_{1\le i\le m} |g(x_i) - g(x_{i-1})| \le V$$

从而 $g \in \mathbf{BV}([a,b])$. 令

$$S := \sum_{1\le i\le m} f(\xi_i)\Delta g(x_i), \quad S_n := \sum_{1\le i\le m} f(\xi_i)\Delta g_n(x_i), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 只要 $|x-y| < \delta$ 就有 $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. 从而得到

$$\begin{aligned}\left|S_n - \int_a^b f(x)dg_n(x)\right| &= \left|S_n - \sum_{1\le i\le m}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dg_n(x)\right| \\ \le \sum_{1\le i\le m}\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(\xi_i) - f(x)|dg_n(x) &\le \epsilon\sum_{1\le i\le m}\int_{x_{i-1}}^{x_i} dg_n(x) \le \epsilon\bigvee_a^b g_n \le \epsilon V\end{aligned}$$

同理可证

$$\left|S - \int_a^b f(x)dg(x)\right| \le \epsilon V.$$

从而存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $|S_n - S| < \epsilon$ 对任意 $n \ge N$ 都成立. 最后得到

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)dg_n(x) - \int_a^b f(x)dg(x)\right| &\le \left|\int_a^b f(x)dg_n(x) - S_n\right| + |S_n - S| \\ &+ \left|\int_a^b f(x)dg(x) - S\right| \le \epsilon V + \epsilon + \epsilon V = (1+2V)\epsilon. \quad \square\end{aligned}$$

III、应用. 第一个应用是 Stieltjes 积分和 Riemann 积分的联系. 第二个应用是给出 Euler 常数的余项估计.

定理 13.11. (Catalan)

假设 $f, g \in C(D)$, 其中 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是有界可求面积的闭区域. 令 $m = \min_D g$, $M := \max_D g$, $\varphi \in C([m,M])$, 和

$$\psi(u) := \iint_{(x,y)\in D,\ m\le g(x,y)\le u} f(x,y)\,dxdy.$$

则

$$\iint_D f(x,y)\varphi(g(x,y))\,dxdy = \int_m^M \varphi(u)\,d\psi(u). \tag{13.2.18}$$

♡

证: 不失一般性不妨假设 $f > 0$. 选择 $[m,M]$ 上的分割 $T: m = u_0 < u_1 < \cdots <$

$u_n = M$. 则

$$\iint_D f(x,y)\varphi(g(x,y))\,dxdy = \sum_{1\le i\le n}\iint_{u_{i-1}\le g\le u_i} f(x,y)\varphi(g(x,y))\,dxdy$$
$$= \sum_{1\le i\le n}\varphi(g(\xi_i^*,\eta_i^*))\iint_{u_{i-1}\le g\le u_i} f(x,y)\,dxdy$$
$$= \sum_{1\le i\le n}\varphi(g(\xi_i^*,\eta_i^*))[\psi(u_i)-\psi(u_{i-1})] \ \to\ \int_m^M \varphi(u)\,d\psi(u).\ \square$$

记号 $\lfloor x\rfloor$ 表示 x 的整数部分, 从而

$$\langle x\rangle := x - \lfloor x\rfloor$$

表示 x 的小数部分.

对任给子集 $A\subset\mathbb{N}$ 和 $x>1$, 定义

$$A(x) := \#\{a\le x : a\in A\}. \tag{13.2.19}$$

计算可得

$$\int_1^x f(t)dA(t) = \sum_{n\le x}\int_{n-0}^{n+0} f(t)dA(t) = \sum_{n\le x,n\in A} f(n).$$

命题 13.4

(1) 如果 $f\in C([1,x])$, 则

$$\sum_{a\le x,a\in A} f(x) = \int_1^x f(t)\,dA(t). \tag{13.2.20}$$

(2) **(Abel 求和公式)** 令 $\{a_n\}_{n\ge1}$ 是复数列且 $f:[1,+\infty)\to\mathbb{C}$. 对每个实数 $x\ge1$, 令

$$A(x) := \sum_{n\le x} a_n$$

并假设 $f(x)\in C^1([1,+\infty))$. 则

$$\sum_{n\le x} a_n f(x) = A(x)f(a) - \int_1^x A(t)f'(t)\,dt. \tag{13.2.21}$$

♡

证: (1) 已证.

(2) 首先假设 $x=N\in\mathbb{N}$. 故得到

$$\sum_{n\le x} a_n f(n) = A(1)f(1) + \sum_{2\le n\le N}[A(n)-A(n-1)]f(n)$$
$$= A(1)f(1) + \sum_{2\le n\le N} A(n)f(n) - \sum_{1\le n\le N-1} A(n)f(n+1)$$
$$= \sum_{1\le n\le N-1} A(n)[f(n)-f(n+1)] + A(N)f(N)$$

$$= A(N)f(N) - \sum_{1\le i\le N-1} A(i)\int_i^{i+1} f'(t)\,dt$$

$$= A(N)f(N) - \sum_{1\le i\le N-1}\int_i^{i+1} A(t)f'(t)\,dt \;=\; A(N)f(N) - \int_1^N A(t)f'(t)\,dt.$$

对一般的 x 令 $N := \lfloor x\rfloor$. 因为 $A(t)$ 在区间 $[N,x]$ 上是常数, 所以

$$A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f'(t)\,dt = A(x)f(x) - \int_N^x A(t)f'(t)dt - \int_1^N A(t)f'(t)dt$$

$$= A(x)f(x) - A(N)\int_N^x f'(t)dt - \int_1^N A(t)f'(t)dt$$

$$= A(N)f(N) - \int_1^N A(t)f'(t)dt = \sum_{n\le N} a_n f(n) = \sum_{n\le x} a_n f(n). \quad \square$$

第二个应用是给出 Euler 常数的余项估计. 所谓的 **Euler 常数** γ 定义为

$$\gamma := 1 - \int_1^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt = 0.57721\cdots. \tag{13.2.22}$$

问题 13.1

γ 是否为无理数?

上述著名猜想仍旧是个公开的问题. 接下来我们将会证明由 (13.2.22) 定义的 Euler 常数和之前的定义

$$\gamma = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{1\le n\le N}\frac{1}{n} - \ln N\right) \tag{13.2.23}$$

是一样的.

定理 13.12

如果 γ 由 (13.2.22) 给出, 则

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n} = \ln x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x\ge 1. \tag{13.2.24}$$

证: 在 (13.2.21) 中取 $a_n\equiv 1$ 且 $f(t) = 1/t$ 得到 $A(x) = \sum_{n\le x} 1 = \lfloor x\rfloor$ 和

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n} = \frac{\lfloor x\rfloor}{x} + \int_1^x \frac{\lfloor t\rfloor}{t^2}dt = 1 - \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x} + \int_1^x \frac{dt}{t} - \int_1^x \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt$$

$$= 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x - \int_0^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt + \int_x^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt$$

$$= \ln x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right) + \int_x^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt$$

$$= \ln x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right) + O\left(\int_x^\infty \frac{dt}{t^2}\right) = \ln x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right). \quad \square$$

命题 13.5

令 $a, b \in \mathbb{N}$ 满足 $a < b$ 并令 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 在 $[a, b]$ 上单调. 则存在实数 $\theta = \theta(a, b) \in [0, 1]$ 使得

$$\sum_{a<n\le b} f(n) = \int_a^b f(t)\,dt + \theta[f(b) - f(a)]. \tag{13.2.25}$$

♡

证: 在 (13.2.20) 中取 $A = \mathbb{N}$ 则 $A(t) = \lfloor t \rfloor$ 且

$$\begin{aligned}\sum_{a<n\le b} f(n) - \int_a^b f(t)\,dt &= \int_a^b f(t)\,d\lfloor t\rfloor - \int_a^b f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,d\langle t\rangle \\ &= [-f(t)\langle t\rangle]\Big|_a^b + \int_a^b \langle t\rangle df(t) = \int_a^b \langle t\rangle df(t).\end{aligned}$$

不失一般性不妨假设 f 递增, 从而根据**定理 13.10** 得到

$$\int_a^b \langle t\rangle df(t) = \theta\int_a^b df(t) = \theta[f(b) - f(a)], \quad \text{存在 } \theta \in [0, 1]. \quad \square$$

作为直接推论可证 (作为练习请自证)

$$\begin{aligned}\ln(n!) &= (n-1)\ln n + O(\ln n), \\ \sum_{n\le x} n^\alpha &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + O(x^\alpha), \quad \alpha \ge 0, \\ \sum_{n\le x} n^\alpha \ln n &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\ln x - \frac{1}{\alpha+1}\right) + O(x^\alpha \ln x), \quad \alpha > 0.\end{aligned}$$

当函数 f 递减, 可以把**性质 13.5** 加强到如下.

命题 13.6

假设函数 $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ 连续且递增, 并假设 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, 则存在常数 A 使得

$$\sum_{1<n\le x} f(n) = \int_1^x f(t)\,dt + A + O(f(x)). \tag{13.2.26}$$

♡

证: 给定正整数 N 考虑

$$D(N) := \int_1^N f(t)\,dt - \sum_{2\le n\le N} f(n) = \sum_{2\le n\le N}\left[\int_{n-1}^n f(t)\,dt - f(n)\right].$$

因为 $D(N) \ge 0$, 为了证明数列 $(D(N))_{N\ge1}$ 的收敛性只要验证

$$R(N) := \sum_{n\ge N+1}\left[\int_{n-1}^n f(t)\,dt - f(n)\right] = O(f(N)).$$

对正整数 M, N 只要满足 $M \ge N + 3$, 利用 f 的递减性, 就有

$$\sum_{N+1\le n\le M-1} f(n) + f(M) \le \int_N^M f(t)\,dt \le f(N) + \sum_{N+1\le n\le M-1} f(n),$$

因此

$$0 \le \sum_{N+1\le n\le M}\left[\int_{n-1}^n f(t)\,dt - f(n)\right] \le f(N) - f(M) \le f(N)$$

故 $0 \le R(N) \le f(N)$. □

考虑满足如下条件的函数列 $\{b_i(x)\}_{i\ge 0} \subset C([0,1])$:

$$b_0(x) \equiv 1, \quad b_i'(x) = i b_{i-1}(x), \quad \int_0^1 b_i(x)dx = 0, \quad i \ge 1. \tag{13.2.27}$$

显然 (13.2.27) 已经完全确定这个函数列.

练习 13.2

验证

$$\sum_{i\ge 0} b_i(x)\frac{y^i}{i!} = \frac{ye^{xy}}{e^y-1} = \frac{y}{e^y-1}\sum_{n\ge 0}\frac{(xy)^n}{n!}. \tag{13.2.28}$$

♠

在 (13.2.28) 中令 $x=0$ 得到了 **Bernoulli 数**的定义:

$$\sum_{i\ge 0} B_i\frac{y^i}{i!} = \frac{y}{e^y-1}. \tag{13.2.29}$$

利用 $e^y - 1 = \sum_{i\ge 1} y^i/i!$ 的 Taylor 级数得到

$$y = (e^y-1)\sum_{i\ge 0} B_i\frac{y^i}{i!} = \sum_{i\ge 1}\left[\sum_{0\le j\le i-1}\frac{B_j}{(i-j)!}\right]y^j$$

从而

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad b_i(x) = \sum_{0\le j\le i}\binom{i}{j}B_j x^{i-j}. \tag{13.2.30}$$

易证 $B_i = 0, i \ge 3$.

把定义在 $[0,1)$ 上的函数 $b_i(x)$ 作周期为 1 的周期延拓, 我们就得到了定义在 $\mathbb{R}$ 上的**第 i 个 Bernoulli 函数 $B_i(x)$ (i-th Bernoulli function)**. 注意到 $B_i(0) = B_i$.

定理 13.13. (Euler-Maclaurin 求和公式)

对任何非负整数 k 和任意函数 $f \in C^{k+1}([a,b])$, 其中 $a, b \in \mathbb{Z}$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{a<n\le b} f(n) &= \int_a^b f(x)\,dx + \sum_{0\le i\le k}\frac{(-1)^{i+1}B_{i+1}}{(i+1)!}\left[f^{(i)}(b) - f^{(i)}(a)\right] \\ &\quad + \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\int_a^b B_{k+1}(x)f^{(k+1)}(x)\,dx.\end{aligned} \tag{13.2.31}$$

♡

证: 在这里只给出 $k=1$ 时的证明. 回顾

$$\sum_{a<n\le b} f(n) = \int_a^b f(t)d\lfloor t\rfloor = \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b f(t)d\langle t\rangle.$$

因为 $b_1(x) = x - \frac{1}{2}$, 所以 $B_1(x) = \langle x\rangle - \frac{1}{2}$ 对任何 $x \in \mathbb{R}$ 都成立从而 $B_1(n) = -\frac{1}{2} = B_1$ 对任何 $n \in \mathbb{Z}$ 都成立. 进一步可证

$$B_i' = iB_{i-1}, \quad B_2(t) \in C(\mathbb{R}), \quad B_2'(t) \text{ 存在 } (t \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}), \quad B_i'(t) \text{ 存在 } (i \ge 3).$$

从而得到

$$\begin{aligned}\sum_{a<n\le b} f(n) &= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f(t)\,dB_1(t)\\ &= \int_a^b f(t)\,dt - B_1(t)f(t)\Big|_a^b + \int_a^b B_1(t)f'(t)\,dt\\ &= \int_a^b f(t)\,dt - B_1[f(b)-f(a)] + \frac{1}{2}\int_a^b f'(t)\,dB_2(t)\\ &= \int_a^b f(t)\,dt - B_1[f(b)-f(a)] + \frac{1}{2}\left\{B_2[f'(b)-f'(a)] - \int_a^b B_2(t)f''(t)dt\right\}.\end{aligned}$$

这里用到了 $B_2(n)=B_2, n\in\mathbb{Z}$. □

命题 13.7

假设 $0<y<x$ 且 $f\in C^1([y,x])$. 则

$$\sum_{y<n\le x} f(n) = \int_y^x f(t)\,dt + \int_y^x \langle t\rangle f'(t)dt - \langle t\rangle f(t)\Big|_y^x. \tag{13.2.32}$$

♡

证: 令 $a=\lfloor y\rfloor$ 和 $b=\lfloor x\rfloor$, 并记

$$I := \int_y^x \langle t\rangle f'(t)dt = \left(\int_{a+1}^b + \int_b^x + \int_y^{a+1}\right)\langle t\rangle f'(t)dt = I_1+I_2+I_3.$$

计算可得

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_{a+1}^b (t-\lfloor t\rfloor)f'(t)dt = \sum_{a+1\le k\le b-1}\int_k^{k+1}(t-k)f'(t)dt\\ &= \sum_{a+1\le k\le b-1}\left[tf(t)\Big|_k^{k+1} - \int_k^{k+1} f(t)dt\right] - \sum_{a+1\le k\le b-1} k[f(k+1)-f(k)]\\ &= \sum_{a+1\le k\le b-1} f(k+1) - \int_{a+1}^b f(t)\,dt = \sum_{a+2\le k\le b} f(k) - \int_{a+1}^b f(t)\,dt.\end{aligned}$$

类似地得到

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_b^x (t-\lfloor t\rfloor)f'(t)dt = \int_a^x (t-b)f'(t)dt\\ &= tf(t)\Big|_b^x - \int_b^x f(t)\,dt - b[f(x)-f(b)] = \langle x\rangle f(x) - \int_b^x f(t)\,dt,\\ I_3 &= -\langle y\rangle f(y) - \int_y^{a+1} f(t)\,dt + f(a+1).\end{aligned}$$

加起来有

$$I = \sum_{a+2\le k\le b} f(k) + \langle t\rangle f(t)\Big|_y^x - \int_y^x f(t)\,dt + f(a+1). \quad \square$$

在 (13.2.32) 中令 $f(t)=1/t$ 得到

$$\sum_{1<n\le x}\frac{1}{n} = \int_1^x \frac{dt}{t} - \int_1^x \frac{\langle t\rangle}{t^2}dt - \frac{\langle x\rangle}{x}$$

即

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n}-\ln n=1-\int_1^x\frac{\langle t\rangle}{t^2}dt-\frac{\langle x\rangle}{x}\quad\Longrightarrow\quad(13.2.23).$$

推论 13.3

对任意 $n\ge 1$, 有

$$\sum_{m\le n}\frac{1}{m}=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+\frac{\theta_n}{60n^4},\tag{13.2.33}$$

这里常数 $\theta_n\in[0,1]$.

证: 在 (13.2.31) 中取 $f(t)=1/t, a=1, b=n$, 且 $k=3$. 计算得到

$$\begin{aligned}\sum_{2\le m\le n}\frac{1}{n} &= \int_1^n\frac{dt}{t}+\frac{-B_1}{1!}\left(\frac{1}{n}-1\right)+\frac{B_2}{2!}\left(-\frac{1}{n^2}+1\right)+\frac{-B_3}{3!}\left(\frac{2}{n^3}-\frac{2}{1}\right)\\ &\quad+\frac{B_4}{4!}\left(\frac{-6}{n^4}+6\right)+\frac{-1}{4!}\int_1^n B_4(t)\frac{24}{t^5}dt\\ &= \ln n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-1\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n^2}-1\right)+\frac{1}{120}\left(\frac{1}{n^4}-1\right)-\int_1^n\frac{B_4(t)}{t^5}dt.\end{aligned}$$

即

$$\sum_{m\le n}\frac{1}{n}-\ln n=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}-\frac{1}{120}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+\frac{1}{120n^4}-\int_1^n\frac{B_4(t)}{t^5}dt.$$

令 $n\to+\infty$ 得到

$$\gamma=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}-\frac{1}{120}-\int_1^\infty\frac{B_4(t)}{t^5}dt\tag{13.2.34}$$

和

$$\sum_{m\le n}\frac{1}{m}=\gamma+\ln n+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+\frac{1}{120n^4}+\int_n^\infty\frac{B_4(t)}{t^5}dt.$$

由于 $|B_4(t)|\le\frac{1}{30}$, 得到

$$\begin{aligned}\left|\sum_{m\le n}\frac{1}{m}-\gamma-\ln n-\frac{1}{2n}+\frac{1}{12n^2}\right| &\le \frac{1}{120n^4}+\int_n^\infty\frac{|B_4(t)|}{t^5}dt\\ &\le \frac{1}{120n^4}+\frac{1}{30}\int_n^\infty\frac{dt}{t^5}=\frac{1}{60n^4}.\quad\square\end{aligned}$$

公式 (13.2.34) 可推广到

$$\gamma=\frac{1}{2}+\sum_{2\le i\le k}\frac{B_i}{i}-\int_1^\infty\frac{B_k(t)}{t^{k+1}}dt,\quad k\ge 0.\tag{13.2.35}$$

13.3 重积分的变量替换

回顾定积分的变量替换公式

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

这里 $\varphi(t)\in C^1([\alpha,\beta])$ 且单调. 特别地

$$\int_\alpha^\beta \varphi'(t)\,dt = b-a = \text{ 区间 } [a,b] \text{ 的长度},$$

这里 $a=\varphi(\alpha)$ 和 $b=\varphi(\beta)$.

假设有二重积分的变量替换公式:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{\widetilde{D}} f(x(u,v),y(u,v))\left[\ ?\ \right] dudv,$$

这里 $(x,y)\in D$ 和 $(u,v)\in\widetilde{D}$. 如果上述公式成立并取 $f\equiv 1$, 得到

$$\iint_{\widetilde{D}}\left[\ ?\ \right] dudv = \iint_D dxdy = |D|.$$

这就表明 [?] 应该是 D 的面积元与 $\widetilde{D}$ 的面积元之比.

13.3.1 二重积分的变量替换

我们首先把上述的**几何直观性**严格数学化. 假设

(i) $D\subset\mathbf{R}^2$ 是有界可求面积的闭区域, 映射 $\mathbf{T}: D\to\Omega$ 是C^1-**微分同胚的** (C^1-**diffeomorphic**) (即 $\mathbf{T}$ 是 C^1 的且逆映射存在并也是 C^1 的) 和 $\Omega=\mathbf{T}(D)$. 记 $\mathbf{T}(u,v):=(x(u,v),y(u,v))$.

(ii) $\mathbf{T}$ 的 Jacobi 矩阵

$$\mathbf{Jac}(\mathbf{T}) := \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix}, \qquad \det(\mathbf{T}) := |\mathbf{Jac}(\mathbf{T})|$$

对任意 $(u,v)\in D$ 都是非奇异的. 故 $\mathscr{J}_{\mathbf{T}} := |\det(\mathbf{T})|$ 在 D 上总是正的.

给定 $(u_0,v_0)\in D$, 取充分小的 $\Delta u,\Delta v$ 使得 $(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v)\in D$, 并考虑 Ω 中的 4 个点:

$$\begin{aligned}
P_1 &= (x(u_0,v_0),y(u_0,v_0)) = (x_0,y_0),\\
P_2 &= (x(u_0+\Delta u,v_0),y(u_0+\Delta u,v_0))\\
&\approx (x_0+x_u(u_0,v_0)\Delta u, y_0+x_v(u_0,v_0)\Delta u),\\
P_3 &= (x(u_0+\Delta u,v_0+\Delta v),y(u_0+\Delta u,v_0+\Delta v)),\\
P_4 &= (x(u_0,v_0+\Delta v),y(u_0,v_0+\Delta v)).
\end{aligned}$$

“长方形” $P_1P_2P_3P_4$ 的面积近似为

$$\begin{vmatrix} x_u(u_0,v_0) & y_u(u_0,v_0) \\ x_v(u_0,v_0), & y_v(u_0,v_0) \end{vmatrix}\Delta u\Delta v = \mathscr{J}_{\mathbf{T}}(u_0,v_0)\Delta u\Delta v.$$

从而

$$\iint_D f(x(u,v),y(u,v))\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(u,v)\,dudv \quad \text{“}=\text{”} \quad \iint_\Omega f(x,y)\,dxdy.$$

等价地

$$\iint_{\mathbf{T}(D)} f(x,y)\,dxdy \quad \text{“}=\text{”} \quad \iint_D (f\circ\mathbf{T})\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(u,v)\,dudv$$

or

$$\iint_{\mathbf{T}(D)} f \quad \text{“} = \text{”} \quad \int_D (f\circ\mathbf{T})\mathscr{J}_{\mathbf{T}}$$

定理 13.14. (二重积分变量替换)

假设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 是具有分段光滑边界 ∂D 的有界闭区域, 并假设 $D\subset\widetilde{D}$, 这里 $\widetilde{D}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的区域. 假设 $\mathbf{T}:\widetilde{D}\to\widetilde{\Omega}=\mathbf{T}(\widetilde{D})$ 是 C^1-微分同胚并满足 $\mathscr{J}_{\mathbf{T}}$ 在 $\widetilde{D}$ 上处处大于 0. 则, 其中 $\Omega=\mathbf{T}(D)$,

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy=\iint_D f(x(u,v),y(u,v))\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(u,v)\,dudv \tag{13.3.1}$$

or

$$\iint_{\mathbf{T}(D)} f=\iint_D (f\circ\mathbf{T})\mathscr{J}_{\mathbf{T}}. \tag{13.3.2}$$

♡

证: 因为 D 有界故存在闭矩形 $\square:=[a,b]\times[c,d]$ 包含 D. 把 $[a,b]$ 和 $[c,d]$ 分成等长的 2^n 个子区间,

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_M=b,\quad c=y_0<y_1<\cdots<y_M=d,\quad M:=2^n.$$

记

$$\square_{ij}:=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j],\quad 1\le i,j\le M$$

并令

$$A_n:=\{\square_{ij}:\square_{ij}\subset D\},\quad B_n:=\{\square_{ij}:\square_{ij}\cap D\neq\emptyset\},\quad C_n:=B_n\setminus\mathrm{Int}(A_n).$$

注意到

$$\cdots\subset A_n\subset A_{n+1}\subset\cdots\subset D\subset\cdots\subset B_{n+1}\subset B_n\subset\cdots$$

和

$$\lim_{n\to\infty}|A_n|=|D|=\lim_{n\to\infty}|B_n|$$

这是因为 D 是可求面积的. 选择充分大的 $n\gg1$ 使得 $B_n\subset\widetilde{D}$. 首先考虑两类特殊的 $\mathbf{T}$:

(i) **情形 1:** $\mathbf{T}(u,v)=(u,y(u,v))$,

(ii) **情形 2:** $\mathbf{T}(u,v):=(x(u,v),v)$.

步骤 1: 假设 $\mathbf{T}$ 是情形 1 或情形 2. 此时对任意 $\square\in B_n$, 有

$$|\mathbf{T}(\square)|=\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(\bar{u},\bar{v})|\square|$$

其中 $(\bar{u},\bar{v})\in\square$. 不妨假设 $\mathbf{T}$ 是**情形 1**, 即, $\mathbf{T}(u,v)=(u,y(u,v))$ 其中 y 是 C^1 的. 在 U 上有 $\mathscr{J}_{\mathbf{T}}>0$ 从而

$$0<\mathscr{J}_{\mathbf{T}}=\left|\det\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}\right|=\left|\frac{\partial y}{\partial v}\right|.$$

不失一般性不妨假设 $\partial y/\partial v>0$ 在 U 上. 如果 $\square=[a_\square,b_\square]\times[c_\square,d_\square]$, 则 $y(u,\cdot)$ 对固定的 $u\in[a_\square,b_\square]$ 是递增的. 因此

$$\mathbf{T}(\square)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:a_\square\le x\le b_\square,\ y(x,c_\square)\le y\le y(x,d_\square)\right\}$$

这是 x-型区域. 利用定积分第一中值定理计算得到

$$\begin{aligned}|\mathbf{T}(\square)| &= \int_{a_\square}^{b_\square} dx \int_{y(x,c_\square)}^{y(x,d_\square)} dy = \int_{a_\square}^{b_\square} [y(x,d_\square)-y(x,c_\square)]\,dx \\ &= [y(\bar{x},d_\square)-y(\bar{x},c_\square)]\,(b_\square-a_\square)\end{aligned}$$

这里 $\bar{x}\in[a_\square,b_\square]$. 根据中值定理得到

$$|\mathbf{T}(\square)| = \frac{\partial y}{\partial v}(\bar{u},\bar{v})(d_\square-c_\square)(b_\square-a_\square) = \mathscr{J}_{\mathbf{T}}(\bar{u},\bar{v})|\square|$$

这里 $\bar{v}\in[c_\square,d_\square]$.

步骤 2: 假设 T 是情形 1 或情形 2. 如果 $f\in C(\Omega)$, 则

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy = \iint_D f\circ\mathbf{T}(u,v)\,\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(u,v)\,dudv.$$

记 $H:=\max_\Omega|f|$. 因为存在自然数 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $B_n\subset\widetilde{D}$ 对任何 $n\geq N$ 都成立, 所以 $\max_{B_n}\mathscr{J}_{\mathbf{T}}\leq K$ 对某个 $K>0$ (和 n 无关) 和任何 $n\geq N$ 都成立. **步骤 1** 推出 $|\mathbf{T}(C_n)|\leq K|C_n|$ 对任何 $n\geq N$ 都成立, 从而 $\lim_{n\to\infty}|\mathbf{T}(C_n)|=0$. 记 $D_{ij}:=D\cap\square_{ij}$. 对任意 $(u_{ij},v_{ij})\in\square_{ij}$ 令 $\xi_{ij}=x(u_{ij},v_{ij})$ 和 $\eta_{ij}=y(u_{ij},v_{ij})$. 此时

$$\sum_{D_{ij}} f(\xi_{ij},\eta_{ij})|\mathbf{T}(D_{ij})| = \left(\sum_{D_{ij}\subset A_n}+\sum_{D_{ij}\subset D\setminus\mathrm{Int}(A_n)}\right) f(\xi_{ij},\eta_{ij})|\mathbf{T}(D_{ij})| = I+J.$$

若 $D_{ij}\subset A_n$ 则 $D_{ij}=\square_{ij}$ 且

$$|\mathbf{T}(\square_{ij})| = \mathscr{J}_{\mathbf{T}}(\bar{u}_{ij},\bar{v}_{ij})|\square_{ij}|$$

这里 $(\bar{u}_{ij},\bar{v}_{ij})\in\square_{ij}$. 故

$$\begin{aligned}I &= \sum_{\square_{ij}\subset A_n} f(\bar{\xi}_{ij},\bar{\eta}_{ij})|\mathbf{T}(\square_{ij})| = \sum_{\square_{ij}\subset A_n} f(\bar{\xi}_{ij},\bar{\eta}_{ij})\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(\bar{u}_{ij},\bar{v}_{ij})|\square_{ij}| \\ &= \sum_{\square_{ij}\subset A_n} f\circ\mathbf{T}(\bar{u}_{ij},\bar{v}_{ij})\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(\bar{u}_{ij},\bar{v}_{ij})|\square_{ij}|.\end{aligned}$$

若 $D_{ij}\subset D\setminus\mathrm{Int}(A_n)$ 取任意 $(\bar{u}_{ij},\bar{v}_{ij})\in D_{ij}$ 从而

$$\begin{aligned}J &= \sum_{D_{ij}\subset D\setminus\mathrm{Int}(A_n)} f(\bar{\xi}_{ij},\bar{\eta}_{ij})|\mathbf{T}(D_{ij})| \\ &= \sum_{D_{ij}\subset D\setminus\mathrm{Int}(A_n)} f\circ\mathbf{T}(\bar{u}_{ij},\bar{v}_{ij})\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(\bar{u}_{ij},\bar{v}_{ij})|D_{ij}| \\ &+ \sum_{D_{ij}\subset D\setminus\mathrm{Int}(A_n)} \left[f(\bar{\xi}_{ij},\bar{\eta}_{ij})|\mathbf{T}(D_{ij})| - f\circ\mathbf{T}(\bar{u}_{ij},\bar{v}_{ij})\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(\bar{u}_{ij},\bar{v}_{ij})|D_{ij}|\right].\end{aligned}$$

因为 $D\setminus\mathrm{Int}(A_n)\subset C_n$, 所以

$$\left|\sum_{D_{ij}\subset D\setminus\mathrm{Int}(A_n)} f(\bar{\xi}_{ij},\bar{\eta}_{ij})|\mathbf{T}(D_{ij})|\right| \leq H\sum_{D_{ij}\subset D\setminus\mathrm{Int}(A_n)}|\mathbf{T}(D_{ij})| \leq H|\mathbf{T}(C_n)| \leq HK|C_n|$$

和

$$\left|\sum_{D_{ij}\subset D\setminus\mathrm{Int}(A_n)} f\circ\mathbf{T}(\bar{u}_{ij},\bar{v}_{ij})\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(\bar{u}_{ij},\bar{v}_{ij})|D_{ij}|\right| \leq HK|C_n|.$$

即得到

$$\left|\sum_{D_{ij}\subset D\setminus \mathrm{Int}(A_n)}\left[f(\bar{\xi}_{ij},\bar{\eta}_{ij})|\mathbf{T}(D_{ij})| - f\circ\mathbf{T}(\bar{u}_{ij},\bar{v}_{ij})\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(\bar{u}_{ij},\bar{v}_{ij})|D_{ij}|\right]\right|$$
$$\leq 2HK|C_n| \ \to\ 0,\quad n\to+\infty.$$

由于 f 在 Ω 上可积, 我们得到

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy \leftarrow \sum_{D_{ij}} f(\bar{\xi}_{ij},\bar{\eta}_{ij})|\mathbf{T}(D_{ij})| \to \sum_{D_{ij}} f\circ\mathbf{T}(\bar{u}_{ij},\bar{v}_{ij})\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(\bar{u}_{ij},\bar{v}_{ij})|D_{ij}|$$
$$\to \iint_D f\circ\mathbf{T}(u,v)\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(u,v)dudv.$$

步骤 3: 在任给 $(u_0,v_0)\in U$ 的某个邻域内有 $\mathbf{T}=\mathbf{T}_2\circ\mathbf{T}_1$, 这里 $\mathbf{T}_1,\mathbf{T}_2$ 都是 C^1-微分同胚且 $\mathbf{T}_i$ 是情形 1 或情形 2. 因为 $\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(u_0,v_0)=|\det(\mathbf{T})(u_0,v_0)|>0$, 故 x_u,y_u,x_v,y_v 中至少有一个在 (u_0,v_0) 处非零. 不妨假设 $\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)\neq 0$. 考虑映射 $\mathbf{T}(u,v)=(x(u,v),y(u,v)),\,(u,v)\in U$, 和

$$\mathbf{T}_1(u,v):=(x(u,v),v)$$

这是**情形 2** 中的映射. 因为在 (u_0,v_0) 处

$$\det(\mathbf{T}_1)=\det\left(\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)=\frac{\partial x}{\partial u}\neq 0$$

根据隐函数定理, **定理 12.12**, 存在邻域 U_0,Ω_0 满足 $U\supset U_0\ni(u_0,v_0)$, $\Omega\supset\Omega_0\ni(x(u_0,v_0),v_0)$, $g\in C^1(\Omega_0)$, 且映射

$$\mathbf{T}_1: D_0\longrightarrow\Omega_0,\quad (u,v)\longmapsto(\xi,\eta)$$

是 C^1-微分同胚的, 并且进一步有, $\mathbf{T}_1^{-1}(\xi,\eta)=(g(\xi,\eta),\eta)$. 特别地, 我们有

$$g(x(u,v),v)=u$$

对任何 $(u,v)\in U_0$ 都成立. 定义

$$\mathbf{T}_2(\xi,\eta):=(\zeta,y(g(\zeta,\eta),\eta))$$

这是**情形 1** 中的映射. 故得到对任何 $(u,v)\in U_0$ 有

$$\mathbf{T}_2\circ\mathbf{T}_1(u,v)=\mathbf{T}_2(x(u,v),v)=(x(u,v),y(g(x(u,v),v),v))=(x(u,v),y(u,v))\,.$$

步骤 4: 证明 (13.3.1). 步骤 3 意味着对任何 $(u,v)\in D$, 存在领域 $D_\delta(u,v)$ (其中 δ 依赖于 (u,v)) 使得 $\mathbf{T}=\mathbf{T}_2\circ\mathbf{T}_1$ 在 $D_\delta(u,v)$ 上成立, 这里 $\mathbf{T}_1,\mathbf{T}_2$ 是上述定义的映射. 由于 $(D_{\delta/2}(u,v))_{(u,v)\in D}$ 是 D 的开覆盖而且 D 是紧的 (因为 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中的有界闭集), 故存在 D 的有限子覆盖 $(D_{\delta_i/2}(u_i,v_i))_{1\leq i\leq N}$, $N\in\mathbf{N}$. 令 $\delta:=\min_{1\leq i\leq N}\delta_i/2$. 选择 n 充分大使得对任意矩形 $\square_{ij}:=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ 都有 $\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_j-y_{j-1})^2}<\delta$. 对任意 $\square_{ij}\cap\mathrm{Int}(D)\neq\emptyset$, 可找到自然数 $1\leq k\leq N$ 满足 $D_{ij}:=\square_{ij}\cap D\subset\square_{ij}\subset D_{\delta_k}(u_k,v_k)$. 从而在 D_{ij} 内有 $\mathbf{T}=\mathbf{T}_2^{ij}\circ\mathbf{T}_1^{ij}$. 记

$$\mathbf{T}_1^{ij}(u,v):=(\zeta(u,v),\eta(u,v))\,,\quad \mathbf{T}_2^{ij}(u,v):=(x(\zeta,\eta),y(\zeta,\eta))\,.$$

步骤 2 推出

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \sum_{1\le i,j\le M}\iint_{\mathbf{T}(D_{ij})} f(x,y)dxdy = \sum_{1\le i,j\le M}\iint_{\mathbf{T}_2^{ij}(\mathbf{T}_1^{ij}(D_{ij}))} f(x,y)dxdy$$
$$= \sum_{1\le i,j\le M}\iint_{\mathbf{T}_1^{ij}(D_{ij})} f\circ\mathbf{T}_2^{ij}(\zeta,\eta)\mathscr{J}_{\mathbf{T}_2^{ij}}(\zeta,\eta)d\zeta d\eta$$
$$= \sum_{1\le i,j\le M}\iint_{D_{ij}} f\circ\mathbf{T}_2^{ij}\circ\mathbf{T}_1^{ij}(u,v)\mathscr{J}_{\mathbf{T}_2^{ij}}\circ\mathbf{T}_1^{ij}(u,v)\mathscr{J}_{\mathbf{T}_1^{ij}}(u,v)dudv.$$

根据链式法则得到

$$\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(u,v) = \mathscr{J}_{\mathbf{T}_2^{ij}\circ\mathbf{T}_1^{ij}}(u,v) = \left(\mathscr{J}_{\mathbf{T}_2^{ij}}\circ\mathbf{T}_1^{ij}(u,v)\right)\mathscr{J}_{\mathbf{T}_1^{ij}}(u,v)$$

从而

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy &= \sum_{1\le i,j\le M}\iint_{D_{ij}} f\circ\mathbf{T}(u,v)\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(u,v)dudv\\ &= \iint_{\mathbf{T}} f\circ\mathbf{T}(u,v)\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(u,v)dudv. \quad\square\end{aligned}$$

13.3.2 多重积分的变量替换

定理 13.15. (n 重积分变量替换)

假设 $U,V\subset\mathbf{R}^n$ 是开集且 $\mathbf{T}:U\to V$ 是 C^1-微分同胚满足 $\mathbf{T}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$. 对任何具有分段光滑边界的有界闭区域 $D\subset U$ 和任何 $f\in C(\mathbf{T}(D))$ 有

$$\int_{\mathbf{T}(D)} f(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} = \int_D f\circ\mathbf{T}(\boldsymbol{x})\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}. \tag{13.3.3}$$

♡

考虑 2 维**极坐标 (polar coordinates)** 变换

$$\begin{aligned}\mathbf{T}:[0,R]\times[0,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{D}_R^2 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le R^2\}\\ (r,\theta) &\longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta),\end{aligned} \tag{13.3.4}$$

此时

$$\mathscr{J}_{\mathbf{T}} = \begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -r\sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix} = r.$$

但 $\mathbf{T}(\{0\}\times[0,2\pi]) = \{(0,0)\}$, 因此**定理 13.14** 不适用. 但只要先把原点和 x 正轴去掉 (考虑 $\epsilon\le\epsilon\le R$ 和 $\epsilon\le\theta\le 2\pi-\theta$), 再应用**定理 13.14**, 最后令 $\epsilon\to 0+$.

- 如果原点在区域 D 外且 D 可表示成

$$D = \{(r,\theta)\in[0,+\infty)\times[0,2\pi]|\varphi(\theta)\le r\le\psi(\theta),\ \alpha\le\theta\le\beta\},$$

  则 (13.3.1) 可化简为

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int_{\alpha}^{\beta}d\theta\int_{\varphi(\theta)}^{\psi(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr. \tag{13.3.5}$$

- 如果原点包含在区域 D 内, 此时

$$D = \{(r,\theta)\in[0,+\infty)\times[0,2\pi]|0\le r\le\psi(\theta),\ 0\le\theta\le 2\pi\},$$

则 (13.3.1) 可化简为

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\psi(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdr. \tag{13.3.6}$$

- 如果原点在 D 的边界上, 此时

$$D = \{(r,\theta) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi] | 0 \le r \le \psi(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta\},$$

则 (13.3.1) 可化简为

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \int_\alpha^{\beta} d\theta \int_0^{\psi(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdr. \tag{13.3.7}$$

例 13.4

计算二重积分

$$I := \iint_{\Omega} dxdy, \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}.$$

解: 考虑区域 $D = \{(r,\theta) | 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$. 则得到

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 rdr = 2\pi \int_0^1 rdr = \pi. \quad \square$$

考虑 3 维**柱面坐标 (cylinder coordinates)** 变换

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : [0,+\infty) \times [0,2\pi] \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ (r,\theta,z) &\longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, z), \end{aligned} \tag{13.3.8}$$

此时

$$\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(r,\theta,z) = r.$$

例 13.5

计算三重积分

$$I = \iiint_{\Omega} dxdydz, \quad \Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 25 - x^2 - y^2\}.$$

解: 令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$, 这里 $0 \le r \le 5, 0 \le \theta \le 2\pi$, 且 $D = \{(r,\theta,z) : 0 \le r \le 5, 0 \le \theta \le 5, 0 \le z \le 25 - r^2\}$. 则得到

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D rdrd\theta dz = \int_0^5 rdr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{25-r^2} dz = 2\pi \int_0^5 r(25-r^2)dr \\ &= \pi \int_0^5 (25-r^2)dr^2 = -\frac{\pi}{2}(r^2-25)^2\Big|_0^5 = \frac{625}{2}\pi. \quad \square \end{aligned}$$

3 维**球面坐标 (spherical coordinates)** 定义为

$$x = r\sin\varphi\cos\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\varphi \tag{13.3.9}$$

这里 $0 \le r < \infty, 0 \le \varphi \le \pi$, 和 $0 \le \theta \le 2\pi$. 定义映射 $\mathbf{T}$ 为

$$\mathbf{T}(r,\varphi,\theta) = (r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) \tag{13.3.10}$$

这里

$$\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(r,\varphi,\theta) = r^2\sin\varphi.$$

例 13.6

计算三重积分

$$I = \iiint_{\Omega} dxdydz, \quad \Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$$

这里 $a, b, c > 0$.

解: 令 $x = ar\sin\varphi\cos\theta$, $y = br\sin\varphi\sin\theta$, 和 $z = cr\cos\varphi$. 则得到

$$I = \int_0^1 dr \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} abcr^2 \sin\varphi d\theta = \frac{abc}{3} 2\pi \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi = \frac{4\pi}{3} abc. \quad \square$$

一般地引入***n* 维球面坐标 (*n* spherical coordinates)**:

$$\begin{aligned} x^1 &= r\cos\varphi_1, \\ x^2 &= r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \\ x_3 &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x^{n-1} &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, \\ x^n &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}, \end{aligned} \tag{13.3.11}$$

这里 $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n-2} \leq \pi$, 和 $0 \leq \varphi_{n-1} \leq 2\pi$. 定义映射 $\mathbf{T}$ 为

$$\mathbf{T}(r, \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n-1}) = (x^1, x^2, \cdots, x^n) \tag{13.3.12}$$

根据 (13.3.11) 得到

$$\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(r, \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n-1}) = r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1 \sin^{n-3}\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{n-2}.$$

例 13.7

计算 n 重积分

$$I := \int_{\mathbb{B}_R^n(\mathbf{0})} d\boldsymbol{x}, \quad R > 0.$$

解: 利用 (13.3.11) 得到

$$\begin{aligned} I = \int_0^R dr \int_0^{\pi} d\varphi_1 \cdots \int_0^{\pi} d\varphi_{n-2} \int_0^{2\pi} r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1 \sin^{n-3}\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{n-2} d\varphi_{n-1} \\ = \frac{2\pi R^n}{n} \prod_{1 \leq i \leq n-2} \int_0^{\pi} \sin^{n-1-i}\varphi_i d\varphi_i. \end{aligned}$$

对定积分

$$J_k := \int_0^{\pi} \sin^k\varphi d\varphi = 2\int_0^{\pi/2} \sin^k\varphi d\varphi$$

我们已证

$$J_k = \begin{cases} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\pi, & k = 2m, \\ \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}2, & k = 2m+1. \end{cases}$$

故 $I = (2\pi)^k R^{2k}/(2k)!!$ $(n = 2k)$ 和 $I = 2(2\pi)^k R^{2k+1}/(2k+1)!!$ $(n = 2k+1)$. $\square$

例 13.8

证明不等式

$$2\pi(\sqrt{17}-4) \le I := \iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{dxdy}{\sqrt{16+\sin^2 x+\sin^2 y}} \le \frac{\pi}{4}.$$

证: 令

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad 0 \le \theta \le 1, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

则

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{1}{4} dxdy \ \ge\ I \ \ge\ \int_{x^2+y^2\le 1} \frac{dxdy}{\sqrt{16+x^2+y^2}} = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} \frac{rd\theta}{\sqrt{16+r^2}} \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{rdr}{\sqrt{16+r^2}} = 2\pi\sqrt{16+r^2}\Big|_0^1 = 2\pi(\sqrt{17}-4). \quad \square \end{aligned}$$

练习 13.3

如果 $f \in C([-1,1])$, 证明

$$\iint_{|x|+|y|\le 1} f(x+y)dxdy = \int_{-1}^1 f(u)du.$$

例 13.9

(1) 计算二重积分

$$I_A := \iint_{x^2+y^2\le A^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy, \quad A > 0. \tag{13.3.13}$$

解: 令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, 0 \le r \le A$, 和 $0 \le \theta \le 2\pi$. 得到

$$I_A = \int_0^A dr \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\theta = 2\pi \int_0^A re^{-r^2} dr = \pi\left(1-e^{-A^2}\right).$$

考虑

$$\left(\int_{-A}^A e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_{-A\le x,y\le A} e^{-(x^2+y^2)} dxdy.$$

由于 $\mathbb{B}^2_{\sqrt{2}A} \supset \square_A = [-A,A]\times[-A,A] \supset \mathbb{B}^2_A$, 故

$$\sqrt{\pi}\left(1-e^{-A^2}\right)^{1/2} = I_A^{1/2} \le \int_{-A}^A e^{-x^2} dx \le I_{\sqrt{2}A}^{1/2} = \sqrt{\pi}\left(1-e^{-2A^2}\right)^{1/2}.$$

令 $A\to\infty$ 得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = 1. \tag{13.3.14}$$

一般地我们可证

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\pi^{n/2}} e^{-|\boldsymbol{x}|^2} d\boldsymbol{x} = 1. \tag{13.3.15}$$

(2) 考虑二次型

$$\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}x^i x^j = \boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}^T, \quad \boldsymbol{x} = (x^1,\cdots,x^n) \in \mathbb{R}^n,$$

这里 $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ 是正定 $n\times n$ 矩阵. 计算 n 重积分

$$I_A=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}^T}d\boldsymbol{x} \tag{13.3.16}$$

这里 A 是正定 $n\times n$ 矩阵.

解: 存在正交矩阵 $Q\in\mathbf{O}(n)$ 满足

$$A=Q\Lambda Q^T,\quad \Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

这里 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n>0$ 是 A 的特征根. 因此

$$I_A=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\boldsymbol{x}Q\Lambda(\boldsymbol{x}Q)^T}d\boldsymbol{x}=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\boldsymbol{y}\Lambda\boldsymbol{y}^T}d\boldsymbol{y}=\prod_{1\le i\le n}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\sqrt{\pi}\right)=\sqrt{\frac{\pi^n}{\det(A)}}.\ \square$$

(3) 计算反常积分

$$I_{a,b,c}=\int_{\mathbb{R}}e^{-(ax^2+2bx+c)}dx,\quad a>0,\ b,c\in\mathbb{R}. \tag{13.3.17}$$

解: 作变量替换得到

$$\begin{aligned}I_{a,b,c}&=\int_{\mathbb{R}}e^{-a[(x+\frac{b}{a})^2+\frac{ac-b^2}{a^2}]}dx=e^{\frac{b^2-ac}{a}}\int_{\mathbb{R}}e^{-a(x+\frac{b}{a})^2}dx\\&=e^{\frac{b^2-ac}{a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}=e^{-\frac{\det(A^*)}{a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\end{aligned}$$

这里 A^* 是矩阵 $\begin{bmatrix}a&b\\b&c\end{bmatrix}$. $\square$

一般情形下考虑 n 重积分

$$I_{a_{ij},b_i,c}=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-(\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}x^ix^j+2\sum_{1\le i\le n}b_ix^i+c)}d\boldsymbol{x} \tag{13.3.18}$$

这里 $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ 是正定地, $b_1,\cdots,b_n,c\in\mathbb{R}$. 记

$$\boldsymbol{x}=(x^1,\cdots,x^n),\quad \boldsymbol{b}=(b_1,\cdots,b_n),$$

从而得到

$$I_{a_{ij},b_i,c}=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-(\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}^\mathsf{T}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}+c)}d\boldsymbol{x}.$$

解: 和之前一样有 $A=Q\Lambda Q^\mathsf{T}$, 这里 $Q\in\mathbf{O}(m)$ 和 $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$ 且 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n>0$. 故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}^\mathsf{T}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}+c&=(\boldsymbol{x}Q)\Lambda(\boldsymbol{x}Q)^\mathsf{T}+2\boldsymbol{b}\boldsymbol{x}^\mathsf{T}+c\\&=\boldsymbol{y}\Lambda\boldsymbol{y}^\mathsf{T}+2\boldsymbol{b}\cdot(Q^{-1})^\mathsf{T}\boldsymbol{y}^\mathsf{T}+c\\&=\sum_{1\le i\le n}\lambda_i(y^i)^2+2\sum_{1\le i\le n}\tilde{b}_iy^i+c\\&=\sum_{1\le i\le n}\lambda_i\left(y^i+\frac{\tilde{b}_i}{\lambda_i}\right)^2+\left(c-\sum_{1\le i\le n}\frac{\tilde{b}_i^2}{\lambda_i}\right)\end{aligned}$$

这里 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}Q=(y^1,\cdots,y^n)$ 和 $\tilde{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{b}(Q^{-1})^\mathsf{T}=\boldsymbol{b}(Q^\mathsf{T})^{-1}=(\tilde{b}_1,\cdots,\tilde{b}_n)$. 另一方面

对矩阵

$$A^* = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b}^T \\ \boldsymbol{b} & c \end{bmatrix}$$

其行列式为

$$\begin{aligned}
\det(A^*) &= \det\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b}^T \\ 0 & c-\boldsymbol{b}A^{-1}\boldsymbol{b}^T \end{bmatrix} = \left(c-\boldsymbol{b}A^{-1}\boldsymbol{b}^{-1}\right)\det(A) \\
&= \left\{c-\boldsymbol{b}\left[(Q^T)^{-1}\Lambda^{-1}Q^{-1}\right]\boldsymbol{b}^T\right\}\det(A) = \left(c-\tilde{\boldsymbol{b}}\Lambda^{-1}\tilde{\boldsymbol{b}}^T\right)\det(A) \\
&= \left(c-\sum_{1\le i\le n}\frac{\tilde{b}_i^2}{\lambda_i}\right)\det(A).
\end{aligned}$$

最后得到

$$\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}} + 2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x} + c = \sum_{1\le i\le n}\lambda_i\left(y^i+\frac{\tilde{b}_i}{\lambda_i}\right)^2 + \frac{\det(A^*)}{\det(A)}$$

这立即推出 $I_{a_{ij},b_i,c} = \sqrt{\pi^n/\det(A)}\exp[-\det(A^*)/\det(A)]$. □

(4) 假设函数 $f(r)$ 在 $r=0$ 处可导且 $f(0)=0$, 考虑区域

$$\Omega_t := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le t^2\},\quad t>0.$$

求极限

$$I = \lim_{t\to0+}\frac{1}{t^4}\iiint_{\Omega_t} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dxdydz =: \lim_{t\to0+}\frac{I_t}{t^4}.$$

解: 考虑映射 $\mathbf{T}(x,y,z) = (x,y,r:=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$. 则得到

$$\mathscr{J}_{\mathbf{T}} = \sqrt{r^2-x^2-y^2}/r$$

且

$$\begin{aligned}
I_t &= \int_0^t\iint_{r^2-t^2\le x^2+y^2\le r^2} f(r)\frac{\sqrt{r^2-(x^2+y^2)}}{r}drdxdy \\
&= \int_0^t\frac{f(r)}{r}dr\iint_{r^2-t^2\le x^2+y^2\le r^2}\sqrt{r^2-(x^2+y^2)}dxdy \\
&= \int_0^t\frac{f(r)}{r}\cdot\frac{2}{3}\pi t^3 dr = \frac{2\pi}{3}t^3\int_0^t\frac{f(r)}{r}dr
\end{aligned}$$

故

$$I = \lim_{t\to0+}\frac{2\pi}{3}\frac{1}{t}\int_{0-}^t\frac{f(r)}{r}dr = \frac{2\pi}{3}\lim_{t\to0+}\frac{f(t)}{t} = \frac{2\pi}{3}f'(0).\quad\square$$

13.4 反常二重积分

如果在 (13.3.13) 中令 $A\to\infty$ 得到

$$\lim_{A\to\infty}\iint_{x^2+y^2\le A^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \pi.$$

从而可以“定义”

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

为如下极限

$$\lim_{A\to\infty}\iint_{x^2+y^2\le A^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

上述例子启发我们如何定义反常二重积分.

13.4.1 无界区域上的反常二重积分

假设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是无界区域且且边界 ∂D 是由有限条光滑曲线所构成. **考虑定义在 D 上的有界函数 使得在 D 中的任何可求面积的子区域上是可积的.**

定义 13.4. (反常二重积分)

函数 f 在 D 上的反常二重积分记为

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{d(\Gamma)\to\infty}\iint_{D_\Gamma} f(x,y)dxdy$$

其中 $d(\Gamma):=d(\Gamma,\partial D)$, Γ 是 D 中的任何曲线满足 $|\Gamma|=0$ 并从 D 中切出有界区域 D_Γ. 称函数 f 在 D 上是**可积的**或反常二重积分是**收敛的**如果上述极限存在且和 Γ 无关. 否则的话称反常二重积分是**发散的**. ♣

引理 13.1

假设二元函数 $f(x,y)$ 在 D 上是非负的且 $\{D_n\}_{n\ge1}$ 是 D 中的递增区域列并满足 $\lim_{n\to\infty}d(\Gamma_n)=\infty$, 这里 $\{\Gamma_n\}_{n\ge1}$ 是 D 中的曲线列满足 $|\Gamma_n|=0$ 且每个 Γ_n 切出一个有界区域 D_n. 则

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

收敛当且仅当

$$\left\{\iint_{D_n} f(x,y)dxdy\right\}_{n\ge1}$$

收敛. 此时

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f(x,y)dxdy. \tag{13.4.1}$$

♡

证: 一个方向显然成立. 假设二重积分列收敛. 任给 Γ 和 D_Γ 如上, 则存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $D_\Gamma\subset D_n$ 对任何 $n\ge N$ 都成立. 由于 f 是非负的, 得到

$$\iint_{D_\Gamma} f(x,y)dxdy \le \iint_{D_n} f(x,y)dxdy \longrightarrow I := \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f(x,y)dxdy.$$

另一方面对任意 $\epsilon>0$ 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得

$$\iint_{D_N} f(x,y)dxdy > I-\epsilon$$

成立. 选择零面积曲线 Γ 满足 $D_\Gamma\supset D_N$ 从而得到

$$\iint_{D_\Gamma} f(x,y)dxdy \ge \iint_{D_N} f(x,y)dxdy > I-\epsilon. \quad \square$$

例 13.10

计算反常二重积分

$$I = \iint_{x^2+y^2\geq a^2} \frac{dxdy}{r^p}, \quad r := \sqrt{x^2+y^2}, \quad a > 0.$$

解: 考察区域 $D_A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a^2 \leq x^2+y^2 \leq A\}$. 根据**引理 13.1** 得到

$$I = \lim_{A\to\infty} \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^A \frac{rdr}{r^p} = \lim_{A\to\infty} \frac{2\pi}{2-p} r^{2-p}\Big|_0^A.$$

从而反常二重积分当 $p>2$ 时收敛但是当 $p\leq 2$ 时发散. □

下面结论证明和反常积分相应的结论证明是类似的.

命题 13.8

假设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 是无界区域且边界 ∂D 是分段光滑的.

(1) 如果在 D 上 $0\leq f\leq g$, 则

$$\iint_D g(x,y)dxdy \text{ 收敛} \implies \iint_D f(x,y)dxdy \text{ 收敛},$$
$$\iint_D f(x,y)dxdy \text{ 发散} \implies \iint_D g(x,y)dxdy \text{ 发散}.$$

(2) f 在 D 上收敛若 $|f|$ 在 D 上收敛.

定理 13.16

(1) 考虑区域 $D = \{(r,\theta): a\leq r<\infty,\ \alpha\leq\theta\leq\beta\}$, 这里 $0\leq\alpha,\beta\leq 2\pi$ 和 $a>0$.

$$|f(x,y)| \leq \frac{M}{r^p}\ (p>2) \implies \iint_D f(x,y)dxdy \text{ 收敛},$$
$$|f(x,y)| \geq \frac{m}{r^p}\ (p\leq 2) \implies \iint_D f(x,y)dxdy \text{ 收敛}.$$

(2) 如果 $f\in C([a,\infty)\times[c,\infty))$ 且

$$\int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x,y)dy \quad \text{和} \quad \int_a^\infty dx \int_c^\infty |f(x,y)|dy$$

都存在, 则 f 在 D 上可积且

$$\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(x,y)dxdy = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x,y)dy.$$

(3) 如果 $\mathbf{T}: D\to\mathbf{T}(D)$ 是 C^1-微分同胚且, 这里 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中的区域, 则

$$\iint_{\mathbf{T}(D)} d(x,y)dxdy = \iint_D f\circ\mathbf{T}(u,v)\,\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(u,v)\ dudv$$

只要其中一个反常二重积分存在.

例 13.11

计算反常二重积分

$$I = \iint_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

这个积分已经在 (13.3.13) 计算过了. 根据**定理 13.16**, 得到

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty e^{-r^2}dr = 2\pi\int_0^\infty e^{-r^2}dr = \pi.$$

直接推论为

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{13.4.2}$$

若令 $u = x^2$ 则

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}\int_0^\infty u^{-1/2}e^{-u}du = \frac{1}{2}\int_0^\infty u^{\frac{1}{2}-1}e^{-u}du.$$

定义 **Gamma 函数**为

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty u^{s-1}e^{-u}du, \quad s > 0. \tag{13.4.3}$$

注意到 $\Gamma(s)$ 对任何 $s > 0$ 都有定义. 实际上对任何虚部为正的复数 $s \in \mathbf{C}$, 相应的 Gamma 函数 $\Gamma(s)$ 也是有定义的 (这里要用到解析函数的延拓性). 计算

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty u^n e^{-u}du = \int_0^\infty -u^n de^{-u} = -\left[\frac{u^n}{e^u}\bigg|_0^\infty - \int_0^\infty nu^{n-1}e^{-u}du\right] = n\Gamma(n).$$

即

$$\Gamma(n+1) = n!\Gamma(1) = n!$$

这是因为 $\Gamma(1) = 1$. 更进一步利用分部积分法可证 (作为练习请自证)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \tag{13.4.4}$$

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad \text{for } s > 0. \tag{13.4.5}$$

13.4.2 无界函数的反常二重积分

假设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是有界区域且 $P_0 \in D$. 考虑定义在 $D \setminus \{P\}$ 上的函数 f 且满足 f 在 P_0 的任何邻域内都是无界的. 选择一条关于 P_0 的完全包含在 D 内的 Jordan 闭曲线使得 $|\gamma| = 0$ 并记 σ 是这条闭曲线 γ 在 D 内所围成的区域. 假设二重积分

$$\iint_{D\setminus\sigma} f(x,y)\,dxdy$$

对任意这样的曲线 γ 都存在.

定义 13.5

定义无界函数的反常二重积分为

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{\rho(\gamma)\to 0}\iint_{D\setminus\sigma} f(x,y)\,dxdy.$$

这里 $\rho(\gamma) := \sup_{P\in\gamma}|P - P_0|$. 称二元函数 f 在 D **上是可积的**或反常二重积分是**收敛的**如果上述极限存在且和 γ 无关. 否则的话称反常二重积分是**发散的**.

例 13.12

计算反常二重积分

$$I = \iint_{x^2+y^2\le a^2}\frac{dxdy}{r^p}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad a > 0.$$

解: 根据定义得到

$$I=\lim_{\rho\to 0}\iint_{\rho^2\le x^2+y^2\le a^2}\frac{dxdy}{r^p}=\lim_{\rho\to 0}2\pi\int_\rho^a\frac{rdr}{r^p}.$$

所以 I 仅当 $p<2$ 时收敛. □

13.4.3 Beta 函数

作为应用我们引入 **Beta 函数 (Beta fucntion)**

$$B(p,q):=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,\quad p,q>0. \tag{13.4.6}$$

注意到 $B(p,q)$ 对任意 $p,q>0$ 都有定义.

命题 13.9

$p,q>0\Longrightarrow$ 我们有

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{13.4.7}$$

证: 利用

$$\Gamma(p)=2\int_0^\infty s^{2p-1}e^{-s^2}ds,\quad \Gamma(q)=2\int_0^\infty r^{2q-1}e^{-t^2}dt,$$

得到

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q)&=4\iint_{[0,\infty)\times[0,\infty)}s^{2p-1}t^{2q-1}e^{-(s^2+t^2)}dsdt\\&=4\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2p+2q-2}rdr\\&=\left(2\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,d\theta\right)\left(2\int_0^\infty r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}dr\right)=B(p,q)\Gamma(p+q),\end{aligned}$$

这里 $s=r\cos\theta$ 和 $t=r\sin\theta$. □

作为副产品得到

$$B(p,q)=2\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,d\theta. \tag{13.4.8}$$

例 13.13

计算定积分

$$I=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx,\quad J=\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx,\quad n\in\mathbf{N}. \tag{13.4.9}$$

解: 实际上利用 (13.4.7) 和 (13.4.8) 得到

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{n+1}{2}-1}(1-u)^{\frac{1}{2}-1}du=\frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}.\quad\square$$

13.4.4 *Poisson 核、Hilbert 变换和 Riesz 变换

定义多元函数 **Poisson 核 (Poisson kernel)** 如下

$$P(\boldsymbol{x}) := \frac{c_n}{(1+|\boldsymbol{x}|^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

其中常数 c_n 是使得

$$\int_{\mathbb{R}^n} P(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = 1$$

成立.

(1) 利用**例 13.7** 和 Gamma 函数性质证明

$$c_n = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}}.$$

(2) 定义

$$P(t,\boldsymbol{x}) := \frac{1}{t^n}P(\boldsymbol{x}/t), \quad (t,\boldsymbol{x}) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}^n.$$

证明 P 是关于变量 $(t,x^1,\cdots,x^n)$ 的调和函数, 即,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}P + \sum_{1\le i\le n}\frac{\partial^2}{\partial (x^i)^2}P = 0.$$

在 Fourier 级数这章, 我们即将看到 $e^{-2\pi|\boldsymbol{x}|}$ 的 Fourier 变换就是 Poisson 核.

证明 **Beta 积分恒等式**:

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{d\boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{w}|^{\alpha}|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{w}|^{\beta}} = \pi^{n/2}\frac{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})\Gamma(\frac{n-\beta}{2})\Gamma(\frac{\alpha+\beta-n}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{\beta}{2})\Gamma(n-\frac{\alpha+\beta}{2})}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-\alpha-\beta},$$

这里 $0<\alpha,\beta<n$ 且 $\alpha+\beta>n$.

对两个黎曼可积函数 $f,g\in R(\mathbb{R}^n)$, 定义它们的**卷积 (convolution)** 为

$$(f*g)(\boldsymbol{x}) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}.$$

证明 $f*g\in R(\mathbb{R}^n)$ 并求 $\chi*\chi$, 这里 χ 是单位圆盘 $\mathbb{B}^2(\mathbf{0},1)\subset\mathbb{R}^2$ 的特征函数.

对 $\mathbb{R}$ 上的 f 定义其**截断 Hilbert 变换 (truncated Hilbert transform)** 为

$$\mathbf{H}_\epsilon(f)(x) := \frac{1}{\pi}\int_{|y|\ge\epsilon}\frac{f(x-y)}{y}dy = \frac{1}{\pi}\int_{|x-y|\ge\epsilon}\frac{f(y)}{x-y}dy.$$

为了方便起见, 定义 **Cauchy 主值积分 (Cauchy principal value integral)** 如下

$$\mathbf{P.V.}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(x-y)}{y}dy := \lim_{\epsilon\to0+}\int_{|y|\ge\epsilon}\frac{f(x-y)}{y}dy.$$

因此 f 的 **Hilbert 变换 (Hilbert transform)** 定义为

$$\mathbf{H}(f)(x) := \lim_{\epsilon\to0+}\mathbf{H}_\epsilon(f)(x) = \frac{1}{\pi}\mathbf{p.v.}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(x-y)}{y}dy.$$

证明 $[a,b]$ 的特征函数 $\chi_{[a,b]}$ 的 Hilbert 变换为

$$\mathbf{H}(\chi_{[a,b]})(x) = \frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|.$$

对每个 $1 \le i \le n$, 定义多元函数 f 的**第 i 个 Riesz 变换 (i-th Riesz transform)** 为

$$\mathbf{R}_j(f)(\boldsymbol{x}) := \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\mathbf{p.v.}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{x^i - y^i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n+1}}f(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y},$$

这里 Cauchy 主值积分 $\mathbf{p.v.}$ 的定义和一元情形相同.

求多元函数 $f(\boldsymbol{x}) = e^{-|\boldsymbol{x}|^2}$ 的第 i 个 Riesz 变换.

给定 $s > 0$. 定义多元函数 f 的 **Riesz 势变换 (Riesz potential)** 为

$$\mathbf{I}_s(f)(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{2^s\pi^{n/2}}\frac{\Gamma(\frac{n-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{|\boldsymbol{y}|^{n-s}}f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}.$$

多元函数 $f(\boldsymbol{x}) = e^{-|\boldsymbol{x}|^2}$ 的 Riesz 势变换.

13.5 微分形式

对平面上任何两个向量 $\boldsymbol{a} = (a^1, a^2)$ and $\boldsymbol{b} = (b^1, b^2)$, 定义**外积**为

$$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b} := \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} = a^1b^2 - a^2b^1.$$

显然外积满足

(1) $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a}$,

(2) $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{a} = 0$,

(3) $\mathbb{R}^2$ 和外积及数乘构成了 $\mathbb{R}$ 上的一个向量空间.

(4) 如果 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一组基, 则

$$\boldsymbol{a}_1\wedge\boldsymbol{a}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$$

这里 $\boldsymbol{a}_1 = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{12}\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{a}_2 = a_{21}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2$.

13.5.1 微分形式和外积

考虑区域 $U \subseteq \mathbb{R}^n$. 回顾

$$df = \sum_{1\le i\le n}\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i, \quad f \in C^1(U). \tag{13.5.1}$$

定义

$$\Lambda^1(U) := \text{由 } dx^1, \cdots, dx^n \text{ 生成} = \left\{\sum_{1\le i\le n} a_i(\boldsymbol{x})dx^i\right\} \tag{13.5.2}$$

这里 $a_i(\boldsymbol{x})$ 是 U 上的函数. 易证 $(\Lambda^1(U), +)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的向量空间且

$$\dim\Lambda^1(U) = n.$$

形式上定义**外积 (wedge product)** $\wedge$ 为满足如下条件

$$dx^i\wedge dx^j = -dx^j\wedge dx^i, \quad 1 \le i, j \le n. \tag{13.5.3}$$

实际上外积来自**张量积**[2] **(tensor product)**. 易见 $dx^i \wedge dx^i = 0, 1 \leq i \leq n$. 定义

$$\begin{aligned}\Lambda^2(U) &:= \text{由 } dx^i \wedge dx^j \text{ 生成} \quad (1 \leq i, j \leq n) \\ &= \text{由 } dx^i \wedge dx^j \text{ 生成} \quad (1 \leq i < j \leq n). \end{aligned} \tag{13.5.4}$$

从而得到 $\dim \Lambda^2(U) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

同理可定义***k*-形式 (*k*-forms)** 所在的空间

$$\begin{aligned}\Lambda^k(U) &:= \text{由 } dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \text{ 生成} \quad (1 \leq i_1, \cdots, i_k \leq n) \\ &= \text{由 } dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \text{ 生成} \quad (1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n) \\ &= \left\{ \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} a_{i_1 \cdots i_k}(\boldsymbol{x}) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \right\}. \end{aligned} \tag{13.5.5}$$

同样可得 $\dim \Lambda^k(U) = \binom{n}{k}$ 且 $\Lambda^k(U) = \{0\}$ 若 $k > n$.

对 $\omega \in \Lambda^i(U)$ 和 $\eta \in \Lambda^j(U)$ 记

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{1 \leq k_1 < \cdots < k_i \leq n} a_{k_1 \cdots k_i} dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_i} = \sum_{|I|=i} a_I d\boldsymbol{x}^I, \\ \eta &= \sum_{1 \leq \ell_1 < \cdots < \ell_j \leq n} b_{\ell_1 \cdots \ell_j} dx^{\ell_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\ell_j} = \sum_{|J|=j} b_J d\boldsymbol{x}^J. \end{aligned}$$

其中 $I: k_1 < \cdots < k_i$ 和 $J: \ell_1 < \cdots < \ell_j$ 都是 $\{1, \cdots, n\}$ 中的有序指标集, a_I, b_I 是 U 上的函数, 且 $d\boldsymbol{x}^I := dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_i}$(类似可定义 $d\boldsymbol{x}^J$). 此时定义**外积 (wedge product)** 为

$$\omega \wedge \eta := \sum_{|I|=i, |J|=j} a_I b_J dx^I \wedge dx^J \in \Lambda^{i+j}(U). \tag{13.5.6}$$

对 U 上的函数 f 定义

$$f\omega := \sum_{|I|=i} (f a_I) dx^I. \tag{13.5.7}$$

定理 13.17

(1) $\omega \in \Lambda^p(U)$ 和 $\eta \in \Lambda^q(U)$ $(p + q > n) \Longrightarrow \omega \wedge \eta = 0$.

(2) $\omega \in \Lambda^p(U)$ 和 $\eta \in \Lambda^q(U) \Longrightarrow \omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega$.

(3) $\omega \in \Lambda^p(U)$ 且 p 是奇数 $\Longrightarrow \omega \wedge \omega = 0$.

(4) $\omega, \eta, \sigma \Longrightarrow$ 有

$$\begin{aligned}(\omega + \eta) \wedge \sigma &= \omega \wedge \sigma + \eta \wedge \sigma, \\ \sigma \wedge (\omega + \eta) &= \sigma \wedge \omega + \sigma \wedge \eta, \\ (\omega \wedge \eta) \wedge \sigma &= \omega \wedge (\eta \wedge \sigma). \end{aligned}$$

♡

回到**定理 13.14**, 其中

$$\mathbf{T}(u, v) = (x(u, v), y(u, v)).$$

[2]具体定义可参见我个人主页上的微分流形课的讲义.

因为 $dx = x_u du + x_v dv$ 和 $dy = y_u du + y_v dc$, 所以

$$dx \wedge dy = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} du \wedge dv = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} du \wedge dv.$$

若把 $dx \wedge dy$ 看成是“正”面积元, 则 $\partial(x,y)/\partial(u,v) = \mathscr{J}_{\mathbf{T}}$ 从而 (13.4.1) 等价于

$$\iint_{\mathbf{T}(D)} f(x,y)\, dx \wedge dy = \iint_D f \circ \mathbf{T}(u,v) \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} du \wedge dv. \tag{13.5.8}$$

13.5.2 上同调群

考虑 $\Lambda^k(U)$ 中的子集:

$$\Lambda^k_\infty(U) := \left\{\omega \in \Lambda^k(U) \text{ 满足 } a_{i_1\cdots i_k} \in C^\infty(U)\right\}. \tag{13.5.9}$$

定义**外微分算子 (exterior differential)**

$$\mathbf{d} : \Lambda^k_\infty(U) \longrightarrow \Lambda^{k+1}_\infty(U) \tag{13.5.10}$$

为

$$\mathbf{d}\left(\sum_{|I|=k} a_I(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}^I\right) := \sum_{|I|=k} da_I(\boldsymbol{x}) \wedge d\boldsymbol{x}^I = \sum_{|I|=k, 1\le j\le n} \frac{\partial a_I}{\partial x^j}(\boldsymbol{x}) dx^j \wedge d\boldsymbol{x}^I.$$

比如对任何光滑函数 f 有 $\mathbf{d}f = df$ (通常的全微分), 而对 1-形式有

$$\mathbf{d}\left(\sum_{1\le i\le n} a_i dx^i\right) = \sum_{1\le i<j\le n} \left(\frac{\partial a_j}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^j}\right) dx^i \wedge dx^j.$$

因为易证 $\mathbf{d}^2 = 0$ 所以我们得到**复形 (complex)** $(\Lambda^\bullet(U), d)$:

$$\cdots \xrightarrow{\mathbf{d}} \Lambda^k_\infty(U) \xrightarrow{\mathbf{d}} \Lambda^{k+1}_\infty(U) \xrightarrow{\mathbf{d}} \cdots$$

定义 U 的**k 阶上同调群 (k-th cohomology group)** 为

$$H^k(U) := \frac{\mathrm{Ker}(d|_{\Lambda^k_\infty(U)})}{\mathrm{Im}(d|_{\Lambda^{k-1}_\infty(U)})}. \tag{13.5.11}$$

称 $\omega \in \Lambda^k_\infty(U)$ 是**闭的 (closed)** 如果 $\mathbf{d}\omega = 0$, 是**正合的 (exact)** 如果 $\omega = \mathbf{d}\eta$ 对某个 $\eta \in \Lambda^{k-1}_\infty(U)$ 成立. 显然正合微分形式必是闭的.

例 13.14

考虑 $\mathbb{R}^2$ 上的 1-形式 $\alpha = [2x + y\cos(xy)]\,dx + [x\cos(xy)]\,dy$. 如果 $\alpha = df$, 则

$$f_x = 2x + y\cos(xy), \quad f_y = x\cos(xy)$$

从而得到 $f(x,y) = x^2 + \sin(xy)$, 差一个加法常数. 因此 α 是正合的. ♠

例 13.15

考虑 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上的 1-形式

$$\alpha = \frac{1}{2\pi}\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}.$$

易证 $d\alpha = 0$ 但是 α 不是正合的. 否则的话若 $\alpha = df$ 对某个光滑函数 f 成立, 则根据下章中的 Stokes 公式得到

$$1 = \int_{\mathbf{S}^1} \alpha = \int_{\mathbf{S}^1} df = \int_{\partial \mathbf{S}^1} f = 0.$$

回忆到区域 $U \subset \mathbb{R}^n$ 称为关于 $\mathbf{0}$ 是**星型的**如果 $\mathbf{0} \in U$ 且对任意 $\boldsymbol{x} \in U$ 都有 $\overline{\mathbf{0}\boldsymbol{x}} \subset U$. 注意到凸区域必是 (关于任意点是) 星型的, 但是反之不一定成立.

对任意 k-形式 $\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} a_{i_1 \cdots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ 定义映射

$$\mathbf{P} : \Lambda^k_\infty(U) \longrightarrow \Lambda^{k-1}_\infty(U) \tag{13.5.12}$$

为

$$\mathbf{P}\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \sum_{1 \le j \le k} (-1)^{j-1} \left[\int_0^1 t^{k-1} a_{i_1 \cdots i_k}(t\boldsymbol{x}) dt\right] dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_j}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

则可证

$$(\mathbf{d} \circ \mathbf{P} + \mathbf{P} \circ \mathbf{d})\omega = \omega. \tag{13.5.13}$$

如果 ω 是闭的则 (13.5.13) 告诉我们 $\omega = \mathbf{d}(\mathbf{P}\omega)$ 从而 ω 是正合的. 作为直接推论

$$H^k(U) = 0 \ (1 \le k \le n) \quad \text{对任意星型区域 } U \text{ 都成立.} \tag{13.5.14}$$

练习 13.4

(1) 验证 (13.5.13).

(2) 证明**定理 13.17**.

(3) 证明 $H^0(U) = \mathbb{R}$, 对任何区域 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 都成立.

(4) 证明不存在 $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ z = 0\}$ 上函数 F 满足

$$\mathbf{grad}(F) = f,$$

这里

$$f(x, y, z) := \left(\frac{-2xz}{z^2 + (x^2 + y^2 - 1)^2}, \frac{-2yz}{z^2 + (x^2 + y^2 - 1)^2}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{z^2 + (x^2 + y^2 - 1)^2}\right).$$

(**提示:** 考虑曲线 $\gamma(t) = (\sqrt{1 + \cos t}, 0, \sin t), -\pi \le t \le \pi$, 并计算 $\frac{d}{dt} F(\gamma(t))$.)

13.6 重积分的应用

本节给出下章需要用到的曲面面积的计算.

13.6.1 曲面面积

假设曲面为

$$\Sigma : x = x(u, v), \ y = y(u, v), \ z = z(u, v), \quad (u, v) \in D,$$

或写成向量值函数

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),\quad (u,v)\in D,$$

这里 D 是具有光滑或分段光滑边界 ∂D 的有界闭区域, $\boldsymbol{r}:D\to\Sigma$ 是单的, $x,y,z\in C^1$, 且 Jacobi 矩阵

$$\mathbf{Jac}(\boldsymbol{r})=\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix} \tag{13.6.1}$$

是满秩的.

(1) 仿照之前的**几何直观性**, 对任意 $(u_0,v_0)\in D$ 且 $\Delta u,\Delta v$ 充分小使得 $(u_0+\Delta u,v_0+\Delta v)\in D$, 考虑 Σ 中的 4 个点:

$$\begin{aligned} P_1 &= \boldsymbol{r}(u_0,v_0) &&= \boldsymbol{r}_0, \\ P_2 &= \boldsymbol{r}(u_0+\Delta u,v_0) &&\approx \boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0)\Delta u, \\ P_3 &= \boldsymbol{r}(u_0+\Delta u,v_0+\Delta v), \\ P_4 &= \boldsymbol{r}(u_0,v_0+\Delta v) &&\approx \boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)\Delta v. \end{aligned}$$

则这 4 个点围成的面积

$$\Delta S\approx\left|\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_2P_4}\right|=|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|(u_0,v_0)\Delta u\Delta v.$$

故

$$dS=|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|dudv. \tag{13.6.2}$$

(2) 由此得到光滑曲面的面积

$$S=\iint_D|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|dudv. \tag{13.6.3}$$

定理 13.18

在上述假设条件下, 曲面 Σ 的面积为

$$S=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\,dudv, \tag{13.6.4}$$

这里

$$\begin{aligned} E &:= \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u &&= x_u^2+y_u^2+z_u^2, \\ F &= \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v &&= x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v, \\ G &= \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v &&= x_v^2+y_v^2+z_v^2, \end{aligned} \tag{13.6.5}$$

是曲面的 **Gauss 系数 (Gauss coefficients)**.

♡

证: 根据 $\boldsymbol{r}_u=(x_u,y_u,z_u)$ 和 $\boldsymbol{r}_v=(x_v,y_v,z_v)$ 得到

$$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}=\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right).$$

直接计算可得

$$|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|^2 = EG - F^2. \quad \square$$

如果曲面 Σ 的方程为 $z = f(x, y), (x, y) \in D$, 则

$$\boldsymbol{r} = (x, y, f(x, y)).$$

因此得到

$$\boldsymbol{r}_x = (1, 0, f_x), \quad \boldsymbol{r}_y = (0, 1, f_y)$$

和

$$E = 1 + f_x^2, \quad F = f_x f_y, \quad G = 1 + f_y^2, \quad EG - F^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2.$$

此时 (13.6.4) 变成

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy = \iint_D \sqrt{1 + |\mathbf{grad}(f)|^2}\, dxdy. \tag{13.6.6}$$

假设曲面 Σ 的方程为 $H(x, y, z) = 0$, $H \in C^1$, 且 $H_z \neq 0$, Σ 在 xy 平面上的投影为 D. 此时根据隐函数定理得到 $z = f(x, y)$ 且

$$f_x = -\frac{H_x}{H_z}, \quad f_y = -\frac{H_y}{H_z}.$$

利用 (13.6.6) 得到

$$S = \iint_D \frac{|\mathbf{grad}(H)|}{|H_z|}\, dxdy. \tag{13.6.7}$$

例 13.16

(1) 求曲面 $z = 1 - x^2 - y^2$ 在 xoy 平面上方部分的面积.

解: 计算得到

$$\begin{aligned} S &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1 + |\mathbf{grad}(f)|^2}\, dxdy, \quad f(x, y) := 1 - x^2 - y^2 \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy \;=\; 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2}\, r dr \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^4 \sqrt{1 + t}\, dt \;=\; \frac{3\pi}{8}(5\sqrt{5} - 1). \quad \square \end{aligned}$$

(2) 计算球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 被柱面 $x^2 + y^2 \leq ax$ 所截曲面的面积.

解: 根据对称性得到

$$\begin{aligned} S &= 4 \iint_{x, y \geq 0, x^2+y^2 \leq ax} \frac{|\mathbf{grad}(H)|}{|H_z|}\, dxdy, \quad H := x^2 + y^2 + z^2 - a^2 \\ &= 4 \iint_{x, y \geq 0, x^2+y^2 \leq ax} \frac{2a}{2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy \\ &= 4a \iint_{x, y \geq 0, x^2+y^2 \leq ax} \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \\ &= 4a \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \frac{r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} \;=\; 4a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right). \quad \square \end{aligned}$$

♠

13.6.2 极小曲面

我们利用 (13.6.6) 来推出**极小曲面方程 (minimal surface equation)**, 先引入如下记号. 对向量值函数 $\boldsymbol{F}(x,y)=(u(x,y),v(x,y))$ 定义其**散度 (divergence)** 为

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{F}):=u_x+v_y.$$

这样二元函数 $f(x,y)$ 的 Laplace 算子可写成

$$\Delta f=f_{xx}^2+f_{yy}^2=\mathbf{div}(\mathbf{grad}(f)).$$

为了方便, 我们把 (13.6.6) 中的面积显示地表示为 $S=S(f)$. **极小曲面**是指在所有固定边界值的 C^1 二元函数中找到使 $S(f)$ 为最小的 f. 现在固定二元函数 f 并作小扰动, 即考虑二元函数 $f+\epsilon h$. 因为函数 f 和 $f+\epsilon h$ 具有固定的边界值, 所以 $h|_{\partial D}=0$. 计算

$$\begin{aligned}S(f+\epsilon h) &= \iint_D \sqrt{1+|\mathbf{grad}(f+\epsilon h)|^2}\,dudv\\
&= \iint_D \sqrt{1+|\mathbf{grad}(f)|^2+2\epsilon\langle \mathbf{grad}(f),\mathbf{grad}(h)\rangle+\epsilon^2\mathbf{grad}(h)|^2}\,dudv\\
&= \iint_D \left(\sqrt{1+|\mathbf{grad}(f)|^2}+\frac{2\epsilon\langle \mathbf{grad}(f),\mathbf{grad}(h)\rangle+\epsilon^2|\mathbf{grad}(h)|^2}{2\sqrt{1+|\mathbf{grad}(f)|^2}}\right)dudv+o(\epsilon^2)\\
&= S(f)+\epsilon\iint_D \frac{\langle \mathbf{grad}(f),\mathbf{grad}(h)\rangle}{\sqrt{1+|\mathbf{grad}(f)|^2}}dudv+o(\epsilon).\end{aligned}$$

如果 f 是使 $S(f)$ 达到极小, 则

$$S'_h(f):=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{S(f+\epsilon h)-S(f)}{\epsilon}=0,\quad 任意\ h\in C^1(D)\ 且\ h|_{\partial D}=0$$

即

$$0=\iint_D \frac{\langle \mathbf{grad}(f),\mathbf{grad}(h)\rangle}{\sqrt{1+|\mathbf{grad}(f)|^2}}dudv=\iint_D -h\,\mathbf{div}\left(\frac{\mathbf{grad}(f)}{\sqrt{1+|\mathbf{grad}(f)|^2}}\right)dudv.$$

这里最后一步用到了 Stokes 公式或散度公式. 最后得到极小曲面方程

$$0=\mathbf{div}\left(\frac{\mathbf{grad}(f)}{\sqrt{1+|\mathbf{grad}(f)|^2}}\right). \tag{13.6.8}$$

练习 13.5

验证 (a) $f(x,y)=\tan^{-1}(y/x)$, (b) $f(x,y)=\cosh^{-1}\sqrt{x^2+y^2}$, (c) $f(x,y)=\ln(\cos y/\cos x)$ 都满足极小曲面方程 (13.6.8).

极小曲面的文献众多, 有兴趣的可参阅如下专著和论文:

- Colding, Tobias Holck; Minicozzi, William P., II. *A course in minimal surfaces*, Graduate Studies in Mathematics, **121**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011. xii+313 pp. ISBN: 978-0-8218-5323-8
- Dierkes, Ulrich; Hildebrandt, Stefan; Sauvigny, Friedrich. *Minimal surfaces*, Revised and enlarged second edition, With assistance and contributions by A. Küster and R. Jakob, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **339**. Springer, Heidelberg,

2010. xvi+688 pp. ISBN: 978-3-642-11697-1

- Dierkes, Ulrich; Hildebrandt, Stefan; Tromba, Anthony. *Regularity of minimal surfaces*, Revised and enlarged second edition, With assistance and contributions by A. Küster, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **340**. Springer, Heidelberg, 2010. xviii+623 pp. ISBN: 978-3-642-11699-5
- Dierkes, Ulrich; Hildebrandt, Stefan; Tromba, Anthony. *Global analysis of minimal surfaces*, Revised and enlarged second edition, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **341**. Springer, Heidelberg, 2010. xvi+537 pp. ISBN: 978-3-642-11705-3
- Giusti, Enrico. *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, Monographs in Mathematics, **80**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1984. xi+240 pp. ISBN: 0-8176-3153-4
- Meeks, William H., III; Pérez, Joaquin. *A survey on classical minimal surface theory*, University Lecture Series, **60**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012. x+182 pp. ISBN: 978-0-8218-6912-3
- Nitsche, Johannes C. C. *Lectures on minimal surfaces*, Vol. **1**, Introduction, fundamentals, geometry and basic boundary value problems. Translated from the German by Jerry M. Feinberg. With a German foreword. Cambridge University Press, Cambridge, 1989. xxvi+563 pp. ISBN: 0-521-24427-7
- Osserman, Robert. *A survey of minimal surfaces*, Van Nostrand Reinhold Co., New York-London-Melbourne, 1969 iv+159 pp.
- Pitts, John T. *Existence and regularity of minimal surfaces on Riemannian manifolds*, Mathematical Notes, **27**, Princeton University Press, Princeton, N. J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1981. iv+330 pp. ISBN: 0-691-08290-1
- Colding, Tobias Holck; Minicozzi, William P., II. *The space of embedded minimal surfaces of fixed genus in a* 3*-maniufold, I-V*, Ann. of Math., **160**(2004), 27-68, 69-92, 523-572, 573-615; **181**(2015), 1-153.

13.6.3 * 欧式空间中的曲面

在本小节我们将 $\mathbb{R}^3$ 中参数化曲面的定义推广到 $\mathbb{R}^n$ 中一般曲面的定义.

定义 13.6. k 维曲面

$\mathbb{R}^n$ 中的**k 维曲面 (k-dimensional surface)** 是指集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 使得对任意 $\boldsymbol{x} \in S$ 都存在 S 中的邻域 U, 即 $U = S \cap \mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}, r)$, 和同胚映射 $\varphi : \mathbb{R}^k \to U$. 称 (U, φ) 为曲面 S 的**局部坐标卡 (local chart)**.

因为函数 $\frac{2}{\pi}\arcsin x$ 给出了 $\mathbb{R}$ 和 $(-1,1)$ 的一个同胚映射, 所以我们可以把同胚映射 $\varphi : \mathbb{R}^k \to U$ 写成 $\varphi : (-1,1)^k \to U$.

称 $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\geq 1}$ 为曲面 S 的**坐标集 (atlas)** 若对任意 $i \geq 1$, $\varphi_i : (-1,1)^k \to U_i$ 是局部坐标卡且 $S = \cup_{i\geq 1} U_i$.

k 维曲面 S 是$\boldsymbol{C^m}$ 的, $m \geq 1$, 如果存在 S 的坐标集 $\{(U_i, \boldsymbol{\varphi}_i)\}_{i\geq 1}$ 其中 $\boldsymbol{\varphi}_i$: $(-1,1)^k \to U \subset \mathbb{R}^n$ 是 C^m 的且在每一点的秩都是 k.

若把映射 $\boldsymbol{\varphi}_i : (-1,1)^k \to U \subseteq \mathbb{R}^n$ 记成

$$\boldsymbol{\varphi}_i = (\varphi_i^1, \cdots, \varphi_i^n), \quad \varphi_i^j : (-1,1)^k \longrightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

则 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 是 C^k 的就等价于说每个 φ_i^j 都是 C^m 的. 而映射 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 在 $\boldsymbol{t} = (t^1, \cdots, t^k)$ 上的秩就定义为矩阵

$$\begin{bmatrix} (\varphi_i^1)_{t^1} & \cdots & (\varphi_i^1)_{t^k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_i^n)_{t^1} & \cdots & (\varphi_i^n)_{t^k} \end{bmatrix}$$

在 $\boldsymbol{t}$ 处的秩.

例 13.17. (曲面的例子)

(1) 假设 $F^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n-k$, 是 C^m 的, 并定义集合

$$S = \left\{ \boldsymbol{x} = (x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n : F^1(\boldsymbol{x}) = \cdots = F^{n-k}(\boldsymbol{x}) = 0 \right\}.$$

如果 $\boldsymbol{F} = (F^1, \cdots, F^{n-k})$ 在 S 上每一点的秩都是 $n-k$, 则 $S = \emptyset$ 或者 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 k 维 C^m 曲面.

证: 这是因为根据隐函数定理, **定理 12.12**, 在每点 $\boldsymbol{x}_0 \in S$ 附近我们得到

$$x^{k+1} = f^{k+1}(x^1, \cdots, x^k), \quad \cdots, \quad x^n = f^n(x^1, \cdots, x^k),$$

这里 $f^{k+1}, \cdots, f^n \in C^m$. 这样就得到了局部坐标卡映射

$$\boldsymbol{t} = (t^1, \cdots, t^k) \longmapsto (x^1, \cdots, x^k, x^{k+1}, \cdots, x^n) = (\boldsymbol{t}, f^{k+1}(\boldsymbol{t}), \cdots, f^n(\boldsymbol{t})).$$

因此 S 是 k 维 C^m 曲面. □

(2) 若考虑函数

$$F(x^1, \cdots, x^n) := \sum_{1\leq i\leq n} (x^i)^2 - r^2, \quad \boldsymbol{x} = (x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n, \ r > 0,$$

根据 (1) 可知

$$S := \mathrm{Ker}(F) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x}|^2 = r^2 \right\}, \quad r > 0,$$

是 $\mathbb{R}^n$ 中的 $(n-1)$ 维光滑曲面, 即球面 $\mathbb{S}_r^{n-1} = \mathbb{S}^{n-1}(\boldsymbol{0}, r)$ 是我们意义下的光滑曲面.

(3) 环面 $\mathbb{T}^2$.

(4) **Möbius 带**[a] **(Möbius band)**.

(5) **Klein 瓶**[b] **(Klein bottle)**.

[a] August Ferdinand Möbius, 1790 年 11 月 17 日 - 1868 年 9 月 26 日, 今德国萨克森- 安哈尔特州舒尔佛特人, 德国数学家和天文学家. 他最出名的工作是发现了不可定向的二维曲面 Möbius 带, 此外有众多数学概念与他有关: Möbius 变换、Möbius 函数、Möbius 反演公式等.

[b] Christian Felix Klein, 1849 年 4 月 25 日 - 1925 年 6 月 22 日, 今德国北莱茵- 威斯特法伦州杜塞尔多夫人, 德国杰出的数学家. Klein 是第一个认识到不需要用曲面来获得非欧几何模型的人 (1871). 在

1872 年, 他发表了著名的 Erlangen 纲领, 在演说《Vergleichende betrachtungen über neuere geometrische forschungen》中利用对称群来分类几何学.

H. Whitney[3]在 1936 年证明了任何 k 维光滑曲面都可以微分同胚地映到 $\mathbb{R}^{2k+1}$ 中的曲面上.

曲面的定向. 假设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 k 维光滑曲面. 任取两个坐标卡 (U_i, φ_i) 和 (U_j, φ_j) 满足 $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. 从而得到两个微分同胚映射

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j),$$

和

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j).$$

称两个局部坐标卡 (U_i, φ_i) 和 (U_j, φ_j) 是**相容的 (consistent)** 如果 $U_i \cap U_j = \emptyset$, 或者 $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ 且 $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ 与 $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ 的 Jacobian 矩阵都是正定的.

(1) 曲面 S 上的坐标集称为**定向坐标集 (orienting atlas)** 如果它是由互相相容的局部坐标卡所构成.

(2) 称曲面 S 是**可定向的 (orientable)** 如果它有一个定向坐标集, 否则的话称为**不可定向的 (nonorientable)**.

(3) 曲面 S 上两个定向坐标集是**等价的 (equivalent)** 如果它们的并仍旧是 S 的定向坐标集.

若记 $\mathfrak{O}$ 是曲面 S 上的所有定向坐标集的全体, 则定向坐标集等价就构成了 $\mathfrak{O}$ 中的等价关系 $\sim$. 这是因为如果

$$\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\geq 1} \sim \{(V_j, \psi_j)\}_{j\geq 1}, \quad \{(V_j, \psi_j)\}_{j\geq 1} \sim \{(W_k, \phi_k)\}_{k\geq 1},$$

则根据等式

$$\varphi_i \circ \phi_k^{-1} = \left(\varphi_i \circ \psi_j^{-1}\right) \circ \left(\psi_j \circ \phi_k^{-1}\right)$$

可知 $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\geq 1} \sim \{(W_k, \phi_k)\}_{k\geq 1}$.

因此把 $\mathfrak{O}/\sim$ 中的等价类称为曲面 S 的**坐标集定向类 (orientation class of atlases)** 或简称为曲面的**定向 (orientation)**.

(4) 曲面 S 称为**定向曲面 (oriented surface)** 如果 S 上有一个定向.

命题 13.10

可定向的连通光滑曲面 S 上有且仅有两个定向.

证: 具体证明细节会在微分流形这章展开. □

[3]Hassler Whitney, 1907 年 3 月 23 日 - 1989 年 5 月 10 日, 美国纽约市人, 美国数学家. 1983 年 Wolf 奖得主. 他在 1936 年证明了著名的 Whitney 嵌入和浸入定理; 他是上同调理论、示性类理论 (Stiefel - Whitney 类) 的主要发展者之一; 他在 1950 年代主要研究奇异空间的拓扑和光滑映射的奇点理论.

例 13.18

(1) $\mathbb{R}^n$ 是定向曲面. 任取 $\mathbb{R}^n$ 上的两个标架 $\{\boldsymbol{e}_i\}_{1\le i\le n}$ 和 $\{\boldsymbol{e}'_i\}_{1\le i\le n}$, 则得到

$$\boldsymbol{e}'_i=\sum_{1\le j\le n}a_{ij}\boldsymbol{e}_j,\quad 1\le i\le n,\quad A=[a_{ij}]_{1\le i,j\le n}.$$

因此 $\det A\neq 0$ 且所有标架根据 $\det A>0$ 或 $\det A<0$ 分为两类, 使得每一类中的任何两个标架间的转移矩阵都是正定的. 这样就验证了**性质 13.10**. 把每个等价类里的标架叫做 $\mathbb{R}^n$ 的**定向标架 (orienting frame)**.

(2) Möbius 带是不可定向的曲面. 把矩形扭转 180 度后, 再将两侧边粘合. 这样就得到了著名的 Möbius 带.

(3) Klein 瓶也是不可定向的曲面. 把矩形上下两边粘合得到圆柱体, 再把该圆柱体的上下底面扭转 180 度后粘合. 这样就得到了著名的 Klein 带. 在三维空间里无法实现这个曲面, 而在四维空间就可以了.

(4) $\mathbb{S}^k\subset\mathbb{R}^n$ 是可定向的曲面.

(5) 环面 $\mathbb{T}^2$ 是可定向的曲面. 把矩形上下两边粘合得到圆柱体, 再把该圆柱体的上下底面粘合. 这样就得到了环面.

现在假设 S 是可定向的 $(n-1)$ 维曲面且嵌入到 $\mathbb{R}^n$ 中, 并令 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上一个固定的定向标架. 令 $\mathbf{T}_{\boldsymbol{x}}S$ 表示 S 在 $\boldsymbol{x}\in S$ 处的 $(n-1)$ 维切平面, 而 $\mathbf{n}$ 表示和 $\mathbf{T}_{\boldsymbol{x}}S$ 垂直的单位向量 (即曲面 S 在 $\boldsymbol{x}\in S$ 处的法向量). 在 $\mathbf{T}_{\boldsymbol{x}}S$ 上取标架 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1}$ 使得 $(\mathbf{n},\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1})$ 和 $(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$ 属于 $\mathbb{R}^n$ 上的相同定向类. 这样不仅确定了 $\mathbf{T}_{\boldsymbol{x}}S$ 上的定向类, 而且, 给定 $\mathbf{T}_{\boldsymbol{x}}S$ 上的定向类, 可定向的连通曲面的定向可以由法向量 $\mathbf{n}$ 所确定.

可以证明$\mathbb{R}^n$ 中 $(n-1)$ 维嵌入曲面的定向等价于曲面上非零连续法向量场的存在性. 在几何里, 我们把其上存在单位连续法向量场的 $\mathbb{R}^n$ 中的连通 $(n-1)$ 维曲面称为**双侧曲面 (two-sided surface)**, 否则的话称为**单侧曲面 (one-sided surface)**. 比如, $\mathbb{R}^3$ 中的球面、环面和平面都是双侧曲面, 而 Möbius 带是单侧曲面.

任给 $\mathbb{R}^n$ 中的连通光滑曲面 S 和任意的点 $\boldsymbol{x}\in S$, 我们可以在 $\boldsymbol{x}$ 附近把曲面局部参数化. 在切平面 $\mathbf{T}_{\boldsymbol{x}}S$ 中, 我们利用曲面坐标系统的坐标线来构造一组标架 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1}$ 使它们和坐标线相切.

如果 $\mathbb{R}^n$ 已经是定向的 (取定向标为 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$) 且曲面 S 的定向已通过单位连续法向量场所确定了, 我们选择该法向量场在 $\boldsymbol{x}$ 处的单位向量 $\mathbf{n}$ 并比较标架 $(\mathbf{n},\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1})$ 和标架 $(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$. 如果这两个标架在同一个定向类中, 那么通过曲面局部参数化而确定的局部坐标卡就给出了曲面 S 的已知定向. 如果这两个标架不在同一个定向类中, 那么通过曲面局部参数化而确定的局部坐标卡就给出了曲面 S 上已知定向的反向; 但是此时如果交换坐标的次序就得到了曲面 S 的已知定向.

比如考虑 $\mathbb{R}^2$ 中的曲线情形. 此时定向定义为曲线的切向量场, 并称为**物体沿着曲线的方向 (direction of motion along the curve)**. 假设 $\mathbb{R}^2$ 的定向标架已给定且 C 是闭光滑曲线, 那么由闭曲线 C 所围区域 D 的**环路正方向 (positive direction of circuit)** 定义为标架

$(\mathbf{n},\mathbf{v})$ 使得它和所给 $\mathbb{R}^2$ 的定向标架相容, 这里 $\mathbf{n}$ 是闭曲线 C 相对于区域 D 的外法向量而 $\mathbf{v}$ 是曲线的切向量. 这就给出了区域 D 的一个定向, 即沿着 $C=\partial D$ 走一圈区域 D 总在左侧 – **传统定义**.

曲面的边界及其定向. 在 $\mathbb{R}^k$ 中考虑半平面

$$\mathbb{H}^k := \{\boldsymbol{t}=(t^1,\cdots,t^k)\in\mathbb{R}^k : t^k\geq 0\}. \tag{13.6.9}$$

超平面

$$\partial\mathbb{H}^k := \{\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^k : t^k=0\} \tag{13.6.10}$$

称为 $\mathbb{H}^k$ 的**边界 (boundary)**. 开集 $\mathring{\mathbb{H}}^k := \mathbb{H}^k\setminus\partial\mathbb{H}^k$ 是 $\mathbb{R}^k$ 中的 k 维曲面.

(1) 称集合 $S\subset\mathbb{R}^n$ 是**带边 k 维曲面 (k-dimensional surface with boundary)** 如果对每个点 $\boldsymbol{x}\in S$ 都存在 S 中的邻域 U 和同胚映射 $\boldsymbol{\varphi}:\widetilde{U}\to U$, 这里 $\widetilde{U}=\mathbb{R}^k$ 或者 $\widetilde{U}=\mathbb{H}^k$. 如果 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\in\partial\mathbb{H}^k$, 则把点 $\boldsymbol{x}$ 称为带边曲面 S 的**边界点 (boundary point)**. 边界点的全体称为带边曲面 S 的**边界 (boundary)** 并记为 ∂S.

因为 $\mathbb{R}^k\cong(-1,1)^k$, 我们也可以用

$$(-1,1)^k_{\mathbf{H}} := \left\{\boldsymbol{t}=(t^1,\cdots,t^k)\in\mathbb{R}^k : t^k>0\right\}$$

来代替 $\mathbb{H}^k$.

(2) 显然 $\mathbb{H}^k$ 按照定义 (1) 是 k 维带边曲面且其边界就是 (13.6.10). 注意到

$$\partial\mathbb{H}^k=\mathbb{R}^{k-1},\quad k\geq 1. \tag{13.6.11}$$

这里我们把 $\mathbb{R}^0$ 规定为单点集且把 $\partial\mathbb{R}^0$ 看成是空集.

(3) 同样我们可以定义**带边 C^m 曲面**, 不过要注意的是边界点上的导数往往只有单侧的.

(4) 带边 C^m 曲面 S 的边界 ∂S, 就其本身来说也是一个 C^m 曲面、无边界的且 $\dim\partial S=\dim S-1$. 实际上, 如果, 这里 $k=\dim S$,

$$\{(\mathbb{H}^k,\boldsymbol{\varphi}_i,U_i)\}_{i\geq 1}\cup\{(\mathbb{R}^k,\boldsymbol{\psi}_i,V_i)\}_{i\geq 1}$$

是带边曲面 S 的一个坐标集, 则显然

$$\{(\mathbb{R}^{k-1},\boldsymbol{\varphi}_i|_{\partial\mathbb{H}^k=\mathbb{R}^{k-1}},\partial U_i)\}_{i\geq 1}$$

就构成了 ∂S 的一个坐标集.

例 13.19

(1) n 维闭球 $\overline{\mathbb{B}^n}\equiv\overline{\mathbb{B}}^n$ 是 n 维带边曲面, $\partial\overline{\mathbb{B}}^n=\mathbb{S}^{n-1}$.

(2) n 维闭立方体 $\overline{(-1,1)^k}=[-1,1]^k$ 是 n 维带边曲面, 且拓扑同胚于 $\overline{\mathbb{B}}^n$.

(3) Möbius 带是 $\mathbb{R}^3$ 中的 2 维带边曲面, 且其边界是 $\mathbb{R}^3$ 中的**扭结 (knot)**, 即和 $\mathbb{S}^1$ 拓扑同胚的 $\mathbb{R}^3$ 中的闭曲线. ♠

令 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是 $\mathbb{R}^k$ 的标准定向正交标架 (诱导出 Cartesian 坐标 $x^1,\cdots,x^n$), 则 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_{n-1}$ 定义了 $\mathbb{H}^k$ 边界 $\partial\mathbb{H}^n=\mathbb{R}^{n-1}$ 的一个定向.

命题 13.11

可定向的光滑带边曲面 S 的边界 ∂S, 就其本身来说也是可定向的光滑曲面.

证: 假设 $k = \dim S$, 我们已经证明了如果

$$\mathscr{A} := \{(\mathbb{H}^k, \boldsymbol{\varphi}_i, U_i)\}_{i\geq 1} \cup \{(\mathbb{R}^k, \boldsymbol{\psi}_i, V_i)\}_{i\geq 1}$$

是带边曲面 S 的一个定向坐标集, 则显然

$$\partial\mathscr{A} := \{(\mathbb{R}^{k-1}, \boldsymbol{\varphi}_i|_{\partial\mathbb{H}^k=\mathbb{R}^{k-1}}, \partial U_i)\}_{i\geq 1}$$

构成了 ∂S 的一个坐标集. 下证 $\partial\mathscr{A}$ 是 ∂S 的一个定向坐标集. 考虑光滑微分同胚映射

$$\boldsymbol{\psi} : U_{\mathbb{H}^k}(\boldsymbol{t}_0) \longrightarrow U_{\mathbb{H}^k}(\widetilde{\boldsymbol{t}}_0), \quad \boldsymbol{t} \longmapsto \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{t}) = \widetilde{\boldsymbol{t}},$$

其中 $\boldsymbol{t}_0, \widetilde{\boldsymbol{t}}_0 \in \partial\mathbb{H}^k$, $U_{\mathbb{H}^k}(\cdot)$ 表示点 $\cdot$ 在 $\mathbb{H}^k$ 中的邻域. 如果 $\mathbf{Jac}_{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{\psi}) > 0$ 对任意 $\boldsymbol{t} \in U_{\mathbb{H}^k}(\boldsymbol{t}_0)$ 都成立, 我们将证明诱导的微分同胚映射

$$\hat{\boldsymbol{\psi}} := \boldsymbol{\psi}|_{\partial U_{\mathbb{H}^k}(\boldsymbol{t}_0)} : U_{\partial\mathbb{H}^k}(\boldsymbol{t}_0) = \partial U_{\mathbb{H}^k}(\boldsymbol{t}_0) \longrightarrow U_{\partial\mathbb{H}^k}(\widetilde{\boldsymbol{t}}_0) = \partial U_{\mathbb{H}^k}(\widetilde{\boldsymbol{t}}_0),$$

的 Jacobian 矩阵在 $U_{\partial\mathbb{H}^k}(\boldsymbol{t}_0)$ 上也是正定的. 对任意 $\boldsymbol{t} \in U_{\partial\mathbb{H}^k}(\boldsymbol{t}_0)$, 我们有 $t^k = 0$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{t})$ 满足 $\widetilde{t}^k = \psi^k(\boldsymbol{t}) = 0$, 这里 $\boldsymbol{\psi} = (\psi^1, \cdots, \psi^k)$. 直接计算得到

$$\mathbf{Jac}_{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{\psi}) = \begin{bmatrix} \psi_0^1 & \cdots & \psi_{k-1}^1 & \psi_k^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ \psi_1^{k-1} & \cdots & \psi_{k-1}^{k-1} & \psi_k^{k-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \psi_k^k \end{bmatrix}$$

这是因为 $0 = \psi^k(t^1, \cdots, t^{k-1}, 0)$, 从而得到

$$\left|\mathbf{Jac}_{\boldsymbol{t}}(\hat{\boldsymbol{\psi}})\right| = \psi_k^k(\boldsymbol{t}) \left|\mathbf{Jac}_{\boldsymbol{t}}(\hat{\boldsymbol{\psi}})\right|, \quad \boldsymbol{t} \in U_{\partial\mathbb{H}^k}(\boldsymbol{t}_0).$$

如果对 $\boldsymbol{t} = (t^1, \cdots, t^{k-1}, 0) \in U_{\partial\mathbb{H}^k}(\boldsymbol{t}_0)$ 有 $\psi_k^k(t^1, \cdots, t^{k-1}, 0) \leq 0$, 我们得到对满足 $(\boldsymbol{t}, t^k) \in U_{\mathbb{H}^k}(\boldsymbol{t}_0)$ 的任意 $t^k > 0$ 有

$$\psi^k(t^1, \cdots, t^{k-1}, t^k) \leq \psi^k(t^1, \cdots, t^{k-1}, 0) = 0,$$

即 $\widetilde{\boldsymbol{t}} := \boldsymbol{\psi}(t^1, \cdots, t^{k-1}, t^k) \in U_{\mathbb{H}^k}(\widetilde{t}_0)$ 但有 $\widetilde{t}^k \leq 0$, 矛盾! 故必有 $\psi_k^k(\boldsymbol{t}) > 0$ 对任何 $\boldsymbol{t} \in U_{\partial\mathbb{H}^k}(\boldsymbol{t}_0)$ 成立. 从而得到 $\mathbf{Jac}_{\boldsymbol{t}}(\hat{\boldsymbol{\psi}})$ 是正定的. □

假设 S 是 k 维光滑带边曲面. 如果

$$\mathscr{A} := \{(\mathbb{H}^k, \boldsymbol{\varphi}_i, U_i)\}_{i\geq 1} \cup \{(\mathbb{R}^k, \boldsymbol{\psi}_i, V_i)\}_{i\geq 1}$$

是 S 的一个定向坐标集, 则

$$\partial\mathscr{A} := \{(\mathbb{R}^{k-1}, \boldsymbol{\varphi}_i|_{\partial\mathbb{H}^k=\mathbb{R}^{k-1}}, \partial U_i)\}_{i\geq 1}$$

为边界 ∂S 的定向坐标集. 由此确定的 ∂S 上的定向称为 S 在 ∂S 上的**诱导定向 (induced orientation)**.

$\mathbb{R}^n$ 中的 k 维嵌入光滑带边曲面的定向可由曲面切空间的标架所定义. 考虑 $\boldsymbol{x}_0 \in \partial S$

处的切空间 $\mathbf{T}_{\boldsymbol{x}_0}S$ 并取 $\mathbf{T}_{\boldsymbol{x}_0}S$ 的定向正交标架 $(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n)$, 这里 $\boldsymbol{\xi}_n$ 是 $\boldsymbol{x}_0$ 处的外法向量 $\mathbf{n}$. 这样我们就得到了 $(k-1)$ 维切平面 $\mathbf{T}_{\boldsymbol{x}_0}\partial S$ 的一组定向标架 $(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{k-1})$, 从而就得到了 ∂S 的定向.

在 $\mathbb{R}^k$ 中我们考虑上半平面

$$\mathbb{H}^n_+ \equiv \mathbb{H}^k = \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^k : x^k > 0\}$$

和下半平面

$$\mathbb{H}^n_- := \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^k : x^k < 0\}.$$

则 $\mathbb{H}^k_\pm$ 都是 k 维光滑带边曲面且

$$\partial\mathbb{H}^k_+ = \partial\mathbb{H}^k_- =: \Gamma \cong \mathbb{R}^{k-1}.$$

注意到超平面 Γ 上有两个方向相反的诱导定向.

一般地, 如果定向 k 维光滑曲面 S 被某个 $(k-1)$ 维光滑曲面 Γ 分成两部分 S_+ 和 S_-, 则 $S_\pm$ 上的自然定向在 $\Gamma = \partial S_+ = \partial S_-$ 上诱导出两个方向相反的诱导定向.

最后来定义 $\mathbb{R}^n$ 中的分段光滑曲面.

定义 13.7. ($\mathbb{R}^n$ 中的分段光滑曲面)

我们规定把任何点都称为**0 维曲面 (zero dimensional surface)**.

1 维分段光滑曲线 (1 dimensional piecewise smooth surface) 是指 $\mathbb{R}^n$ 中的曲线, 从中去掉有限个或可数个 0 维曲面后, 剩下的部分是一些 1 维光滑曲面的并.

k 维曲面 $S\subseteq\mathbb{R}^n$ 称为是**分段光滑的 (piecewise smooth)** 如果把有限个或可数个 i 维分段光滑曲面去掉后, $0\le i\le k-1$, 剩下的部分是一些 k 维光滑曲面 S_i, 无边的或带边的, 的并. ♣

分段光滑曲面的例子很多, 比如平面角、矩形的边界、立方体的边界、直圆锥的边界等.

0 维分段光滑曲面的定向用 $+$ 或 $-$ 标记. 特别地, 如果闭区间 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 的定向是从 a 到 b, 则两个端点处的诱导定向记作 $(a,-) = -a$ 和 $(b,+) = +b$.

现在考虑 k 维分段光滑曲面 $S\subset\mathbb{R}^n$, 这里 $k\ge 1$. 假设 S_i 和 S_j 是定义 **13.7** 中的 k 维光滑曲面且是定向的, 并且假设 $\overline{S_i}\cap\overline{S_j}\ne\emptyset$. 如果对任意 $(k-1)$ 维光滑曲面棱 $\Gamma\subset\overline{S_i}\cap\overline{S_j}$, 其上由 S_i 和 S_j 分别诱导出来的两个诱导定向是相反的, 则称 S_i 和 S_j 的定向是**相容的 (consistent)**. 如果 $\overline{S_i}\cap\overline{S_j}$ 是空集或维数小于 $(k-1)$, 此时就认为 S_i 和 S_j 上的任何定向都是相容的.

定义 13.8. (可定向曲面)

k 维分段光滑曲面, $k\ge 1$, 是**可定向的 (orientable)** 如果, 相差有限个或可数个 i 维分段光滑曲面, $0\le i\le k-1$, 外, 它是一些 k 维可定向的光滑曲面 S_i 的并, 其中任

何两个曲面的定向都是相容的. ♣

比如 $\mathbb{R}^3$ 中的立方体的表面就是一个可定向的分段光滑曲面.

13.7 第一型曲线积分和曲面积分

本节引入第一型曲线和曲面积分, 来源于, 比如, 求曲线形细长构件的质量和曲面形构件的质量.

13.7.1 第一型曲线积分

假设 $L \subseteq \mathbb{R}^3$ 是一条可求长的连续曲线 (定义域为某个区间 $I \subseteq \mathbb{R}$), 起点和终点分别为 A 和 B (为了简便, 也记作 s_L 和 e_L). L 的分割 $\boldsymbol{T}$ 是指 L 上的有序有限点列[4]

$$A = P_0 \to P_1 \to \cdots \to P_{n-1} \to P_n = B.$$

令

$$\Delta s_i := \left|\widehat{P_{i-1}P_i}\right|, \quad ||\boldsymbol{T}|| := \max_{1\le i\le n} \Delta s_i.$$

定义 13.9

假设 L 和 $\boldsymbol{T}$ 如上定义, f 是定义在 L 上的有界函数. 任取 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i) \in \widehat{P_{i-1}P_i}$ 并考虑有限和

$$S(f,\boldsymbol{T},(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})) := \sum_{1\le i\le n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i.$$

如果 $||\boldsymbol{T}|| \to 0$ 时, $S(f,\boldsymbol{T},(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta}))$ 存在极限且极限和分割 $\boldsymbol{T}$ 及点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 无关, 称该极限

$$\int_L f\,ds \equiv \int_L f(x,y,z)\,ds := \lim_{||\boldsymbol{T}||\to 0} \sum_{1\le i\le n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i \tag{13.7.1}$$

为函数 f 在曲线 L 上的**第一型曲线积分 (type I line integral)**. 此时称 f 为**被积函数 (integrable function)** 而 L 称为**积分路径 (path of integration)**.

如果取函数 $f \equiv 1$ 则得到曲线的长度

$$\int_L ds = \lim_{||\boldsymbol{T}||\to 0} \sum_{1\le i\le n} \Delta s_i = |L|.$$

从而可把 ds 看成曲线上的弧微元. 若 A 和 B 重合, 即 L 是闭曲线, 使用如下记号

$$\oint_L f\,ds = \oint_L f(x,y,z)\,ds.$$

如果 $L \subset \mathbb{R}^3$ 落在某个平面内 (比如落在和 xoy 坐标面平行的平面内), 此时我们得到了**平面曲线的第一型曲线积分**的定义,

$$\int_L f\,ds \equiv \int_L f(x,y)\,ds := \lim_{||\boldsymbol{T}||\to 0} \sum_{1\le i\le n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i \tag{13.7.2}$$

♣

[4]但是这些 L 上的点在 I 上的原像不一定是有序的, 这是因为 L 有可能是自相交的或者是闭的.

如果 $\mathbb{R}^3$ 中两条可求长的连续曲线 L_1 和 L_2, 满足 $e_{L_1}=s_{L_2}$, 则可定义 L_1+L_2 使得新的曲线也是可求长的和连续的 (即把这两条曲线首尾拼接起来).

命题 13.12

(1) **(被积函数线性)** 如果函数 f,g 在 L 上的第一型曲线积分都存在, 则对任意常数 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 函数 $\alpha f+\beta g$ 在 L 上的第一型曲线积分也存在且

$$\int_L(\alpha f+\beta g)\,ds=\alpha\int_L f\,ds+\beta\int_L g\,ds. \tag{13.7.3}$$

(2) **(路径可加性)** 如果函数 f 在 L_1 和 L_2 上的第一型曲线积分都存在且 $e_{L_1}=s_{L_2}$, 则其在 L_1+L_2 上的第一型曲线积分也存在且

$$\int_{L_1+L_2}f\,ds=\int_{L_1}f\,ds+\int_{L_1}f\,ds. \tag{13.7.4}$$

♡

定理 13.19. (第一型曲线积分的计算公式)

假设 L 是分段光滑曲线

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t),\quad \alpha\le t\le\beta,$$

且函数 f 在 L 上连续. 则 f 在 L 上的第一型曲线积分存在且

$$\int_L f\,ds=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}dt. \tag{13.7.5}$$

若把曲线 L 写成向量形式 $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$, 则 (13.7.5) 可记成

$$\int_L f\,ds=\int_\alpha^\beta f(\boldsymbol{r}(t))|\boldsymbol{r}'(t)|\,dt. \tag{13.7.6}$$

♡

在给出证明之前, 首先对定理中的符号做些说明. L 是分段光滑曲线是指

$$L=L_1+L_2+\cdots+L_k,\quad L_i\in C^1([\alpha_i,\beta_i])\ \ (1\le i\le k),$$

这里曲线 $+$ 的定义如上, 且

$$\alpha=\alpha_0<\beta_0=\alpha_1<\beta_1=\alpha_2<\cdots<\beta_{k-1}=\alpha_k<\beta_k=\beta.$$

根据定积分可知

$$s_i=|C_i|=\int_{\alpha_i}^{\beta_i}|\boldsymbol{r}'(t)|\,dt$$

从而得到

$$s=\sum_{1\le i\le k}s_i=\sum_{1\le i\le k}\int_{\alpha_i}^{\beta_i}|\boldsymbol{r}'(t)|\,dt=\int_\alpha^\beta|\boldsymbol{r}'(t)|\,dt.$$

故 L 是可求长连续曲线. (13.7.5) 或 (13.7.6) 的积分定义为

$$\int_L f\,ds:=\sum_{1\le i\le k}\int_{L_i}f\,ds.$$

根据性质 **13.12** (2), 只要对每个 L_i 证明即可, 换句话说, 我们可以事先假设 L 是光滑曲线.

证: 根据上述说明, 不失一般性不妨假设 L 是光滑曲线. 前面已证

$$ds=|\boldsymbol{r}'(t)|\,dt.$$

利用积分的变量替换得到

$$\int_L f\,ds = \int_\alpha^\beta f(\boldsymbol{r}(t))\frac{ds}{dt}dt = \int_\alpha^\beta f(\boldsymbol{r}(t))|\boldsymbol{r}'(t)|\,dt. \quad \square$$

作为直接推论得到了**平面曲线的第一型曲线积分的计算公式**: 假设 L 是分段光滑曲线

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \le t \le \beta,$$

且函数 f 在 L 上连续. 则 f 在 L 上的第一型曲线积分存在且

$$\int_L f\,ds = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt. \tag{13.7.7}$$

若把曲线 L 写成向量形式 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$, 则 (13.7.7) 可记成

$$\int_L f\,ds = \int_\alpha^\beta f(\boldsymbol{r}(t))|\boldsymbol{r}'(t)|\,dt. \tag{13.7.8}$$

特别地,

- 如果 $\boldsymbol{r}(x) = (x, y(x))$, $a \le x \le b$, 则

$$\int_L f\,ds = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx. \tag{13.7.9}$$

- 如果 $\boldsymbol{r}(t) = (r(t)\cos t, r(t)\sin t)$, $\alpha \le t \le \beta$, 则

$$\int_L f\,ds = \int_\alpha^\beta f(r(t)\cos t, r(t)\sin t)\sqrt{r(t)^2 + r'(t)^2}\,dt. \tag{13.7.10}$$

例 13.20

(1) 计算

$$I := \int_L \sin\sqrt{x^2 + y^2}\,ds,$$

其中 L 为由圆周 $x^2 + y^2 = a^2$, 直线 $y = x$ 及 x 轴在第一象限所围图形的边界.

解: 令 $A = (a, 0)$ 和 $B = (a/\sqrt{2}, a/\sqrt{2})$. 则

$$\begin{aligned} I &= \int_{OA} \sin\sqrt{x^2 + y^2}ds + \int_{\widehat{AB}} \sin\sqrt{x^2 + y^2}ds + \int_{OB} \sin\sqrt{x^2 + y^2}ds \\ &= \int_0^a \sin x\,dx + \int_{\widehat{AB}} \sin a\,ds + \int_0^{a/\sqrt{2}} \sqrt{2}\sin\sqrt{2}x\,dx \\ &= 1 - \cos a + \frac{\pi a}{4}\sin a + 1 - \cos a = 2(1 - \cos a) + \frac{\pi a}{4}\sin a. \quad \square \end{aligned}$$

(2) 计算

$$I := \int_L |x|\,ds,$$

其中 L 是双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

解: 利用对称性得到

$$\begin{aligned} I &= 4\int_{r=a\sqrt{\cos 2\theta}} x\,ds = 4\int_0^{\pi/4} r\cos\theta\sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}d\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/4} a^2\cos\theta\,d\theta = 2\sqrt{2}a^2. \quad \square \end{aligned}$$

(3) 计算

$$I := \int_L (x^2 + 2y + z)\,ds,$$

其中 L 是由曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和 $x+y+z=0$ 所确定的曲线.

解: 根据对称性得到

$$\int_L x^2 ds = \frac{1}{3}\int_L (x^2+y^2+z^2_d s = \frac{1}{3}\cdot 2\pi a^3 = \frac{2}{3}\pi a^3.$$

同理可证

$$\int_L x\,ds = \int_L y\,ds = \int_L z\,ds = \frac{1}{3}\int_L (x+y+z)ds = 0.$$

因此 $I = \frac{2}{3}\pi a^3$. □

(4) 计算

$$I := \int_L \sqrt{1-x^2-y^2}\,ds, \quad L: x^2+y^2 = x.$$

解: 令 $x=\frac{1}{2}(1+\cos t)$ 和 $y=\frac{1}{2}\sin t, 0\le t\le 2\pi$. 则

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt = \int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}dt = 2. \quad \square$$

(5) 计算

$$I = \int_\Gamma (x+y)^2 ds,$$

其中 $\Gamma = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1,\ y\ge 0\}\cup\{(x,0)\in\mathbb{R}^2 : -1\le x\le 1\}$.

解: 定义 $\Gamma_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1,\ y\ge 0\}$ 和 $\Gamma_2 = \{(x,0)\in\mathbb{R}^2 : -1\le x\le 1\}$. 从而得到

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_{\Gamma_1}(x+y)^2 ds = \int_{\Gamma_1}(x^2+y^2+2xy)ds = \int_{\Gamma_1} ds + 2\int_{\Gamma_1} xy\,ds = \pi, \\ I_2 &:= \int_{\Gamma_2}(x+y)^2 ds = \int_1^{-1} x^2 dx = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

故 $I = I_1 + I_2 = \frac{2}{3}+\pi$. □

(6) **(第一型曲线积分的中值定理)**: 假设函数 $f(x,y)$ 在光滑曲线 $L: x = x(t), y = y(t)$ 上连续, $\alpha\le t\le\beta$, 则存在 $(x_0,y_0)\in L$ 满足

$$\int_L f(x,y)\,ds = f(x_0,y_0)|L|.$$

证: 根据 (13.7.7) 得到

$$\int_L f\,ds = \int_\alpha^\beta F(t)\,dt, \quad F(t) := f(x(t),y(t))\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}.$$

定积分的 (广义) 第一中值定理告诉我们

$$\int_\alpha^\beta F(t)\,dt = f(x(t_0),y(t_0))\int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}dt = f(x_0,y_0)|L|$$

其中 $(x_0,y_0) = (x(t_0),y(t_0))$. □

13.7.2 第一型曲面积分

假设曲面 Σ 是可求面积的连续曲面. Σ 上的分割 $\boldsymbol{T}$ 是指用坐标曲线网将 Σ 分成的 n 个小曲面 $\Sigma_1,\cdots,\Sigma_n$. 令

$$\Delta S_i := |\Sigma_i|, \quad ||\boldsymbol{T}|| := \max_{1\le i\le n}\Delta S_i.$$

定义 13.10. (第一型曲面积分)

假设 Σ 和 $\boldsymbol{T}$ 如上定义, f 是 Σ 上的有界函数. 任取 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Sigma_i$ 并考虑有线和

$$S(f,\boldsymbol{T},(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})) := \sum_{1\le i\le n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i.$$

若 $||\boldsymbol{T}||\to 0$ 时, $S(f,\boldsymbol{T},(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta}))$ 存在极限且极限和分割 $\boldsymbol{T}$ 及点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 无关, 称

$$\iint_\Sigma f\,dS \equiv \iint_\Sigma f(x,y,z)\,dS := \lim_{||\boldsymbol{T}||\to 0}\sum_{1\le i\le n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i \tag{13.7.11}$$

为函数 f 在曲面 Σ 上的**第一型曲面积分 (type I surface integral)**. 此时称 f 为**被积函数 (integrable function)** 而 Σ 称为**积分曲面 (surface of integration)**.

如果取函数 $f\equiv 1$ 则得到曲面的面积

$$\iint_\Sigma dS = \lim_{||\boldsymbol{T}||\to 0}\sum_{1\le i\le n}\Delta S_i = |\Sigma|.$$

从而可把 dS 看成曲面的面积微元. ♣

类似**定理 13.19** 可得到

定理 13.20. (第一型曲面积分的计算公式)

假设曲面 Σ 是由参数方程给出:

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v), \quad (u,v)\in D,$$

或记为向量形式 $\boldsymbol{r}(u,v)$. 这里 D 是 uv 平面上具有段光滑边界的有界闭区域, $\boldsymbol{r}: D\to\Sigma$ 是单的且 C^1 的, 且 Jacobi 矩阵 (13.6.1) 是满秩的. 此时对任何连续函数 $f\in C(\Sigma)$, f 在 Σ 上的第一型曲面积分存在且

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma f\,dS &= \iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,dudv\\ &= \iint_D f(\boldsymbol{r}(u,v))|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|(u,v)\,dudv.\end{aligned} \tag{13.7.12}$$

其中 E,F,G 是 (13.6.5) 中定义的曲面 Gauss 系数. ♡

如果 $\boldsymbol{r}(x,y) = (x,y,z(x,y))$, 则

$$\iint_\Sigma f\,dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+|\nabla z|^2}dxdy. \tag{13.7.13}$$

例 13.21

(1) 计算

$$I := \iint_S (x^2+y^2-z^2+2x-1)\,dS,$$

其中 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z=1$ 所截的下半部分.

解: 因为锥面关于 yoz 平面对称, 所以

$$\iint_S 2x\,dS=0.$$

从而得到

$$I=\iint_S(-1)dS=\iint_{x^2+y^2\le 1}-\sqrt{2}dxdy=-\sqrt{2}\pi.\quad\square$$

(2) 计算

$$I:=\iint_\Sigma x^2z\,dS,$$

其中 $\Sigma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: z=\sqrt{1-x^2-y^2}\}$.

解: 计算可得

$$\begin{aligned}I&=\iint_{x^2+y^2\le 1}x^2\sqrt{1-x^2-y^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}}dxdy\\&=\iint_{x^2+y^2\le 1}x^2dxdy=\frac{1}{2}\iint_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy=\frac{\pi}{4}.\quad\square\end{aligned}$$

(3) 证明 **Poisson 公式**:

$$\iint_\Sigma f(ax+by+cz)dS=2\pi\int_{-1}^1 f(w\sqrt{a^2+b^2+c^2})dw,$$

其中 $\Sigma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+y^2+z^2=1\}$.

解: 令 $k=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. 考察变换 $w=(ax+by+cz)/k$ 和新的 uvw 坐标轴使得原点和原来的 xyz 坐标轴重合且 $ax+by+cz=0$ 和 w 轴垂直. 从而 u,v 落在平面 $ax+by+cz=0$ 内. 但是球 Σ 是完全对称的, 故在坐标变换 $(x,y,z)\mapsto(u,v,w)$ 下, Σ 变成 $\Sigma'=\{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3|u^2+v^2+w^2=1\}$, 从而

$$I:=\iint_\Sigma f(ax+by+cz)dS=\iint_{\Sigma'}f(kw)dS'.$$

作变量替换 $u=\sqrt{1-w^2}\cos\theta$, $v=\sqrt{1-w^2}\sin\theta$, $w=w$, 这里 $|w|\le 1$ 且 $0\le\theta\le 2\pi$. 即得到

$$\boldsymbol{r}(\theta,w)=(u,v,w)=(\sqrt{1-w^2}\cos\theta,\sqrt{1-w^2}\sin\theta,w).$$

计算得到

$$\boldsymbol{r}_\theta=\sqrt{1-w^2}(-\sin\theta,\cos\theta,0),\quad \boldsymbol{r}_w=\left(-\frac{w\cos\theta}{\sqrt{1-w^2}},-\frac{w\sin\theta}{\sqrt{1-w^2}},1\right).$$

故

$$\boldsymbol{r}_\theta\cdot\boldsymbol{r}_\theta=1-w^2,\quad \boldsymbol{r}_\theta\cdot\boldsymbol{r}_w=0,\quad \boldsymbol{r}_w\cdot\boldsymbol{r}_w=\frac{1}{1-w^2}.$$

根据 (13.7.12) 得到

$$\iint_\Sigma f(ax+by+cz)dS=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{-1}^1 f(kw)dw=2\pi\int_{-1}^1 f(kw)dw.\quad\square$$

(4) 令 Σ_r 为以 $\boldsymbol{P}_0=(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ 为中心 $r>0$ 为半径的球面, 并假设 $u(\boldsymbol{P})=$

$u(x,y,z) \in C^2(\mathbb{R}^3)$, 则

$$\Delta u(\boldsymbol{P}_0) = 6 \lim_{r\to 0+} \frac{I_r(u,\boldsymbol{P}_0) - u(\boldsymbol{P}_0)}{r^2}.$$

这里

$$I_r(u,\boldsymbol{P}_0) := \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\Sigma_r} u(x,y,z)\,dS.$$

解: 作 Taylor 展开得到

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{P}) &= u(\boldsymbol{P}_0) + \sum_{1\le|\boldsymbol{\alpha}|\le 2} \frac{u^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{P}_0)}{\boldsymbol{\alpha}!}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0)^{\boldsymbol{\alpha}} + o(|\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0|^2) \\ &= u(\boldsymbol{P}_0) + u_x(\boldsymbol{P}_0)(x-x_0) + u_y(\boldsymbol{P}_0)(y-y_0) + u_z(\boldsymbol{P}_0)(z-z_0) \end{aligned}$$

$$+ u_{xy}(\boldsymbol{P}_0)(x-x_0)(y-y_0) + u_{yz}(\boldsymbol{P}_0)(y-y_0)(z-z_0) + u_{zx}(\boldsymbol{P}_0)(z-z_0(x-x_0)$$

$$+ \frac{1}{2}u_{xx}(\boldsymbol{P}_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}u_{yy}(\boldsymbol{P}_0)(y-y_0)^2 + \frac{1}{2}u_{zz}(\boldsymbol{P}_0)(z-z_0)^2 + o(\rho^2)$$

这里 $\rho = |\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0|$. 利用球对称性可知

$$\iint_{\Sigma_r} [u(\boldsymbol{P}) - u(\boldsymbol{P}_0)]dS = \frac{1}{2}\Delta u(\boldsymbol{P}_0)\cdot\frac{r^2}{3}4\pi r^2 + o(r^4) = \frac{r^2}{6}|\Sigma_r|\Delta u(\boldsymbol{P}_0) + o(r^4),$$

这里用到了等式

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_r}(x-x_0)^2dS \iint_{\Sigma_r}(y-y_0)^2dS &= \iint_{\Sigma_r}(z-z_0)^2dS \\ = \frac{1}{3}\iint_{\Sigma_r}\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]dS &= \frac{1}{3}\cdot r^2\cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi}{3}r^4. \end{aligned}$$

从而得到 $I_r(u,\boldsymbol{P}_0) - u(\boldsymbol{P}_0) = \frac{r^2}{6}\Delta u(\boldsymbol{P}_0) + o(r^4)$. □

13.8 第二型曲线积分和曲面积分

第二型曲线积分和定义域的方向有关, 如果方向相反则相应的积分变号. 物理上的背景, 比如, 为在变力作用下沿曲线做功问题和流量问题.

13.8.1 第二型曲线积分

假设 $L \subseteq \mathbb{R}^3$ 是定向的可求长的连续曲线, 即给定起点 $s_L = A$ 和终点 $e_L = B$ 的可求长的连续曲线. 在 L 上每点处取单位切向量 $\boldsymbol{\tau} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, 使得其与 L 的定向一致.

定义 13.11. (第二型曲线积分)

假设 L 和 $\boldsymbol{\tau}$ 为如上定义, $\boldsymbol{F} = (P,Q,R)$ 是 L 上的向量值函数. 定义函数 $\boldsymbol{F}$ 沿着曲线 L 的**第二型曲线积分 (type II line integral)** 为

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau}\,ds := \int_L [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]\,ds. \quad (13.8.1)$$

其中 ds 是 L 的弧微元. 定义**弧微元向量 (vector of arc-length element)**

$$\boldsymbol{ds} := \boldsymbol{\tau}\, ds = (dx, dy, dz).$$

从而 (13.8.1) 可记成

$$\int_L \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds} = \int_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz, \tag{13.8.2}$$

也称为**微分 1-形式 (differential 1-form)** $\omega := Pdx + Qdy + Rdz$ 在 L 上的第二型曲线积分,

$$\int_L \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds} = \int_L \omega. \tag{13.8.3}$$

若取 $\boldsymbol{F} = f\boldsymbol{\tau}$, 则 $\boldsymbol{F}$ 在 L 上的第二型曲线积分等于 f 在 L 上的第一型曲线积分. 如果 A 和 B 重合, 即 L 是闭曲线, 我们使用如下记号

$$\oint_L \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds} = \oint_L \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds}.$$

特别地, 如果 L 为 xoy 平面的定向光滑曲线, 则

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_L [P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\sin\alpha]ds. \tag{13.8.4}$$

其中 α 是定向曲线 L 和 x 正轴的夹角. ♣

我们也称 (13.8.1) 为力 $\boldsymbol{F}$ 沿着曲线 L 所做的**功 (work)**, 也叫作**功积分 (work integral)**.

命题 13.13

(1) **(反向性)** 假设向量值函数 $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$ 在 L 上的第二型曲线积分存在, 则

$$\int_{-L} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = -\int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \tag{13.8.5}$$

这里 $-L$ 表示曲线 L 的反向曲线.

(2) **(路径可加性)** 如果向量值函数 $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$ 在 L_1 和 L_2 上的第二型曲线积分都存在且 $e_{L_1} = s_{L_2}$, 则其在 $L_1 + L_2$ 上的第二型曲线积分也存在且

$$\int_{L_1+L_2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \sum_{1\le i\le 2} \int_{L_i} P\,dx + Q\,dy + R\,dz. \tag{13.8.6}$$

(3) **(被积函数线性)** 如果向量值函数 $\boldsymbol{F}_1 = (P_1, Q_1, R_1), \boldsymbol{F}_2 = (P_2, Q_2, R_2)$ 在 L 上的第二型曲线积分都存在, 则对任何常数 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, 向量值函数 $c_1\boldsymbol{F}_1 + c_2\boldsymbol{F}_2$ 在 L 上的第二型曲线积分也存在且

$$\begin{aligned}&\int_L (c_1P_1 + c_2P_2)\,dx + (c_1Q_1 + c_2Q_2)\,dy + (c_1R_1 + c_2R_2)\,dz \\ = &\sum_{1\le i\le 2} c_i \left(\int_L P_i dx + Q_i dy + R_i dz\right).\end{aligned} \tag{13.8.7}$$

♡

现在假设 L 是定向的光滑曲线[5]:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [a, b],$$

[5]注意到, 此时 $[a, b]$ 不一定是通常意义下的闭区间, 这是因为 a 对应起点 s_L 而 b 对应终点 e_L.

或写成向量形式 $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$, 此时曲线 L 可求长且切向量为

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}.$$

定理 13.21. (第二型曲线积分的计算公式)

假设曲线 L 如上定义, 且向量值函数 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$ 在 L 上连续. 则

$$\int_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\boldsymbol{r}'(t)\,dt. \tag{13.8.8}$$

♡

证: 根据积分变量替换得到

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau}\,ds=\int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}|\boldsymbol{r}'(t)|\,dt=\int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\boldsymbol{r}'(t)\,dt.\ \square$$

类似地, 如果 L 为平面 xoy 上地光滑曲线:

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad a\le t\le b,$$

或写成向量形式 $\boldsymbol{r}(t)$, 则

$$\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_a^b [P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)]dt. \tag{13.8.9}$$

如果 $\boldsymbol{r}(x)=(x,y(x)), a\le x\le b$, 则

$$\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_a^b [P(x,y(x))+Q(x,y(x))y'(x)]dx. \tag{13.8.10}$$

例 13.22

(1) 计算第二型曲线积分

$$I:=\int_L 2xy\,dx+x^2dy,$$

其中 L 为以 $O=(0,0)$ 为起点而以 $B=(1,1)$ 为终点地曲线, 具体路径分别为 (a) 抛物线 $y=x^2$; (b) 抛物线 $x=y^2$; (c) 折线段 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$ 其中 $A=(1,0)$.

解: 计算结果都是 1. □

(2) 计算

$$I:=\oint_C (z-y)\,dx+(x-z)\,dy+(x-y)\,dz,$$

其中 C 是两个曲面 $x^2+y^2=1$ 和 $x-y+z=2$ 的交线, 且从 z 正轴往 z 负轴看 C 的方向是顺时针的.

解: 令 $x=\cos\theta$ 和 $y=\sin\theta$. 因此 $z=2-\cos\theta+\sin\theta$, 其中 $\theta\in[2\pi,0]$, 注意方向! 故得到

$$\begin{aligned}
I &= \oint_C (z-y)\,dx+(x-z)\,dy+(x-y)\,dz\\
&= \int_{2\pi}^0 [(\cos\theta-2)\sin\theta+(2\cos\theta-2-\sin\theta)\cos\theta+(\cos^2\theta-\sin^2\theta)]d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}(1-4\cos^2\theta)d\theta=2\pi-4\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi \;=\; -2\pi.\ \square
\end{aligned}$$

(3) 计算

$$I := \int_L -y\,dx + x\,dy,$$

其中 $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\ y \geq 0\}$.

解: 令 $x = \cos t$ 和 $y = \sin t, 0 \leq t \leq \pi$, 得到

$$I = \int_0^\pi [-\sin t(-\sin t) + \cos t \cdot \cos t]dt = \pi. \quad \square$$

(4) 计算

$$I := \int_L (x^2 - y^2)dx - 2xydy,$$

其中 $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = x^\alpha,\ \alpha > 0,\ 0 \leq x \leq 1\}$.

解: 令 $x = t$ 和 $y = t^\alpha, 0 \leq t \leq 1$. 则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (t^2 - t^{2\alpha})dt - \int_0^1 2\alpha t^{1+\alpha} t^{\alpha-1} dt = \int_0^1 (t^2 - t^{2\alpha} - 2\alpha t^{2\alpha})dt \\ &= \int_0^1 [t^2 - (1+2\alpha)t^{2\alpha}]dt = \frac{-1}{3} t^{2\alpha+1}\Big|_0^1 = -\frac{2}{3}. \quad \square \end{aligned}$$

(5) 计算

$$I := \int_L x\,dx + y\,dy + z\,dz,$$

其中 $L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$.

解: 令 $\mathbf{n}$ 表示 $\mathbb{S}^2$ 的法向量. 则

$$I = \int_L (x,y,z) \cdot \boldsymbol{\tau}\,ds = \int_L \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}\,ds = 0. \quad \square$$

(6) 计算

$$I := \int_L x\,dy - y\,dx,$$

其中 $L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^{2n+1} + y^{2n+1} = ax^n y^n,\ x, y \geq 0\}$.

解: 利用极坐标 $x = r\cos\theta$ 和 $y = r\sin\theta$ 得到

$$r = \frac{a\cos^n\theta\sin^n\theta}{\cos^{2n+1}\theta + \sin^{2n+1}\theta},$$

从而

$$x = \frac{a\tan^n\theta}{1 + \tan^{2n+1}\theta}, \quad y = \frac{a\tan^{n+1}\theta}{1 + \tan^{2n+1}\theta}.$$

再令 $t = \tan\theta$ 得到

$$x = \frac{at^n}{1 + t^{2n+1}}, \quad y = \frac{at^{n+1}}{1 + t^{2n+1}} = tx.$$

因为

$$dy = x\,dt + t\,dx, \quad x\,dy = x^2\,dt + y\,dx, \quad x\,dy - y\,dx = x^2\,dt.$$

故

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{a^2 t^{2n}}{(1 + t^{2n+1})^2} dt = \frac{a^2}{2n+1} \int_0^{+\infty} \frac{dt^{2n+1}}{(1 + t^{2n+1})^2} = \frac{a^2}{2n+1}. \quad \square$$

13.8.2 第二型曲面积分

曲面以及曲面定向的严格定义请参见第 13.6.3 小节.

定义 13.12. (定向曲面)

假设 Σ 是光滑曲面, P_0 是 Σ 上的任意给定的点. 过 P_0 点可做两条方向相反的法线, 我们指定其中一个方向并记为 $\mathbf{n}_{P_0}$. 任取过 P_0 点的且完全包含在 Σ 内的光滑闭曲线 Γ_0. 称曲面 Σ 是**可定向的 (orientiable)** 或者是**定向曲面 (oriented surface)**, 如果 Γ_0 上的任意点 P 的法线 $\mathbf{n}_P$ 是连续变化地从 $\mathbf{n}_{P_0}$ 出发绕着 Γ_0 一周后最终回到 $\mathbf{n}_{P_0}$. ♣

存在不可定向的曲面, 比如 **Möbius 带 (Möbius band)**.

假设定向曲面 Σ 由参数方程给出:

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v), \quad (u,v) \in D,$$

或写成向量形式 $\boldsymbol{r}(u,v)$. 这里 D 是 uv 平面上具有分段光滑边界的有界闭区域, $\boldsymbol{r}: D \to \Sigma$ 是单的且 C^1 的, 且 Jacobi 矩阵 (13.6.1) 是满秩的. 此时曲面 Σ 的法向量可表示为

$$\pm \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \pm \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right),$$

这里 $\pm$ 表示曲面上每个点都有方向相反的两个法向量. 从而得到单位法向量

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|} = \pm \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right), \tag{13.8.11}$$

其中

$$EG - F^2 = \left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right]^2.$$

特别地, 若 $\boldsymbol{r}(x,y) = (x, y, z(x,y))$, 则

$$\mathbf{n} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} (-z_x, z_y, 1). \tag{13.8.12}$$

此时若取 $+$ 号, 即表示 $\mathbf{n}$ 在 z 轴上的投影永远是正的 (对应曲面位于 z 正轴的部分).

定义 13.13. (第二型曲面积分)

假设 Σ 和 $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 如上定义, $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$ 是 Σ 上的向量值函数. 定义函数 $\boldsymbol{F}$ 沿着曲面 Σ 的**第二型曲面积分 (type II surface integral)** 为

$$\iint_\Sigma \boldsymbol{F} \cdot \mathbf{n} dS := \iint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) dS. \tag{13.8.13}$$

在第一型曲面积分中, 已经知道 dS 是 Σ 的面积微元. 定义**面积微元向量**

$$d\boldsymbol{S} := \mathbf{n} dS = (dydz, dzdx, dxdy).$$

从而 (13.8.13) 可记成

$$\iint_\Sigma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_\Sigma P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dzdx + R(x,y,z)\,dxdy. \tag{13.8.14}$$

♣

我们也称 (13.8.13) 为流体以速度 $\boldsymbol{F}$ 通过曲面 Σ 所产生的**流量 (flow)**, 也叫作**流积分**

(flow integral).

命题 13.14

(1) **(反向性)** 假设向量值函数 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$ 在 Σ 上的第二型曲面积分存在, 则

$$\iint_{-\Sigma} P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy=-\iint_{\Sigma} P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy, \quad (13.8.15)$$

这里 $-\Sigma$ 表示曲面 Σ 的反向曲面.

(2) **(路径可加性)** 如果向量值函数 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$ 在 Σ_1 和 Σ_2 上的第二型曲面积分都存在且 Σ_1 与 Σ_2 定向相同, 则其在 $\Sigma_1+\Sigma_2$ 上的第二型曲线积分也存在且

$$\iint_{\Sigma_1+\Sigma_2} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\sum_{1\le i\le 2}\iint_{\Sigma_i} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy. \quad (13.8.16)$$

(3) **(被积函数线性)** 如果向量值函数 $\boldsymbol{F}_1=(P_1,Q_1,R_1),\boldsymbol{F}_2=(P_2,Q_2,R_2)$ 在 Σ 上的第二型曲面积分都存在, 则对任何常数 $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, 向量值函数 $c_1\boldsymbol{F}_1+c_2\boldsymbol{F}_2$ 在 L 上的第二型曲面积分也存在且

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma}(c_1P_1+c_2P_2)\,dydz+(c_1Q_1+c_2Q_2)\,dzdx+(c_1R_1+c_2R_2)\,dxdy\\ =\ &\sum_{1\le i\le 2} c_i\left(\iint_{\Sigma} P_i dydz+Q_i dzdx+R_i dxdy\right). \quad (13.8.17)\end{aligned}$$

♡

定理 13.22. (第二型曲线积分的计算公式)

假设定向的光滑曲面 Σ 是由参数方程给出:

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v),\quad (u,v)\in D,$$

或记为向量形式 $\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$, 这里 D 是 uv 平面上具有分段光滑边界的有界闭区域, $\boldsymbol{r}:D\to\Sigma$ 是单的且 C^1 的, 且 Jacobi 矩阵 (13.6.1) 是满秩的. 此时对任何连续的向量值函数 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)\in C(\Sigma)$, $\boldsymbol{F}$ 在 Σ 上的第二型曲面积分存在且

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy&=\pm\iint_D\Big[P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\\ &+Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big]dudv.\end{aligned} \quad (13.8.18)$$

♡

证: 根据**定理 13.20** 得到

$$\iint_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\mathbf{n}dS=\iint_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\pm\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}dS=\pm\iint_D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(u,v))\cdot\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\,dudv.\ \square$$

如果 $\boldsymbol{r}(x,y)=(x,y,z(x,y)),(x,y)\in D$, 其中 D 是 xy 平面上具有分段光滑边界的有界闭区域, 则

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,dxdy=\pm\iint_D R(x,y,z(x,y))\,dxdy. \quad (13.8.19)$$

注意到 (13.8.19) 右端是二重积分, 当曲面的定向为朝着 z 正轴则积分号前取 $+$, 当曲面的定向为朝着 z 负轴则积分号前取 $-$.

如果在计算

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,dydz$$

中 Σ 的方程可表示为 $\boldsymbol{r}(y,z)=(x(y,z),y,z)$, $(y,z)\in D$, 其中 D 是 yz 平面上具有分段光滑边界的有界闭区域. 此时

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,dydz=\pm\iint_{D} P(x(y,z),y,z)\,dydz. \tag{13.8.20}$$

当曲面的定向为朝着 x 正轴则积分号前取 $+$, 当曲面的定向为朝着 x 负轴则积分号前取 $-$.

另一方面如果 $\boldsymbol{r}(x,y)=(x,y,z(x,y))$, $(x,y)\in D$, 其中 D 是 xy 平面上具有分段光滑边界的有界闭区域, 则作变量替换

$$dydz=\cos\alpha\,dS=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\cdot\cos\gamma\,dS,\quad \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ z_x & z_y\end{vmatrix}=-z_x$$

从而得到

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,dydz=\iint_{\Sigma} P(x,y,z)(-z_x)\,dxdy=\mp\iint_{D} P(x,y,z(x,y))z_x\,dxdy. \tag{13.8.21}$$

曲面的定向为朝着 z 正轴则积分号前取 $-$, 当曲面的定向为朝着 z 负轴则积分号前取 $+$.

例 13.23

(1) 计算

$$I:=\iint_{\Sigma} xyz\,dxdy,$$

其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧在第一、第五卦限的部分.

解: 根据对称性得到

$$\begin{aligned} I &= 2\iint_{D} xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy = 2\int_0^{\pi/2} d\theta\int_0^1 r^2\sin\theta\cos\theta\sqrt{1-r^2}rdr\\ &= \int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}dr = \int_0^1(1-u^2)u^2du=\frac{2}{15},\end{aligned}$$

其中 $D:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\le 1,\ x,y\ge 0\}$. □

(2) 计算

$$I:=\iint_{S} x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy,$$

其中 S 是椭球面 $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ 的外侧.

解: 椭球面的参数方程为

$$x=a\sin\varphi\cos\theta,\quad y=b\sin\varphi\sin\theta,\quad z=c\cos\varphi,$$

其中 $(\varphi,\theta)\in D:=[0,2\pi]\times[0,\pi]$. 则得到

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D} abc\left(\sin^3\varphi\cos^2\theta+\sin^3\varphi\sin^2\theta+\sin\varphi\cos^2\varphi\right)d\varphi d\theta\\ &= abc\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\theta = 4\pi abc. \quad\square\end{aligned}$$

(3) 计算

$$I := \iint_S (z^2+x)dydz + \sqrt{z}\,dxdy,$$

其中 S 为抛物面 $z=(x^2+y^2)/2$ 在 $z=0$ 和 $z=2$ 之间的部分, 定向取下侧.

解: 根据 (13.8.21) 和 S 的定向取下侧得到

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \left[(z^2+x)(-x)+\sqrt{z}\right] dxdy \\ &= -\iint_D \left[(-x)\left(\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x\right)+\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\right] dxdy \\ &= -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \left[\left(\frac{r^4}{4}+r\cos\theta\right)(-r\cos\theta)+\frac{r}{\sqrt{2}}\right] rdr \\ &= \pi\int_0^2 r^3dt - \frac{2\pi}{\sqrt{2}}\int_0^2 r^2dr = 4\pi - \frac{16\pi}{3\sqrt{2}} = \left(4-\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)\pi, \end{aligned}$$

这里 $D := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 4\}$. □

(4) 计算

$$I := \iint_\Sigma x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy,$$

其中 $\Sigma = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1,\ z\ge 0\}$. 这里 $a,b,c>0$.

解: 令

$$x = a\sin\varphi\cos\theta,\quad y=b\sin\varphi\sin\theta,\quad z=c\cos\varphi,\quad 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$$

则得到

$$I = abc\int_0^{\pi/2} d\varphi\int_0^{2\pi}\left(a^2\sin^5\varphi\cos^4\theta + b^2\sin^5\varphi\sin^4\theta + c^2\sin\varphi\cos^4\varphi\right)d\theta.$$

利用 Beta 函数的基本性质, 参见 (13.4.7),

$$\begin{aligned} I &= abc\left[a^2B\left(3,\frac{1}{2}\right)B\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)+b^2B\left(3,\frac{1}{2}\right)B\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)+c^2\pi B\left(\frac{5}{2},1\right)\right] \\ &= abc(a^2+b^2+c^2)\frac{\pi\Gamma(5/2)}{\Gamma(7/2)} = \frac{2\pi}{5}abc(a^2+b^2+c^2). \quad \square \end{aligned}$$

(5) 计算

$$I := \iint_\Sigma f(x)dydz + g(y)dxdz + h(z)dxdy,$$

其中 $f,g,h\in C([0,+\infty))$ 且 Σ 是长方体 $[0,a]\times[0,b]\times[0,c]$ 的表面外侧.

解: 对积分

$$\iint_\Sigma f(x)dydz$$

来说, 只有在两个表面 $\Sigma_0=\{0\}\times[0,b]\times[0,c]$ 和 $\Sigma_a:=\{a\}\times[0,b]\times[0,c]$ 上的积分是有贡献的. 故

$$\iint_\Sigma f(x)dydz = \iint_{\Sigma_0} f(0)dydz + \iint_{\Sigma_a} f(a)dydz$$

$$= -f(0)\iint_{0\le y\le b, 0\le z\le c} dydz + f(a)\iint_{0\le y\le b, 0\le z\le c} dydz \ = \ [f(z)-f(0)]bc.$$

同理得到

$$\iint_\Sigma g(y)dzdx = [g(b)-b(0)]cz, \quad \iint_\Sigma h(z)dxdy = [h(c)-h(0)]ab.$$

相加得到

$$I = abc\left[\frac{f(a)-f(0)}{a} + \frac{g(b)-g(0)}{b} + \frac{h(c)-h(0)}{c}\right]. \quad \square$$

(6) 计算

$$I := \iint_\Sigma [f(x,y,z)+x]dydz + [2f(x,y,z)+y]dzdx + [f(x,y,z)+z]dxdy,$$

其中 Σ 是 $x-y+z=1$ 位于第四象限的上侧且 $f\in C(\Sigma)$.

解: 考虑向量值函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (f(x,y,z)+x, 2f(x,y,z)+y, f(x,y,z)+z)$ 和单位法向量 $\mathbf{n} := (1,-1,1)/\sqrt{3}$. 则第二型曲面积分可写成

$$I = \iint_\Sigma \boldsymbol{F}\cdot\mathbf{n}dS = \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma (x-y+z)dS = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}. \quad \square$$

13.9 Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式

在这节中我们把一元函数 $f(x)$ 的 Newton - Leibniz 公式

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b)-f(a)$$

推广到高维情形. 在**第 13.6.3 小节**中对定向闭区间 $[a,b]$ 我们给出了其边界 $\partial[a,b]=\{a,b\}$ 的定向, 即 $-a$ 和 $+b$. 因此我们可以定义 $\partial[a,b]$ 上的积分为

$$\int_{\partial[a,b]} f(x) := f(b)-f(a).$$

从而可以把 Newton - Leibniz 公式写成

$$\int_{[a,b]} df(x) = \int_{[a,b]} f'(x)dx = \int_{\partial[a,b]} f(x).$$

13.9.1 Green 公式

曲线 $L\subseteq\mathbb{R}^2$, 其曲线方程为 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t),y(t))$ $(\alpha\le t\le\beta)$, 称为 **Jordan 曲线 (Jordan curve)** 如果 $\boldsymbol{r}(\alpha)=\boldsymbol{r}(\beta)$ 且 $\boldsymbol{r}(t_1)\neq\boldsymbol{r}(t_2)$ 对任何 $t_1\neq t_2$ $(t_1,t_2\in(\alpha,\beta))$ 都成立.

回顾**第 11.2.3 小节** 中关于基本群的内容. 给定区域 $D\subseteq\mathbb{R}^2$ 并令

$$\Omega(D,p) := \{f\in C([0,1],D)|f(0)=f(1)=p\},$$

这里 $p\in D$ 且 $C([0,1],D)$ 表示 $[0,1]$ 到 D 的所有连续映射. 显然常值映射

$$c_p : [0,1]\longrightarrow D, \quad s\longmapsto p,$$

属于 $\Omega(D,p)$. 映射 f 和 g 是**同伦的 (homotopic)**, 记为 $f\sim g$, 如果存在连续映射

$$H:[0,1]\times[0,1]\longrightarrow D,\quad (s,t)\longmapsto H(s,t),$$

满足条件

$$H(s,0)=f(s),\ H(s,1)=g(s),\ f(0)=g(0)=H(0,t)=H(1,t)=f(1)=g(1).$$

练习 13.6

证明 $\sim$ 是 $\Omega(D,p)$ 上的等价关系.

根据练习 13.6 令

$$[f]:=\{g\in\Omega(D,p)|g\sim f\}$$

为 f 的等价类并定义 D 在 p 处的**基本群 (fundamental group)** 为

$$\pi_1(D,p):=\{[f]|f\in\Omega(D,p)\}. \tag{13.9.1}$$

任取 $f,g\in\Omega(D,p)$ 定义 $f*g$ 为

$$(f*g)(s):=\begin{cases} f(2s), & 0\le s\le\frac{1}{2},\\ g(1-2s), & \frac{1}{2}\le s\le 1.\end{cases}$$

在 $\Omega(D,p)$ 中引入乘法:

$$[f]\cdot[g]:=[f*g].$$

练习 13.7

验证上述乘法 $\cdot$ 的定义不依赖代表元的选取. 从而 $(\pi_1(D,p),\cdot)$ 构成一个群而且单位元是 $[c_p]$.

称区域 D 是**单连通的 (simply-connected)** 如果 $\pi_1(D,p)=\{[c_p]\}$, 即如果 $f\sim c_p$ 对任何 $f\in\Omega(D,p)$ 都成立.

给定区域 $D\subset\mathbb{R}^2$, 它的边界 $\partial\Omega$ 是平面曲线从而有两个方向. 定义 ∂D 的**正向**如下: 如果沿着 ∂D 走一圈 D 总是在左边. 这个正向也称为**诱导定向 (induced orientation)**. 关于边界诱导定向的严格定义请参见第 13.6.3 小节.

定理 13.23. (Green 公式; Green, 1828)

假设 $D\subseteq\mathbb{R}^2$ 是由有限条光滑或分段光滑的 Jordan 曲线所围成的区域, 并取定 ∂D 的正向. 对任何 $P,Q\in C^1(D)$, 有

$$\int_{\partial D}P\,dx+Q\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy. \tag{13.9.2}$$

证: (1) 首先对区域

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\varphi(y)\le x\le\psi(y),\ c\le y\le d\}$$

完成证明. 计算得到

$$\int_{\partial D}Q\,dy=\int_{\widehat{AB}}Q(x,y)\,dy+\int_{\widehat{BC}}Q(x,y)\,dy+\int_{\widehat{CE}}Q(x,y)\,dy+\int_{\widehat{EA}}Q(x,y)\,dy$$

$$= \int_c^d Q(\psi(y), y)\,dy - \int_c^d Q(\varphi(y), y)\,dy = \int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy,$$

这里

$$A = (\varphi(c), c), \ \ B = (\psi(c), c), \ \ C = (\psi(d), d), \ \ D = (\varphi(d), d).$$

同理对区域

$$\widetilde{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, \ \tilde{\varphi}(x) \le y \le \tilde{\psi}(x)\right\}$$

得到

$$\int_{\partial\widetilde{D}} P\,dx = -\iint_{\widetilde{D}} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.$$

如果区域 D 可写成

$$\begin{aligned} D &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(y) \le x \le \psi(y), \ c \le y \le d\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, \ \tilde{\varphi}(x) \le y \le \tilde{\psi}(x)\right\} \end{aligned}$$

则得到

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

(2) (D 是单连通的) 接下来假设区域 D 可分割成有限多个形如

$$D_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(y) \le x \le \psi(y), \ c \le y \le d\}$$

的子区域. 根据积分区域的可加性, 区域 D 上的二重积分等于子区域 D_y 上的二重积分的和. 公式 (13.9.2) 对每个子区域都成立. 但是相邻两个子区域在它们的公共边界上诱导出相反的定向, 所以边界 ∂D 上的二重积分的总体贡献为零, 从而此时 (13.9.2) 也成立.

如果 D 可分割成有限多个形如 $D_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, \ \tilde{\varphi}(x) \le y\tilde{\psi}(x)\}$ 的子区域, 同理可证公式 (13.9.2) 也成立.

(3) (D 是一般区域) 如果区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 包含子区域 D', 则 $D \setminus D'$ 诱导出 $\partial(D \setminus D')$ 上的自然定向. 沿着包含在 D 中的线把 $D \setminus D'$ 割成单连通区域, 此时两条割线的定向互为相反. 利用之前的证明可知 (13.9.2) 也成立.

如果区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 包含有限多个子区域, 对每个子区域作如上类似的分割, 同理也可证明 (13.9.2) 成立. □

假设边界 ∂D 是光滑曲线:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \le t \le \beta.$$

如果令 $\boldsymbol{\tau}$ 为 ∂D 正向的单位切向量, 即

$$\boldsymbol{\tau} \equiv \boldsymbol{\tau}(t) := \frac{(x'(t), y'(t))}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}},$$

则

$$dx = x'(t)\,dt = \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

若令 $(\boldsymbol{\tau}, x)$ 为 $\boldsymbol{\tau}$ 和 x 正轴的夹角, 则得到

$$\cos(\boldsymbol{\tau}, x) = \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}.$$

因此

$$dx = \cos(\boldsymbol{x}, x)\, ds.$$

类似地令 $(\boldsymbol{\tau}, y)$ 为 $\boldsymbol{\tau}$ 和 y 正轴的夹角, 则得到

$$\cos(\boldsymbol{\tau}, y) = \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$$

和

$$dy = \cos(\boldsymbol{\tau}, y)\, ds.$$

另一方面令 $\mathbf{n}$ 为 ∂D 的 (外) 单位法向量, 则

$$\cos(\boldsymbol{\tau}, x) = -\cos(\mathbf{n}, y), \quad \cos(\boldsymbol{\tau}, y) = \cos(\mathbf{n}, x).$$

如果 $F, G \in C^1(D)$, 则根据**定理 13.23** 得到

$$\int_{\partial D} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\partial D} F\, dy - G\, dx$$

$$= \int_{\partial D} [F \cos(\boldsymbol{\tau}, y) - G \cos(\boldsymbol{\tau}, x)] ds = \int_{\partial D} [F \cos(\mathbf{n}, x) + G \cos(\mathbf{n}, y)] ds. \tag{13.9.3}$$

注 13.2

(1) 如果 $f \in C^1([a, b])$, 对区域 $D := [a, b] \times [0, 1]$ 应用**定理 13.23** 得到

$$\int_a^b f'(x)\, dx = \int_0^1 dy \int_a^b f'(x)\, dx = \iint_D f'(x)\, dxdy$$

$$= \int_{\partial D} f(x) dy = \int_0^1 f(b)\, dy + \int_1^0 f(a)\, dy = f(b) - f(a).$$

即得到 Newton-Leibniz 公式.

(2) 如果 D 是单连通区域且边界 ∂D 是光滑的, 则

$$|D| = \iint_D dxdy = \int_{\partial D} x dy = -\int_{\partial D} y\, dx = \frac{1}{2} \int_{\partial D} (x\, dy - y\, dx)\, . \tag{13.9.4}$$

♣

例 13.24

(1) 求

$$x = a \cos^3 t, \quad y = b \sin^3 t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

所围成区域的面积.

解: 利用 (13.9.4) 得到

$$\begin{aligned} |D| &= \frac{1}{2} \int_{\partial D} (x\, dy - y\, dx) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 3ab \left(\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t \right) dt \\ &= \frac{3ab}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t\, dt &= \frac{3\pi ab}{8}. \quad \square \end{aligned}$$

(2) 求

$$I := \int_L [e^x \sin y - b(x+y)]\,dx + (e^x \cos y - ax)\,dy,$$

其中 a, b 为正常数, L 为从 $A = (2a, 0)$ 沿着曲线 $y = \sqrt{2ax - x^2}$ 到 $O = (0,0)$ 的弧.

解: 记 $O = (0,0)$ 到 A 的有向直线段为 L_0, 则 $L_0 + L$ 构成了 Jordan 曲线. 根据 Green 公式得到

$$\int_{L_0+L} [e^x \sin y - b(x+y)]\,dx + (e^x \cos y - ax)\,dy$$
$$= \iint_D [(e^x \cos y - a) - (e^x \cos y - b)]\,dxdy = \iint_D (b-a)dxdy = \frac{\pi a^2(b-a)}{2},$$

这里 D 是由 L_0 和 L 所围成的区域. 因此

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi a^2(b-a)}{2} - \int_{L_0} [e^x \sin y - b(x+y)]\,dx \\ &= \frac{\pi a^2(b-a)}{2} + \int_0^{2a} bx\,dx = \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) a^2 b - \frac{\pi a^3}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

(3) 计算曲线积分

$$I := \oint_L \frac{(yx^3 + e^y)dx + (xy^3 + xe^y - 2y)dy}{9x^2 + 4y^2},$$

其中 L 是椭圆 $x^2/4 + y^2/9 = 1$, 且沿顺时针方向.

解: 因为 $(0,0)$ 包含在由椭圆所围的区域 D 内, 所以被积函数在 D 内无界. 首先根据 L 的方程化简得到

$$L = \frac{1}{36}\oint_L \left(yx^3 + e^y\right) dx + \left(xy^3 + xe^y - 2y\right) dy.$$

利用 Green 公式得到, 注意方向,

$$I = -\frac{1}{36}\iint_D \left[\left(y^3 + e^y\right) - \left(x^3 + e^y\right)\right] = -\frac{1}{36}\iint_D (y^3 - x^3)dxdy = 0. \quad \square$$

(4) 计算

$$I := \int_L 2xy\,dx + (x^2 - y^2)dy,$$

这里 L 是从 $A = (0,0)$ 到 $B = (1,0)$ 的任何位于 x 轴上方的光滑曲线.

解: 连接 A 和 B 得到闭区域 D. 则得到

$$-I + \int_{\overrightarrow{AB}} 2xy\,dx + (x^2 - y^2)dy = \iint_D (Q_x - P_y)dxdy = 0,$$

这里 $P = 2xy$ 和 $Q = x^2 - y^2$. 故 $I = 0$. $\square$

(5) 设 L 是以 (x_0, y_0) 为圆心半径为 r 的圆周, L 所围的区域记为 D. 假设 $\boldsymbol{F} = (P, Q) \in C^1$. 求

$$I := \lim_{r \to 0+} \frac{1}{|D|}\oint_L \boldsymbol{F} \cdot \mathbf{n}\,ds$$

其中 $\mathbf{n}$ 是 L 的外法线方向.

解: 根据 (13.9.3) 得到

$$I = \lim_{r \to 0+} \frac{1}{|D|}\oint_L \boldsymbol{F} \cdot \mathbf{n}\,ds = \lim_{r \to 0+} \frac{1}{|D|}\oint_L [P\cos(\mathbf{n}, x) + G\cos(\mathbf{n}, y)]ds$$

$$= \lim_{r\to 0+}\frac{1}{|D|}\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy = P_x(x_0,y_0)+Q_y(x_0,y_0). \quad \square$$

(6) 假设 L 是平面中一条简单光滑闭曲线, 记所围区域为 D 而 $\mathbf{n}$ 为 L 上的单位外法向量. 对固定点 $P_0 := (x_0,y_0)\notin L$, 令 $\boldsymbol{r}$ 为向量 $\overrightarrow{P_0P}$ 其中 $P=(x,y)\in L$. 计算

$$I := \int_L \frac{\cos(\boldsymbol{r},\mathbf{n})}{r}ds, \quad r := |\boldsymbol{r}| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}.$$

解: 因为 $\cos(\boldsymbol{r},\mathbf{n}) = \boldsymbol{r}\cdot\mathbf{n}/r$ 所以如果 P_0 在 D 外面则得到

$$\begin{aligned} I &= \int_L \frac{\boldsymbol{r}\cdot\mathbf{n}}{r^2}ds = \int_L\left(\frac{x-x_0}{r^2},\frac{y-y_0}{r^2}\right)\cdot\mathbf{n}ds \\ &= \int_L\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-x_0}{r^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y-y_0}{r^2}\right)\right)dxdy \\ &= \int_L\left(\frac{r^2-(x-x_0)2(x-x_0)}{r^4}+\frac{r^2-(y-y_0)2(y-y_0)}{r^4}\right)dxdy = 0. \end{aligned}$$

如果 P_0 在 D 内部, 取 $\epsilon>0$ 充分小使得 $\mathbb{B}^2(P_0,\epsilon)\subset D$. 根据 Green 公式得到

$$I = \iint_{\partial\mathbb{B}^2(P_0,\epsilon)}\frac{\boldsymbol{r}\cdot\mathbf{n}}{r^2}ds$$

此时 $\partial\mathbb{B}^2(P_0,\epsilon)$ 的定向和 L 的定向相反. 故

$$I = \frac{1}{\epsilon^2}\iint_{\partial\mathbb{B}^2(P_0,\epsilon)}\epsilon ds = 2\pi. \quad \square$$

(7) 假设 L 是从 $A=(1,0)$ 到 $B=(0,2)$ 且位于第一象限内的简单光滑曲线, $\mathbf{n}$ 是 L 上的方单位法向量且指向原点, r 是 L 上的点到原点的距离. 计算

$$I := \int_L \frac{\partial \ln r}{\partial \mathbf{n}}ds.$$

解: 考虑曲线段

$$L_2 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+y^2=\epsilon,\ x,y\ge 0\},$$

和 L_1 (从 B 到 $(0,\epsilon)$ 的直线段) 和 L_3 (从 $(\epsilon,0)$ 到 A 的直线段). 记这些曲线段构成闭曲线 C, 而把所围的区域记为 D. 利用公式 (13.9.3) 并注意到 I 中的 $\mathbf{n}$ 是内单位法向量, 得到

$$\int_C\frac{\partial\ln r}{\partial\mathbf{n}}ds = \iint_D\left[((\ln r)_x)_x+((\ln r)_y)_y\right]dxdy = \iint_D\Delta\ln r\,dxdy = 0.$$

在 L_1 和 L_2 上 $\mathbf{grad}(\ln r)$ 和 $\mathbf{n}$ 垂直, 所以得到

$$I = \int_{L_2}\frac{\partial\ln r}{\partial\mathbf{n}}ds = \int_{L_2}\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2}\right)\cdot\left(\frac{x}{\epsilon},\frac{y}{\epsilon}\right)ds = \frac{1}{\epsilon}\int_{L_2}ds = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

(8) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\le a^2\}$ $(a\ge 0)$, $f(x,y)\in C^1(D)$, 且 $f|_{\partial D}=0$. 证明

$$\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right| \le \frac{\pi a^2}{3}\max_D|\mathbf{grad}(f)|.$$

证: 利用 Green 公式和 $f|_{\partial D}=0$ 得到

$$\iint_D[f(x,y)+yf_y(x,y)]dxdy = \iint_D(yf)_ydxdy = \int_{\partial D}(-yf(x,y))dx = 0.$$

同理可得

$$\iint_D[f(x,y)+xf_x(x,y)]dxdy = 0.$$

因此

$$\left|\iint_D f(x,y)\,dxdy\right| = \left|-\frac{1}{2}\iint_D (xf_x(x,y)+yf_y(x,y))\,dxdy\right|$$

$$\le \frac{1}{2}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{f_x^2+f_y^2}dxdy \le \frac{1}{2}\max_D|\mathbf{grad}(f)|\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\max_D|\mathbf{grad}(f)|\int_0^{2\pi}\int_0^a r^2dr = \frac{\pi a^3}{3}\max_D|\mathbf{grad}(f)|. \quad \square$$

(9) **(Poincaré 不等式)** 假设 D 是有由简单光滑闭曲线 L 围成的区域, $f\in C^1(\overline{D})$, $f|_L=0$. 证明

$$\iint_D f^2(x,y)\,dxdy \le \left(\max_{(x,y)\in D}(x^2+y^2)\right)\iint_D |\mathbf{grad}(f)|^2dxdy.$$

证: 利用 (8) 中的公式得到

$$\iint_D f^2(x,y)\,dxdy = -\frac{1}{2}\iint_D \left[x(f^2)_x(x,y)+y(f^2)_y(x,y)\right]dxdy$$

$$= -\iint_D \left[xf(x,y)f_x(x,y)+yf(x,y)f_y(x,y)\right]dxdy$$

$$\le \iint_D \sqrt{x^2+y^2}|f(x,y)|\mathbf{grad}(f)|(x,y)\,dxdy$$

$$\le \left(\max_{(x,y)\in D}\sqrt{x^2+y^2}\right)\iint_D |f||\mathbf{grad}(f)|dxdy$$

$$\le \left(\max_{(x,y)\in D}\sqrt{x^2+y^2}\right)\left(\iint_D f^2(x,y)\,dxdy\right)^{1/2}\left(\iint_D |\mathbf{grad}(f)|^2dxdy\right)^{1/2}. \quad \square$$

13.9.2 曲线积分的路径无关性

例 13.24 (4) 告诉我们曲线积分和曲线 L 无关. 这样的性质称为**曲线积分的路径无关性 (path independence of line integrals)**, 即下面的 **Green 定理**[6].

定理 13.24. (Green 定理)

(1) 假设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是区域且 $P,Q\in C(D)$. 则下列命题等价:

(a) 对 D 内任意分段光滑曲线 L, 曲线积分

$$\int_L Pdx+Qdy$$

与路径 L 无关, 只与 L 的起点和终点有关;

(b) $Pdx+Qdy$ 在 D 上是**正合的 (exact)**, 即存在 $U\in C^1(D)$, 使得 $dU=Pdx+Qdy$, 这时称 U 为微分形式 $Pdx+Qdy$ 的**原函数 (primitive)**;

[6] George Green, 1793 年 7 月 14 日 - 1841 年 5 月 31 日, 今英国诺丁汉郡斯奈顿人, 英国数学物理学家. 他在《An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism》(1828) 中提出了很多重要的概念, 比如如今的 Green 定理、势函数、如今的 Green 函数等.

(c) 沿着 D 内任意分段光滑闭曲线 L, 有

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy = 0.$$

(2) 如果进一步假设 $P, Q \in C^1(D)$, 则上述等价的 $(a), (b), (c)$ 可推出

(d) 在 D 内处处成立

$$Q_x = P_y. \tag{13.9.5}$$

(3) 如果 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是单连通的且 $P, Q \in C^1(D)$, 则 $(a), (b), (c), (d)$ 互相等价. ♡

证: (1) 假设 (a) 成立. 任取 $(x_0, y_0) \in D$. 则曲线积分

$$U(x,y) := \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy \tag{13.9.6}$$

由 (x,y) 唯一确定. 既然曲线积分和路径无关, 利用定积分第一中值定理得到

$$\begin{aligned}\Delta U &:= U(x+\Delta x, y) - U(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} P\,dx + Q\,dy - \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy \\ &= \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P\,dx + Q\,dy = \int_x^{x+\Delta x} P\,dx = P(\xi, y)\Delta x,\end{aligned}$$

这里 ξ 介于 x 和 $x+\Delta$ 之间. 故

$$U_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} = P(x,y).$$

同理可证 $U_y = Q(x,y)$. 根据**定理 12.2** 原函数 U 必可微且偏导数都是连续的.

反之, 假设 $P\,dx + Q\,dy$ 是正合的, 即存在原函数 U 满足 $dU = P\,dx + Q\,dy$. 对 D 内的任意分段光滑曲线 L, 根据定义, L 是由有限多条光滑曲线所组成. 为了证明曲线积分与路径 L 无关, 不妨假设 L 本身就是光滑的:

$$L: \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \le t \le b.$$

从而得到

$$\begin{aligned}\int_L P\,dx + Q\,dy &= \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt \\ = \int_a^b dU(x(t), y(t)) &= U(x(t), y(t))\Big|_a^b = U(x(b), y(b)) - U(x(a), y(a)).\end{aligned}$$

故取曲线积分只和路径的起点和终点有关.

假设 (a) 或 (b), 则直接由上述公式得到 (c). 反之假设 (c) 成立并任取两条封端光滑曲线 L_1 和 L_2 使得 $s_{L_1} = s_{L_1}$ 且 $e_{L_1} = e_{L_2}$. 因为 $L_1 + (-L_2)$ 构成了一个分段光滑闭曲线, 从而得到

$$0 = \oint_{L_1 + (-L_2)} P\,dx + Q\,dy = \left(\int_{L_1} P\,dx + Q\,dy\right) + \left(\int_{-L_2} P\,dx + Q\,dy\right)$$

即

$$\int_{L_1} P\,dx + Q\,dy = \int_{L_2} P\,dx + Q\,dy.$$

(2) 假设 $P, Q \in C^1(D)$ 且满足 (b). 则得到 $P = U_x$ 和 $Q = U_y$. 因此

$$P_y = U_{xy} = U_{yx} = Q_x$$

这里用到了**定理 12.4**.

(3) 利用**定理 13.23**. □

例 13.25

(1) 求积分

$$I = \int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

解: 令 $P = x/\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $Q = y/\sqrt{x^2+y^2}$. 因为

$$P_y = Q_x = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad Pdx + Qdy = dU, \quad U := \sqrt{x^2+y^2},$$

所以积分和路径无关从而得到 $I = U(6,8) - U(1,0) = 9$. □

(2) 证明 $\mathbb{R}^2$ 上 $\omega = (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - mx)dy$ 是某函数的全微分并计算

$$I := \int_L \omega,$$

其中 L 是从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的任意路径.

解: 令 $\omega = Pdx + Qdy$ 则得到

$$P_y = Q_x = e^x \cos y - m, \quad Pdx + Qdy = dU, \quad U := e^x \sin y - mxy.$$

因此得到 $I = U(1,1) - U(0,0) = e \sin 1 - m$. □

(3) 计算

$$I := \oint_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2},$$

其中 L 是以 $(1,0)$ 为中心 R 为半径的圆 $(R \neq 1)$, 且取逆时针方向.

解: 令 $Q = x/(4x^2+y^2)$ 和 $P = -y/(4x^2+y^2)$, 则得到

$$P_y = Q_x = \frac{y^2 - 4x^2}{(4x^2+y^2)^2}.$$

记由 L 所围的区域为 D, 并记由椭圆 $L_\epsilon := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = \epsilon^2\}$ 所围的区域为 D_ϵ. 如果 $R < 1$, 则

$$I = \iint_D (P_y - Q_x)dxdy = 0.$$

如果 $R > 1$, 则

$$I + \oint_{L_\epsilon} Pdx + Qdy = \iint_{D \setminus D_\epsilon} (P_y - Q_x)dxdy = 0.$$

另一方面, 在 C_ϵ 令 $x = \frac{\epsilon}{2}\cos\theta$ 和 $y = \epsilon \sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$\oint_{L_\epsilon} Pdx + Qdy = -\frac{1}{\epsilon^2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\epsilon^2}{2}\cos^2\theta + \frac{\epsilon^2}{2}\sin^2\theta\right) d\theta = -\pi,$$

注意定向! 最后得到 $I = -(-\pi) = \pi$. □

(4) 假设 L 为由 $A = (\pi/2, 0)$ 沿着曲线 $y = \frac{\pi}{2}\cos x$ 到 $B = (0, \pi/2)$ 的弧段, 求积分

$$I := \int_L \frac{(3y - x)dx + (y - 3x)dy}{(x+y)^3}.$$

解: 记连接 B 到 A 的有向直线段为 L_0, 并令由 L_0 和 L 所围的区域为 D. 则得到

$$\begin{aligned} & I+\int_{L_0}\frac{(3y-x)dx+(y-3x)dy}{(x+y)^3} \\ = & \iint_D\left[\left(\frac{y-3x}{(x+y)^3}\right)_x-\left(\frac{3y-x}{(x+y)^3}\right)_y\right]dxdy \;=\; 0. \end{aligned}$$

从而得到

$$I=-\int_0^{\pi/2}\frac{(\frac{3\pi}{2}-4x)dx-(\frac{\pi}{2}-4x)dx}{(\pi/2)^3}=-\frac{8}{\pi^3}\int_0^{\pi/2}\pi\,dx=-\frac{4}{\pi}.\ \square$$

(5) 假设 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$ 为不含原点的区域, 考虑 Ω 上的向量函数 $f(r)$, 其中 $r=|\boldsymbol{r}|$ 且 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)\in\Omega$. 如果函数 $f(r)$ 在 $r>0$ 上连续, 则曲线积分

$$\int_L f(r)(x\,dx+y\,dy+z\,dz)$$

和 Ω 内的曲线 L 无关.

证: 注意到

$$f(r)(xdx+ydy+zdz)=rf(r)\left(\frac{x}{r}dx+\frac{y}{r}dy+\frac{z}{r}dz\right)=rf(r)dr.$$

因此 $du=f(r)(xdx+ydy+zdz)$, 其中 u 是 $rf(r)$ 的一个原函数. 根据 Green 定理得到曲线积分和 L 无关. $\square$

(6) 假设 $f(x,y)\in C^2(\mathbb{R}^2)$ 且

$$\Delta f+f_x=0\quad((x,y)\neq(0,0)),\quad 2\pi rf_x\sim x\quad(r\to0),\quad 2\pi rf_y\sim y\quad(r\to0).$$

证明曲线积分

$$I:=\int_{L_R}e^x\left(-f_ydx+f_xdy\right)$$

和 R 无关, 其中 $L_R:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2=R^2\}$.

证: 令

$$P=-e^xf_y,\quad Q=e^xf_x.$$

计算得到

$$P_y-Q_x=-e^xf_{yy}-e^xf_x-e^xf_{xx}=-e^x(\Delta f+f_x)=0,\quad (x,y)\neq(0,0).$$

对任意 $r\in(0,R)$ 考察区域 $D:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|r^2\le x^2+y^2\le R^2\}$. 利用 Green 公式得到

$$\begin{aligned} I &= \int_{L_r}e^x\left(-f_ydx+f_xdy\right) \\ &= \int_0^{2\pi}e^{r\cos\theta}\left[\sin\theta f_y(r\cos\theta,r\sin\theta)+\cos\theta f_x(r\cos\theta,r\sin\theta)\right]rd\theta \\ &\to \int_0^{2\pi}\left[\frac{\sin\theta}{2\pi}\sin\theta+\frac{\cos\theta}{2\pi}\cos\theta\right]d\theta \;=\; \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi} \;=\; 1.\ \square \end{aligned}$$

(7) 求 $P,Q\in C^1(\mathbb{R}^2)$ 的关系使得曲线积分

$$I(\alpha,\beta)=\int_L P(x+\alpha,y+\beta)dx+Q(x+\alpha,y+\beta)dy$$

和常数 α,β 无关，其中 $L\subset\mathbb{R}^3$ 是任意光滑闭曲线.

解: 根据题意

$$\begin{aligned}0 &= I(\alpha,\beta)-I(0,0)\\ &= \int_L [P(x+\alpha,y+\beta)-P(x,y)]dx+[Q(x+\alpha,y+\beta)-Q(x,y)]dy\\ &= \iint_D [f(x+\alpha,y+\beta)-f(x,y)]dxdy\end{aligned}$$

这里 $f(x,y):=Q_x(x,y)-P_y(x,y)$. 对任意 $(x_0,y_0)\in D$ 和任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 考虑区域,

$$D_n:=\left\{(x,y)\in D|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le\frac{1}{n^2}\right\}\subset D,\quad n\text{ 充分大}.$$

利用积分中值定理得到

$$0=\iint_{D_n}[f(x+\alpha,y+\beta)-f(x,y)]dxdy=\frac{\pi}{n^2}[f(x_n+\alpha,y_n+\beta)-f(x_n,y_n)],$$

这里 $(x_n,y_n)\in D_n$. 连续性推出 $f(x_0+\alpha,y_0+\beta)=f(x_0,y_0)$, 即 $f(x,y)=C$ 是常数. 故

$$Q_x-P_y=C.$$

上述条件可写成

$$(Q-Cx)_x-P_y=0\quad\text{或}\quad Q_x-(P+Cy)_y=0.$$

根据 Green 定理存在 $u\in C^1(D)$ 或者 $v\in C^1(D)$ 满足

$$u_x=P,\quad u_y=Q-Cx,\quad\text{或}\quad v_x=P+Cy,\quad v_y=Q.$$

反之假设这个条件成立, 则得到

$$I(\alpha,\beta)=\iint_D(Q_x-P_y)dxdy=\iint_D(u_{xy}+C-u_{xy})dxdy=C|D|.$$

即和 α,β 无关. □

13.9.3 Gauss 公式

之前关于平面区域的单连通性定义可推广高维. 区域 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ 称为**单连通的 (simply-connected)** 如果对任意 $p\in\Omega$ 有

$$f\sim c_p,\quad\text{任意 } f\in C([0,1],\Omega)\text{ 且 } f(0)=f(1)=p,$$

即存在连续映射 $H:[0,1]\times[0,1]\to\Omega$, $(s,t)\mapsto H(s,t)$, 满足条件

$$H(s,0)=f(s),\ H(s,1)=c_p,\ f(0)=c_p(0)=H(0,t)=H(1,t)=f(1)=c_p(1),$$

这里 $c_p:s\mapsto p$ 是 $[0,1]$ 上的常值函数.

定理 13.25. (Gauss 公式, 1813; Ostrogradsky 公式, 1826)

假设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ 是区域且边界 $\partial\Omega$ 是由分段光滑的定向 (取外侧) 曲面所构成. 如果函数 $P, Q, R \in C^1(\Omega)$, 则

$$\iint_{\partial\Omega} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz. \tag{13.9.7}$$

证: (1) 首先考虑特殊区域

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in D,\ \varphi(y, z) \leq x \leq \psi(y, z)\},$$

这里 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 是 Ω 在 yz 平面上的投影. 定义定向曲面

$$\begin{aligned} S_1 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = \psi(y, z),\ (y, z) \in D\}, \\ S_2 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = \varphi(y, z),\ (y, z) \in D\} \end{aligned}$$

其上的定向是由 Ω 所诱导出来 (因此 S_1 的定向指向 x 正轴而 S_2 的定向指向 x 负轴). 故

$$\iiint_{\Omega} P_x dxdydz = \iint_D dydz \int_{\varphi(y,z)}^{\psi(y,z)} P_x dx$$

$$= \iint_D [P(\psi(y, z), y, z) - P(\varphi(y, z), y, z)]dydz = \iint_{S_1} Pdydz + \iint_{S_2} Pdydz = \iint_{\partial\Omega} Pdydz.$$

同理如果 $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y),\ (x, y) \in D\}$, 则

$$\iiint_{\Omega} R_z dxdydz = \iint_{\partial\Omega} Rdxdy;$$

如果 $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \varphi(z, x) \leq y \leq \psi(z, x),\ (z, x) \in D\}$, 则

$$\iiint_{\Omega} Q_y dxdydz = \iint_{\partial\Omega} Qdzdx.$$

(2) (Ω 是单连通区域) 此时 Ω 可分解成有限个上述三种子区域的并. 在每个子区域上 (13.9.7) 成立, 而在相邻两个子区域的公共边界上, 方向互反的两个曲面积分抵消, 从而第二型曲面积分就等于这些子区域上三重积分的和.

(3) (Ω 是一般区域) 此时用 n 个光滑定向曲面把区域 Ω 分成 $n + 1$ 个单连通区域 (这里 n 表示 Ω 的 "洞" 数目). 注意到此时每个这样的光滑定向曲面把 "洞" 切开, 得到的的相邻边界的定向是相反的. 也就是说新形成的边界对第二型曲面积积分没有任何贡献, 故 (13.9.7) 此时也成立. □

注 13.3

(1) 如果 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ 中的具有光滑边界的有界闭区域, 则其可求体积且体积为

$$\begin{aligned} |\Omega| &= \iiint_{\Omega} dxdydz = \iint_{\partial\Omega} xdydz = \iint_{\partial\Omega} ydzdx = \iint_{\partial\Omega} zdxdy \\ &= \frac{1}{3}\iint_{\partial\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy, \end{aligned} \tag{13.9.8}$$

这里 $\partial\Omega$ 的定向取外侧.

(2) 假设 $D \subseteq \mathbb{R}^3$ 是有界光滑闭曲面并取固定点 $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 \setminus D$. 计算 **Gauss 积分**

$$I(\xi, \eta, \zeta) := \iint_D \frac{\cos(\boldsymbol{r}, \mathbf{n})}{|\boldsymbol{r}|^2} dS \tag{13.9.9}$$

这里 $\boldsymbol{r} = (x-\xi, y-\eta, z-\zeta)$, $\mathbf{n}$ 是 D 的外法向量.

解: 因为

$$\cos(\boldsymbol{r}, \mathbf{n}) = \frac{x-\xi}{r}\cos(\mathbf{n}, x) + \frac{y-\eta}{r}\cos(\mathbf{n}, y) + \frac{z-\zeta}{r}\cos(\mathbf{n}, z),$$

这里 $r := |\boldsymbol{r}|$, 得到

$$I(\xi, \eta, \zeta) = \iint_S \frac{x-\xi}{r^3}dydz + \frac{y-\eta}{r^3}dzdx + \frac{z-\zeta}{r^3}dxdy.$$

令 Ω 是由 D 所围成的区域. 如果 $(\xi, \eta, \zeta) \notin \Omega$, 则

$$I(\xi, \eta, \zeta) = \iiint_\Omega \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3|\boldsymbol{r}|^2}{r^5}\right) dxdydz = 0.$$

如果 $(\xi, \eta, \zeta) \in \Omega$, 则考虑 Ω 内的小球面

$$D_\epsilon := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = \epsilon^2\right\}$$

及其所围成的小球 Ω_ϵ. 应用**定理 13.25** 到区域 $\Omega \setminus \Omega_\epsilon$ 得到

$$I(\xi, \eta, \zeta) = \iint_{D_\epsilon} \frac{\cos(\boldsymbol{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS = \iint_{D_{0\epsilon}} \frac{dS}{\epsilon^2} = \frac{1}{\epsilon^2} \cdot 4\pi\epsilon^2 = 4\pi. \quad \square$$

例 13.26

(1) 计算积分

$$I := \iint_\Sigma (x+1)dydz + (y+1)dzdx + (z+1)dxdy,$$

其中 Σ 为平面 $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$ 和 $z=0$ 所围区域的边界, 并取定向为外侧.

解: 根据 Gauss 公式得到

$$I = \iiint_\Omega 3\,dxdydz = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2},$$

其中 Ω 是 Σ 所围的区域. $\square$

(2) 求曲面积分

$$I := \iint_S yz\,dzdx + 2\,dxdy,$$

其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 外侧在 $z \geq 0$ 的部分 (定向取上侧), 即上半球面.

解: 记 $S_0 := \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 4\}$ 和 D_0 为 S_0 在 xy 平面上的投影. 根据 Gauss 公式得到

$$\begin{aligned} I + \iint_{S_0} yz\,dzdx + 2\,dxdy &= \iiint_\Omega z\,dxdydz \\ = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 r\cos\varphi r^2 \sin\varphi\, dr &= 4\pi \int_0^{\pi/2} \sin(2\varphi)\, d\varphi = 4\pi. \end{aligned}$$

另一方面

$$\iint_{S_0} yz\,dzdx + 2\,dxdy = \iint_{D_0} 2\,dxdy = 8\pi$$

从而得到 $I = 12\pi$. $\square$

13.9.4 Stokes 公式

假设 Σ 是具有分段光滑或光滑边界的光滑定向曲面, 并取定 Σ 的定向. 定义 $\partial\Sigma$ 的正向如下: 沿着 $\partial\Sigma$ 走曲面 Σ 总是在左边. 把这个定向称为边界 $\partial\Omega$ 上的**诱导定向 (inherited orientation)**. 即, 边界上每个点沿着曲线 $\partial\Omega$ 的切向量和曲面 Σ 的外法向量构成了一个自然坐标架. 边界诱导定向严格定义参见**第 13.6.3 小节**.

定理 13.26. (Stokes 公式, 1854)

假设 Σ 是光滑定向曲面且且边界 $\partial\Sigma$ 为分段光滑闭曲面 (取诱导定向). 对任何 $P, Q, R \in C^1(\overline{\Sigma})$, 有

$$\int_{\partial\Sigma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \tag{13.9.10}$$

证: 和之前一样, 不妨假设

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = f(x, y),\ (x, y) \in D\}.$$

这里 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是由分段光滑的 Jordan 曲线所围成的区域. 利用**定理 13.23** 得到

$$\int_{\partial\Sigma} P\,dx = \int_{\partial D} P(x, y, f(x, y))\,dx = -\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} f_y\right) dxdy.$$

另一方面

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial x} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} f_y\right) dxdy.$$

故

$$\int_{\partial\Sigma} P\,dx = \iint_{\Sigma} P_z\,dzdx - P_y\,dxdy.$$

同理可证

$$\int_{\partial\Sigma} Q\,dy = \iint_{\Sigma} Q_x\,dxdy - Q_z\,dydz, \quad \int_{\partial\Sigma} R\,dz = R_y\,dydz - R_x\,dzdx.$$

三式相加得到 (13.9.10). □

公式 (13.9.10) 也可写成

$$\int_{\partial\Sigma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS. \tag{13.9.11}$$

这里 $\alpha = (\mathbf{n}, x)$, $\beta = (\mathbf{n}, y)$, $\gamma = (\mathbf{n}, z)$.

例 13.27

(1) 计算积分

$$I := \oint_C (z - y)dx + (x - z)dy + (x - y)dz,$$

其中 C 是两个曲面 $x^2 + y^2 = 1$ 和 $x - y + z = 2$ 的交线从 z 正轴往 z 负轴看, 并取 C 的方向为顺时针.

解: 令 Σ 为 $x-y+z=2$ 上的以 C 为边界的部分, 定向取上侧. 则根据 Stokes 公式得到

$$I=-\iint_{\Sigma}2dxdy=-2\pi.\quad\square$$

(2) 计算

$$I:=\int_L y^2dx+z^2dy+x^2dz,$$

其中 L 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z\geq 0,a>0)$ 和圆柱面 $x^2+y^2+ax=0$ 的交线, 从 z 正轴看下去定向是逆时针的.

解: 记在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上由 L 所围的曲面为 Σ, 定向取上侧. 则其法向量的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x}{a},\quad \cos\beta=\frac{y}{a},\quad \cos\gamma=\frac{z}{a}.$$

根据 Stokes 公式得到

$$\begin{aligned}I&=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\frac{x}{a}&\frac{y}{a}&\frac{z}{a}\\ \partial_a&\partial_y&\partial_z\\ y^2&z^2&x^2\end{vmatrix}dS=-\frac{2}{a}\iint_{\Sigma}(xy+yz+zx)dS\\&=-\frac{2}{a}\iint_{\Sigma}xzdS=-2\iint_{\Sigma}\cos\gamma dS=-2\iint_{D_{xy}}xdxdy\\&=-2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{a/2}\left(r\cos\theta-\frac{a}{2}\right)rdr=2\pi a\int_0^a rdr=\frac{\pi a^3}{4},\end{aligned}$$

其中 $D_{xy}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2+ax\leq 0\}$ 是 Σ 在 xy 平面上的投影. $\square$

定理 13.27

(1) 假设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是区域且 $P,Q,R\in C(\Omega)$. 则下列命题等价:

(a) 对 Ω 被的任意分段光滑曲线 L, 曲线积分

$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz$$

与路径 L 无关, 只与 L 的起点和终点有关;

(b) $Pdx+Qdy+Rdz$ 在 Ω 内是**正合的**, 即存在 $U\in C^1(\Omega)$ 使得 $dU=Pdx+Qdy+Rdz$, 这是称 U 为微分形式 $Pdx+Qdy+Rdz$ 的**原函数**;

(c) 沿着 Ω 内任意分段光滑闭曲线 L, 有

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=0.$$

(2) 如果进一步假设 $P,Q,R\in C^1(\Omega)$, 则上述等价的 $(a),(b),(c)$ 可推出

(d) 在 Ω 内处处成立

$$R_y=Q_z,\quad P_z=R_x,\quad Q_x=P_y.\tag{13.9.12}$$

(3) 如果 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是单连通的且 $P,Q,R\in C^1(\Omega)$, 则 $(a),(b),(c),(d)$ 互相等价.

证: 证明和定理 **13.24** 类似. $\square$

例 13.28

(1) 证明积分

$$I := \int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} x\,dx + y^2dy - z^3dz$$

和路径无关.

证: 令 $P = x, Q = y^2, R = -z^3$. 我们得到

$$R_y = Q_z = P_z = R_x = Q_x = P_y = 0.$$

根据**定理 13.27** 可知积分和路径无关. 进一步得到

$$Pdx + Qdy + Rdz = dU, \quad U = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}z^4$$

和 $I = U(2,3,-4) - U(1,1,1) = -643/12$. □

(2) 假设函数 $u = u(x,y,z)$ 在光滑定向曲面 S 所围成的区域 Ω 内是 C^2 的. 证明

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = \iiint_\Omega \Delta u\,dxdydz, \tag{13.9.13}$$

$$\iint_S u\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = \iiint_\Omega \left(|\mathbf{grad}(u)|^2 + u\Delta u\right) dxdydz, \tag{13.9.14}$$

这里 $\mathbf{n}$ 是曲面的外法向量.

解: 利用**定理 13.25** 得到

$$\begin{aligned}\iint_S \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS &= \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\cos\alpha\,dydz + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\cos\beta\,dzdx + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\cos\gamma\,dxdy\right)\\ &= \iint_S (u_xdydz + u_ydzdx + u_zdxdy) = \iiint_\Omega \Delta u\,dxdydz.\end{aligned}$$

同理可得到

$$\begin{aligned}\iint_S u\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS &= \iint_S u\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\cos\alpha\,dydz + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\cos\beta\,dzdx + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\cos\gamma\,dxdy\right)\\ &= \iint_S u\,(u_xdydz + u_ydzdx + u_zdxdy)\\ &= \iiint_\Omega ((uu_x)_x + (uu_y)_y + (uu_z)_z)\,dxdydz\\ &= \iiint_\Omega (u\Delta u + u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\,dxdydz. \quad \square\end{aligned}$$

♠

13.9.5 * 流形上的 Stokes 公式

这里只叙述高维区域的 Stokes 公式, 对任意流形上的 Stokes 公式可参见之后的章节. 令 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 是区域且取 $\omega \in \Lambda_\infty^k(U)$ (定义见 (13.5.9)). 外微分算子 (13.5.10) 是指

$$\mathbf{d}\omega = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} (d\omega_{i_1\cdots i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \sum_{|I|=l} d\omega_I \wedge d\boldsymbol{x}^I,$$

这里

$$\omega = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \omega_{i_1\cdots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \sum_{|I|=k} \omega_I d\boldsymbol{x}^I.$$

易证 $\mathbf{d}^2=0$.

(1) $U\subseteq\mathbb{R}$: 若 $\omega=f\in\Lambda^0_\infty(U)$, 则

$$\mathbf{d}\omega=f'(x)dx.$$

(2) $U\subseteq\mathbb{R}^2$: 若 $\omega=Pdx+Qdy\in\Lambda^1_\infty(U)$ 则

$$\mathbf{d}\omega=(Q_z-P_y)dx\wedge dy.$$

(3) $U\subseteq\mathbb{R}^3$: 若 $\omega=Pdx+Qdy+Rdz\in\Lambda^1_\infty(U)$, 则

$$\mathbf{d}\omega=(R_y-Q_z)dy\wedge dz+(P_z-R_x)dz\wedge dx+(Q_x-P_y)dx\wedge dy.$$

(4) $U\subseteq\mathbb{R}^3$: 若 $\omega=Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy\in\Lambda^2_\infty(U)$, 则

$$\mathbf{d}\omega=(P_x+Q_y+R_z)dx\wedge dy\wedge dz.$$

定理 13.28. (Leibniz 公式)

如果 $\omega\in\Lambda^p_\infty(U)$ 和 $\eta\in\Lambda^q_\infty(U)$, 则

$$\mathbf{d}(\omega\wedge\eta)=\mathbf{d}\omega\wedge\eta+(-1)^p\omega\wedge\mathbf{d}\eta. \tag{13.9.15}$$

♡

证: 对 $\omega=\sum_{|I|=p}\omega_I d\boldsymbol{x}^I$ 和 $\eta=\sum_{|J|=q}\eta_J d\boldsymbol{x}^J$ 得到

$$\begin{aligned}\mathbf{d}(\omega\wedge\eta) &= \sum_{|I|=p,|J|=q}\mathbf{d}\left(\omega_I\eta_J d\boldsymbol{x}^I\wedge d\boldsymbol{x}^J\right)\\ &= \sum_{|I|=p,|J|=q}\left[\eta_J\left(d\omega_I\wedge d\boldsymbol{x}^I\right)\wedge d\boldsymbol{x}^J+\omega_I d\eta_J\wedge d\boldsymbol{x}^I\wedge d\boldsymbol{x}^J\right]\\ &= \mathbf{d}\omega\wedge\eta+\sum_{|I|=p,|J|=q}\omega_I(-1)^{|I|}d\boldsymbol{x}^I\wedge d\eta_J\wedge d\boldsymbol{x}^J\\ &= \mathbf{d}\omega\wedge\eta+(-1)^p\omega\wedge\mathbf{d}\eta.\quad\square\end{aligned}$$

对 $U\subset\mathbb{R}^n$ 上的 n-形式 $\omega=fdx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$ 定义积分如下

$$\int_U\omega:=\int_U f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}. \tag{13.9.16}$$

从而得到 (暂不考虑假设条件)

- **Newton-Leibniz 公式:** 第一卷 (5.4.24) 可写成
$$\int_{\partial I}\omega=\int_I\mathbf{d}\omega. \tag{13.9.17}$$
- **Green 公式:** (13.9.2) 可写成
$$\int_{\partial D}\omega=\int_D\mathbf{d}\omega. \tag{13.9.18}$$
- **Gauss 公式:** (13.9.7) 可写成
$$\int_{\partial\Omega}\omega=\int_\Omega\mathbf{d}\omega. \tag{13.9.19}$$
- **Stokes 公式:** (13.9.10) 可写成
$$\int_{\partial\Sigma}\omega=\int_\Sigma\mathbf{d}\omega. \tag{13.9.20}$$

一般区域 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的 **Stokes 公式**为

$$\int_{\partial U} \omega = \int_U \mathrm{d}\omega, \quad \omega \in \Lambda_\infty^{n-1}(U). \tag{13.9.21}$$

这里 U 是光滑定向区域且在其光滑边界 ∂U 上诱导出定向.

13.9.6 Stokes 公式的历史

本小节主要参考了Katz 的如下文章:

Katz, Victor, J. *The history of Stokes' theorem*, Math. Mag., **52**(1979), no. 3, 146-156.

前面证明了的 Green 定理、Gauss 定理、Stokes 定理以及流形上的 Stokes 定理, 都是讲如何把 $(k-1)$ 维积分与 k 维积分联系起来. 因为最核心的证明仍旧是微积分基本定理, 所以这些定理可追溯到 17 世纪下叶. 在 18 世纪晚期, Lagrange 和Laplace 实际上都使用了微积分基本定理递推地把 k 维积分归结到 $(k-1)$ 维积分. 然而这些定理的显示形式直到十九世纪才出现.

这三个定理中第一个本质上给出如今形式的陈述与证明的是 Gauss 定理或称为散度定理 (为了方便, 下面统称为散度定理). 散度定理的三种特殊形式出现在 1813 年Gauss 的论文《Theoria attractions corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodo nova tractata, commentationes societatis regiae scientiarium Gottingensis recentiories》中. 在 1833 年和 1839 年Gauss 发表了散度定理的其它形式, 但是在那个时期, 散度定理的一般形式已经被Mikhail Ostrogradsky[7] 所陈述和证明了. Ostrogradsky 在 1826 年 2 月 13 日在巴黎科学院上宣读了论文《Démonstration d'un théorème du calcul intégral》. 在 1827 年 8 月 6 日, Ostrogradsky 再次在巴黎宣读了他的这个定理, 而最后一次是 1828 年 11 月 5 日在圣彼得堡. 前面两次报告只存在手稿中虽然已经用俄语发表了, 最后一次报告是Ostrogradsky 唯一一次正式发表的, 它以标题《Note sur la Théorie de la chaleur》在 1831 年发表在圣彼得堡皇家科学院院报上.

在同一时期, 散度定理以及相关的定理出现在其他三位数学家的论文里: Simeon Denis Poisson 于 1828 年 4 月 14 日在巴黎宣布的论文 (正式论文以标题《Mémoire sur l'Équilibre et le M ouvement des corps Élastiques》在 1829 年出版); Frederic Sarrus 在 1828 年发表的论文《Mémoire sur les oscillations des corps flottans》, 但是他的记号和想法却不如Ostrogrsdsky 和Poisson 的清晰; George Green 于 1828 年在其私人文集中发表了

[7]Mikhail Vasilyevich Ostrogradsky, 1801 年 9 月 24 日 - 1862 年 1 月 1 日, 今乌克兰波尔塔瓦州人, 俄国数学家、理学家和物理学家. 他的工作包括变分学、代数函数的积分、数学物理、古典力学, 是当时俄国数学界的重要人物. 在 1816 年入读 University of Kharkiv, 1820 年参加毕业考试, 但宗教兼国民教育主任要求他重考. 官方原因是他没有上过哲学和神学课, 实际原因是他的老师Timofei Osipovsky 之前因宗教问题被停职, 而校方认为这事也和Timofei Osipovsky 的学生有关. 他拒绝重考不取学位便离开俄罗斯到巴黎求学. 在 1822 年到 1826 年期间, 他在 Sorbonne 和 Collège de France in Paris 求学. 1828 年他回到俄罗斯定居在圣彼得堡, 而后被选为俄国科学院院士. 2007 年, 乌克兰把 1960 年创立的 Kremenchuk State Polytechnic University 命名为 Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University.

论文《An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism》.

所有上面提到的数学家所陈述和证明的各种版本的散度定理有其特殊的物理意义. Gauss 感兴趣在磁吸引力理论, Ostrogradsky 感兴趣在热理论, Green 感兴趣在电磁理论, Poisson 感兴趣在弹性体, Sarrus 感兴趣在浮体.

通常称为的 Green 定理的定理是Green 本人没有考虑过的一个二维结果, 但我们可以通过"Green 版本"来导出它. 可是没有证据表明Green 本人做过这件事情.

Green 定理在复变函数论中是很重要的, 首次以没有给出证明的形式出现在Augustin Cauchy 在 1846 年的论文《Sur les intégrales qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée》里, Cauchy 用这个定理证明了关于复变函数在闭曲线上积分的 Cauchy 定理. Cauchy 允诺在《Exercises d'analyse et de physique mathématique》中给出一个证明, 但是却从来就没有发表过.

1851 年Berhard Riemann 在其博士论文《Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse》中陈述了相同的定理并给出了证明. 在这篇博士论文中Riemann 引入了 Riemann 面, 提出并给出证明框架的 Riemann 映照定理等.

Stokes 定理最早发表版本是出现在 1854 年 2 月, 但是早在 1850 年 7 月 2 日William Thomson 写给George Stokes 的信中就出现了. 该定理第一个正式发表的证明似乎出现在Hermann Hankel 的专著《Zur allgemeinen Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten》(1861) 中. 稍微有些不同的证明概略出现在Thomson 和Tait 的专著《Treatise on Natural Philosophy》(1867) 中.

Tait 在 1870 年的论文《On Green's and other allied Theorems》中给出了散度定理的向量场形式, 而在 1876 年Maxwell 把 Tait 定理重新陈述成和如今记号更加接近的版本 (其中引入了散度和旋度), 具体参见 **13.10 节**.

Ostrogradsky 在 1836 年的论文《Sur le calcul des variations des intégrales multiples》中推广了他自己的定理, 即前面说的散度定理. 第一位把三大定理统一在一般定理下的是Vito Volterra, 他的结果发表在《Delle Variabili Complesse Negli Iperspazi》(1889). Henri Poincaré 在 1899 年出版的《Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique》中, 也给出 Volterra 的结果不过在记号上更加简洁.

Elie Cartan 在《Sur certaines expressions différentielles et sur le problème de Pfaff》(1899) 中定义了微分表达式, 而在 1922 年引入了外微分形式和外导数. 外导数中的"d"记号最早是Theodore DeDonder 在 1902 年使用过, 但是直到 1934 年Erich Kähler 在其专著《Einführung in die Theoie der Systeme von Differentialgleichungen》中才重新引入. 这个记号和我们现在使用的有细微的的差别, 但是更加接近于Cartan 于 1936 年到 1937 年在巴黎授课时使用的记号 (授课讲义《Les Systèmes Différentiels Extérieurs et leurs Applications Géométriques》(1945) 出版). Cartan 注意到三大定理 (他分别称为 Ostrogradsky、Cauchy-

Green 和 Stokes 定理) 可以写成并推广到 (13.9.20).

13.10 场论简介

本节引入**场 (field)** 的概念及常用的**微分算子 (differential operators)**. 如果对给定区域 D 里的每点 x 都指定一个对象 $\mathbf{T}(x)$, 称为**张量 (tensor)**, 我们就把映射

$$\mathbf{T} : x \longmapsto \mathbf{T}(x)$$

称为定义在 D 上的**张量场 (tensor field)**. 张量场的严格定义在之后的微分流形章节中给出, 大意是指多重线性映射. 我们仅考虑 $\mathbf{T}(x)$ 是向量值映射的张量场 $\mathbf{T}$, 为了方便期间, 就简单地称为**向量场 (vector field)**

13.10.1 向量场

向量场 $\mathbf{T}$ 是指对每个时间 t 都指定了一个向量值映射 $\mathbf{T}_t$. 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是区域.

(1) **数量场 (scalar field)**: t 时刻指定区域 Ω 上的函数 $f(x, y, z, t)$.

(2) **向量场 (vector field)**: t 时刻指定区域 Ω 上的向量值映射 $\boldsymbol{f}(x, y, z, t)$.

(3) 若场不随时间变化而变化, 则称为**稳定场 (stationary field)**, 否者称为**不稳定场 (non-stationary field)**. 一般来说稳定向量场都可以表示称

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)), \quad (x, y, z) \in \Omega. \tag{13.10.1}$$

(4) 给定 Ω 上的稳定向量场 $\boldsymbol{F}$. Ω 中的光滑曲线 Γ 称为 $\boldsymbol{F}$ 的**向量线 (vector line)** 或**流线 (stream line)**, 如果 Γ 上每点出的切线方向都和 $\boldsymbol{F}$ 一致. 显然流线方程为

$$\frac{x'(t)}{P(\boldsymbol{r}(t))} = \frac{y'(t)}{Q(\boldsymbol{r}(t))} = \frac{z'(t)}{R(\boldsymbol{r}(t))}, \tag{13.10.2}$$

这里 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 是 Γ 的向量表达式. 如果进一步要求

$$\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)), \quad t \in I, \tag{13.10.3}$$

这里 $\boldsymbol{r}(t)$ 是 Γ 的向量表达式, 则称 Γ 是 $\boldsymbol{F}$ 的**积分曲线 (integral curve)**.

13.10.2 数量场的等值面和梯度场

数量场 $f(x, y, z)$ 的**等值面 (isosurface)** 或**水平集 (level set)** 为

$$f^{-1}(c) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = c\}, \tag{13.10.4}$$

其中 c 是常数. 注意到等值面有可能为空集, 比如当 $c \notin f(\Omega)$ 时.

若 $f \in C^1(\Omega)$, 定义其**梯度 (gradient)** 为

$$\mathbf{grad}(f) := (f_x, f_y, f_z),$$

这个向量场称为**梯度场 (gradient field)**. 函数 f 沿着方向

$$\boldsymbol{\nu} = (\cos(\boldsymbol{\nu}, x), \cos(\boldsymbol{\nu}, y), \cos(\boldsymbol{\nu}, z))$$

的方向导数可表示成 (参见 (12.1.17))

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \mathbf{grad}(f)\cdot\boldsymbol{\nu} = |\mathbf{grad}(f)|\cos\theta = |\mathbf{grad}(f)|\cos(\mathbf{gradf}(f),\boldsymbol{\nu}),$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{\nu}$ 和梯度方向的夹角. 等值面 (13.10.4) 上的单位法向量为

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|\mathbf{grad}(f)|}(f_x, f_y, f_z),$$

此时

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = |\mathbf{grad}(f)| \geq 0, \quad \mathbf{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\mathbf{n}.$$

即函数 f 在一点的梯度和其等值面在该点的单位法向量是平行的, 且这个方向是方向导数取得最大值 $|\mathbf{grad}(f)|$ 的方向.

13.10.3 向量场的散度

假设 $\boldsymbol{F} = (P, Q, R) \in C(\Omega)$ 且 Σ 是 Ω 中的光滑定向曲面, 则曲面积分

$$\Phi(\boldsymbol{F}, \Sigma) := \iint_{\Sigma} \boldsymbol{F}\cdot\mathbf{n}\,dS \tag{13.10.5}$$

称为向量场 $\boldsymbol{F}$ 沿着曲面 Σ 的**通量 (flux)**. 当 $\boldsymbol{F} \in C^1(\Omega)$ 时, 称

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{F}) := P_x + Q_y + R_z \tag{13.10.6}$$

为 $\boldsymbol{F}$ 的**散度 (divergence)**. $\boldsymbol{F}$ 称为**无源场 (divergence-free field)** 若 $\mathbf{div}(\boldsymbol{F}) = 0$. 用上述 Gauss 公式 (13.9.7) 可写成

$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_{\Omega} \mathbf{div}(\boldsymbol{F})\,dV. \tag{13.10.7}$$

命题 13.15

(1) $\mathbf{div}(\lambda\boldsymbol{F} + \mu\boldsymbol{G}) = \lambda\mathbf{div}(\boldsymbol{F}) + \mu\mathbf{div}(\boldsymbol{G})$, 这里 λ, μ 是常数.

(2) $\mathbf{div}(f\boldsymbol{F}) = f\mathbf{div}(\boldsymbol{F}) + \mathbf{grad}(f)\cdot\boldsymbol{F}$.

♡

证: 显然. □

13.10.4 向量场的旋度

假设 $\boldsymbol{F} = (P, Q, R) \in C(\Omega)$ 且 Γ 是 Ω 中的光滑定向曲线, 则曲线积分

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau}\,ds = \int_{\Gamma} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} \tag{13.10.8}$$

称为向量场 $\boldsymbol{F}$ 沿着曲线 Γ 的**环量 (circulation)**. 当 $\boldsymbol{F} \in C^1(\Omega)$ 时, 称

$$\mathbf{rot}(\boldsymbol{F}) := \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) \tag{13.10.9}$$

为 $\boldsymbol{F}$ 的**旋度 (rotation)**. $\boldsymbol{F}$ 称为**无旋场 (rotation-free field)** 如果 $\mathbf{rot}(\boldsymbol{F}) = 0$. 此时 Stokes 公式 (13.9.10) 此时可写成

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{rot}(\boldsymbol{F})\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\partial\Sigma} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}. \tag{13.10.10}$$

命题 13.16

(1) $\mathbf{rot}(\lambda \boldsymbol{F}+\mu \boldsymbol{G})=\lambda \mathbf{rot}(\boldsymbol{F})+\mu \mathbf{rot}(\boldsymbol{G})$, 这里 λ,μ 是常数.

(2) $\mathbf{rot}(f\boldsymbol{F})=f\mathbf{rot}(\boldsymbol{F})+\mathbf{grad}(f)\times \boldsymbol{F}$.

(3) $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}(f))=\mathbf{0}$. ♡

证: 显然. □

13.10.5 管量场和有势场

假设 $\boldsymbol{F}$ 是无源场, 即 $\mathbf{div}(\boldsymbol{F})=0$. 对任一**向量管 (vector tube)**, 即用光滑定向曲面 S_1、S_2 截 $\boldsymbol{F}$ 的向量流围成的管状曲面 $(\boldsymbol{F}\cdot\mathbf{n}=0)$. 得到一个光滑区域 Ω 且边界 $\partial\Omega$ 是由分段光滑定向曲面 S_1、S_2、S 所构成 (相对 Ω, S_1 和 S_2 的定向相反). 根据 Gauss 公式

$$0=\iiint_{\Omega}\mathbf{div}(\boldsymbol{F})\,dxdydz=\iint_{-S_1+S+S_2}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_{-S_1+S_2}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

从而得到

$$\iint_{S_1}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_{S_2}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

在流体力学上, 这个是说流体通过向量管任意截面的流量是相同的.

假设向量场 $\boldsymbol{F}$ 是无旋场, 即 $\mathbf{rot}(\boldsymbol{F})=0$. 根据定理 13.27 可知对单连通区域 ω 内的任意分段光滑曲线 L, 曲线积分

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}$$

和 L 无关, 且 $Pdx+Qdy+Rdz$ 存在原函数.

假设 $\boldsymbol{F}\in C(\Omega)$.

(1) 如果存在函数 U 满足 $\boldsymbol{F}=\mathbf{grad}(U)$ 则称向量场 $\boldsymbol{F}$ 是**有势场 (potential field)**. 并称 $V:=-U$ 为**势函数 (potential function)**.

(2) 如果对 Ω 内的任意分段光滑曲线 L, 曲线积分

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}$$

和 L 无关, 则称 $\boldsymbol{F}$ 是**保守场 (conservative field)**.

定理 13.29

假设 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$ 是单连通区域且 $\boldsymbol{F}\in C^1(\Omega)$. 则下列三个命题等价:

(1) 向量场 $\boldsymbol{F}$ 是保守场; (2) 向量场 $\boldsymbol{F}$ 是有势场; (3) 向量场 $\boldsymbol{F}$ 是无旋场. ♡

证: 利用定理 13.27. □

坐标原点处质量为 m 的质点的引力场为

$$\boldsymbol{F}=-\frac{Gm\boldsymbol{r}}{r^3}=-\frac{Gm}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z).$$

向量场 $\boldsymbol{F}$ 的一个势函数为 $U=-Gm/r$.

坐标原点处电荷量为 q 的电荷的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\frac{q\boldsymbol{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z),$$

其中 ϵ_0 是真空电容率. 向量场 $\boldsymbol{E}$ 的一个势函数为 $U=q/4\pi\epsilon_0 r$.

13.10.6 Hamilton 四元数和 Hamilton 算子

Hamilton[8] 在 1843 年发现了**四元数 (quaternions)** $\mathbb{H}$. 形式上四元数 $\boldsymbol{p}$ 看写成

$$\boldsymbol{p}:=x^0+x^1\mathbf{e}+x^2\mathbf{f}+x^3\mathbf{g}=\boldsymbol{p}^{\mathbf{S}}+\boldsymbol{p}^{\mathbf{V}},$$

其中 $x^0,x^1,x^2,x^3\in\mathbb{R}$, $\boldsymbol{p}^{\mathbf{S}}=x^0$ 称为 $\boldsymbol{p}$ 的标量部分, $\boldsymbol{p}^{\mathbf{V}}$ 称为 $\boldsymbol{p}$ 的向量部分, 而 $\mathbf{e},\mathbf{f},\mathbf{g}$ 是四元数中的单位元满足如下的乘法法则

$\times$	1	$\mathbf{e}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{g}$
1	1	$\mathbf{e}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{g}$
$\mathbf{e}$	$\mathbf{e}$	-1	$\mathbf{g}$	$-\mathbf{f}$
$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$-\mathbf{g}$	-1	$\mathbf{e}$
$\mathbf{g}$	$\mathbf{g}$	$\mathbf{f}$	$-\mathbf{e}$	-1

$$\mathbf{e}\times\mathbf{f}=\mathbf{g},\quad \mathbf{f}\times\mathbf{g}=\mathbf{e},\quad \mathbf{g}\times\mathbf{e}=\mathbf{f}.$$

按照现代观点, $\mathbb{H}$ 就是 Clifford 代数[9] $\mathbf{Cl}_{2,0}$. 对两个四元数

$$\boldsymbol{p}:=x^0+x^1\mathbf{e}+x^2\mathbf{f}+x^3\mathbf{g},\quad \boldsymbol{q}:=y^0+y^1\mathbf{e}+y^2\mathbf{f}+y^3\mathbf{g},$$

我们得到

$$\begin{aligned}\mathbf{pq} &= (x^0y^0-x^1y^1-x^2y^2-x^3y^3)+(x^2y^3-y^2x^3)\mathbf{e}\\ &\quad+(x^3y^1-y^3x^1)\mathbf{f}+(x^1y^2-x^2y^1)\mathbf{g}.\end{aligned}$$

把Hamilton 原始 $\boldsymbol{\nabla}^{\mathbf{H}}$ 算子

$$\boldsymbol{\nabla}^{\mathbf{H}}:=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{f}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{g}$$

应用到向量值函数 $\boldsymbol{\sigma}=X\mathbf{e}+Y\mathbf{f}+Z\mathbf{g}$ 得到

$$\boldsymbol{\nabla}^{\mathbf{H}}\boldsymbol{\sigma}=-\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\mathbf{e}+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\mathbf{f}+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\mathbf{g}.$$

Tait 在 1870 年利用Hamilton 的原始 $\boldsymbol{\nabla}^{\mathbf{H}}$ 算子把散度公式和 Stokes 公式重新写成向量形式[10]. Maxwell 在 1876 年把

$$(\boldsymbol{\nabla}^{\mathbf{H}}\boldsymbol{\sigma})^{\mathbf{S}}=-\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)$$

称为 $\boldsymbol{\sigma}$ 的**斂度 (convergence)** 而把

$$(\boldsymbol{\nabla}^{\mathbf{H}}\boldsymbol{\sigma})^{\mathbf{V}}=\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\mathbf{e}+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\mathbf{f}+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\mathbf{g}$$

[8] William Rowan Hamilton, 1805 年 8 月 3 日 - 1865 年 9 月 2 日, 今爱尔兰都柏林人, 爱尔兰数学家. 他在数学和物理上的贡献有 Hamiltonian 力学、四元数的发现、Hamilton 原理、Cayley - Hamilton 定理等.

[9] Lawson, H. Blaine, Jr.; Michelsohn, Marie-Louise. *Spin geometry*, Princeton Mathematical Series, **38**. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989. xii+427 pp. ISBN: 0-691-08542-0.

[10] 参见: Katz, Victor, J. *The history of Stokes' theorem*, Math. Mag., **52**(1979), no. 3, 146-156.

称为 $\boldsymbol{\sigma}$ 的**旋度 (curl)**. 注意到 $\boldsymbol{\sigma}$ 的敛度其实就是负的 $\boldsymbol{\sigma}$ 的散度, 并且当 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 都是**纯向量 (pure vector)** 时, $(\boldsymbol{pq})^{\mathrm{S}}$ 就是负的内积 $\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}\rangle$.

下面我们按照目前的方式来引入Hamilton 的形式算子:

$$\boldsymbol{\nabla} := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \equiv (\partial_x, \partial_y, \partial_z) = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{13.10.11}$$

对 $f, P, Q, R \in C^1(\Omega)$ 和 $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$, 定义

$$\boldsymbol{\nabla} f := (\partial_x, \partial_y, \partial_z) f = \mathbf{grad}(f), \tag{13.10.12}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F} := (\partial_x, \partial_y, \partial_z)\cdot(P, Q, R) = \mathbf{div}(\boldsymbol{F}), \tag{13.10.13}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F} := (\partial_x, \partial_y, \partial_z)\times(P, Q, R) = \mathbf{rot}(\boldsymbol{F}). \tag{13.10.14}$$

特别地得到

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla} f = \mathbf{div}(\mathbf{grad}(f)) = \Delta f. \tag{13.10.15}$$

命题 13.17

(1) $\mathbf{div}(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{G}\cdot\mathbf{rot}(\boldsymbol{F}) - \boldsymbol{F}\cdot\mathbf{rot}(G)$,

(2) $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{G}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}) - \boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{G})$.

♡

证: 显然. □

此时 Gauss 公式 (13.9.7) 可写成

$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_{\Omega} \nabla\cdot\boldsymbol{F}\, dV, \tag{13.10.16}$$

而 Stokes 公式 (13.9.10) 可写成

$$\int_{\partial\Sigma} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \iint_{\Sigma} (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F})\cdot d\boldsymbol{S}. \tag{13.10.17}$$

定理 13.30. (Green 公式)

假设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ 是定向区域且边界 $\partial\Omega$ 是光滑定向曲面. 对任意 $f, g \in C^2(\Omega)$, 有

$$\iiint_{\Omega} (\boldsymbol{\nabla} f\cdot\boldsymbol{\nabla} g + f\Delta g) dV = \iint_{\partial\Omega} f\frac{\partial g}{\partial\mathbf{n}} dS, \tag{13.10.18}$$

$$\iiint_{\Omega} (f\Delta g - g\Delta f) dV = \iint_{\partial\Omega} \left(f\frac{\partial g}{\partial\mathbf{n}} - g\frac{\partial f}{\partial\mathbf{n}}\right) dS. \tag{13.10.19}$$

♡

证: 利用 Gauss 公式 (13.10.16) 得到

$$\iiint_{\Omega} (\boldsymbol{\nabla} f\cdot\boldsymbol{\nabla} g + f\Delta g) dV = \iiint_{\Omega} \boldsymbol{\nabla}\cdot(f\boldsymbol{\nabla} g) dV = \iint_{\partial\Omega} f\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{g}\cdot\mathbf{n}\, dS = \iint_{\partial\Omega} f\frac{\partial g}{\partial\mathbf{n}} dS.$$

交换函数 f 和 g 位置, 并结合 (13.10.18) 得到第二个等式. □

在 (13.10.19) 中取 $g \equiv 1$ 则得到**散度公式 (divergence theorem)**

$$\iiint_{\Omega} \Delta f\, dV = \iint_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial\mathbf{n}} dS. \tag{13.10.20}$$

例 13.29

(1) 假设 L 是平面中的简单光滑闭曲线, 记所围区域为 D, $u(x,y)$ 是 D 上的调和函数. 证明

$$I := \frac{1}{2\pi}\int_L \left[\partial u(\xi,\eta)\frac{\ln r}{\partial \mathbf{n}} - \ln r\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \mathbf{n}}\right] ds = u(x,y)$$

这里 $r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$.

证: 因为 $(x,y)\in D$ 故存在 $\epsilon > 0$ 使得 $\mathbb{B}^2((x,y),\epsilon)\subseteq D$. 利用 (13.10.19) 得到

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{B}^2((x,y),\epsilon)}\left(u\frac{\partial \ln r}{\partial \mathbf{n}} - \ln r\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right) ds + \iint_D (u\Delta \ln r - \ln r \Delta u)\, dS \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{\partial\mathbb{B}^2((x,y),\epsilon)} u(\xi,\eta)\frac{ds}{\epsilon} - \ln\epsilon\int_{\partial\mathbb{B}^2((x,y),\epsilon)}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds\right] \\
&= u(\xi',\eta') - \epsilon\ln\epsilon\cdot\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\xi'',\eta'')
\end{aligned}$$

这里 $(\xi',\eta'),(\xi'',\eta'')\in\partial\mathbb{B}^2((x,y),\epsilon)$. 当 $\epsilon\to 0+$ 时得到 $I = u(x,y)$. □

13.11 调和函数

我们已经在第 13.4.4 小节 中引入了调和函数的概念, 本节进一步研究调和函数的性质, 并将证明调和函数必光滑. 主要参考文献是

- Gilbarg, David; Trudinger, Neil S. *Elliptic partial differential equations of second order*, Second edition, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **224**, Springer-Verlag, Berlin, 1983. xiii+513 pp. ISBN: 3-540-13025-X
- Han, Qing; Lin, Fanghjua. *Elliptic partial differential equations*, Second edition, Courant Lecture Notes in Mathematics, **1**, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. x+147 pp. ISBN: 978-0-8218-5313-9

13.11.1 平均值性质

假设 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ 是区域.

定义 13.14. (平均值性质)

任给函数 $u\in C(\Omega)$. 称

(1) u 满足**第一类平均值性质 (first mean value property)** 如果

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)} u(\boldsymbol{y})dS_{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{|\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)|}\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)} u(\boldsymbol{y})dS_{\boldsymbol{y}} \tag{13.11.1}$$

对 $\boldsymbol{x}$ 的任何球邻域 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)\subset\Omega$ 都成立, 这里 $dS_{\boldsymbol{y}}$ 表示球面积元.

(2) u 满足**第二类平均值性质 (second mean value property)** 如果

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{n}{\omega_n r^n}\int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)} u(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y} = \frac{1}{|\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)|}\int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)} u(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y} \tag{13.11.2}$$

对 $\boldsymbol{x}$ 的任何球邻域 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)\subset\Omega$ 都成立, 这里 $d\boldsymbol{y}$ 表示球体积元.

这里 ω_n 表示 $\mathbb{R}^n$ 中单位球面的表面积, ω_n/n 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位球的体积.

注 13.4

如果 u 满足第一类平均值性质, 则

$$\frac{r^n}{n}u(\boldsymbol{x})=\int_0^r u(\boldsymbol{x})s^{n-1}ds=\frac{1}{\omega_n}\int_0^r\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},s)}u(\boldsymbol{y})dS_{\boldsymbol{y}}ds=\frac{1}{\omega_n}\int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)}u(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}.$$

反之, 如果 u 满足第二类平均值性质则

$$u(\boldsymbol{x})r^n=\frac{n}{\omega_n}\int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)}u(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}=\frac{n}{\omega_n}\int_0^r\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},s)}u(\boldsymbol{y})dS_{\boldsymbol{y}}ds$$

从而经过求导后得到 (13.11.2). ♣

注 13.5

定义 13.14 等价于如下说法:

(1′) u 满足第一类平均值性质如果

$$u(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\omega_n}\int_{|\boldsymbol{w}|=1}u(\boldsymbol{x}+r\boldsymbol{w})dS_{\boldsymbol{w}}\tag{13.11.3}$$

对任何 $\boldsymbol{x}$ 的球邻域 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)\subset\Omega$ 都成立.

(2′) u 满足第二类平均值性质如果

$$u(\boldsymbol{x})=\frac{n}{\omega_n}\int_{|\boldsymbol{z}|\le 1}u(\boldsymbol{x}+r\boldsymbol{z})d\boldsymbol{z}\tag{13.11.4}$$

对任何 $\boldsymbol{x}$ 的球邻域 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)\subset\Omega$ 都成立.

根据这点, 称函数 u 满足**平均值性质 (mean value property)** 如果 u 满足第一类平均值性质或者第二类平均值性质. ♣

命题 13.18. (最大值原理)

如果 $u\in C(\overline{\Omega})$ 在 Ω 上满足平均值性质, 则 u 只在边界 $\partial\Omega$ 上达到最大值或最小值, 除非 u 是常数. ♡

证: 仅对最大值情形给出证明. 令

$$\Sigma:=\left\{\boldsymbol{x}\in\Omega:u(\boldsymbol{x})=M:=\sup_{\Omega}u\right\}\subset\Omega.$$

显然 Σ (在 Ω 中) 是闭的.

对任意 $\boldsymbol{x}_0\in\Sigma$, 由于 Ω 是开集, 取 $\boldsymbol{x}_0$ 的某个闭球 $\overline{\mathbb{B}}^n(\boldsymbol{x}_0,r)\subset\Omega$ (这里 $r>0$). 利用平均值性质得到

$$M=u(\boldsymbol{x}_0)=\frac{n}{\omega_n r^n}\int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,r)}u(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}\le M\frac{n}{\omega_n r^n}\int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,r)}d\boldsymbol{y}=M.$$

故 $u=M$ 在 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,r)$ 内成立故 Σ 是开的. 根据连通性知 $\Sigma=\emptyset$ 或 $\Sigma=\Omega$. □

定义 13.15. (调和函数)

称函数 $u\in C^2(\Omega)$ 是**调和的 (harmonic)** 若 $\Delta u=0$ 在 Ω 内成立. ♣

定理 13.31

假设 $u \in C^2(\Omega)$ 在 Ω 内是调和的. 则 u 在 Ω 内满足平均值性质.

证: 对任何球 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}, r)) \subset \Omega$ 和任意 $\rho \in [0, r]$, 有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},\rho)} \Delta u(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} = \int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},\rho)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\boldsymbol{y}) dS_{\boldsymbol{y}} = \rho^{n-1} \int_{|\boldsymbol{w}|=1} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\boldsymbol{x} + \rho \boldsymbol{w}) dS_{\boldsymbol{w}} \\ &= \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{|\boldsymbol{w}|=1} u(\boldsymbol{x} + \rho \boldsymbol{w}) dS_{\boldsymbol{w}}. \end{aligned}$$

从而得到

$$u(\boldsymbol{x})\omega_n = \int_{|\boldsymbol{w}|=1} u(\boldsymbol{w}) dS_{\boldsymbol{w}} = \int_{|\boldsymbol{w}|=1} u(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{w}) dS_{\boldsymbol{w}};$$

即 u 满足第一类平均值性质. □

注 13.6

在定义 13.14 中, 函数 u 不需要是光滑的. 但是下面定理告诉我们满足平均值性质的连续函数必是光滑的且是调和的.

定理 13.32

如果 $u \in C(\Omega)$ 在 Ω 内满足平均值性质, 则 u 在 Ω 内必是光滑的且是调和的.

证: 基本想法是利用卷积来提高光滑性. 选择 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, 1))$ 满足

$$\int_{\mathbb{B}^n(\mathbf{0},1)} \varphi(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 1$$

和 $\varphi(\boldsymbol{x}) = \psi(|\boldsymbol{x}|)$ (即 φ 是径向函数), 即

$$\omega_n \int_0^1 r^{n-1} \psi(r) dr = 1.$$

定义 $\varphi_\epsilon(\boldsymbol{x}) := \varphi(\boldsymbol{x}/\epsilon)/\epsilon^n$, $\epsilon > 0$. 对任意 $\boldsymbol{x} \in \Omega$ 和 $\epsilon < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, 得到

$$\begin{aligned} (\varphi_\epsilon * u)(\boldsymbol{x}) &= \int_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|<\epsilon} u(\boldsymbol{y}) \varphi_\epsilon(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} = \int_{|\boldsymbol{y}|\le\epsilon} u(\boldsymbol{x} + \epsilon\boldsymbol{y}) \varphi_\epsilon(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} \\ &= \frac{1}{\epsilon^n} \int_{|\boldsymbol{y}|\le\epsilon} u(\boldsymbol{x} + \epsilon\boldsymbol{y}) \varphi\left(\frac{\boldsymbol{y}}{\epsilon}\right) d\boldsymbol{y} = \int_{|\boldsymbol{y}|\le 1} u(\boldsymbol{x} + \epsilon\boldsymbol{y}) \varphi(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} \\ &= \int_0^1 r^{n-1} dr \int_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0},1)} u(\boldsymbol{x} + \epsilon r\boldsymbol{w}) \varphi(r\boldsymbol{w}) dS_{\boldsymbol{w}} \\ &= \int_0^1 r^{n-1} \psi(r) dr \int_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0},1)} u(x + \epsilon r\boldsymbol{w}) dS_{\boldsymbol{w}} \\ &= u(\boldsymbol{x})\omega_n \int_0^1 r^{n-1} \psi(r) dr = u(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

故得到

$$u = \varphi_\epsilon * u \tag{13.11.5}$$

在 $\Omega_\epsilon = \{\boldsymbol{y} \in \Omega : \operatorname{dist}(\boldsymbol{y}, \partial\Omega) > \epsilon\}$ 上成立. 根据 (13.11.5), 我们推出 u 在 Ω 内是光滑的. 利用定理 13.31 中的公式得到

$$\int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)} \Delta u(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} = r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \int_{|\boldsymbol{w}|=1} u(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{w}) dS_{\boldsymbol{w}} = \omega_n r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r}(u(\boldsymbol{x})) = 0$$

对任何 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)\subset\Omega$ 都成立. 则 $\Delta u=0$ 在 Ω 内成立. □

注 13.7

(1) 根据**定理 13.31** 和**定理 13.32**, 我们推出调和函数是光滑的且满足平均值性质. 因此调和函数满足最大值原理.

(2) 有界区域上的**Dirichlet 问题**

$$\begin{cases}\Delta u=f, & 在\ \Omega\ 内,\\ u=\varphi, & 在\ \partial\Omega\ 上,\end{cases}$$

这里 $f\in C(\Omega)$ 和 $\varphi\in C(\partial\Omega)$, 若解存在必是唯一的.

(3) 一般来说, 唯一性对无界区域是不成立的. 比如考察如下的 **Dirichlet 问题**:

$$\begin{cases}\Delta u=f, & 在\ \Omega\ 内,\\ u=0, & 在\ \partial\Omega\ 上,\end{cases}$$

这里 $\Omega=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:|\boldsymbol{x}|>1\}$. 显然 $u=0$ 时平凡解. 对 $n=2$, $u(\boldsymbol{x})=\ln|\boldsymbol{x}|$ 是一个解; 注意到 $u\to\infty$ 当 $r\to\infty$ 时. 对 $n\geq 3$, $u(\boldsymbol{x})=|\boldsymbol{x}|^{2-n}-1$ 是一个解; 注意到 $u\to-1$ 当 $r\to\infty$ 时. 如果考察上半平面 $\Omega=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:x^n>0\}$, 则 $u(\boldsymbol{x})=x^n$ 是无界的非平凡解. ♣

引理 13.2

假设 $u\in C(\overline{\mathbb{B}}^n(\boldsymbol{x}_0,R))$ 是调和的, 则

$$|\boldsymbol{D}u(\boldsymbol{x}_0)|\leq\frac{n}{R}\max_{\overline{\mathbb{B}}^n(\boldsymbol{x}_0,R)}|u|. \tag{13.11.6}$$

♡

证: 根据**注 13.7** (1), u 是光滑的且满足 $\Delta(D_iu)=0$. 因此 D_iu 在 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,R)$ 内也是调和的且也满足平均值性质. 故

$$D_iu(\boldsymbol{x}_0)=\frac{n}{\omega_nR^n}\int_{\mathbb{R}^n(\boldsymbol{x}_0,R)}D_iu(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}=\frac{n}{\omega_nR^n}\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,R)}u(\boldsymbol{y})\nu_i(\boldsymbol{y})\,dS_{\boldsymbol{y}}$$

从而

$$|Du(\boldsymbol{x}_0)|\leq\frac{n}{\omega_nR^n}\max_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,R)}|u|\cdot\omega_nR^{n-1}=\frac{n}{R}\max_{\overline{\mathbb{B}}^n(\boldsymbol{x}_0,R)}|u|.\ \square$$

引理 13.3

如果 $u\in C(\overline{\mathbb{R}}^n(\boldsymbol{x}_0,R))$ 在 $\mathbb{R}^n(\boldsymbol{x}_0,R)$ 内是非负调和的, 则

$$|\boldsymbol{D}u(\boldsymbol{x}_0)|\leq\frac{n}{R}u(\boldsymbol{x}_0). \tag{13.11.7}$$

♡

证: 类似**引理 13.2** 的证明, 利用平均值性质得到

$$|\boldsymbol{D}u(\boldsymbol{x}_0)|\leq\frac{n}{\omega_nR^n}\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,R)}u(\boldsymbol{x})\,dS_{\boldsymbol{y}}=\frac{n}{R}u(\boldsymbol{x}_0).\ \square$$

推论 13.4

$\mathbb{R}^n$ 上有上界或下界的调和函数必是常值函数. ♡

证: 不失一般性不妨假设 u 是 $\mathbb{R}^n$ 上的调和函数且有下界 $-C$, 故 $u+C\ge 0$. 注意到 $u+C$ 仍旧是调和的. 根据引理 13.2 得到

$$|\boldsymbol{D}u(\boldsymbol{x})|\le\frac{n}{R}\left[u(\boldsymbol{x}_0)+C\right]$$

对任何 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 都成立. 令 $R\to\infty$ 推出 $\boldsymbol{D}u\equiv 0$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上成立. 故 u 是常数. □

命题 13.19

假设 $u\in C(\overline{\mathbb{B}}^n(\boldsymbol{x}_0,R))$ 在 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,R)$ 内调和的. 则

$$|\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u(\boldsymbol{x}_0)|\le\frac{n^me^{m-1}m!}{R^m}\max_{\overline{\mathbb{B}}^n(\boldsymbol{x}_0,R)}|u| \tag{13.11.8}$$

对任意 n 重指标 $\boldsymbol{\alpha}$, 这里 $|\boldsymbol{\alpha}|=m$, 都成立.

证: 不等式 (13.11.8) 对 $m=1$ 成立, 这可由引理 13.2 得到. 假设 (13.11.8) 对 m 成立. 对 $\theta\in(0,1)$ 定义 $r:=(1-\theta)R\in(0,R)$. 根据引理 13.2 得到

$$\left|\boldsymbol{D}^{m+1}u(\boldsymbol{x}_0)\right|=\left|\boldsymbol{D}\left(\boldsymbol{D}^mu\right)(\boldsymbol{x}_0)\right|\le\frac{n}{r}\max_{\overline{\mathbb{R}}^n(\boldsymbol{x}_0,R)}\left|\boldsymbol{D}^mu\right|.$$

归纳假设推出

$$\max_{\overline{\mathbb{B}}^n(\boldsymbol{x}_0,r)}|\boldsymbol{D}^mu|\le\frac{n^me^{m-1}m!}{(R-r)^m}\max_{\overline{\mathbb{B}}^n(\boldsymbol{x}_0,R-r)}|u|\le\frac{n^me^{m-1}m!}{(R-r)^m}\max_{\overline{\mathbb{B}}^n(\boldsymbol{x}_0,R)}|u|$$

从而

$$\left|\boldsymbol{D}^{m+1}u(\boldsymbol{x}_0)\right|\le\frac{n^{m+1}e^{m-1}m!}{r(R-r)^m}\max_{\overline{\mathbb{B}}^n(\boldsymbol{x}_0,R)}|u|\le\frac{n^{m+1}e^{m-1}m!}{(1-\theta)\theta^mR^{m+1}}\max_{\overline{\mathbb{B}}^n(\boldsymbol{x}_0,R)}|u|.$$

因为 $(1+\frac{1}{m})^m<e$, 在上述不等式中取 $\theta=\frac{m}{m+1}$ 得到

$$\left|\boldsymbol{D}^{m+1}u(\boldsymbol{x}_0)\right|\le\frac{n^{m+1}e^m(m+1)!}{R^{m+1}}\max_{\overline{\mathbb{B}}^n(\boldsymbol{x}_0,R)}|u|.$$

一般地, 对任意 n 重指标 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 有

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u(\boldsymbol{x}_0)| &= \left|\boldsymbol{D}^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}u(\boldsymbol{x}_0)\right| \le \prod_{1\le i\le n}\frac{n^{\alpha_i}e^{\alpha_i-1}\alpha_i!}{R^{\alpha_i}}\max_{\overline{\mathbb{B}}^n(\boldsymbol{x}_0,R)}|u|\\ &= \frac{n^{|\boldsymbol{\alpha}|}e^{|\boldsymbol{\alpha}|-1}}{R^{|\boldsymbol{\alpha}|}}\left(\prod_{1\le i\le n}\alpha_i!\right)\max_{\overline{\mathbb{B}}^n(\boldsymbol{x}_0,R)}|u| \le \frac{n^{|\boldsymbol{\alpha}|}e^{|\boldsymbol{\alpha}|-1}|\boldsymbol{\alpha}|!}{R^{|\boldsymbol{\alpha}|}}\max_{\overline{\mathbb{B}}^n(\boldsymbol{x}_0,R)}|u|\end{aligned}$$

这是因为 $\alpha_1!\cdots\alpha_n!\le|\boldsymbol{\alpha}|!$. □

定理 13.33

调和函数必是实解析的.

证: 假设 u 在 Ω 内是调和的. 固定 $\boldsymbol{x}\in\Omega$ 并取 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},2R)\subset\Omega$ 和 $\boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^n$ 满足 $|\boldsymbol{h}|\le R$. Taylor 展开告诉我们

$$u(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})=u(\boldsymbol{x})+\sum_{1\le|\boldsymbol{\alpha}|\le m-1}\frac{\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{\alpha}!}\boldsymbol{h}^{\boldsymbol{\alpha}}+R_m(\boldsymbol{h})$$

这里

$$R_m(\boldsymbol{h})=\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=m}\frac{\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{h})}{\boldsymbol{\alpha}!}\boldsymbol{h}^{\boldsymbol{\alpha}},\quad \text{存在 } \theta\in(0,1).$$

因为 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}\in\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},R)$ ($|\boldsymbol{h}|<R$), 根据**性质 13.19** 得到

$$|R_m(\boldsymbol{h})|\le\frac{1}{m!}|\boldsymbol{h}|^m\frac{n^m e^{m-1}m!}{R^m}\max_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,2R)}|u|\le\left(\frac{|h|ne}{R}\right)^m\max_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,2R)}|u|.$$

如果取 $|h|<R/2ne$, 则当 $m\to\infty$ 时有 $R_m(h)\to 0$. □

定理 13.34. (Harnack 不等式)

假设 u 在 Ω 内是非负调和的. 则对 Ω 中的任意紧子集 K 存在正常数 $C=C(\Omega,K)$ 使得不等式

$$\frac{1}{C}u(\boldsymbol{y})\le u(\boldsymbol{x})\le Cu(\boldsymbol{y})\tag{13.11.9}$$

对任何 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$ 都成立.

证: 取 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,4R)\subset\Omega$ 则得到

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{x})&=\frac{n}{\omega_nR^n}\int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},R)}u(\boldsymbol{z})d\boldsymbol{z}\le\frac{n}{\omega_nR^n}\int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,2R)}u(\boldsymbol{z})d\boldsymbol{z},\\ u(\boldsymbol{y})&=\frac{n}{\omega_n(3R)^n}\int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{y},3R)}u(\boldsymbol{z})d\boldsymbol{z}\ge\frac{n}{3^n\omega_nR^n}\int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,2R)}u(\boldsymbol{z})d\boldsymbol{z}\end{aligned}$$

对任何 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,R)$ 都成立, 这是因为 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},R)\subset\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,2R)\subset\mathbb{B}^n(\boldsymbol{y},3R)$. 因此

$$\frac{1}{3^n}u(\boldsymbol{y})\le u(\boldsymbol{x})\le 3^nu(\boldsymbol{y})\tag{13.11.10}$$

对所有 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,R)$. □

任给紧子集 K, 取 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_N\in K$ 使得 $\{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_i,R)\}_{1\le i\le N}$ 是 K 的开覆盖且 $4R<\operatorname{dist}(K,\partial\Omega)$. 此时我们可以在 (13.11.9) 中取 $C=3^{nN}$.

假设 u 在 Ω 内是调和的. 利用分部积分法得到

$$\int_\Omega u(\boldsymbol{y})\Delta\varphi(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}=\int_\Omega\Delta u(\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}=0\tag{13.11.11}$$

对任何 $\varphi\in C_0^2(\Omega)$ 都成立. Weyl 反过来证明了如果 (13.11.11) 对任何 $\varphi\in C_0^2(\Omega)$ 都成立, 则 u 必是调和的.

定理 13.35. (Weyl)

如果 $u\in C(\Omega)$ 且

$$\int_\Omega u(\boldsymbol{y})\Delta\varphi(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}=0$$

对任何 $\varphi\in C_0^2(\Omega)$ 都成立, 则 u 在 Ω 内必是调和的.

证: 根据**定理 13.32**, 只要证明 u 在 Ω 内满足平均值性质. 对 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)\subset\Omega$ 我们断言

$$r\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)}u(\boldsymbol{y})dS_{\boldsymbol{y}}=n\int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)}u(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}\tag{13.11.12}$$

成立. 若断言成立则得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)}u(\boldsymbol{y})\,dS_{\boldsymbol{y}}\right) &= \frac{n}{\omega_n}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^n}\int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)}u(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}\right)\\ &= \frac{n}{\omega_n}\left(-\frac{n}{r^{n+1}}\int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)}u(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}+\frac{1}{r^n}\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)}u(\boldsymbol{y})\,dS_{\boldsymbol{y}}\right) = 0.\end{aligned}$$

这意味着

$$\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)}u(\boldsymbol{y})\,dS_{\boldsymbol{y}} = \text{常数}.$$

令 $r\to 0$ 得到 $u(x)$ 是常数 (根据积分中值定理). 故

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)}u(\boldsymbol{y})\,dS_{\boldsymbol{y}}$$

对任意 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)\subset\Omega$ 都成立.

为了证明 (13.11.12), 不妨假设 $n\geq 3$ 且 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 令

$$\varphi(\boldsymbol{y},r) := \begin{cases}\left(|\boldsymbol{y}|^2-r^2\right)^n, & |\boldsymbol{y}|\leq r,\\ 0, & |\boldsymbol{y}|>r\end{cases}$$

和

$$\varphi_k(\boldsymbol{y},r) = \left(|\boldsymbol{y}|^2-r^2\right)^{n-k}\left[2(n-k+1)|\boldsymbol{y}|^2+n(|\boldsymbol{y}|^2-r^2)\right]$$

(这里 $|\boldsymbol{y}|\leq r$ 且 $k=2,3,\cdots,n$). 因为 $n\geq 3$, 所以 $\varphi(\cdot,r)\in C_0^2(\Omega)$ 和

$$\Delta_{\boldsymbol{y}}\varphi(\boldsymbol{y},r) = \begin{cases}2n\varphi_2(\boldsymbol{y},r), & |\boldsymbol{y}|\leq r,\\ 0, & |\boldsymbol{y}|>r.\end{cases}$$

根据假设得到

$$\int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{0},r))}u(\boldsymbol{y})\varphi_2(\boldsymbol{y},r)\,d\boldsymbol{y}=0.$$

一般地可以证明

$$\int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{0},r)}u(\boldsymbol{y})\varphi_k(\boldsymbol{y},r)\,d\boldsymbol{y}=0 \tag{13.11.13}$$

对任何 $k=2,\cdots,n$ 都成立. 如果 (13.11.13) 对 k 成立, 则

$$0=\int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{0},r)}u(\boldsymbol{y})\frac{\partial\varphi_k}{\partial r}(\boldsymbol{y},r)\,d\boldsymbol{y}+\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{0},r)}u(\boldsymbol{y})\varphi_k(\boldsymbol{y},r)dS_{\boldsymbol{y}}=\int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{0},r)}\frac{\partial\varphi_k}{\partial r}(\boldsymbol{y},r)d\boldsymbol{y}$$

这是因为 $\varphi_k(\boldsymbol{y},r)=0$ 对 $|\boldsymbol{y}|=r$ 和 $2\leq k<n$ 成立. 简单计算表明

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_k}{\partial r}(\boldsymbol{y},r) &= (n-k)(|\boldsymbol{y}|^2-r^2)^{n-k-1}(-2r)\left[2(n-k+1)|y|^2+n(|\boldsymbol{y}|^2-r^2)\right]\\ +(|\boldsymbol{y}|^2-r^2)^{n-k}(-2nr) &= (-2r)(|\boldsymbol{y}|^2-r^2)^{n-k-1}\left[2(n-k)(n-k+1)|y|^2\right.\\ \left.+n(n-k+1)(|\boldsymbol{y}|^2-r^2)\right] &= (-2r)(n-k+1)\varphi_{k+1}(\boldsymbol{y},r).\end{aligned}$$

这就证明了 (13.11.13) 对 $k+1$ 也成立. 在 (13.11.13) 中取 $k=n$ 得到

$$0=\int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{0},r)}u(\boldsymbol{y})[(n+2)|\boldsymbol{y}|^2-nr^2]d\boldsymbol{y}$$

从而对 r 微分得到 (13.11.12). □

定理 13.35 给出了调和函数更加广泛的定义. 即称可积函数 $u \in R(\Omega)$ 是调和的, 如果 (13.11.11) 对任何 $\varphi \in C_0^2(\Omega)$ 都成立. 当可积函数是连续时, 根据**定理 13.35** 得到广义的调和函数定义和之前是一样的.

13.11.2 基本解

首先来寻找**径向调和函数** u, 即满足

$$\Delta u = 0 \quad \text{在 } \mathbb{R}^n \text{ 内} \quad \text{且} \quad u(\boldsymbol{x}) = u(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|) \tag{13.11.14}$$

其中 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ 是固定的点. 令

$$r := |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|, \quad v(r) := u(\boldsymbol{x}). \tag{13.11.15}$$

由于 $D_i u = v'(x^i - a^i)/r$ 和 $\partial r/\partial x^i = (x^i - a^i)/r$, 所以

$$\Delta u = \sum_{1 \le i \le n} D_i D_i u = \sum_{1 \le i \le n} \left[v'' \frac{(x^i - a^i)^2}{r^2} + v' \frac{r - (x^i - a^i)\frac{x^i - a^i}{r}}{r^2} \right] = v'' + v' \frac{n-1}{r}.$$

即

$$v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = 0, \tag{13.11.16}$$

从而得到解

$$v(r) = \begin{cases} c_1 + c_2 \ln r, & n = 2, \\ c_3 + c_4 r^{2-n}, & n \ge 3, \end{cases} \tag{13.11.17}$$

这里 $c_i, i = 1, 2, 3, 4$, 都是常数. 为了确定常数 c_i, 引入如下的约束条件

$$\int_{\partial \mathbb{B}_r^n} v'(r) dS = 1, \quad r > 1, \quad \mathbb{B}_r^n := \mathbb{B}^n(\boldsymbol{0}, r). \tag{13.11.18}$$

因此得到

$$v(r) = \begin{cases} c_1 + \frac{1}{2\pi} \log(r), & n = 2, \\ c_3 + \frac{1}{\omega_n (2-n)} r^{2-n}, & n \ge 3. \end{cases} \tag{13.11.19}$$

对固定的 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ 定义函数

$$\Gamma(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}|, & n = 2, \\ \frac{1}{\omega_n (2-n)} |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}|^{2-n}, & n \ge 3, \end{cases} \tag{13.11.20}$$

则 $\Gamma(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})$ 当 $\boldsymbol{x} \ne \boldsymbol{a}$ 时是调和的, 即,

$$\Delta_{\boldsymbol{x}} \Gamma(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \ne \boldsymbol{a}, \tag{13.11.21}$$

且在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ 处有奇点. 易证

$$\int_{\partial \mathbb{B}^n(\boldsymbol{a}, r)} \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}_{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) dS_{\boldsymbol{x}} = 1 \tag{13.11.22}$$

对任何 $r > 0$ 都成立.

定理 13.36

假设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域并假设 $u\in C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$. 则对任意 $\boldsymbol{a}\in\Omega$ 有

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{a}) &= \int_\Omega \Gamma(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})\Delta u(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \\ &\quad - \int_{\partial\Omega}\left(\Gamma(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{x})\frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}_{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})\right)dS_{\boldsymbol{x}}. \end{aligned} \tag{13.11.23}$$

证: 对 u、$\Gamma:=\Gamma(\boldsymbol{a},\cdot)$ 在 $\Omega\setminus\mathbb{B}^n(\boldsymbol{a},r)$ 上用 Green 公式, 这里 $r\in(0,\mathrm{dist}(a,\partial\Omega))$, 得

$$\int_{\Omega\setminus\mathbb{B}^n(\boldsymbol{a},r)}(\Gamma\Delta u-u\Delta\Gamma)\,d\boldsymbol{x}=\int_{\partial\Omega}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}-u\frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}}\right)dS_{\boldsymbol{x}}-\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{a},r)}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}-u\frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}}\right)dS_{\boldsymbol{x}}.$$

因为在 $\Omega\setminus\mathbb{B}^n(\boldsymbol{a},r)$ 上 $\Delta\Gamma=0$, 故

$$\int_\Omega\Gamma\Delta u\,d\boldsymbol{x}=\int_{\partial\Omega}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}-u\frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}}\right)dS_{\boldsymbol{x}}-\lim_{r\to0}\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{a},r)}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}-u\frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}}\right)dS_{\boldsymbol{x}}.$$

对 $n=2$, 根据 (13.11.20), 得到

$$\left|\int_{\partial\mathbb{B}^2(\boldsymbol{a},r)}\Gamma\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}dS_{\boldsymbol{x}}\right|=\left|\frac{1}{2\pi}\ln r\int_{\partial\mathbb{B}^2(\boldsymbol{a},r)}\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}dS_{\boldsymbol{x}}\right|\le|r\ln r|\sup_{\partial\mathbb{B}^2(\boldsymbol{a},r)}|\boldsymbol{D}u|\to0$$

当 $r\to0$ 时, 和

$$\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{a},r)}u\frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}}dS_{\boldsymbol{x}}=\frac{1}{2\pi r}\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{a},r)}u\,dS_{\boldsymbol{x}}\to u(\boldsymbol{a})$$

当 $r\to0$ 时.

对 $n\ge3$, 根据 (13.11.20), 得到

$$\left|\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{a},r)}\Gamma\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}dS_{\boldsymbol{x}}\right|=\left|\frac{r^{2-n}}{(2-n)\omega_n}\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{a},r)}\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}dS_{\boldsymbol{x}}\right|\le\frac{r}{n-2}\sup_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{a},r)}|\boldsymbol{D}u|\to0$$

当 $r\to0$ 时, 从而

$$\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{a},r)}u\frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}}dS_{\boldsymbol{x}}=\frac{1}{\omega_nr^{n-1}}\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{a},r)}u\,dS_{\boldsymbol{x}}\to u(a)$$

当 $r\to0$ 时. □

注 13.8

(1) 在 (13.11.23) 中令 $u\equiv1$ 得到

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}_{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})\,dS_{\boldsymbol{x}}=1 \tag{13.11.24}$$

对任何 $\boldsymbol{a}\in\Omega$ 都成立.

(2) 如果函数 $u\in C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 在 Ω 内是调和的, 则

$$u(\boldsymbol{a})=-\int_{\partial\Omega}\left(\Gamma(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}_{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{x})\frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}_{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})\right)dS_{\boldsymbol{x}} \tag{13.11.25}$$

对任何 $\boldsymbol{a}\in\Omega$ 成立.

(3) 对两个量 A 和 B, 符号

$$A\lesssim B$$

表示 $A\le CB$, 其中 C 是仅依赖于 n 的正常数; 同样符号

$$A\gtrsim B$$

表示 $CA \geq B$, 其中 C 是仅依赖于 n 的正常数. 符号

$$A \sim B$$

表示 $A \lesssim B$ 和 $A \gtrsim B$; 即 $C^{-1}B \leq A \leq CB$, 其中 C 是仅依赖于 n 的正常数. ♣

注 13.9

假设 $u \in C(\overline{\mathbb{B}}^n(\mathbf{0},1))$ 在 $\mathbb{B}^n(\mathbf{0},1)$ 内调和. 对任何固定的常数 $0 < r < R < 1$ 选择截断函数 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{B}^n(\mathbf{0},R))$ 满足 $\varphi|_{\mathbb{B}^n(\mathbf{0},r)} \equiv 1$ 且 $0 \leq \varphi \leq 1$. 对 u 和 $\varphi\Gamma := \varphi\Gamma(a,\cdot)$ 在 $\mathbb{B}^n(\mathbf{0},1) \setminus \mathbb{B}^n(\boldsymbol{a},\rho)$ 内, 这里 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{B}^n(\mathbf{0},r)$, 应用 Green 公式得到, 只要 ρ 足够小,

$$u(\boldsymbol{a}) = -\int_{r<|\boldsymbol{x}|<R} u(\boldsymbol{x})\Delta_{\boldsymbol{x}}\left(\varphi(\boldsymbol{x})\Gamma(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})\right)d\boldsymbol{x} \tag{13.11.26}$$

对任何 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{B}^n(\mathbf{0},r)$ 都成立. 由此得到

$$\sup_{\mathbb{B}^n(\mathbf{0},1/2)}|u| \lesssim ||u||_{L^p(\mathbb{B}^n(\mathbf{0},1))}\ (p>1), \quad \sup_{\mathbb{B}^n(\mathbf{0},1/2)}|\boldsymbol{D}u| \lesssim \max_{\boldsymbol{B}^n(\mathbf{0},1)}|u|. \tag{13.11.27}$$

♣

假设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 内的有界区域. 假设 $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 是如下 Dirichlet 边界值问题

$$\Delta u = f \quad 在\ \Omega 内, \quad u = \varphi \quad 在\ \partial\Omega\ 上 \tag{13.11.28}$$

的解, 这里 $f \in C(\overline{\Omega})$ 和 $\varphi \in C(\partial\Omega)$. 利用 (13.11.23) 得到

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega \Gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} + \int_{\partial\Omega}\varphi(\boldsymbol{y})\frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}_{\boldsymbol{y}}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})dS_{\boldsymbol{y}} - \int_{\partial\Omega}\Gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}_{\boldsymbol{y}}}(\boldsymbol{y})dS_{\boldsymbol{y}}.$$

对每个固定的 $\boldsymbol{x} \in \Omega$ 选择 $\Phi(\boldsymbol{x},\cdot) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 满足

$$\Delta_{\boldsymbol{y}}\Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0 \quad 对\ \boldsymbol{y} \in \Omega, \quad \Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\Gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \quad 对\ \boldsymbol{y} \in \partial\Omega. \tag{13.11.29}$$

令

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := \Gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \tag{13.11.30}$$

为 **Green 函数 (Green function)**. 注意到 Green 函数 $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, 对每个固定的 $\boldsymbol{x} \in \Omega$, 是关于 $\boldsymbol{y} \in \overline{\Omega}$ 的函数. 由于 Φ 是调和的, 所以得到

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} + \int_{\partial\Omega}\varphi(\boldsymbol{y})\frac{\partial G}{\partial\mathbf{n}_{\boldsymbol{y}}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})dS_{\boldsymbol{y}}. \tag{13.11.31}$$

根据最大值原理, (13.11.29) 有唯一解.

命题 13.20

Green 函数 $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 在 $\Omega \times \Omega$ 内是对称的, 即, $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ 对任何 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \in \Omega$ 都成立. ♡

证: 任取 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \Omega$ 且 $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$. 选择充分小的正数 $r > 0$ 使得 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_1,r) \cap \mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_2,r) = \emptyset$. 令 $G_1(\boldsymbol{y}) := G(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}), G_2(\boldsymbol{y}) := G(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})$. 断言

$$G_1(\boldsymbol{x}_2) = G_2(\boldsymbol{x}_1). \tag{13.11.32}$$

在 $\Omega \setminus \mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_1,r) \cup \mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_2,r)$ 上应用 Green 公式得到

$$\int_{\Omega\setminus\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_1,r)\cup\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_2,r)}[G_1(y)\Delta G_2(\boldsymbol{y}) - G_2(\boldsymbol{y})\Delta G_1(\boldsymbol{y})]\,d\boldsymbol{y}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\partial\Omega}\left[G_1(\boldsymbol{y})\frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{n}_{\boldsymbol{y}}}(\boldsymbol{y}) - G_2(\boldsymbol{y})\frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{n}_{\boldsymbol{y}}}(\boldsymbol{y})\right] dS_{\boldsymbol{y}} \\
&\quad - \int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_1,r)}\left[G_1(\boldsymbol{y})\frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{n}_{\boldsymbol{y}}}(\boldsymbol{y}) - G_2(\boldsymbol{y})\frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{n}_{\boldsymbol{y}}}(\boldsymbol{y})\right] dS_{\boldsymbol{y}} \\
&\quad - \int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_2,r)}\left[G_1(\boldsymbol{y})\frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{n}_{\boldsymbol{y}}}(\boldsymbol{y}) - G_2(\boldsymbol{y})\frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{n}_{\boldsymbol{y}}}(\boldsymbol{y})\right] dS_{\boldsymbol{y}}.
\end{aligned}
$$

因为 G_i 是调和的且在 $\partial\Omega$ 为零, 所以得到

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{r\to 0}\left[\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_1,r)}\left(G_1(\boldsymbol{y})\frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{n}_{\boldsymbol{y}}}(\boldsymbol{y}) - G_2(\boldsymbol{y})\frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{n}_{\boldsymbol{y}}}(\boldsymbol{y})\right) dS_{\boldsymbol{y}}\right. \\
&\quad \left. + \int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_2,r)}\left(G_1(\boldsymbol{y})\frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{n}_{\boldsymbol{y}}}(\boldsymbol{y}) - G_2(\boldsymbol{y})\frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{n}_{\boldsymbol{y}}}(\boldsymbol{y})\right) dS_{\boldsymbol{y}}\right] \\
&= \lim_{r\to 0}\left[\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_1,r)}\left(\Gamma(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y})\frac{\partial G_2}{\partial n_{\boldsymbol{y}}}(\boldsymbol{y}) - G_2(\boldsymbol{y})\frac{\partial \Gamma}{\partial n_{\boldsymbol{y}}}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y})\right) dS_{\boldsymbol{y}}\right. \\
&\quad \left. + \int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_2,r)}\left(G_1(\boldsymbol{y})\frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}_{\boldsymbol{y}}}(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}) - \Gamma(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})\frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{n}_{\boldsymbol{y}}}(\boldsymbol{y})\right) dS_{\boldsymbol{y}}\right] \\
&= \lim_{r\to 0}\left[-\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_1,r)} G_2(\boldsymbol{y})\frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}_{\boldsymbol{y}}}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y})dS_{\boldsymbol{y}} + \int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_2,r)} G_1(\boldsymbol{y})\frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}_{\boldsymbol{y}}}(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})dS_{\boldsymbol{y}}\right] \\
&= -G_2(\boldsymbol{x}_1) + G_1(\boldsymbol{x}_2). \quad \square
\end{aligned}
$$

命题 13.21

对任何 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\Omega$, 只要 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$, 都有

$$
\begin{aligned}
0 &> G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > \Gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \quad n\geq 3, \\
0 &> G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > \Gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \frac{1}{2\pi}\ln(\operatorname{diam}(\Omega)), \quad n=2.
\end{aligned}
$$

♡

证: 固定 $\boldsymbol{x}\in\Omega$ 并令 $G(\boldsymbol{y}) := G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$. 因为 $\lim_{\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{x}} G(\boldsymbol{y}) = -\infty$, 可以找到 $r>0$ 使得 $G(\boldsymbol{y})<0$ 在 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)$ 内成立. 因为 G 在 $\Omega\setminus\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)$ 内是调和的, 根据最大值原理得到 $G<0$ 在 $\Omega\setminus\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)$ 内成立. 故 $G(\boldsymbol{y})<0$ 在 Ω 内成立. 回顾

$$
G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \Gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})
$$

这里 $\Delta_{\boldsymbol{y}}\Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$ 若 $\boldsymbol{y}\in\Omega$, 和 $\Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\Gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 若 $\boldsymbol{y}\in\partial\Omega$. 如果 $n\geq 3$,

$$
\Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{(n-2)\omega_n}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{2-n} > 0
$$

若 $\boldsymbol{y}\in\partial\Omega$. 根据最大值原理, $\Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})>0$ 对任何 $\boldsymbol{y}\in\Omega$ 都成立. 如果 $n=2$, 则有

$$
\Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\frac{1}{2\pi}\ln|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| \geq -\frac{1}{2\pi}\ln(\operatorname{diam}(\Omega))
$$

若 $\boldsymbol{y}\in\partial\Omega$. 同样根据最大值原理得到 $\Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > -\frac{1}{2\pi}\ln(\operatorname{diam}(\Omega))$ 对任何 $\boldsymbol{y}\in\Omega$ 成立. □

命题 13.22

$\mathbb{B}^n(\mathbf{0},R)$ 的 Green 函数由如下所给出.

(i) 当 $n \geq 3$ 时

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{(2-n)\omega_n}\left(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{2-n} - \left|\frac{R}{|\boldsymbol{x}|}\boldsymbol{x} - \frac{|\boldsymbol{x}|}{R}\boldsymbol{y}\right|^{2-n}\right); \tag{13.11.33}$$

(ii) 当 $n = 2$ 时

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{2\pi}\left(\ln|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| - \ln\left|\frac{R}{|\boldsymbol{x}|}\boldsymbol{x} - \frac{|\boldsymbol{x}|}{R}\boldsymbol{y}\right|\right). \tag{13.11.34}$$

♡

推论 13.5

假设 G 是 $\mathbb{B}^n(\mathbf{0},r)$ 的 Green 函数. 则

$$\frac{\partial G}{\partial n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{R^2-|\boldsymbol{x}|^2}{\omega_n R|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^n} := K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \tag{13.11.35}$$

这里 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{B}^n(\mathbf{0},R)$ 和 $\boldsymbol{y} \in \partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0},R)$.

♡

由 (13.11.35) 定义的函数 $K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, 这里 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{B}^n(\mathbf{0},R)$ 和 $\boldsymbol{y} \in \partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0},R)$, 称为 $\mathbb{B}^n(\mathbf{0},R)$ 的 **Poisson 核 (Poisson kernel)** 且满足

(i) $K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是光滑的, 如果 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$;

(ii) $K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > 0$ 如果 $|\boldsymbol{x}| < R$;

(iii) 如果 $|\boldsymbol{x}| < R$, 则

$$\int_{|\boldsymbol{y}|=R} K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})dS_{\boldsymbol{y}} = 1.$$

定理 13.37. (Poisson 积分公式)

对 $\varphi \in C(\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0},R))$, 定义函数 u 如下

$$u(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} \int_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0},R)} K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{y})dS_{\boldsymbol{y}}, & |\boldsymbol{x}| < R, \\ \varphi(\boldsymbol{x}), & |\boldsymbol{x}| = R \end{cases} \tag{13.11.36}$$

则 $u \in C(\overline{\mathbb{B}}^n(\mathbf{0},R)) \cap C^\infty(\mathbb{B}^n(\mathbf{0},R))$ 且

$$\Delta u = 0 \quad 在\ \mathbb{B}^n(\mathbf{0},R)\ 内, \quad u = \varphi \quad 在\ \partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0},R)\ 上.$$

♡

注 13.10

在 (13.11.36) 中令 $\boldsymbol{x} = 0$ 得到

$$u(\mathbf{0}) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}}\int_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0},R)} \varphi(\boldsymbol{y})dS_{\boldsymbol{y}}$$

即平均值性质.

♣

引理 13.4. (Harnack 不等式)

假设 u 在 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,R)$ 内调和且 $u \geq 0$. 则对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,R)$ 有

$$\left(\frac{R}{R+r}\right)^{n-2}\frac{R-r}{R+r}u(\boldsymbol{x}_0) \leq u(\boldsymbol{x}) \leq \left(\frac{R}{R-r}\right)^{n-2}\frac{R+r}{R-r}u(\boldsymbol{x}_0) \tag{13.11.37}$$

这里 $r = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0| < R$.

♡

证: 不失一般性不妨假设 $\boldsymbol{x}_0=\mathbf{0}$ 且 $u\in C(\overline{\mathbb{B}}^n(\mathbf{0},R))$. 根据 (13.11.36) 得到

$$u(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\omega_n R}\int_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0},R)}\frac{R^2-|\boldsymbol{x}|^2}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^n}u(\boldsymbol{y})dS_{\boldsymbol{y}}.$$

因为 $R-|\boldsymbol{x}|\le|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|\le R+|\boldsymbol{x}|$ 对任意 $|\boldsymbol{y}|=R$ 都成立, 所以得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\omega_n R}\frac{R-|\boldsymbol{x}|}{R+|\boldsymbol{x}|}\left(\frac{1}{R+|\boldsymbol{x}|}\right)^{n-2}\int_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0},R)}u(\boldsymbol{y})dS_{\boldsymbol{y}}\\ \le\ u(\boldsymbol{x})\ \le\ &\frac{1}{\omega_n R}\frac{R+|\boldsymbol{x}|}{R-|\boldsymbol{x}|}\left(\frac{1}{R-|\boldsymbol{x}|}\right)^{n-2}\int_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0},R)}u(\boldsymbol{y})dS_{\boldsymbol{y}}.\end{aligned}$$

根据平均值性质或**注 13.10**, 得到所要的不等式. □

一般流形上调和函数的 Harnack 估计参见李伟光、Schoen、郑绍远和丘成桐的重要论文和专著:

- Cheng, S. Y.; Yau. S. T.. *Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications*, Comm. Pure Appl. Math., **28**(1975), no. 3, 333-354.
- Li, Peter. *Geometric analysis*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **134**, Cambridge University Press, Cambridge, 2012. x+406 pp. ISBN: 978-1-107-02064-1
- Li, Peter; Yau, Shing-Tung. *On the parabolic kernel of the Schrödinger operator*, Acta. Math., **156**(1986), no. 3-4, 153-201.
- Schoen, R.; Yau, S.-T. *Lectures on differential geometry*, Lecture notes prepared by Wei Yue Ding, Kung Ching Chang [Gong Qing Zhang], Jia Qing Zhong and Yi Chao Xu, Translated from the Chinese by Ding and S. Y. Cheng, With a preface translated from the Chinese by Kaising Tso, Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, **I**, International Press, Cambridge, MA, 1994. v+235 pp. ISBN: 1-57146-012-8
- Yau, Shing Tung. *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds*, Comm. Pure Appl. Math., **28**(1975), 201-228.

推论 13.6

如果 $\mathbb{R}^n$ 上的调和函数 u 是有上界或下界, 则 u 必是常数.

证: 不妨假设 $u\ge 0$ 在 $\mathbb{R}^n$ 内成立. 任取 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 并在 (13.11.37) 中令 $R\to\infty$, 得到 $u(\mathbf{0})=u(\boldsymbol{x})$ 对任意 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 都成立. □

定理 13.38

假设 u 在 $\mathbb{B}^n(\mathbf{0},R)\setminus\{\mathbf{0}\}$ 内调和且满足

$$u(\boldsymbol{x})=\begin{cases}o(|\ln|x||), & n=2,\\ o(|\boldsymbol{x}|^{2-n}), & n\ge 3\end{cases}$$

当 $|\boldsymbol{x}|\to 0$ 时成立. 则 u 可在 $\mathbf{0}$ 处定义使得在 $\mathbb{B}^n(\mathbf{0},R)$ 内即是调和又是 C^2.

证: 不妨假设 u 在 $0<|\boldsymbol{x}|\le R$ 内连续. 考虑 Dirichlet 边界值问题

$$\Delta v=0\quad 在\ \mathbb{B}^n(\mathbf{0},R)\ 内,\quad v=u\quad 在\ \partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0},R)\ 上.$$

断言 $u=v$ 在 $\mathbb{B}^n(\mathbf{0},R)\setminus\{\mathbf{0}\}$ 内成立. 令

$$w:=v-u\quad 在\ \mathbb{B}^n(\mathbf{0},R)\setminus\{0\}\ 内,\quad M_r:=\max_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0},r)}|w|.$$

我们只给出 $n\geq 3$ 时的证明. 因为 $|w(\boldsymbol{x})|\leq M_r\frac{r^{n-2}}{|\boldsymbol{x}|^{n-2}}$ 在 $\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0},r)$ 上成立且 $\boldsymbol{w}$ 在 $\mathbb{B}^n(\mathbf{0},R)\setminus\mathbb{B}^n(\mathbf{0},r)$ 内是调和的, 根据最大值原理得到

$$|w(\boldsymbol{x})|\leq M_r\frac{r^{n-2}}{|\boldsymbol{x}|^{n-2}}$$

对任意 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{B}^n(\mathbf{0},R)\setminus\mathbb{B}^n(\mathbf{0},r)$ 成立. 故

$$\begin{aligned}|w(\boldsymbol{x})| &\leq \frac{r^{n-2}}{|\boldsymbol{x}|^{n-2}}\left(\max_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0},r)}|v|+\max_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0},r)}|u|\right)\\ &\leq \frac{r^{n-2}}{|\boldsymbol{x}|^{n-2}}\max_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0},R)}|u|+\frac{r^{n-2}}{|\boldsymbol{x}|^{n-2}}\max_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0},r)}|u| = \frac{r^{n-2}}{|\boldsymbol{x}|^{n-2}}\max_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0},R)}|u|+\frac{o(1)}{|\boldsymbol{x}|^{n-2}}\end{aligned}$$

对任何 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ 都成立. 当 $r\to 0$ 时, 得到 $\boldsymbol{w}=\mathbf{0}$ 在 $\mathbb{B}^n(\mathbf{0},R)\setminus\{\mathbf{0}\}$ 内成立. □

13.11.3 内梯度估计和 Harnack 估计

这一小节我们将利用最大值原理来得到**内梯度估计 (interior gradient estimate)** 和 **Harnack 不等式 (Harnack inequality)**. 令 $\mathbb{B}^n_r:=\mathbb{B}^n(\mathbf{0},r)$.

定理 13.39

假设 $u\in C^2(\mathbb{B}^n_1)\cap C(\overline{\mathbb{B}}^n_1)$ 在 $\mathbb{B}^n_1$ 内是**下调和的 (subharmonic)**; 即, $\Delta u\geq 0$. 则

$$\sup_{\mathbb{B}^n_1}u\leq\sup_{\partial\mathbb{B}^n_1}u \tag{13.11.38}$$

♡

证: 对任意 $\epsilon>0$ 考虑函数 $u_\epsilon(\boldsymbol{x}):=u(\boldsymbol{x})+\epsilon|\boldsymbol{x}|^2$ in $\mathbb{B}^n_1$. 由于

$$\Delta u_\epsilon=\Delta u+2n\epsilon\geq 2n\epsilon>0,$$

利用反证法易证 u_ϵ 不可能在内部取到最大值. 特别地,

$$\sup_{\mathbb{B}^n_1}u\leq\sup_{\mathbb{B}^n_1}u_\epsilon\leq\sup_{\partial\mathbb{B}^n_1}u_\epsilon\leq\sup_{\partial\mathbb{B}^n_1}u+\epsilon.$$

令 $\epsilon\to 0$ 推出 (13.11.38). □

注 13.11

若把 $\mathbb{B}^n_1$ 换成其它有界区域**定理 13.39** 依旧成立.

♣

命题 13.23

假设 u 在 $\mathbb{B}^n_1$ 内调和. 则

$$\sup_{\mathbb{B}^n_{1/2}}|\boldsymbol{D}u|\leq c\cdot\sup_{\partial\mathbb{B}^n_1}|u| \tag{13.11.39}$$

这里 $c=c(n)$ 是仅依赖于 n 地正常数. 特别地对任意 $\alpha\in[0,1]$ 有不等式

$$|u(x)-u(y)|\leq c|x-y|^\alpha\sup_{\partial\mathbf{B}_1}|u| \tag{13.11.40}$$

对任何 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{B}^n_{1/2}$ 都成立, 这里 $c=c(n,\alpha)$ 是正常数.

♡

证: 因为 $\Delta u = 0$ 在 $\mathbb{B}_1^n$ 内成立, 所以

$$\begin{aligned}\Delta(|\boldsymbol{D}u|^2) &= \Delta\left(\sum_{1\le i\le n}|D_iu|^2\right) = \sum_{1\le j\le n}\left(2\sum_{1\le i\le n}D_iu\cdot D_{ij}u\right)\\ &= \sum_{1\le i,j\le n}|D_{ij}u|^2 + 2\sum_{1\le i,j\le n}D_iuD_{ijj}u\\ &= 2\sum_{1\le i\le n}D_iuD_i(\Delta u) + 2\sum_{1\le i,j\le n}|D_{ij}u|^2 = 2\sum_{1\le i,j\le n}|D_{ij}u|^2.\end{aligned}$$

故 $|\boldsymbol{D}u|^2$ 是下调和的. 对任意函数 $\varphi\in C_0^1(\mathbb{B}_1^n)$ 有

$$\Delta(\varphi|\boldsymbol{D}u|^2) = (\Delta\varphi)|\boldsymbol{D}u|^2 + 4\sum_{1\le i,j\le n}D_i\varphi D_juD_{ij}u + 2\varphi\sum_{1\le i,j\le n}(D_{ij}u)^2.$$

取 $\varphi=\eta^2$, 这里 $\eta\in C_0^1(\mathbb{B}_1^n)$ 且 $\eta|_{\mathbb{B}_{1/2}^n}\equiv 1$, 则得到[11]

$$\begin{aligned}\Delta(\eta^2|\boldsymbol{D}u|^2) &= 2\eta\Delta\eta|\boldsymbol{D}u|^2 + 2|\boldsymbol{D}\eta|^2|\boldsymbol{D}u|^2\\ &\quad + 8\eta\sum_{1\le i,j\le n}D_i\eta D_juD_{ij}u + 2\eta^2\sum_{1\le i,j\le n}(D_{ij}u)^2\\ &\ge (2\eta\Delta\eta - 6|\boldsymbol{D}\eta|^2)|\boldsymbol{D}u|^2 \ge -C|\boldsymbol{D}u|^2,\end{aligned}$$

其中 C 是仅依赖于 η 的正常数. 因为

$$\Delta(u^2) = 2u\Delta u + 2|\boldsymbol{D}u|^2 = 2|\boldsymbol{D}u|^2,$$

所以

$$\Delta(\eta^2|\boldsymbol{D}u|^2 + \alpha u^2)\ge 0$$

这里 α 是仅依赖于 η 的常数. 根据定理 **13.39** 得到

$$\sup_{\mathbb{B}_{1/2}^n}|Du|^2 \le \alpha\sup_{\partial\mathbb{B}_1^n}|u|^2$$

从而得到 (13.11.39). 显然 (13.11.40) 可从 (13.11.39) 推出. □

引理 13.5. (Harnack 不等式)

假设 u 在 $\mathbb{B}_1^n$ 内是非负调和的. 则

$$\sup_{\mathbb{B}_{1/2}^n}|\boldsymbol{D}\ln u| \le C \tag{13.11.41}$$

这里 $C=C(n)$ 是仅依赖于 n 的正常数.

♡

证: 不妨假设 $u>0$ 在 $\mathbb{B}_1^n$ 内成立, 否则考虑函数 $u+\epsilon>0$. 令 $v:=\ln u$. 则

$$\Delta v = \sum_{1\le i\le n}D_i\left(\frac{D_iu}{u}\right) = \frac{\Delta u}{u} - \frac{|\boldsymbol{D}u|^2}{u^2} = -|\boldsymbol{D}v|^2.$$

若令 $w:=|\boldsymbol{D}v|^2$, 得到

$$\Delta w = \sum_{1\le i,j\le n}D_iD_i(D_jvD_jv) = 2\sum_{1\le i,j\le n}D_i(D_jvD_{ij}v)$$

[11] 因为

$$\left|8\eta\sum_{1\le i,j\le n}D_i\eta D_juD_{ij}u\right| \le 2\eta^2\sum_{1\le i,j\le n}(D_{ij}u)^2 + 8|\boldsymbol{D}\eta|^2|\boldsymbol{D}u|^2.$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\sum_{1\le i,j\le n}(D_{ij}v)^2+2\sum_{1\le i,j\le n}D_jvD_j(D_{ii}v)\\
&= 2\sum_{1\le i,j\le n}(D_{ij}v)^2+2\sum_{1\le j\le n}D_jvD_j(\Delta v) = 2\sum_{1\le i,j\le n}(D_{ij}v)^2-2\sum_{1\le i\le n}D_ivD_iw.
\end{aligned}
$$

因为

$$
\sum_{1\le i,j\le n}(D_{ij}v)^2\ge\sum_{1\le i\le n}(D_{ii}v)^2\ge\frac{1}{n}(\Delta v)^2=\frac{|\boldsymbol{D}v|^4}{n}=\frac{w^2}{n},
$$

所以

$$
\Delta w+2\sum_{1\le i\le n}D_ivD_iw\ge\frac{2}{n}w^2.
$$

取定非负函数 $\varphi\in C_0^1(\mathbb{B}_1^n)$ 得到

$$
\begin{aligned}
\Delta(\varphi w)+2\sum_{1\le i\le n}D_ivD_i(\varphi w) &= 2\varphi\sum_{1\le i,j\le n}(D_{ij}v)^2+4\sum_{1\le i,j\le n}D_i\varphi D_jvD_{ij}v\\
+2w\sum_{1\le i\le n}D_i\varphi D_iv+(\Delta\varphi)w &\ge 2\varphi\sum_{1\le i,j\le n}(D_{ij}v)^2-2|\boldsymbol{D}\varphi||\boldsymbol{D}v|^3-|\Delta\varphi||\boldsymbol{D}v|^2\\
&\quad -4\left[\frac{\varphi}{4}\sum_{1\le i,j\le n}(D_{ij}v)^2+\frac{|\boldsymbol{D}\varphi|^2}{\varphi}|\boldsymbol{D}v|^2\right]\\
&= \varphi\sum_{1\le i,j\le n}(D_{ij}v)^2-2|\boldsymbol{D}\varphi||\boldsymbol{D}v|^3-\left(|\Delta\varphi|+4\frac{|\boldsymbol{D}\varphi|^2}{\varphi}\right)|\boldsymbol{D}v|^2.
\end{aligned}
$$

根据

$$
\boldsymbol{D}\varphi=4\eta^3\boldsymbol{D}\eta,\quad \Delta\varphi=12\eta^2|\boldsymbol{D}\eta|^2+4\eta^3\Delta\eta,
$$

得到

$$
\begin{aligned}
\Delta(\varphi w)+2\sum_{1\le i\le n}D_ivD_i(\eta^4w) &\ge \frac{1}{n}\eta^4|\boldsymbol{D}v|^4-8\eta^3|\boldsymbol{D}\eta||\boldsymbol{D}v|^3\\
-4\eta^2(\eta\Delta\eta+19|\boldsymbol{D}\eta|^2)|\boldsymbol{D}v|^2 &\ge \frac{1}{n}\eta^4|\boldsymbol{D}v|^4-C\eta^3|\boldsymbol{D}v|^3-C\eta^2|\boldsymbol{D}v|^2
\end{aligned}
$$

这里 C 是仅依赖于 n 和 η 的正常数. 利用 Hölder 不等式得到

$$
\Delta(\varphi w)+2\sum_{1\le i\le n}D_ivD_i(\eta^4w)\ge\frac{3}{4n}\eta^4w^2-(nC^2+C)\eta^2w\ge\frac{1}{2n}\eta^4w^2-C_1
$$

这里 C 也是仅依赖于 n 和 η 的正常数.

假设 η^4w 在 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{B}_1^n$ 取到最大值. 则 $\boldsymbol{D}(\eta^4w)=0$ 且 $\Delta(\eta^4w)\le 0$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处成立. 故

$$
\eta^4w^2(\boldsymbol{x}_0)\le C_2
$$

对某个仅依赖于 n 和 η 的正常数 C_2 成立. 若 $w(\boldsymbol{x}_0)\ge 1$, 则 $\eta^4w(\boldsymbol{x}_0)\le C_2$; 若 $w(\boldsymbol{x}_0)\le 1$, 则 $\eta^4w(\boldsymbol{x}_0)\le\eta^4(\boldsymbol{x}_0)$. 无论哪一种情形都有 $\eta^4w\le C_3$ 在 $\mathbb{B}_1^n$ 内成立, 这里 C_3 是仅依赖于 n 和 η 的正常数. □

对流形上的非负调和函数 $\Delta u=0$ 也有类似的估计, 即 **Cheng-Yau 估计 (Cheng-Yau**

estimate)[12]. 我们甚至还可以考虑热方程 $\partial_t u = \Delta u$ 非负解的 Harnack 估计, 即 **Li-Yau 估计 (Li-Yau estimate)**[13] 和 **Hamilton 估计 (Hamilton estimate)**[14]. 这两个估计在Perelman 证明 **Poincaré 猜想 (Poincaré conjecture)** 中起了至关重要的作用.

推论 13.7

假设函数 u 在 $\mathbb{B}_1^n$ 内是非负调和的. 则

$$\frac{1}{C}u(\boldsymbol{x}_2) \le u(\boldsymbol{x}_1) \le Cu(\boldsymbol{x}_2) \tag{13.11.42}$$

对任意 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{B}_{1/2}^n$ 都成立, 这里 $C > 1$ 是仅依赖于 n 的正常数.

证: 不妨假设 $u > 0$ 在 $\mathbb{B}_1^n$ 内成立. 对任何 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{B}_{1/2}^n$ 有

$$\ln\frac{u(\boldsymbol{x}_1)}{u(\boldsymbol{x}_2)} \le |\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2| \int_0^1 |\boldsymbol{D}\ln u(t\boldsymbol{x}_2 + (1-t)\boldsymbol{x}_1)|dt \le C|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2| \le C$$

这是因为 $t\boldsymbol{x}_2 + (1-t)\boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{B}_{1/2}^n$. □

命题 13.24. (Hopf 引理)

假设 $u \in C(\overline{\mathbb{B}}_1^n)$ 在 $\mathbb{B}_1^n$ 内是调和的. 如果 $u(\boldsymbol{x}) < u(\boldsymbol{x}_0)$ 对任何 $\boldsymbol{x} \in \overline{\mathbb{B}}_1^n$ 和某个 $x_0 \in \partial\mathbb{B}_1^n$ 成立, 则

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\boldsymbol{x}_0) \ge C[u(\boldsymbol{x}_0) - u(\mathbf{0})] \tag{13.11.43}$$

这里 C 是仅依赖于 n 的正常数.

证: 定义

$$v(\boldsymbol{x}) := e^{-\alpha|\boldsymbol{x}|^2} - e^{-\alpha}.$$

当 $\alpha \ge 2n+1$ 时有

$$\Delta v(\boldsymbol{x}) = e^{-\alpha|\boldsymbol{x}|^2}(4\alpha^2|\boldsymbol{x}|^2 - 2\alpha n) > 0$$

对任何 $|\boldsymbol{x}| \ge \frac{1}{2}$ 都成立. 因此对每个固定的 α, 函数 v 在区域 $A := \mathbb{B}_1^n \setminus \mathbb{B}_{1/2}^n$ 内是下调和的. 定义

$$h_\epsilon(\boldsymbol{x}) := u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{x}_0) + \epsilon v(\boldsymbol{x})$$

这里 $\epsilon > 0$. 这仍旧是下调和函数, $\Delta h_\epsilon \ge 0$. 注意到 $h_\epsilon \le 0$ 在 $\partial\mathbb{B}_1^n$ 上成立且 $h_\epsilon(\boldsymbol{x}_0) = 0$. 由于 $u(\boldsymbol{x}) < u(\boldsymbol{x}_0)$ 对 $|\boldsymbol{x}| = \frac{1}{2}$ 成立, 我们不妨取 $\epsilon > 0$ 足够小使得 $h_\epsilon(\boldsymbol{x}) < 0$ 对 $|\boldsymbol{x}| = \frac{1}{2}$ 成立. 从**定理 13.39** 得到 h_ϵ 在 $\boldsymbol{x}_0 \in A$ 处取到最大值. 这就意味着

$$\frac{\partial h_\epsilon}{\partial \mathbf{n}}(\boldsymbol{x}x_0) \ge 0 \ \ \text{或者} \ \ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\boldsymbol{x}_0) \ge -\epsilon\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(\boldsymbol{x}_0) = 2\alpha\epsilon e^{-\alpha} > 0.$$

令

$$w(\boldsymbol{x}) := u(\boldsymbol{x}_0) - u(\boldsymbol{x}) > 0.$$

[12] Cheng, S. Y.; Yau. S. T.. *Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications*, Comm. Pure Appl. Math., **28**(1975), no. 3, 333-354.

[13] Li, Peter; Yau, Shing-Tung. *On the parabolic kernel of the Schrödinger operator*, Acta. Math., **156**(1986), no. 3-4, 153-201.

[14] Hamilton, Richard. *A matrix Harnack estimate for the heat equation*, Comm. Anal. Geom., **1**(1993), no. 1, 113-126.

因为 w 在 $\mathbb{B}_1^n$ 内是调和的, 所以从**推论 13.7** 得到

$$\inf_{\mathbb{B}_{1/2}^n} w \geq C(n)w(\mathbf{0}) \quad \text{或者} \quad \max_{\mathbb{B}_{1/2}^n} u \leq u(\boldsymbol{x}_0) - C(n)[u(\boldsymbol{x}_0) - u(\mathbf{0})]$$

这里 $C(n)$ 是仅依赖 n 的正常数. 若取

$$\epsilon := \delta C(n)[u(\boldsymbol{x}_0) - u(\mathbf{0})]$$

只要 δ 足够小, 我们得到 $h_\epsilon(\boldsymbol{x}) < 0$ 当 $|\boldsymbol{x}| = \frac{1}{2}$ 时成立. 故

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\boldsymbol{x}_0) = 2\alpha e^{-\alpha}\delta C(n)[u(\boldsymbol{x}_0) - u(\mathbf{0})].$$

最后我们取 $C = 2\alpha e^{-\alpha}\delta C(n)$. □

称函数 $u \in C^\alpha(\overline{D})$, 这里 D 是有界区域, 如果

$$||u||_{C^\alpha(\overline{D})} := \max_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\overline{D},\, \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}} \frac{|u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{y})|}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^\alpha} < +\infty.$$

引理 13.6. (整体 Hölder 连续性)

假设 $u \in C(\overline{\mathbb{B}}_1^n)$ 在 $\mathbb{B}_1^n$ 内是调和的且 $u = \varphi$ 在 $\partial\mathbb{B}_1^n$ 上成立. 如果 $\varphi \in C^\alpha(\partial\mathbb{B}_1^n)$ 这里 $\alpha \in (0,1)$, 则 $u \in C^{\alpha/2}(\overline{\mathbb{B}}_1^n)$. 更进一步有

$$||u||_{C^{\alpha/2}(\overline{\mathbb{B}}_1^n)} \leq C||\varphi||_{C^\alpha(\partial\mathbb{B}_1^n)} \tag{13.11.44}$$

这里 C 是仅依赖于 n 和 α 的正常数. ♡

证: 根据**定理 13.39** 可知 $\inf_{\partial\mathbb{B}_1^n}\varphi \leq u \leq \sup_{\partial\mathbb{B}_1^n}\varphi$ 在 $\mathbb{B}_1^n$ 内成立. 断言不等式

$$\sup_{x\in\mathbb{B}_1^n} \frac{|u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{x}_0)|}{|x\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^{\alpha/2}} \leq 2^{\alpha/2}\sup_{\partial\mathbb{B}_1^n}\frac{|\varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{x}_0)|}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^\alpha} \tag{13.11.45}$$

对任何 $\boldsymbol{x}_0 \in \partial\mathbb{B}_1^n$ 都成立. 令

$$K := \sup_{\partial\mathbb{B}_1^n}\frac{|\varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{x}_0)|}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^\alpha}$$

并假设 $\boldsymbol{x}_0 := (-1, 0, \cdots, 0) \in \partial\mathbb{B}_1^n$. 则 $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^2 = 2(1 + x^1)$, $\boldsymbol{x} := (x^1, \cdots, x^n)$. 从而得到

$$\varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{x}_0) \leq K|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^\alpha = K2^{\alpha/2}(1 + x^1)^{\alpha/2} =: v(\boldsymbol{x}).$$

利用

$$\Delta v(\boldsymbol{x}) = K2^{\alpha/2}\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2} - 1\right)(1 + x^1)^{\frac{\alpha}{2}-2} < 0 = \Delta u(\boldsymbol{x}),$$

得到 $\Delta[u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{x}_0) - v(\boldsymbol{x})] \geq 0$ 且

$$u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{x}_0) - v(\boldsymbol{x}) \leq \sup_{\partial\mathbb{B}_1^n}[\varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{x}_0) - v(\boldsymbol{x})] \leq 0$$

这里用到了**定理 13.39**. 因此

$$u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{x}_0) \leq v(\boldsymbol{x}) = K2^{\alpha/2}(1 + x^1)^{\alpha/2} \leq K2^{\alpha/2}|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^{\alpha/2}$$

对任何 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{B}_1^n$ 都成立. 类似地可得到 $-[u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{x}_0)] \leq K2^{\alpha/2}|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^{\alpha/2}$. 这就证明了 (13.11.45).

对任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{B}_1^n$, 引入

$$d_{\boldsymbol{x}} = \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, \partial\mathbb{B}_1^n), \quad d_{\boldsymbol{y}} = \mathrm{dist}(\boldsymbol{y}, \partial\mathbb{B}_1^n).$$

假设 $d_{\boldsymbol{y}} \le d_{\boldsymbol{x}}$ 并取 $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0 \in \partial\mathbb{B}_1^n$ 满足

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| = d_{\boldsymbol{x}}, \quad |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0| = d_{\boldsymbol{y}}.$$

若 $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \le \frac{d_{\boldsymbol{x}}}{2}$, 则得到 $\boldsymbol{y} \in \overline{\mathbb{B}}^n(\boldsymbol{x}, \frac{d_{\boldsymbol{x}}}{2}) \subseteq \mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}, d_{\boldsymbol{x}}) \subseteq \mathbb{B}_1^n$. 根据**性质 13.23** 和 (13.11.45) 推出

$$\frac{|u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{y})|}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^{\alpha/2}} \le C|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^{\alpha/2} \sup_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}, d_{\boldsymbol{x}})} |u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{x}_0)|$$

$$\le C(d_{\boldsymbol{x}}/2)^{\alpha/2} d_{\boldsymbol{x}}^{\alpha/2} \cdot \sup_{\mathbb{B}_1^n} \frac{|u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{x}_0)|}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^{\alpha/2}} \le C d_{\boldsymbol{x}}^{\alpha} ||\varphi||_{C^{\alpha}(\partial\mathbb{B}_1^n)}.$$

如果 $d_{\boldsymbol{y}} \le d_{\boldsymbol{x}} \le 2|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$, 则

$$\begin{aligned} |u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{y})| &\le |u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{x}_0)| + |u(\boldsymbol{x}_0) - u(\boldsymbol{y}_0)| + |u(\boldsymbol{y}_0) - u(\boldsymbol{y})| \\ &\le (2^{\alpha/2} d_{\boldsymbol{x}}^{\alpha/2} + 2^{\alpha/2} d_{\boldsymbol{y}}^{\alpha/2} + |\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{y}_0|^{\alpha/2}) ||\varphi||_{C^{\alpha}(\partial\mathbb{B}_1^n)} \end{aligned}$$

by (13.11.45). 但是, $|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{y}_0| \le d_{\boldsymbol{x}} + d_{\boldsymbol{y}} + |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \le 5|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$ 推出

$$|u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{y})| \le (2^{\alpha} + 2^{\alpha} + 5^{\alpha/2})|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^{\alpha/2} ||\varphi||_{C^{\alpha}(\partial\mathbf{B}_1)}.$$

即 $||u||_{C^{\alpha/2}(\mathbb{B}_1^n)} \le C(n, \alpha)||\varphi||_{C^{\alpha}(\partial\mathbb{B}_1^n)}$. □

13.11.4 能量法

假设 $a_{ij} \in C(\mathbb{B}^n)$ ($\mathbb{B}^n := \mathbb{B}^n(\mathbf{0}, 1)$) 且不等式

$$\lambda|\boldsymbol{\xi}|^2 \le a_{ij}(\boldsymbol{x})\xi^i\xi^j \le \Lambda|\boldsymbol{\xi}|^2 \tag{13.11.46}$$

对任何 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{B}^n$ 和 $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \cdots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n$ 都成立, 这里 λ, Λ 是正常数. 考察下面偏微分方程的**弱解 (weak solution)** $u \in C^1(\mathbb{B}^n)$

$$\sum_{1 \le i,j \le n} D_j(a_{ij} D_i u) = 0. \tag{13.11.47}$$

即 u 满足等式

$$\sum_{1 \le i,j \le n} \int_{\mathbb{B}^n} a_{ij} D_i u D_j \varphi = 0 \tag{13.11.48}$$

对任何 $\varphi \in C_0^1(\mathbb{B}^n)$ (即 φ 在 $\mathbb{B}^n$ 上是连续的且在边界上取零) 都成立. 注意到调和函数满足 (13.11.47) (这里 $a_{ij} = \delta_{ij}$).

引理 13.7. (Cacciopolli 不等式)

假设函数 $u \in C^1(\mathbb{B}^n)$ 满足

$$\sum_{1 \le i,j \le n} \int_{\mathbb{B}^n} a_{ij} D_i u D_j \varphi = 0, \quad 任意\ \varphi \in C_0^1(\mathbb{B}^n).$$

则对任意 $\eta \in C_0^1(\mathbb{B}^n)$ 有

$$\int_{\mathbb{B}^n} \eta^2 |\boldsymbol{D}u|^2 \le C \int_{\mathbb{B}^n} |\boldsymbol{D}\eta|^2 u^2 \tag{13.11.49}$$

这里 C 是仅依赖于 λ 和 Λ 的正常数. ♡

证: 对任何 $\eta \in C_0^1(\mathbb{B}^n)$ 令 $\varphi := \eta^2 u$. 根据 (13.11.48), 得到

$$0 = \sum_{1\le i,j\le n} \int_{\mathbb{B}^n} a_{ij} D_i u (2\eta u D_j \eta + \eta^2 D_j u)$$

从而

$$\lambda \int_{\mathbb{B}^n} \eta^2 |\boldsymbol{D}u|^2 \le 2\Lambda \int_{\mathbf{B}_1} |\eta||u||\boldsymbol{D}u||\boldsymbol{D}\eta| \le \frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{B}^n} \eta^2|\boldsymbol{D}u|^2 + \frac{2\Lambda^2}{\lambda}\int_{\mathbb{B}^n} |\boldsymbol{D}\eta|^2 u^2.$$

这里 $C = 4\Lambda^2/\lambda^2$. □

Renato Caccioppoli, 1904 年 1 月 20 日–1959 年 5 月 8 日, 今意大利那不勒斯人, 意大利数学家. 他的大部分重要工作集中在泛函分析和变分法. 在 1935 年, 他证明了带解析系数的椭圆方程的 C^2-解是解析的.

推论 13.8

假设 u 满足**引理 13.7** 中的条件. 则对任何 $0 \le r < R \le 1$ 有

$$\int_{\mathbb{B}_r^n} |\boldsymbol{D}u|^2 \le \frac{C}{(R-r)^2}\int_{\mathbb{B}_R^n} u^2 \tag{13.11.50}$$

这里 C 是仅依赖于 λ 和 Λ 的正常数. ♡

证: 取 $\eta \in C_0^1(\mathbb{B}^n)$ 满足 $\eta \equiv 1$ 在 $\mathbb{B}_r^n$ 内, $\eta \equiv 0$ 在 $\mathbb{B}_R^n$ 外, 且 $|\boldsymbol{D}\eta| \le \frac{1}{R-r}$. 则根据 (13.11.49) 得到

$$\int_{\mathbb{B}_r^n} |\boldsymbol{D}u|^2 \le \frac{C}{(R-r)^2}\int_{\mathbb{B}_R^n} u^2. \quad \square$$

Poincaré 不等式是说

$$\int_{\mathbb{B}_R^n} u^2 \le C(n)R^2 \int_{\mathbb{B}_R^n} |\boldsymbol{D}u|^2, \quad u \in C_0^1(\mathbb{B}_R^n).$$

等价的不等式是说

$$\int_{\mathbb{B}_R^n} (u - \underline{u})^2 \le C(n)R^2 \int_{\mathbb{B}_R^n} |\boldsymbol{D}u|^2, \quad u \in C^1(\mathbb{B}_R^n)$$

其中

$$\underline{u} := \frac{1}{|\mathbb{B}_R^n|}\int_{\mathbb{B}_R^n} u.$$

进一步[15], 对任何 $1 \le p, q < \infty$ 满足 $q \le \frac{pn}{n-p}$ 和 $p < n$, 定义 **Sobolev 常数 (Sobolev constant)** 和 **Poincaré 常数 (Poincaré constant)** 分别如下

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{S}}(p,q) &:= \sup_{u\in C_0^1(\mathbb{B}_R^n)} \frac{||u||_{L^p(\mathbb{B}_R^n)}}{|\mathbb{B}_R^n|^{\frac{1}{n}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}||\boldsymbol{D}u||_{L^p(\mathbb{B}_R^n)}}, \\ C_{\mathbf{P}}(p,q) &:= \sup_{u\in C_0^1(\mathbb{B}_R^n)} \frac{||u-\underline{u}||_{L^p(\mathbb{B}_R^n)}}{|\mathbb{B}_R^n|^{\frac{1}{n}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}||\boldsymbol{D}u||_{L^p(\mathbb{B}_R^n)}}. \end{aligned}$$

[15] Chua, Seng-Kee; Wheeden, Richard L. *A note on sharp* 1*-dimensional Poincaré inequalities*, Proc. AMS., **134**(2006), no. 8, 2309–2316.

易证上述两个常数和 $\mathbb{B}_R^n$ 无关.

- **(Talenti, 1976; Aubin, 1976; Lions, 1985)** 当 $n>1$ 且 $1\le p<n$ 时,

$$C_{\mathbf{S}}\left(p,\frac{np}{n-p}\right)=\frac{1}{n\sqrt{\pi}}\left[\frac{n!\Gamma(n/2)}{2\Gamma(n/p)\Gamma(n+1-n/p)}\right]^{\frac{1}{n}}\left[\frac{n(p-1)}{n-p}\right]^{1-\frac{1}{p}}.$$

- **(Hayman, 1978)** $C_{\mathbf{S}}(2,2)$ 和 Dirichlet 边值问题

$$\Delta u+\lambda u=0\quad \text{在 } \mathbb{B}_R^n \text{ 内},\quad u=0\quad \text{在 } \partial\mathbb{B}_R^n \text{ 上}$$

的第一特征值有关. $C_{\mathbf{S}}(2,2)|\mathbb{B}_1^n|^{1/n}$ 是 Bessel 函数 $J_{n/2-1}$ 的第一个正零根的倒数.

- **(Kufner–Opic, 1990)** 当 $n>1$ 且 $1\le q\le\frac{n}{n-1}$ 时

$$C_{\mathbf{S}}(1,q)=C_{\mathbf{S}}(1,1)=\frac{1}{n|\mathbb{B}_1^n|^{1/n}}.$$

- **(Kufner–Opic, 1990)** 当 $p>1$ 时

$$C_{\mathbf{S}}(p,1)=\frac{1}{n^{1/p}|\mathbb{B}_1^n|^{1/n}}\frac{1}{(n+p')^{1/p'}},\quad p':=\frac{p}{p-1}.$$

- **(Talenti, 1976)** 当 $n=1$ 时, 对任何 $p.q>1$,

$$C_{\mathbf{S}}(p,q)=\frac{q(1+p'/q)^{1/p}\Gamma(\frac{1}{q}+\frac{1}{p'})}{2(1+q/p')^{1/q}\Gamma(1/q)\Gamma(q/p')},\quad p':=\frac{p}{p-1},\quad q':=\frac{q}{q-1}.$$

- **(Chua–Wheeden, 2000)** 当 $n=1$ 时

$$C_{\mathbf{P}}(1,q)=\max_{x\in[0,1]}\left[x^q(1-x)+(1-x)^q x\right]^{1/q}.$$

- **(Payne–Weinberger, 1960; Bebendorf, 2003)** 对任何固定的 n,

$$\sup_{\Omega\subset\mathbb{R}^n,\text{凸区域}}\ \sup_{u\in C^1(\Omega)}\frac{||u-\underline{u}||_{L^2(\Omega)}}{(\mathrm{diam}(\Omega))||\boldsymbol{D}u||_{L^2(\Omega)}}=\frac{1}{\pi}.$$

- **(Acosta–Durán, 2004)** 对任何固定的 n,

$$\sup_{\Omega\subset\mathbb{R}^n,\text{凸区域}}\ \sup_{u\in C^1(\Omega)}\frac{||u-\underline{u}||_{L^1(\Omega)}}{(\mathrm{diam}(\Omega))||\boldsymbol{D}u||_{L^1(\Omega)}}=\frac{1}{2}.$$

推论 13.9

假设 u 满足引理 **13.7** 中的条件. 则对任何 $0<R\le 1$ 有

$$\int_{\mathbb{B}_{R/2}^n}u^2\le\theta\int_{\mathbb{B}_R^n}u^2,\quad \int_{\mathbb{B}_{R/2}^n}|\boldsymbol{D}u|^2\le\theta\int_{\mathbb{B}_R^n}|\boldsymbol{D}u|^2 \tag{13.11.51}$$

这里 θ 是仅依赖于 n,λ,Λ 的正常数.

证: 在 (13.11.49) 中取 $\eta\in C_0^1(\mathbb{B}_R^n)$ 满足 $\eta|_{\mathbb{B}_{R/2}^n}\equiv 1$ 和 $|\boldsymbol{D}\eta|\le\frac{2}{R}$, 得到

$$\int_{\mathbb{B}_R^n}|\boldsymbol{D}(\eta u)|^2=\int_{\mathbb{B}_R^n}(\eta^2|\boldsymbol{D}u|^2+|\boldsymbol{D}\eta|^2u^2)\le C\int_{\mathbb{B}_R^n}|\boldsymbol{D}\eta|^2u^2\le\frac{C}{R^2}\int_{\mathbb{B}_R^n\setminus\mathbb{B}_{R/2}^n}u^2$$

这里 C 是仅依赖于 λ,Λ 的正常数. 根据 Poincaré 不等式得到

$$\int_{\mathbb{B}_{R/2}^n}u^2\le\int_{\mathbb{B}_R^n}(\eta u)^2\le C(n)R^2\frac{C}{R^2}\int_{\mathbb{B}_R^n\setminus\mathbb{B}_{R/2}^n}u^2=C_1\int_{\mathbb{B}_R^n\setminus\mathbb{B}_{R/2}^n}u^2$$

这里 C_1 是仅依赖于 n,λ,Λ 的正常数. 即

$$\int_{\mathbb{B}_{R/2}^n}u^2\le\frac{C_1}{1+C_1}\int_{\mathbb{B}_{R/2}^n}u^2.$$

因为 $u-a$ 满足 (13.11.48), 所以

$$\int_{\mathbb{B}_R^n}\eta^2|\boldsymbol{D}u|^2\le C\int_{\mathbb{B}_R^n}|\boldsymbol{D}\eta|^2(u-a)^2\le\frac{C}{R^2}\int_{\mathbb{B}_R^n\setminus\mathbb{B}_{R/2}^n}(u-a)^2.$$

利用 Poincaré 不等式推出

$$\int_{\mathbb{B}_{R/2}^n}|\boldsymbol{D}u|^2\le\frac{C}{R^2}C(n)R^2\int_{\mathbb{B}_R^n\setminus\mathbb{R}_{R/2}^n}|\boldsymbol{D}u|^2=C_2\int_{\mathbb{B}_R^n\setminus\mathbb{B}_{R/2}^n}|\boldsymbol{D}u|^2$$

这里 C_2 是仅依赖于 n,λ,Λ 的正常数. 特别地

$$\int_{\mathbb{B}_{R/2}^n}|\boldsymbol{D}u|^2\le\frac{C_2}{1+C_2}\int_{\mathbb{B}_{R/2}^n}|\boldsymbol{D}u|^2.$$

最后取 $\theta:=\max\{\frac{C_1}{1+C_1},\frac{C_2}{1+C_2}\}$ 得到 (13.11.51). □

注 13.12

推论 13.9 意味着 $\mathbb{R}^n$ 上具有有限 L^2-范数, 即 u^2 是可积的, 的调和函数 u 必为零. ♣

注 13.13

假设 u 满足**引理 13.7** 中的条件. 则对任何 $0<\rho<r\le1$, 有

$$\int_{\mathbb{B}_\rho^n}u^2\le C\left(\frac{\rho}{r}\right)^\mu\int_{\mathbb{B}_r^n}u^2,\quad\int_{\mathbb{B}_\rho^n}|\boldsymbol{D}u|^2\le C\left(\frac{\rho}{r}\right)^\mu\int_{\mathbb{B}_r^n}|\boldsymbol{D}u|^2\tag{13.11.52}$$

这里 C,μ 是仅依赖于 n,λ,Λ 的正常数. ♣

引理 13.8

假设 $(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ 是常数值正定矩阵并满足不等式

$$\lambda|\xi|^2\le a_{ij}\xi^i\xi^j\le\Lambda|\xi|^2$$

对任意 $\xi\in\mathbb{R}^n$ 都成立, 这里 $0<\lambda<\Lambda$ 是正常数. 假设 $u\in C^1(\mathbb{B}_1^n)$ 满足

$$\int_{\mathbf{B}_1}a_{ij}D_iuD_j\varphi=0,\quad\varphi\in C_0^1(\mathbb{B}_1^n).$$

则对任何 $0<\rho\le r$, 有

$$\int_{\mathbb{B}_\rho^n}u^2\le C\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\int_{\mathbb{B}_r^n}u^2,\quad\int_{\mathbb{B}_\rho^n}|u-\underline{u}_\rho|^2\le C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2}\int_{\mathbb{B}_r^n}|u-\underline{u}_r|^2\tag{13.11.53}$$

这里 $C=C(\lambda,\Lambda)$ 是正常数且 $\underline{u}_r$ 表示 u 在 $\mathbb{B}_r^n$ 上的平均值. ♡

证: 不妨假设 $r=1$ 和 $\rho\in(0,1/2]$. 首先断言

$$|u|^2_{L^\infty(\mathbb{B}_{1/2}^n)}+|\boldsymbol{D}u|^2_{L^\infty(\mathbb{B}_{1/2}^n)}\le c(\lambda,\Lambda)\int_{\mathbb{B}_1^n}u^2.\tag{13.11.54}$$

从 (13.11.54) 得到

$$\int_{\mathbb{B}_\rho^n}u^2\le C_1\rho^n|u|^2_{L^\infty(\mathbb{B}_{1/2}^n)}\le C_2\rho^n\int_{\mathbb{B}_1^n}u^2$$

和

$$\int_{\mathbb{B}_\rho^n}|u-\underline{u}_\rho|^2\le\int_{\mathbb{B}_\rho^n}4\rho^2|\boldsymbol{D}u|^2_{L^\infty(\mathbb{B}_{1/2}^n)}\le C_3\rho^{n+2}|\boldsymbol{D}u|^2_{L^\infty(\mathbb{B}_{1/2}^n)}\le C_4\rho^{n+2}\int_{\mathbb{B}_1^n}u^2.$$

因为 $u-\underline{u}_1$ 也满足 (13.11.48), 所以

$$\int_{\mathbb{B}_\rho^n}|u-\underline{u}_\rho|^2\le C_4\rho^{n+2}\int_{\mathbb{B}_1^n}|u-\underline{u}_1|^2.$$

现在只要证明不等式 (13.11.54) 即可. 利用旋转不妨假设 $(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ 是对角矩阵 $\mathrm{diam}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$. 因此 u 满足

$$\sum_{1\le i\le n}\lambda_i D_{ii}u=0,$$

这里 $0<\lambda\le\lambda_i\le\Lambda, i=1,\cdots,n$. 则存在 $r_0:=r_0(\lambda,\Lambda)\in(0,1/2)$ 使得对任何 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{B}_{1/2}^n$ 矩形体

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:\frac{|x^i-x_0^i|}{\sqrt{\lambda_i}}<r_0,\ i=1,\cdots,n\right\}$$

包含在 $\mathbb{B}_1^n$ 内. 考虑坐标变换

$$x^i\mapsto y^i:=\frac{x^i}{\sqrt{\lambda_i}},\quad 1\le i\le n,$$

并记 $v(\boldsymbol{y}):=u(\boldsymbol{x})$. 则 $\boldsymbol{v}$ 在椭球体 $\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n:\sum_{i=1}^n\lambda_i(y^i)^2<1\}$ 内是调和的. 在球 $\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n:|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0|<r_0\}$ 内, 内梯度估计推出

$$|v(\boldsymbol{y}_0)|^2+|\boldsymbol{D}v(\boldsymbol{y}_0)|^2\le C(\lambda,\Lambda)\int_{\mathbb{B}_{r_0}^n(\boldsymbol{y}_0)}v^2\le C(\lambda,\Lambda)\int_{\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n:\sum_{i=1}^n\lambda_i(y^i)^2<1\}}v^2.$$

即

$$|u(\boldsymbol{x}_0)|^2+|\boldsymbol{D}u(\boldsymbol{x}_0)|^2\le C(\lambda,\Lambda)\int_{\mathbb{B}_1^n}u^2.$$

由于 $\boldsymbol{x}_0$ 是 $\mathbb{B}_{1/2}^n$ 内的任意点, 不等式 (13.11.54) 立即得到. □

13.12 *Navier-Stokes 方程简介

本节我们肩带介绍下 **Navier-Stokes 方程**, 主要参考文献是Tai-Peng Tsai 《Lectures on Navier-Stokes equations》(GSM, **192**, AMS, 2018).

假设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是区域, 其中 $n\ge2$, 且令 $T\in(0,+\infty]$. Ω 上的标准度量为 $g_{ij}=\delta_{ij}$, 从而我们可以自由地转换上、下指标. **不可压缩 Navier-Stokes 方程 (imcompressible Navier-Stokes equation)** 是指

$$\partial_t\boldsymbol{v}-\nu\Delta\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\nabla p=\boldsymbol{f},\quad \mathrm{div}\boldsymbol{v}=0,\quad 在\ \Omega\times(0,T),\tag{13.12.1}$$

这里 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t):\Omega\times(0,T)\to\mathbb{R}^n$ 是速度, $p=p(\boldsymbol{x},t):\Omega\times(0,T)\to\mathbb{R}$ 是压力, $\boldsymbol{f}$ 是给定的外力, 而 $\nu>0$ 是粘性常数. 记号如下:

$$\partial_t:=\frac{\partial}{\partial t},\quad \partial_i:=\frac{\partial}{\partial x^i},\quad (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}:=v^i\partial_i\boldsymbol{v}=\partial_i(v^i\boldsymbol{v}).$$

通常我们考虑**初值问题**

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},0)=v_0(\boldsymbol{x}),\quad \mathrm{div}\boldsymbol{v}_0=0,\tag{13.12.2}$$

和, 如果 $\partial\Omega$ 非空, **边值问题**

$$\boldsymbol{v}|_{\partial\Omega}=0\tag{13.12.3}$$

有时也会考虑**非齐次边值问题**

$$\boldsymbol{v}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{v}_*. \tag{13.12.4}$$

有时候我们还会考虑如下的边界条件

$$\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{13.12.5}$$

这里 $\mathbf{n}$ 是边界 $\partial\Omega$ 的单位外法向量.

当 $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = 0$ 时, 则 (13.12.1) 称为 **Stokes 方程**; 当 $\nu = 0$ 时, 则 (13.12.1) 称为 **Euler 方程**.

总之, 在本节中提到的 Navier-Stokes 方程是指 (13.12.1)–(13.12.3).

A. Navier-Stokes 方程的推导. 这基于质量和动量守恒和如下的假设条件:

- 流体是连续的, 密度为 ρ, 速度为 $\boldsymbol{v}$, 压力为 p,
- 温度波动可以忽略,
- Newton 流体 (比如, 水和空气) 中应力张量满足某种法则,
- p 和 ρ 满足某种关系.

流体经过任意固定的区域 E, 其边界 ∂E 的外法向量为 $\mathbf{n}$, 根据质量守恒我们得到

$$\frac{d}{dt}\int_E \rho\, d\boldsymbol{x} = -\int_{\partial E}\rho\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{n}\, dS, \tag{13.12.6}$$

其中左边是 E 中流体全质量的改变率, 而右边是通过边界 ∂E 的通量. 根据散度定理和 E 的任意性, 我们得到**连续性方程 (equation of continuity)**

$$\partial_t\rho + \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v}) = 0. \tag{13.12.7}$$

把 ρ 换成 ρv^i, 得到

$$\frac{d}{dt}\int_E \rho v^i f\boldsymbol{x} = -\int_{\partial E}\rho v^i\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{n}\, dS + \int_E f^i\, d\boldsymbol{x} + \int_{\partial E}\sigma^i{}_j\mathbf{n}^j\, dS, \tag{13.12.8}$$

这里

$$\int_E f^i\, d\boldsymbol{x}$$

表示 E 上沿着 i 方向上的全外力, 其中外力 包括引力和电磁力, 而

$$\int_{\partial E}\sigma^i{}_j\mathbf{n}^j\, dS$$

表示作用在 ∂E 上的应力, 其中 2-张量 σ_{ij} 称为**应力张量**. 根据散度定理和 E 的任意性得到**运动方程 (equation of motion)**

$$\partial_t(\rho v^i) + \mathrm{div}(\rho v^i\boldsymbol{v}) = f^i + \partial_j\sigma^{ij}. \tag{13.12.9}$$

即

$$\partial_t(\rho\boldsymbol{v}) + \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{f} + \mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}. \tag{13.12.10}$$

这里 $\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}$ 是 2-张量满足 $(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v})^{ij} = v^iv^j$ 和 $(\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma})^i = \partial_j\sigma^{ij}$.

当流体在平衡态时, 即 $v\equiv 0$, 此时边界 ∂E 上每单位面积的应力为 $-p\mathbf{n}$, 这里 p 时压

力. 因此应力张量为 $\sigma_{ij}=-\delta_{ij}p$. 在一般的非平衡态时, 我们有如下分解

$$\sigma_{ij}=\tau_{ij}-\delta_{ij}p,\quad p:=-\frac{1}{n}\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}, \tag{13.12.11}$$

其中 $\boldsymbol{\tau}$ 是 $\boldsymbol{\sigma}$ 的无迹张量. 对 Newton 流体, τ_{ij} 和 $\boldsymbol{v}$ 无关且是旋转的和对称的 ($\tau_{ij}=\tau_{ji}$), 并且线性依赖于 $\nabla\boldsymbol{v}$. 可以证明此时 $\boldsymbol{\tau}$ 必可写成

$$\tau_{ij}=\nu\left(\partial_i v_j+\partial_j v_i-\frac{}{n}\delta_{ij}\mathrm{div}\boldsymbol{v}\right). \tag{13.12.12}$$

物理上, **粘性应力张量 (viscous stress tensor)** τ_{ij} 要满足条件

$$\nu\geq 0. \tag{13.12.13}$$

对非-Newton 流体, 我们希望 τ_{ij} 非线性地依赖于 $\nabla\boldsymbol{v}$.

到目前为止, 根据 (13.12.11) 和 (13.12.12), 对 $n+2$ 个未知量 v^i,ρ,p 我们得到 $n+1$ 个方程. 所以我们还需要一个方程来描述 p 和 ρ 之间的关系. 一般有两种选择

- **(无可压缩情形)** 此时密度 $\rho=\rho_0>0$ 是常数. 此时根据 (13.12.7) 得到

  $$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=0,$$

  即 (13.12.1) 中的第 2 个方程. 根据 (13.12.11) 和 (13.12.12) 得到

  $$\partial^j\sigma_{ij}=\nu\left(\partial^j\partial_i v_j+\Delta v_i\right)-\partial_i p=\nu\Delta v_i-\partial_i p.$$

  结合 (13.12.9) 得到

  $$\rho_0(\partial_t v^i+v^j\partial_j v^i)=f^i+\nu\Delta v^i-\partial^i p, \tag{13.12.14}$$

  即 (13.12.1) 中的第 1 个方程.
- **(可压缩情形)** 此时压力是关于密度的函数, 即 $p=p(\rho)$; 对此一般可选 $p(\rho)=\rho^\alpha$, 这里 $\alpha>0$ 是某个正数. 此时得到

  $$\partial_t(\rho v^i)+\mathrm{div}(\rho v^i\boldsymbol{v})=f^i-\partial^i\rho^\alpha+\nu\Delta v^i+\left(1-\frac{2}{n}\right)\boldsymbol{v}\partial^i\mathrm{div}\boldsymbol{v}, \tag{13.12.15}$$

  方程组 (13.12.7) 和 (13.12.15) 描述了可压缩的 Newton 流体.

B. 尺度变化和先验估计. 假设 $(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t),p(\boldsymbol{x},t))$ 是 (13.12.1) 的解, 其中 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$ 是给定的外力. 对任意 $\lambda>0$, 定义

$$\boldsymbol{v}_\lambda(\boldsymbol{x},t):=\lambda\boldsymbol{v}(\lambda\boldsymbol{x},\lambda^2 t),\quad p_\lambda(\boldsymbol{x},t):=\lambda^2 p(\lambda\boldsymbol{x},\lambda^2 t). \tag{13.12.16}$$

则 $(\boldsymbol{v}_\lambda(\boldsymbol{x},t),p_\lambda(\boldsymbol{x},t))$ 是 (13.12.1) 的解, 此时外力为 $\boldsymbol{f}_\lambda(\boldsymbol{x},t):=\lambda^3\boldsymbol{f}(\lambda\boldsymbol{x},\lambda^2 t)$.

引入如下记号

$$\begin{aligned}\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,r)&:=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<r\},\\ Q(\boldsymbol{x}_0,r;t_0)&:=\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,r)\times(t_0-r^2,t_0),\\ Q^+(\boldsymbol{x}_0,r;t_0)&:=\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,r)\times(t_0,t_0+r^2)\end{aligned} \tag{13.12.17}$$

和

$$\mathbb{B}^n_r:=\mathbb{B}^n(\boldsymbol{0},r),\quad Q_r:=\mathbb{B}^n_r\times(-r^2,0),\quad Q^+_r:=\mathbb{B}^n_r\times(0,r^2). \tag{13.12.18}$$

因为 $\boldsymbol{v}_\lambda$ 在 Q_1 (或 Q^+_1) 内的形态对应于 $\boldsymbol{v}$ 在 Q_λ (或 Q^+_λ) 内的形态, 所以当 $\lambda\to 0$ 时 $\boldsymbol{v}_\lambda$

在 Q_1 内的形态对应于 $\boldsymbol{v}$ 在 $(\mathbf{0},0)$ 处的局部形态. 同理, 当 $\lambda\to\infty$ 时 $\boldsymbol{v}_\lambda$ 在 Q_1^+ 内的形态包含了 $\boldsymbol{v}$ 的全局形态. 把上述对应中的 Q_λ 换成 $\mathbb{B}_\lambda^n$ 也成立.

对 (13.12.1) 两边乘以 $\boldsymbol{v}$ 并作积分, 利用散度定理、$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=0$ 和 $v|_{\partial\Omega}=0$ 得到

$$\int_\Omega \partial_t\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}-\nu\int_\Omega \Delta\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}+\int_\Omega[(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\nabla p]\cdot\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}=\int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}.$$

进一步得到

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega|\boldsymbol{v}|^2d\boldsymbol{x}\right)+\nu\int_\Omega|\nabla\boldsymbol{v}|^2d\boldsymbol{x}\le\left(\int_\Omega||^{\mathbf{2}}\mathbf{dx}\right)^{1/2}\left(\int_\Omega|\boldsymbol{v}|^2d\boldsymbol{x}\right)^{1/2}.$$

从而得到**能量估计 (energy estimate)**

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{v}):=\sup_{t>0}\int_\Omega|(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)|^2d\boldsymbol{a}+\int_0^\infty\int_\Omega|\nabla\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)|^2d\boldsymbol{x}dt\le C \tag{13.12.19}$$

这里 C 是常数仅依赖于 f.

如果时空是 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^+$ 则

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{v}_\lambda)=\lambda^{2-n}\mathbf{E}(\boldsymbol{v}). \tag{13.12.20}$$

从正则化理论来看, 当 $n=2$ 时 Navier-Stokes 方程是**临界的 (critical)** 这是因为此时 $\lim_{\lambda\to0}\mathbf{E}(\boldsymbol{v}_\lambda)=\mathbf{E}(\boldsymbol{v})$; 当 $n=1$ 时 Navier-Stokes 方程是**次临界的 (subcritical)** 这是因为此时 $\lim_{\lambda\to0}\mathbf{E}(\boldsymbol{v}_\lambda)=0$; 当 $n=3$ 时 Navier-Stokes 方程是**超临界的 (supcritical)** 这是因为此时 $\lim_{\lambda\to0}\mathbf{E}(\boldsymbol{v}_\lambda)=\infty$.

另一方面, 当 $n=3$ 时 $\lim_{\lambda\to\infty}\mathbf{E}(\boldsymbol{v}_\lambda)=0$; 当 $n=2$ 时 $\lim_{\lambda\to\infty}\mathbf{E}(\boldsymbol{v}_\lambda)=\mathbf{E}(\boldsymbol{v})$. 这就意味着 $n=2$ 的渐近形态比 $n=3$ 的渐近形态要难的多.

C. 涡度. 此时我们考虑 $n=3$ 情形. $\boldsymbol{v}=(v^1,v^2,v^3)=(v_1,v_2,v_3)$ 的**涡度 (vorticity)** 定义为

$$\boldsymbol{\omega}:=\mathrm{curl}\boldsymbol{v}=(\omega^1,\omega^2,\omega^3)=(\omega_1,\omega_2,\omega_3), \tag{13.12.21}$$

这里

$$\omega_1=\partial_2v_3-\partial_3v_2,\quad \omega_2=\partial_3v_1-\partial_1v_3,\quad \omega_3:=\partial_1v_2-\partial_2v_1. \tag{13.12.22}$$

对充分小的 $\boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^n$ 根据 Taylor 展开得到

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+o(|\boldsymbol{h}|)=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{Sh}+\boldsymbol{Ah}+o(|\boldsymbol{h}|) \tag{13.12.23}$$

其中 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 分别是 $\nabla\boldsymbol{v}$ 的对称 (形变) 和反称 (旋转) 部分:

$$S_{ij}:=\frac{\partial_jv_i+\partial_iv_j}{2},\quad A_{ij}:=\frac{\partial_jv_i-\partial_iv_j}{2}. \tag{13.12.24}$$

注意到

$$\boldsymbol{A}=(A_{ij})_{1\le i,j\le3}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&-\omega_3&\omega_2\\\omega_3&0&-\omega_1\\-\omega_2&\omega_1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{Ah}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{h}. \tag{13.12.25}$$

D. 压力.

13.12.1 稳态 Navier-Stokes 方程

13.12.2 弱解

13.12.3 强解

13.12.4 温和解

13.12.5 部分正则化

13.13 习题

13.14 参考文献

1. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis I*, Translated from the 1988 German original by Gary Brookfield, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. xiv+426 pp. ISBN: 3-7643-7153-6
2. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis II*, Translated from the 1999 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. xii+400 pp. ISBN: 978-3-7643-7472-3; 3-7643-7472-3
3. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis III*, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. xii+468 pp. ISBN: 978-3-7643-7479-2; 3-7643-7479-2
4. Munkres, James R. *Topology*, Second edition, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000. xvi+537 pp. ISBN: 0-13-181629-2
5. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis I*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+574 pp. ISBN: 3-540-40386-8
6. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis II*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xvi+681 pp. ISBN: 3-540-40633-6
7. 布鲁斯 · C. 伯恩特 (Bruce C. Berndt) 主编: **拉玛努金笔记** (第 1, 2, 3, 4 卷), 哈尔滨工业大学出版社, 2019.
8. 常庚哲, 史济怀 编: **数学分析教程** (上、下册), 高等教育出版社, 2003.
9. 陈天权 编著: **数学分析讲义** (第一、二、三册), 北京大学出版社, 2009.
10. 邓建平 编: **微积分 I 和 II**, 科学出版社, 2019.
11. Duhham, William 著 (李伯民, 汪军, 张怀勇 译): **微积分的历程** – 从牛顿到勒贝格, 人民邮电出版社, 2013.
12. 吉米多维奇 著 (李荣冧, 李植 译): **数学分析习题集** (根据 2010 年俄文版翻译), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.
13. Kline, Morris 著 (张理京, 张炎热, 江泽涵等 译): **古今数学思想** (第一、二、三册), 上海科学技术出版社, 2014.

14. 李傅山, 王培合 编著: **数学分析习题课讲义** (1、2、3), 北京大学出版社, 2018.
15. 李逸 编著: **数学分析讲义**, 上海交通大学数学分析课讲义 (未出版), 2016.
16. 林源渠, 方企勤 编: **数学分析解题指南**, 北京大学出版社, 2003.
17. 梅加强 编著: **数学分析**, 高等教育出版社, 2015.
18. 裴礼文 编著: **数学分析中的典型问题与方法** (第二版), 高等教育出版社, 2015.
19. Riemann, Bernhard 著 (李培廉 译): **黎曼全集** (第一、二卷), 高等教育出版社, 2016.
20. 汪林 著: **数学分析中的问题和反例**, 现代数学基础 **56**, 高等教育出版社, 2015.
21. Weir, D. Maurice; Hass, R. Joel; Giordano, R. Frank. *Thomas' calculus*, Eleventh Edition, (影印版, 上、下册), 高等教育出版社, 2016.
22. 徐森林, 薛春华 编著: **数学分析**, 清华出版社, 2005.
23. 杨小远, 孙玉泉, 薛玉梅, 杨卓琴 编著: **工科数学分析教程** (上、下册), 科学出版社, 2011.
24. 张福保, 薛金美, 潮小李 主编: **数学分析讲义**, 科学出版社, 2019.
25. 张筑生 编著: **数学分析新讲** (第一、二、三册), 北京大学出版社, 1990.
26. 周民强 编著: **数学分析习题演练** (第一、二、三册), 科学出版社, 2018.
27. 朱尧辰 编著: **数学分析例选通过范例学技巧**, 哈尔滨工业大学出版社, 2013.

第十四章 多变量级数理论

Euler, Leibniz, Bernoulli 家族: "porro hoc argumentandi genus, etsi Metaphysicum magis quam Mathematicum videatur, tamen firmum est: et alioqui Canonum Verae Metaphysicae major est usus in Mathesi, in Analysis, in ipsa Geometria, quam vulgo putatur"

$$1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2},\quad 1+2+4+8+\cdots=-1.$$

14.1 函数项级数和函数列

在第一卷第 6 章我们研究了数项级数的基本性质, 和多元函数一样, 现在将数项级数扩充到多变量级数, 即函数项级数.

14.1.1 收敛域

假设 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 是定义在 $X\subset\mathbb{R}$ 上的一列函数. 我们将其称为定义在 X 上的**函数列 (sequence of functions)**, 并把其和

$$\sum_{n\geq 1}f_n(x),\quad x\in X,$$

称为定义在 X 上的**函数项级数 (series of functions)**.

定义 14.1. (收敛域)

(1) 假设 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}, x\in X$, 为一函数列. 定义

$$D:=\{x\in X|\{f_n(x)\}_{n\geq 1}\text{ 收敛}\}\subset X. \tag{14.1.1}$$

我们把点 $x\in D$ 称为函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 的**收敛点 (convergent point)** 而把点集 D 称为函数列的**收敛域 (domain of convergence)**.

对每个 $x\in D$, 定义

$$f(x):=\lim_{n\to\infty}f_n(x). \tag{14.1.2}$$

这样得到了函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 的**极限函数 (limit function)** $f(x)$. 此时我们也称函数列 $f_n(x)$ **逐点收敛 (pointwisely converges)** 到函数 $f(x)$.

(2) 假设 $\sum_{n\geq 1}f_n(x), x\in X$, 为一函数项级数. 定义

$$D:=\left\{x\in X\middle|\sum_{n\geq 1}f_n(x)\text{ 收敛}\right\}\subset X. \tag{14.1.3}$$

我们把点 $x\in D$ 称为函数项级数 $\sum_{n\geq 1}f_n(x)$ 的**收敛点 (convergent point)** 而把点集 D 称为函数项级数的**收敛域 (domain of convergence)**. 如果进一步要求, 我们可引入**绝对收敛域 (domain of absolute convergence)** D_a 和**条件收敛域 (domain of**

condition convergence) D_c:

$$D_a := \left\{ x \in X \middle| \sum_{n\ge1} |f_n(x)| \text{ 收敛} \right\}, \quad D_c := D \setminus D_a.$$

对每个 $x \in D$, 定义

$$S(x) := \lim_{n\to\infty} S_n(x), \quad S_n(x) := \sum_{1\le k\le n} f_n(x). \tag{14.1.4}$$

这样得到了函数项级数 $\sum_{n\ge1} f_n(x)$ 的**和函数 (sum function)** $S(x)$. 此时我们也称函数项级数 $\sum_{n\ge1} f_n(x)$ **逐点收敛 (pointwisely converges)** 到函数 $S(x)$. ♣

例 14.1

(1) 求下列函数列数的收敛域:

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}, \quad f_n(x) = (1-x)x^n, \quad f_n(x) = \frac{x^2+2nx}{n}.$$

解: (a) 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $\lim_{n\infty} f_n(x) = 0$, 所以收敛域是 $\mathbb{R}$ 且极限函数为 $f \equiv 0$.

(b) 因为 $\lim_{n\to\infty} x^n$ 收敛如果 $|x| < 1$, 所以当 $-1 < x < 1$ 时得到函数列收敛且极限函数为 $f \equiv 0$. 另一方面, $f_n(1) \equiv 0$, 因此收敛域为 $(-1, 1]$ 且极限函数为 $f \equiv 0$.

(c) 因为 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 2x$, 故收敛域为 $\mathbb{R}$ 且极限函数为 $f(x) = 2x$. □

(2) 求下列函数项级数的收敛域 (包括条件收敛域和绝对收敛域):

$$\sum_{n\ge1} x^n, \quad \sum_{n\ge1} \frac{x^n}{n}, \quad \sum_{n\ge1} \frac{x^n}{1-x^n}, \quad \sum_{n\ge1} \frac{x^n}{1+x^{2n}}, \quad \sum_{n\ge1} \frac{2^n+x^n}{1+(3x)^n}\ (x \ne -1/3)$$

$$\sum_{n\ge1} \frac{n!}{(x^2+1)\cdots(x^2+n)}, \quad \sum_{n\ge1} n\left(x+\frac{1}{n}\right)^n, \quad \sum_{n\ge1} \left(\cos\frac{\pi x}{n}\right)^{n^3}$$

$$\sum_{n\ge1} \ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^x}\right]\ (x > 0), \quad \sum_{n\ge2} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^x\ (x > 0)$$

$$\sum_{n\ge1} \frac{x^n}{n+a^n}\ (a \ge 0), \quad \sum_{n\ge1} \frac{\sin(nx)}{e^{nx}}, \quad \sum_{n\ge1} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}, \quad \sum_{n\ge1} \frac{n3^{2n}}{2^n} x^n (1-x)^n.$$

解: (a) 之前已证明该级数收敛当且仅当 $|x| < 1$, 且和函数为 $x/(1-x)$. 故 $D = D_a = (-1, 1)$.

(b) 根据 $|\frac{x^n}{n}| \le |x|^n$ 可知当 $|x| < 1$ 时级数收敛; 而 $\lim_{n\to+\infty} x^n/n \ne 0$ 当 $|x| > 1$ 时, 所以收敛区域包含 $(-1, 1)$. 下面考虑临界点 $x = \pm1$. 显然当 $x = -1$ 时级数收敛. 因此收敛域为 $[-1, 1)$. 即 $D_a = (-1, 1)$ 和 $D_c = \{-1\}$.

(c) 注意到公共定义域为 $X = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. 任意 $x \in (-1, 1)$ 有

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1-x^n}{1-x^{n+1}}\right| |x| = |x| < 1.$$

根据比式判别法此时级数绝对收敛. 但对任意 $|x| > 1$ 有

$$\lim_{n\to+\infty} |f_n(x)| = \lim_{n\to+\infty} |x^n/(1-x^n)| = 1 \ne 0$$

故此时级数发散. 因此 $D = D_a = (-1, 1)$.

(*d*) 根据不等式 $|x^n/(1+x^{2n})| \le |x|^n$ 得到 $(-1,1) \subset D_c$. 根据不等式

$$\left|\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right| = \left|\frac{1}{x^n+\frac{1}{x^n}}\right| \le \frac{1}{|x|^n},$$

可知 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \subset D_c$. 而当 $x=\pm1$ 时, 由于 $|f_n(x)|=1/2$, 所以此时级数发散. 因此 $D=D_a=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

(*e*) 当 $x=0$ 时, $f_n(x)=2^n$, 故此时级数发散. 当 $x\neq 0$ 时,

$$f_n(x) = \frac{(2/3x)^n+1/3^n}{1+(1/3x)^n},$$

所以当 $|x|>2/3$ 时级数绝对收敛. 而当 $x=\pm2/3$ 时, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\neq 0$. 故 $D=D_a=(-\infty,-3/2)\cup(2/3,+\infty)$.

(*f*) 计算得到

$$\frac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)} = \frac{x^2+n+1}{n+1} = 1+\frac{x^2}{n+1} = 1+\frac{x^2}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

由 Gauss 判别法得到 $D_a=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. 但 $f_n(\pm1)=\frac{1}{n+1}$, 故 $D=D_a$.

(*g*) 当 $x=0$ 时, $f_n(x)=n/n^n$; 利用根式判别法知此时级数绝对收敛. 当 $x\neq0$ 时

$$\left|n\left(x+\frac{1}{n}\right)^n\right| = n|x|^n\left|1+\frac{1}{nx}\right|^n \sim n|x|^n e^{1/x}.$$

根据根式判别法可知当 $0<|x|<1$ 时级数绝对收敛, 而利用收敛级数的必要条件可知当 $|x|\ge1$ 时级数发散. 故 $D=D_a=(-1,1)$.

(*h*) 计算得到

$$\sqrt[n]{|f_n(x)|} = \left[1-\left(1-\cos\frac{\pi x}{n}\right)\right]^{n^2} = \exp\left\{n^2\ln\left[1-\left(1-\cos\frac{\pi x}{n}\right)\right]\right\}$$
$$\sim \exp\left[-n^2\left(1-\cos\frac{\pi x}{n}\right)\right] \sim \exp\left(-n^2\cdot 2\sin^2\frac{\pi x}{2n}\right) \sim e^{-\pi^2x^2/2}, \quad n\to+\infty.$$

因此 $D=D_a=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

(*i*) 根据 Taylor 公式得到

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}+O\left(\frac{1}{2n^{2x}}\right), \quad n\to+\infty.$$

因为级数 $\sum_{n\ge1}(-1)^n/n^x$ 当 $x>0$ 时条件收敛, 而级数 $\sum_{n\ge1}1/2n^{2x}$ 当 $2x>1$ 时绝对收敛当 $2x\le1$ 时发散. 故 $D=D_a=(1/2,+\infty)$.

(*j*) 因为函数 $\ln t/t, t>0$, 当 $t>e$ 时单调递减, 所以根据积分判别法考虑反常积分

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\ln t}{t}\right)^x dt = \int_0^{+\infty}\left(\frac{s}{e^s}\right)^x e^s ds = \int_0^{\infty}\frac{s^x}{e^{s(x-1)}}ds$$

的敛散性. 显然只当 $x>1$ 时反常积分收敛. 故 $D=D_a=(1,+\infty)$.

(*k*) 当 $0\le a\le1$ 时计算得到

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n+a^n}} = |x|\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n+a^n}} = |x|,$$

所以当 $-1<x<1$ 时级数绝对收敛. 当 $|x|>1$ 时 $\lim_{n\to+\infty}|f_n(x)|\neq0$, 故此时级数发散. 当 $x=1$ 时, 由于

$$\frac{1}{n+a^n} \ge \frac{1}{n+1},$$

此时级数也发散. 显然当 $x=-1$ 时, 级数时条件收敛. 故

$$0\le a\le 1 \implies D_a(-1,1),\quad D_c=\{-1\}.$$

下面假设 $a>1$. 此时

$$\sum_{n\ge1}\frac{x^n}{n+a^n}=\sum_{n\ge1}\left(\frac{x}{a}\right)^n\frac{1}{1+n/a^n}.$$

当 $|x|<a$ 时级数绝对收敛, 而当 $|x|>a$ 时级数发散. 当 $x=\pm a$ 时, $|f_n(x)|\to 1$, 故此时级数发散. 因此

$$a>1 \implies D=D_a=(-a,a).$$

(l) 当 $x>0$ 时由于 $|\sin(nx)/e^{nx}|\le 1/e^{nx}$, 故此时级数绝对收敛. 当 $x=0$ 时显然绝对收敛. 当 $x<0$ 时我们证明此时级数发散. 若 $x=-k\pi$, $k\in\mathbb{N}$, 则此时 $f_n(x)=0$; 若 $x\ne -k\pi$, $k\in\mathbb{N}$, 则 $|f_n(x)|\to+\infty$ 如果 $k\notin\mathbb{Q}$, 和 $|f_n(x)|\to 0$ 如果 $k\in\mathbb{Q}$. 因此 $D=D_a=[0,+\infty)$.

(m) 计算得到

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 2\sin x=2\sin x.$$

故当 $|\sin x|<\frac12$ 时级数绝对收敛, 而当 $|\sin x|>\frac12$ 时级数发散. 当 $|\sin x|=\frac12$ 时级数绝对收敛. 因此 $D=D_a=\{x\in\mathbb{R}|-1\le 2\sin x\le 1\}$.

(n) 当 $x=0$ 或 1 时级数绝对收敛. 如果 $x\ne 0,1$, 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac92\cdot x(1-x)=\frac92 x(1-x),$$

所以当 $|x(1-x)|<\frac29$ 时级数绝对收敛, 而当 $|x(1-x)|>\frac29$ 时发散. 如果 $|x(1-x)|=\frac29$ 则级数变为 $\sum_{n\ge1}(-1)^n n$, 显然发散. 故

$$D=D_a=\left(-\frac{\sqrt{17}-4}{6},\frac13\right)\cup\left(\frac23,\frac{\sqrt{17}+3}{6}\right).$$

♠

14.1.2 函数列和函数项级数的基本问题与一致收敛

在**定理 6.14** 的证明中, 我们验证了 “求和与求极限可以相交换”, 当然是在某些假设条件下; 在**例 6.10** 中我们还没有验证 “求和与求积分是否可以相交换”; 在**定理 6.19** 的证明中, 我们还没有验证 “求和与求导数是否可以相交换”.

这三个 “相交换” 问题可以系统地归结如下.

(1) 假设 $\{f_n(x)\}_{n\ge1}$ 是一函数列, D 为其收敛域, 并假设极限函数为 $f(x)$. 不妨假设 D 包含闭区间 $[a,b]$.

(1.1) $f_n(x)\in C([a,b])$??? $\Longrightarrow$??? $f(x)\in C([a,b])$, 即,

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to x_0}f_n(x).$$

(1.2) $f_n(x) \in R([a,b])$??? $\Longrightarrow$??? $f(x) \in R([a,b])$ 且

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx.$$

(1.3) $f_n(x) \in D([a,b])$??? $\Longrightarrow$??? $f(x) \in D([a,b])$ 且

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{d}{dx}f_n(x) = \frac{d}{dx}\lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

(2) 假设 $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ 是一函数项级数, D 为其收敛域, 并假设和函数为 $S(x)$. 不妨假设 D 包含闭区间 $[a,b]$.

(2.1) $f_n(x) \in C([a,b])$??? $\Longrightarrow$??? $S(x) \in C([a,b])$, 即,

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n\geq 1} f_n(x) = \sum_{n\geq 1}\lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

(2.2) $f_n(x) \in R([a,b])$??? $\Longrightarrow$??? $S(x) \in R([a,b])$ 且

$$\sum_{n\geq 1}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n\geq 1} f_n(x)\,dx.$$

(2.3) $f_n(x) \in D([a,b])$??? $\Longrightarrow$??? $S(x) \in D([a,b])$ 且

$$\sum_{n\geq 1}\frac{d}{dx}f_n(x) = \frac{d}{dx}\sum_{n\geq 1} f_n(x).$$

下面例子告诉我们一般情况下上述“相交换”不成立.

例 14.2

(1) 考虑 $f_n(x) = x^n, 0 \leq x \leq 1$. 则

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

此时

$$\lim_{x\to 1}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to 1} f_n(x).$$

(2) 考虑函数 $f_n(x) = nx(1-x^2)^n, 0 \leq x \leq 1$. 则

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0, \quad x \in [0,1].$$

此时

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2}\int_0^1 (1-x^2)^n dx^2 = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx.$$

(3) 考虑 $f_n(x) = x^n, 0 \leq x \leq 1$. 则 $f_n(x) \in D([0,1])$ 但 $f(x) \notin D([0,1])$. ♠

例 14.3

(1) **(求和与求极限不可交换)** 考虑 $f_n(x) = x^{2(n+1)} - x^{2n}, -1 \leq x \leq 1$. 则

$$S_n(x) = \sum_{1\leq k\leq n} f_k(x) = x^{2(n+1)} - x^2$$

和

$$S(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & x = \pm 1, \\ -x^2, & x \in (-1,1). \end{cases}$$

此时

$$\lim_{x\to 1}\sum_{n\geq 1} f_n(x) = -1 \neq 0 = \sum_{n\geq 1}\lim_{x\to 1} f_n(x).$$

(2) **(求和与求积分不可交换)** 考虑函数

$$f_n(x) = nx(1-x^2)^n - (n-1)x(1-x^2)^{n-1},\quad 0\leq x\leq 1.$$

则

$$S_n(x) = \sum_{1\leq k\leq n} f_k(x) = nx(1-x^2)^n,\quad S(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = 0,\quad x\in[0,1].$$

此时

$$\sum_{n\geq 1}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 \sum_{n\geq 1} f_n(x)\,dx.$$

(3) **(求和与求导数不可交换)** 考虑 $f_n = x^n - x^{n-1}, x\in[0,1]$. 则

$$\sum_{n\geq 1} f_n(x) = 0,\quad x\in[0,1] \quad\Longrightarrow\quad \left(\sum_{n\geq 1} f_n(x)\right)' = 0,\quad x\in[0,1].$$

但是

$$\sum_{n\geq 1} f_n'(x) = 1 + \sum_{n\geq 2}\left[nx^{n-1} - (n-1)x^{n-2}\right] = \begin{cases} 0, & x\in[0,1), \\ +\infty, & x = 1. \end{cases}$$

Cauchy 在其专著《Cours d'analyse》(pp 131-132) 断言本小节一开始讲的三个"相交换"问题成立只要 $f_n(x)$ 都连续且级数收敛. 然而上面的例子就反驳了Cauchy 的论断. 为使上述三个"相交换"可以实现, 下面引入一致收敛的概念. 这个概念早在 1842 年就已经被Weierstrass 所知道了[1].

定义 14.2. (一致收敛)

(1) 假设函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 和函数 $f(x)$ 都定义在 $D\subset\mathbb{R}$ 上. 称函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 在 D 上**一致收敛 (uniformly converges)** 到 $f(x)$, 如果对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $N = N(\epsilon)\in\mathbb{N}$ 使得对任意 $n > N$ 和任意 $x\in D$, 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

此时记为

$$f_n(x) \rightrightarrows_D f(x),\quad n\to+\infty \quad 或 \quad f_n(x)\rightrightarrows f(x).$$

(2) 假设函数项级数 $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ 和函数 $S(x)$ 都是定义在 $D\subset\mathbb{R}$ 上. 称函数项级数 $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ 在 D 上**一致收敛 (uniformly converges)** 到 $S(x)$, 如果部分和函数列 $\{S_n(x)\}_{n\geq 1}$ 在 D 上一致收敛到 $S(x)$. 此时记为

$$\sum_{n\geq 1} f_n(x) \rightrightarrows_D S(x),\quad n\to+\infty \quad 或 \quad \sum_{n\geq 1} f_n(x)\rightrightarrows S(x).$$

[1]详细历史参见: Hardy, G. H. *Sir George Stokes and the concept of uniform convergence*, Proc. London Math. Soc., **19**(1918), 148-156.

注 14.1

(1) $f_n(x)$ 不一致收敛到 $f(x) \iff \exists\, \epsilon_0 > 0\ \forall\, N \in \mathbb{N}\ \exists\, n > N\ \exists\, x_0 \in D$ 满足 $|f_n(x_0) - f(x_0)| \geq \epsilon_0$.

同样, $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ 不一致收敛到 $S(x) \iff \exists\, \epsilon_0 > 0\ \forall\, N \in \mathbb{N}\ \exists\, n > N\ \exists\, x_0 \in D$ 满足

$$\left|\sum_{1\leq k\leq n} f_n(x_0) - S(x_0)\right| = |S_n(x_0) - S(x_0)| \geq \epsilon_0.$$

(2) 显然函数列或函数项级数的一致收敛蕴含了逐点收敛, 但是反之则不一定成立. 比如考察函数列 $f_n(x) = (x^2 + 2nx)/n, n \geq 1, x \in \mathbb{R}$. 则其极限函数为 $f(x) = 2x$. 但是

$$|f_n(-2n) - f(-2n)| = |0 + 4n| = 4n \to +\infty.$$

(3) 假设函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 在 D 上逐点收敛到函数 $f(x)$, 且对任意 $x \in D$ 有

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n, \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0,$$

则 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$. 证明是显然的.

(4) 讲一致收敛必须要事先指明所给的区域 $D \subset \mathbb{R}$. 例如 (2) 中的例子在 $D = \mathbb{R}$ 上不是一致收敛, 但是根据 (3) 其在任意给定的有界区间上是一致收敛的. ♣

上述注 14.1 (4) 给出了如下概念: 称函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 在 D 上是**内闭一致收敛**到 $f(x)$, 如果对任意给定的闭区间 $[a, b] \subset D$, 函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 在 $[a, b]$ 上是一致收敛到 $f(x)$.

例 14.4

(1) 考察下列函数列在指定区间上的一致收敛性:

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad f_n(x) = x^n, \quad x \in [0, 1); \quad f_n(x) = n^2xe^{-n^2x^2}, \quad x > 0.$$

解: (a) 极限函数为 $f(x) \equiv 0$, 故

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|x|}{1 + n^2x^2} \leq \frac{1}{2n}.$$

因此函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 一致收敛到 $f(x) = 0$.

(b) 极限函数为 $f(x) \equiv 0, x \in [0, 1)$, 故

$$|f_n(x) - f(x)| = |x|^n.$$

若取 $x_n = \frac{n-1}{n} \to 1$ 则得到 $|f_n(x_n) - f(x_n)| = (1 - 1/n)^n \to 1/e \neq 0$. 因此不是一致收敛的. 然而函数列是内闭一致收敛的, 这是因为对任意 $[a, b] \to [0, 1)$ 必有

$$|f_n(x) - f(x)| = |x|^n \leq b^n \to 0.$$

(c) 极限函数为 $f(x) = 0, x > 0$, 故

$$|f_n(x) - f(x)| = n^2xe^{-n^2x^2}.$$

若取 $x_n = 1/\sqrt{2}n \to 0$ 则得到 $|f_n(x_n) - f(x_n)| = ne^{-1/2}/\sqrt{2} \to +\infty$. 因此不是一

致收敛的. 然而函数列是内闭一致收敛的, 这是因为对任意 $[a,b]\to(0,+\infty)$ 必有

$$|f_n(x)-f(x)|=n^2xe^{-n^2x^2}\le n^2ae^{-n^2a^2}\to 0.$$

(2) 考察下列函数项级数在指定区间上的一致收敛性:

$$\sum_{n\ge1}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}\quad x\ge0,\quad \sum_{n\ge1}(-1)^n\frac{n+x^2}{n^2}\quad |x|\le a.$$

解: (a) 对任意给定 $x\ge0$, 根据**定理 6.9** 级数是收敛的. 利用交错级数余项估计得

$$\left|\sum_{k\ge n+1}\frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k+\sqrt{x}}}\right|\le\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\to0,\quad n\to+\infty.$$

因此函数项级数一致收敛.

(b) 对任意给定 $x\ge0$, 根据**定理 6.9** 级数是收敛的. 利用交错级数余项估计得到

$$\left|\sum_{k\ge n+1}(-1)^k\frac{k+x^2}{k^2}\right|\le\frac{n+1+x^2}{(n+1)^2}\le\frac{n+1+a^2}{(n+1)^2}\to0,\quad n\to\infty.$$

因此函数项级数一致收敛. □

14.1.3 一致收敛的判别法

定理 14.1. (Cauchy 判别法)

(1) $f_n(x)\rightrightarrows_D f(x)\iff$ 对任意 $\epsilon>0$ 存在 $N=N(\epsilon)\in\mathbb{N}$ 使得对任意 $n>N$, 任意 $p\in\mathbb{N}$ 和任意 $x\in D$ 有

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\epsilon.$$

(2) $\sum_{n\ge1}f_n(x)\rightrightarrows_D S(x)\iff$ 对任意 $\epsilon>0$ 存在 $N=N(\epsilon)\in\mathbb{N}$ 使得对任意 $n>N$, 任意 $p\in\mathbb{N}$ 和任意 $x\in D$ 有

$$\left|\sum_{n+1\le k\le n+p}f_n(x)\right|<\epsilon.$$

证: (1) $\Longrightarrow$: 对任意 $\epsilon>0$ 存在 $N=N(\epsilon)\in\mathbb{N}$ 使得对任意 $n>N$ 和任意 $x\in D$ 有 $|f_n(x)-f(x)|<\epsilon/2$. 因此

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|\le|f_{n+p}(x)-f(x)|+|f_n(x)-f(x)|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.$$

$\Longleftarrow$: 固定 $x\in D$. 则数列 $\{f_n(x)\}_{n\ge1}$ 收敛到某个数. 这样就得到函数 $f(x)$ 使得函数列 $\{f_n(x)\}_{n\ge1}$ 逐点收敛到 $f(x)$. 令 $p\to+\infty$ 得到 $|f_n(x)-f(x)|\le\epsilon$. 即 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$.

(2) 这是因为 $\sum_{n+1\le k\le n+p}f_k(x)=S_{n+p}(x)-S_n(x)$. □

推论 14.1

(1) 函数项级数 $\sum_{n\ge1}f_n(x)$ 在 D 上一致收敛 $\Longrightarrow\{f_n(x)\}_{n\ge1}\rightrightarrows_D 0$.

(2) $f_n(x)\rightrightarrows_D f(x)\iff\lim_{n\to+\infty}(\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|)=0$.

(3) 函数项级数 $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ 一致收敛 $\Longleftrightarrow$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_D |S_n(x)-S(x)|\right)=0.$$

(4) 假设 $f_n(x)\in C([a,b])$ 且函数项级数 $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ 在 $D=(a,b)$ 内一致收敛. 则数项级数 $\sum_{n\geq 1} f_n(a)$ 和 $\sum_{n\geq 1} f_n(b)$ 收敛, 且函数项级数 $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

(5) $f_n(x)\rightrightarrows_D f(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}|f_n(x_n)-f(x_n)|=0$ 任意 $\{x_n\}_{n\geq 1}\subset D$.

(6) $\sum_{n\geq 1} f_n(x)\rightrightarrows_D S(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}|S_n(x_n)-S(x_n)|=0$ 任意 $\{x_n\}_{n\geq 1}\subset D$. ♡

证: (1) 假设函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 在 D 上一致收敛, 则对任意 $\epsilon>0$ 存在 $N=N(\epsilon)\in\mathbb{N}$ 使得对任意 $n>N$ 和任意 $p\in\mathbb{N}$ 都有

$$\left|\sum_{n+1\leq k\leq n+p} f_k(x)\right|<\epsilon.$$

特别地取 $p=1$ 得到 $f_n(x)\rightrightarrows_D 0$.

(2) 和 (3) 显然.

(4) 因为函数项级数 $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ 在 (a,b) 内一致收敛, 所以对任意 $\epsilon>0$ 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得对任意 $n>N$ 和任意 $p\in\mathbb{N}$ 及任意 $x\in(a,b)$ 都有

$$\left|\sum_{n+1\leq k\leq n+p} f_k(x)\right|<\frac{\epsilon}{2}.$$

对上述 $\epsilon>0, n>N$ 和 $p\in\mathbb{N}$, 存在 $\delta=\delta(\epsilon,n,p)>0$ 只要 $a\leq x<a+\delta$ 有

$$|f_k(x)-f_k(a)|<\frac{\epsilon}{2p},\quad n+1\leq k\leq n+p.$$

从而得到

$$\left|\sum_{n+1\leq k\leq n+p} f_n(a)\right|\leq\left|\sum_{n+1\leq k\leq n+p}[f_k(x)-f_k(a)]\right|+\left|\sum_{n+1\leq k\leq n+p} f_k(x)\right|\leq\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2p}\cdot p=\epsilon.$$

(5) 假设 $f_n(x)\rightrightarrows_D f(x)$, 则 $\lim_{n\to+\infty}(\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|)=0$. 故对任意 $\{x_n\}_{n\geq 1}\subset D$ 有

$$|f_n(x_n)-f(x_n)|\leq\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|\to+\infty,\quad n\to+\infty.$$

反之, 假设 $f_n(x)\not\rightrightarrows f(x)$. 存在 $\epsilon_0>0$ 对任意 $N\in\mathbb{N}$ 都存在 $n>N$ 和 $\xi\in D$ 使得 $|f_n(\xi)-f(\xi)|\geq\epsilon_0$ 成立. 因此存在严格递增数列 $\{n_k\}_{k\geq 1}$ 和存在 $\xi_k\in D$ 满足 $|f_{n_k}(\xi_k)-f(\xi_k)|\geq\epsilon_0$. 这就产生了矛盾.

(6) 证明和 (5) 几乎一样. □

例 14.5

(1) 研究下列函数列的一致收敛性:

$$f_n(x)=(1-x)x^n,\quad x\in[0,1];\quad f_n(x)=\frac{n+x^2}{nx},\quad x\in(0,1),$$

$$f_n(x)=\frac{1}{1+nx},\quad x\in(0,1);\quad f_n(x)=x^ne^{-n^2x},\quad x\geq 0;$$

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$f_n(x) = \frac{nx}{n^2 + (n+2)x}, \quad x > 0; \quad f_n(x) = \sin\frac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}, \quad x \in [0, 1-\delta] \text{ 或 } [1-\delta, 1+\delta] \text{ 或 } [1+\delta, +\infty) \ (0 < \delta < 1);$$

$$f_n(x) = \frac{x(\ln n)^\alpha}{n^x}, \quad n \geq 2,\ x \geq 0; \quad f_n(x) = nx(1-x^2)^n, \quad x \in [0,1];$$

$$f_1 \in R([a,b]), \quad f_{n+1}(x) := \int_a^x f_n(t)\,dt,\ n \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad f_n(x) \rightrightarrows_{[a,b]} 0$$

解: (a) 极限函数为 $f(x) = 0, x \in [0,1]$. 则

$$\sup_{x\in[0,1]} (|f_n(x) - f(x)|) = \sup_{x\in[0,1]} (1-x)x^n = (1-x)x^n\Big|_{x=\frac{n}{1+n}} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

故 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 一致收敛到 $f(x) = 0$.

(b) 极限函数为 $f(x) = 1/x, x \in (0,1)$. 则

$$\sup_{x\in(0,1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(0,1)} \frac{x}{n} = \frac{1}{n} \to +\infty, \quad n \to +\infty.$$

故 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 一致收敛到 $f(x) = 1/x$.

(c) 极限函数为 $f(x) = 0$. 则

$$\sup_{x\in(0,1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(0,1)} \frac{1}{1+nx} \geq \frac{1}{1+n\cdot(1/n)} = \frac{1}{2}, \quad n \to +\infty.$$

故 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 不一致收敛到 $f(x) = 0$.

(d) 极限函数为 $f(x) = 0$. 则

$$\sup_{x\geq 0} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\geq 0} \frac{x^n}{e^{n^2 x}} = \frac{1}{n^n e^n} \to 0, \quad n \to +\infty,$$

这是因为函数 $F(x) = x^n e^{-n^2 x}$ 的导数为

$$F'(x) = nx^{n-1}e^{-n^2x} - n^2x^ne^{-n^2x} = nx^{n-1}e^{-n^2x}(1-nx)$$

从未 $F_{\max} = F(1/n) = n^{-n}e^{-n}$. 因此 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 一致收敛到 $f(x) = 0$.

(e) 极限函数为 $f(x) = |x|$. 则

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x|\right| = \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|} \leq \frac{1/n^2}{1/n} = \frac{1}{n} \to 0.$$

故 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 一致收敛到 $f(x) = |x|$.

(f) 极限函数为 $f(x) = 0$. 若取 $x_n = n$ 得到

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{nx_n}{n^2 + (n+2)x_n} = \frac{n^2}{2n^2 + 2n} \to \frac{1}{2}, \quad n \to +\infty.$$

故 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 不一致收敛到 $f(x) = 0$.

(g) 极限函数为 $f(x) \equiv 0, x \in \mathbb{R}$. 若取 $x_n = n\pi/2$ 得到

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left|\sin\frac{\pi}{2}\right| = 1.$$

故 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 不一致收敛到 $f(x)=0$.

(h) 极限函数为

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^n}{1+x^n}=\begin{cases}0, & x\in[0,1),\\ \frac{1}{2}, & x=1,\\ 1, & x>1,\end{cases}$$

如果 $D=[0,1-\delta]$ 则

$$\sup_{[0,1-\delta]}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{[0,1-\delta]}\frac{x^n}{1+x^n}\leq(1-\delta)^n\to 0,\quad n\to+\infty.$$

此时 $\{f_n(x)\}_{n\geq 0}\rightrightarrows_{[0,1-\delta]}0$.

如果 $D=[1-\delta,1+\delta]$ 则取 $x_n=\sqrt[n]{2}\in(1,1+\delta)$, 只要 $n>\ln 2/\ln(2+\delta)$, 得到

$$|f_n(x_n)-f(x_n)|=\left|\frac{x_n^n}{1+x_n^n}-1\right|=\frac{1}{1+x_n^n}=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}.$$

此时 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 在 $[1-\delta,1+\delta]$ 上不是一致收敛到 $f(x)$.

如果 $D=[1+\delta,+\infty)$, 则得到

$$\sup_{x\in[1+\delta,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\geq 1+\delta}\frac{1}{1+x^n}\leq\frac{1}{1+(1+\delta)^n}\to 0,\quad n\to+\infty.$$

此时 $\{f_n(x)\}_{n\geq 0}\rightrightarrows_{[0,1-\delta]}1$.

(i) 极限函数为 $f(x)\equiv 0, x\geq 0$. 则

$$\sup_{x\geq 0}|f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\geq 0}\frac{x(\ln n)^\alpha}{n^x}=\frac{\frac{1}{\ln n}(\ln n)^\alpha}{n^{\frac{1}{\ln n}}} = \frac{(\ln n)^{\alpha-1}}{n^{\frac{1}{\ln n}}}=\frac{1}{e}(\ln n)^{\alpha-1}.$$

故 $\alpha<1$ 时函数列一致收敛, 而当 $\alpha\geq 1$ 时函数列不一致收敛.

(j) 极限函数为 $f(x)=0$. 则

$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in[0,1]}nx(1-x^2)^n\geq\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\to 1\neq 0,\quad n\to+\infty.$$

故 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 不一致收敛到 $f(x)=0$.

(k) 因为 f_1 在 $[a,b]$ 上可积, 则根据**定理 5.2** 可知 $|f_1(x)|\leq M$, 对任意 $x\in[a,b]$ 都成立. 计算得到

$$\begin{aligned}|f_2(x)| &\leq \int_a^x|f_1(t)|dt \leq M(x-a),\\ |f_3(x)| &\leq \int_a^x|f_2(t)|dt\leq M\int_a^x(t-a)\,dt\\ &= \frac{M}{2}(t-a)^2\Big|_a^x = \frac{M}{2}(x-a)^2.\end{aligned}$$

一般地得到

$$|f_n(x)|\leq\frac{M}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}\leq\frac{M(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}\to 0,\quad n\to+\infty.$$

故函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 一致收敛到 $f(x)=0$.

(2) 研究下列函数项级数的一致收敛性:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{n}}{2^{nx}},\quad x>0;\quad \sum_{n\geq 1}e^{-nx},\quad x>0;\quad \sum_{n\geq 1}\frac{x^3}{(1+x^3)^n},\quad x>0;$$

$$\sum_{n\geq 1}a_n \text{ 收敛} \iff \sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n!}\int_0^x t^n e^{-t}dt \text{ 在 } [0,+\infty) \text{ 上一致收敛},$$

解: (a) 因为若取 $x_n=1/n$,

$$|f_n(x_n)|=\sqrt{n}2^{-n\frac{1}{n}}=\frac{\sqrt{n}}{2}\geq\frac{1}{2},$$

所以根据**推论 14.1** 可知 $\sum_{n\geq 1}f_n(x)\not\rightrightarrows 0$.

(b) 因为 $f_n(1/n)=1/e$, 所以通项不是一致收敛到 0. 故级数 $\sum_{n\geq 1}f_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛的.

(c) 取 $x_n=1/\sqrt[3]{n}$ 得到

$$\sum_{1\leq k\leq N}f_k(x_k)=\sum_{1\leq k\leq N}\frac{\frac{1}{n}}{(1+\frac{1}{n})^k}\implies\sum_{n+1\leq k\leq 2n}f_k(x_k)\geq\frac{1}{n}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{2n}}\geq\frac{1}{e^2}.$$

所以级数 $\sum_{n\geq 1}f_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛的.

(d) 令

$$f_n(x):=\frac{a_n}{n!}\int_0^x t^n e^{-t}dt.$$

则得到

$$\begin{aligned}f_1(x)&=\frac{a_1}{1!}\int_0^x te^{-t}dt=\frac{a_1}{1!}\left(-\int_0^x t\,de^{-t}\right)=a_1\left(-xe^{-x}+\int_0^x e^{-t}dt\right)\\&=a_1\left(-xe^{-x}+1-e^{-x}\right)=a_1\left[1-(1+x)e^{-x}\right].\end{aligned}$$

一般地可得到

$$f_n(x)=a_n\left[1-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}\right)e^{-x}\right]=:a_nb_n(x).$$

因为 $b_n(x)$ 是一致有界, 根据 Abel 判别法, **定理 14.3**, 级数 $\sum_{n\geq 1}a_n$ 收敛推出 $\sum_{n\geq 1}f_n(x)=\sum_{n\geq 1}a_nb_n(x)$ 一致收敛. 反之, 函数项级数 $\sum_{n\geq 1}f_n(x)$ 一致收敛意味着对任意 $\epsilon>0$ 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得对任意 $n>N$ 任意 $p\in\mathbb{N}$ 及任意 $x>0$ 有

$$\left|\sum_{n+1\leq k\leq n+p}u_n(x)\right|<\epsilon.$$

让 $x\to+\infty$ 得到 $f_n(x)\to a_n$ 从而

$$\left|\sum_{n+1\leq k\leq n+p}a_n\right|\leq\epsilon\implies\sum_{n\geq 1}a_n \text{ 收敛}.\ \square$$

下面介绍三种实用的一致收敛判别法, Weierstrass、Abel 和 Dirichlet 判别法.

定理 14.2. (Weierstrass 判别法)

假设 $\sum_{n\geq 1}f_n(x)$ 是以函数项级数, D 是其收敛域. 如果存在收敛的正项级数

$\sum_{n\geq 1} M_n$ 满足

$$|f_n(x)| \leq M_n, \quad n \geq 1, \quad x \in D, \tag{14.1.5}$$

则函数项级数 $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ 在 D 上是一致收敛的. ♡

证: 对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得对任意 $n > N$ 和任意 $p \in \mathbb{N}$ 都有

$$\left|\sum_{n+1\leq k\leq n+p} M_k\right| < \epsilon.$$

故得到

$$\left|\sum_{n+1\leq k\leq n+p} f_n(x)\right| \leq \sum_{n+1\leq k\leq n+p} |f_n(x)| \leq \sum_{n+1\leq k\leq n+p} M_k < \epsilon. \quad \square$$

显然 (14.1.5) 中 n 可以取充分大的数, 这并不影响结论本身. 在假设条件 (14.1.5) 下, 上述不仅表明函数项级数 $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ 一致收敛, 而且也证明了函数项级数 $\sum_{n\geq 1} |f_n(x)|$ 也一致收敛. 因此我们可以引入函数项级数绝对收敛的概念, 为了进行比较, 我们把函数项级数 $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ 的逐点收敛和一致收敛也放在一起:

逐点收敛 $\iff$ $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ 对每个 $x \in D$ 都收敛,

一致收敛 $\iff$ 部分和函数列 $\{S_n(x)\}_{n\geq 1}$ 一致收敛,

绝对收敛 $\iff$ $\sum_{n\geq 1} |f_n(x)|$ 对每个 $x \in D$ 都收敛,

绝对一致收敛 $\iff$ $\sum_{n\geq 1} |f_n(x)|$ 一致收敛.

运用上述术语, 定理 14.2 可加强为函数项级数 $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ 在 D 上是绝对一致收敛的.

定理 14.3. (Abel 和 Dirichlet 一致收敛判别法)

给定函数项级数 $\sum_{n\geq 1} a_n(x)$ 和 $\sum_{n\geq 1} b_n(x)$, $x \in D$.

(1) **(Abel)** 假设函数列 $\{a_n(x)\}$ 在 D 上是**一致有界** (即存在与 n, x 均无关的正常数 M 使得 $|a_n(x)| \leq M$ 对任意 $n \geq 1$ 和任意 $x \in D$ 都成立) 和**逐点单调的**(即对每个 $x \in D$ 数列 $\{a_n(x)\}_{n\geq 1}$ 都是单调的), 而函数项级数 $\sum_{n\geq 1} b_n(x)$ 在 D 上是一致收敛的,

(2) **(Dirichlet)** 假设函数列 $\{a_n(x)\}_{n\geq 1}$ 在 D 上是一致收敛到 0 和逐点单调的, 而函数项级数 $\sum_{n\geq 1} b_n(x)$ 的部分和函数列在 D 上是一致有界的,

则函数项级数 $\sum_{n\geq 1} a_n(x)b_n(x)$ 在 D 上是一致收敛的. ♡

证: 如果收敛域 D 是单点集, 上述定理就是定理 6.10. 对一般的点集 D 证明方法也是一样的.

(1) 函数项级数 $\sum_{n\geq 1} b_n(x)$ 一致收敛推出对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得对任意

$n > N$ 任意 $p \in \mathbb{N}$ 及任意 $x \in D$ 都有

$$\left|\sum_{n+1\le k\le n+p} u_k(x)\right| < \epsilon.$$

根据 Abel 引理, **引理 6.1**, 得到

$$\left|\sum_{n+1\le k\le n+p} a_n(x)b_n(x)\right| \le \epsilon\left(|a_{n+1}(x)| + 2|a_{n+p}(x)|\right) \le 3M\epsilon.$$

(2) 函数列 $\{a_n(x)\}_{n\ge1} \rightrightarrows 0$ 意味着对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得对任意 $n > N$ 和任意 $x \in D$ 都有 $|a_n(x)| < \epsilon$. 因为部分和 $B_n(x) = \sum_{1\le k\le n} b_k(x)$ 一致有界, 所以 $|B_n(x)| \le M$ 对任意 $n \ge 1$ 和任意 $x \in D$ 都成立, 这里 M 是和 n, x 均无关的正常数. 根据 Abel 引理, **引理 6.1**, 得到

$$\left|\sum_{n+1\le k\le n+p} a_k(x)b_k(x)\right| \le 2M\left(|a_{k+1}(x)| + 2|a_{n+p}(x)|\right) \le 6M\epsilon. \quad \square$$

例 14.6

研究如下函数项级数的一致连续性:

$$\sum_{n\ge1}\frac{\sin(nx)}{n^2},\quad x\in\mathbb{R};\quad \sum_{n\ge1}\frac{\cos(nx)}{n^2},\quad x\in\mathbb{R};\quad \sum_{n\ge1}\frac{nx}{1+n^5x^2},\quad x\in\mathbb{R};$$

$$\sum_{n\ge1}x^\alpha e^{-nx},\quad x\in\mathbb{R};\quad \sum_{n\ge1}\frac{(-1)^n(x+n)^n}{n^{n+\alpha}},\ \alpha>0,\quad x\in[0,1];$$

$$\frac{1}{1+x} - \sum_{n\ge2}\frac{1}{(x+n-1)(x+n)},\quad x\in[0,1];\quad \sum_{n\ge1}\frac{\sqrt{n}}{2^{nx}},\quad x\in(\delta,+\infty),\ \delta>0;$$

$$\sum_{n\ge1}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right),\quad x\in[-\delta,\delta],\ \delta>0;$$

$$\sum_{n\ge1}t^n(\sin(nx))^k,\quad t\in(0,1),\ k\ge0,\ x\in\mathbb{R};$$

$$\sum_{n\ge1}\frac{\sin x\cdot\sin(nx)}{\sqrt{n+x}},\quad x\in[0,1);$$

$$\sum_{n\ge1}a_n\ \text{收敛}\quad\Longrightarrow\quad\sum_{n\ge1}a_nx^n\ \text{在}\ [0,1]\ \text{上一致收敛};$$

$$a_n\ \text{单调趋于}\ 0\quad\Longrightarrow\quad\sum_{n\ge1}a_n\cos(nx)\ \text{和}\ \sum_{n\ge1}a_n\sin(nx)\ \text{在}\ (0,2\pi)\ \text{内闭一致收敛};$$

解: (a) 因为 $|\sin(nx)/n^2| \le 1/n^2$, 所以是绝对一致收敛.

(b) 因为 $|\cos(nx)/n^2| \le 1/n^2$, 所以是绝对一致收敛.

(c) 利用平均值不等式得到

$$\left|\frac{nx}{1+n^5x^2}\right| = \left|\frac{1}{2n^{3/2}}\cdot\frac{2n^{5/2}x}{1+n^5x^2}\right| \le \frac{1}{2n^{3/2}},\quad x\in\mathbb{R}.$$

因此是绝对一致收敛.

(d) 因为函数 $x^\alpha e^{-nx}$ 在 $x=\alpha/n$ 处取到最大值, 所以

$$\sum_{n\geq 1} f_n(x) \leq \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha^\alpha e^{-\alpha}}{n^\alpha}, \quad x>0.$$

当 $\alpha>1$ 时, 函数项级数一致收敛. 当 $0<\alpha\leq 1$ 时,

$$\sum_{n+1\leq k\leq 2n} f_n(1/n) = \sum_{n+1\leq k\leq 2n} \frac{1}{n^\alpha} e^{-k/n} \geq \sum_{n+1\leq k\leq 2n} \frac{1}{e^2 n^\alpha} = n^{1-\alpha} e^{-2} \geq e^{-2}.$$

故此时函数项级数在 $(0,+\infty)$ 上不是一致收敛.

(e) 对原函数项级数重新组合得到

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \cdot \left(1+\frac{x}{n}\right)^n =: \sum_{n\geq 1} b_n(x) a_n(x).$$

因为 $\sum_{n\geq 1} b_n(x)$ 一致收敛, 而函数列 $\{a_n(x)\}$ 逐点单调趋于 e^x 且一致有上界 e, 所以根据 Abel 判别法可知函数项级数 $\sum_{n\geq 1} a_n(x) b_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上是一致收敛的.

(f) 因为

$$\left|\frac{1}{(x+n-1)(x+n)}\right| < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

所以函数项级数是一致收敛的.

(g) 对任意 $\delta>0$ 和任意 $n\geq 1$ 有 $|f_n(x)| = \frac{\sqrt{n}}{2^{nx}} \leq \frac{\sqrt{n}}{2^{n\delta}} =: M_n$. 因为

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{M_{n+1}}{M_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} 2^{-\delta} = 2^{-\delta} < 1,$$

所以根据比式判别法可知函数项级数一致收敛.

(h) 因为

$$|f_n(x)| = \left|1-\cos\frac{x}{n}\right| = \left|2\sin^2\frac{x}{2n}\right| \leq 2\left(\frac{x}{2n}\right)^2 \leq \frac{\delta^2}{2n^2},$$

所以函数项级数一致收敛.

(i) 因为部分和 $S_n(x) = \sum_{1\leq m\leq n} t^m (\sin(mx))^k$ 满足

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| \leq \sum_{n+1\leq k\leq n+p} t^k.$$

但是级数 $\sum_{n\geq 1} t^n$ 当 $0<t<1$ 时是收敛的, 因此函数项级数一致收敛.

(j) 根据 (l) 中的恒等式得到

$$\left|\sin x \sum_{1\leq k\leq n} \sin(nx)\right| = \left|\cos\frac{x}{2}\right| \left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}\right| \leq 2.$$

另一方面函数列 $\{\frac{1}{\sqrt{n+x}}\}_{n\geq 1}$ 是逐点单调的和一致收敛到 0, 故利用 Dirichlet 判别法可知原函数项级数一致收敛.

(k) 因为函数列 $\{x^n\}_{n\geq 1}$ 是逐点单调且一致有界, 根据 Abel 判别法可知原函数项级数一致收敛.

(l) 任取闭区间 $[\delta, 2\pi-\delta]$, 这里 $0<\delta<\pi$, 则得到

$$\left|\sum_{1\leq k\leq n} \cos(kx)\right| = \frac{|\sin((n+1/2)x) - \sin(x/2)|}{2|\sin(x/2)|} \leq \frac{1}{\sin(\delta/2)}$$

和

$$\left|\sum_{1\le k\le n}\sin(kx)\right| = \frac{|\cos((n+1/2)x)-\cos(x/2)|}{2|\sin(x/2)|} \le \frac{1}{\sin(\delta/2)}$$

根据 Dirichlet 判别法可知这两个函数项级数都是内闭一致收敛. □

14.2 一致收敛级数的性质

本小节的主要目的是回答**第 14.1.2 小节**中提到的“三个相交换”的可行性.

14.2.1 连续性

这个性质是说, 一致收敛的连续函数列 (或者, 连续函数项级数) 的极限函数 (或者, 和函数) 也是连续的.

定理 14.4. (连续性)

假设函数列 $\{f_n(x)\}_{n\ge1}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $f(x)$, 且 $f_n(x)\in C([a,b]) \Longrightarrow f(x)\in C([a,b])$.

证: $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ 推出对任意 $\epsilon>0$ 存在 $N=N(\epsilon)\in\mathbb{N}$ 使得对任意 $x\in[a,b]$ 有 $|f_n(x)-f(x)|\le\frac{\epsilon}{3}$. 固定 $x_0\in[a,b]$, 得到 $|f_n(x_0)-f(x_0)|<\frac{\epsilon}{3}$. 函数 $f_n(x)$ 的连续性可知存在 $\delta=\delta(\epsilon)>0$ 使得对任意 $x\in[a,b]$ 只要满足 $|x-x_0|<\delta$ 有 $|f_n(x)-f_n(x_0)|<\frac{\epsilon}{3}$. 故

$$|f(x)-f(x_0)|\le|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)|<\epsilon.$$

即 $f(x)$ 在 x_0 处连续. □

注 14.2

(1) **定理 14.4** 的函数项级数版本如下: 假设函数项级数 $\sum_{n\ge1}f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $S(x)$ 且 $f_n(x)\in C([a,b])$, 则 $S(x)\in C([a,b])$.

(2) 根据**定理 14.4** 得到: 若 $f_n(x)\rightrightarrows_{[a,b]} f(x)$ 且 $f_n(x)\in C([a,b])$, 则对任意 $x_0\in[a,b]$, 有

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to x_0}f_n(x)=\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to+\infty}f_n(x). \tag{14.2.1}$$

根据 (1) 得到: 若 $\sum_{n\ge1}f_n(x)\rightrightarrows_{[a,b]} S(x)$ 且 $f_n(x)\in C([a,b])$, 则对任意 $x_0\in[a,b]$,

$$\sum_{n\ge1}\lim_{x\to x_0}f_n(x)=\lim_{x\to x_0}\sum_{n\ge1}f_n(x). \tag{14.2.2}$$

(3) 若函数列 $f_n(x)\to_{[a,b]} f(x)$ 逐点收敛, $f_n(x)\in C([a,b])$, 但是 $f(x)\notin C([a,b]) \Longrightarrow f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上不是一致收敛到 $f(x)$. 对函数项级数也要类似的结论: 如果函数项级数 $\sum_{n\ge1}f_n(x)\to S(x)$ 逐点收敛, $f_n(x)\in C([a,b])$, 但是 $S(x)\notin C([a,b]) \Longrightarrow \sum_{n\ge1}f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上不是一致收敛到 $S(x)$.

(4) 显然把**定理 14.4** 中的闭区间 $[a,b]$ 换成其收敛域 D 结论也成立.

(5) 一致收敛不是极限函数或和函数连续的必要条件: 存在 $f_n(x) \in C(D)$, $f_n(x) \to_D f(x)$, $f(x) \in C(D)$, 但是 $f_n(x)$ 在 D 上不是一致收敛到 $f(x)$. 比如

$$f_n(x) = \frac{2n\sqrt{x}}{1+n^2x}, \quad f(x) \equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

但 $f_n(1/n^2) = 1 \nrightarrow 0$.

(6) 函数列或函数项级数每项连续也不是极限函数或和函数连续的必要条件: 存在 $f_n(x) \rightrightarrows_D f(x)$, $f(x) \in C(D)$, 但是 $f_n(x) \notin C(D)$. 比如, $D(x)$ 是 Dirichlet 函数,

$$f_n(x) = \frac{1}{n}D(x), \quad f(x) \equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

♣

Dini[2] 给出了下面定理.

定理 14.5. (Dini 定理, 1878)

(1) 假设函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 在 $[a,b]$ 上逐点收敛到 $f(x)$, $f_n(x), f(x) \in C([a,b])$, 且 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 在 $[a,b]$ 上是逐点单调的 $\Longrightarrow f_n(x) \rightrightarrows_{[a,b]} f(x)$.

(2) 假设函数项级数 $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上逐点收敛到 $S(x)$, $f_n(x), S(x) \in C([a,b])$, $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负 $\Longrightarrow \sum_{n\geq 1} f_n(x) \rightrightarrows_{[a,b]} S(x)$.

♡

证: (1) 不妨假设 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 在 $[a,b]$ 上是逐点单调递减的. 令 $g_n(x) := |f_n(x) - f(x)|$, 则对任给 $x \in [a,b]$, $g_n(x)$ 都是单调递减趋于 0. 对任意 $\epsilon > 0$ 和任意 $x \in [a,b]$ 存在 $n_x \in \mathbb{N}$ 满足 $0 \leq g_{n_x}(x) < \epsilon$. 根据函数 $g_{n_x}(x)$ 的连续性, 存在区间 $I_x = (x - \delta_x, x + \delta_x) \subset [a,b]$ 使得 $0 \leq g_{n_x}(y) < \epsilon$, 对任意 $y \in I_x$ 都成立. $[a,b]$ 是紧的, 所以存在 $x_1, \cdots, x_m \in [a,b]$ 使得

$$[a,b] = \bigcup_{1\leq i\leq m} I_{x_i}.$$

记 $N = \max_{1\leq i\leq m} n_{x_i}$. 则对任意 $n > N$ 和任意 $x \in [a,b]$, 不妨假设 $x \in I_{x_i}$, 我们得到

$$|f_n(x) - f(x)| = g_n(x) \leq g_{n_{x_i}}(x) < \epsilon.$$

故 $f_n(x) \rightrightarrows_{[a,b]} g(x)$.

(2) 记 $S_n(x) := \sum_{1\leq k\leq n} f_n(x)$. 则 $S_n(x) \in C([a,b])$ 且函数列 $\{S_n(x)\}_{n\geq 1}$ 在 $[a,b]$ 上逐点收敛到 $S(x) \in C([a,b])$. 因为 $S_{n+1}(x) - S_n(x) = f_{n+1}(x) \geq 0$, 所以根据 (1) 可知 $S_n(x) \rightrightarrows_{[a,b]} S(x)$. □

例 14.7

(1) $\sum_{n\geq 2} \frac{\sin(nx)}{\ln n}$ 和 $\sum_{n\geq 2} \frac{\cos(nx)}{\ln n}$ 在 $(0, 2\pi)$ 上连续.

(2) 研究下列函数项级数的连续性:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x + (-1)^n n}{n^2 + x^2}, \quad |x| \leq a; \quad \sum_{n\geq 1} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n, \quad |x| < 1.$$

[2] Ulisse Dini, 1845 年 11 月 14 日 - 1918 年 10 月 28 日, 今意大利比萨城人, 意大利数学家和政治家. 他证明了 Fourier 级数收敛的 Dini 定理、隐函数定理在意大利被称为 Dini 定理等.

解: (a) 因为

$$f_n(x)=\frac{x}{n^2+x^2}+\frac{(-1)^n n}{n^2+x^2}=\frac{n^2}{n^2+x^2}\cdot\frac{x}{n^2}+\frac{n^2}{n^2+x^2}\cdot\frac{(-1)^n}{n},$$

根据 Abel 判别法可知函数项级数一致收敛从而和函数是连续的.

(b) 只要证明函数项级数在 $(-1,1)$ 内闭一致收敛. 如果 $|x|\le r<1$, 则得到

$$\left|x+\frac{1}{n}\right|^n\le\left(r+\frac{1}{n}\right)^n,$$

所以在 $[-r,r]$ 上一致收敛, 从而在 $(-1,1)$ 内闭一致收敛.

(3) 函数列 $\{x^n\}_{n\ge1}$ 在 $(-1,1]$ 上不一致收敛. 这是因为如下极限函数不连续:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in(-1,1),\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

(4) 求下列极限:

$$\lim_{x\to0+}\sum_{n\ge1}\frac{1}{2^n n^x},\quad \lim_{x\to1}\sum_{n\ge1}\frac{x^n}{2^n}\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

解: (a) 因为

$$\frac{1}{2^n n^x}\le\frac{1}{2^n},\quad x\in[0,1],$$

所以函数项级数在 $[0,1]$ 上一致收敛且和函数也是收敛的. 故

$$\lim_{x\to0+}\sum_{n\ge1}\frac{1}{2^n n^x}=\sum_{n\ge1}\frac{1}{2^n}=1.$$

(b) 因为

$$\left|\frac{x^n}{2^n}\sin\frac{n\pi x}{2}\right|\le\left(\frac{3}{4}\right)^n,\quad x\in[0,3/2],$$

所以函数项级数一致收敛且和函数也是收敛的. 故

$$\lim_{x\to1}\sum_{n\ge1}\frac{x^n}{2^n}\sin\frac{n\pi x}{2}=\sum_{n\ge1}\frac{1}{2^n}\sin\frac{n\pi}{2}=\sum_{n\ge1}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}}=-2\sum_{n\ge1}\left(\frac{-1}{4}\right)^n=\frac{2}{5}.$$

14.2.2 可积性

这个性质是说, 一致收敛的连续函数列 (或者, 连续函数项级数) 的极限函数 (或者, 和函数) 是可积的, 且求极限 (或者, 求和) 和求积分可相交换. 显然可积性已经蕴含在定理 14.4 中, 这是因为闭区间上连续函数必是可积函数.

定理 14.6. (可积性)

假设函数列 $\{f_n(x)\}_{n\ge1}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $f(x)$, 且 $f_n(x)\in C([a,b])\Longrightarrow f\in R([a,b])$ 和

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{14.2.3}$$

进一步得到函数列

$$\left\{\int_a^x f_n(t)\,dt\right\}_{n\ge1}$$

在 $[a,b]$ 上一致收敛到函数

$$\int_a^x f(t)\,dt.$$

♡

证: 我们只要证明 (14.2.3) 即可. 计算得到

$$\left|\int_a^b [f_n(x)-f(x)]dx\right| \le \int_a^b |f_n(x)-f(x)|dx \le (b-a)\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|.$$

一致连续性推出 (14.2.3). 把上限 b 换成 x 就得到第二个结论. □

注 14.3

(1) **定理 14.6** 的函数项级数版本如下: 假设函数项级数 $\sum_{n\ge1} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $S(x)$, 且 $f_n(x)\in C([a,b]) \Longrightarrow S(x)\in R([a,b])$ 和

$$\sum_{n\ge1}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n\ge1} f_n(x)\,dx. \tag{14.2.4}$$

进一步得到函数项级数

$$\sum_{n\ge1}\int_a^x f_n(t)\,dt$$

在 $[a,b]$ 上一致收敛到函数

$$\int_a^x \sum_{n\ge1} f_n(t)\,dt = \int_a^x S(t)\,dt.$$

(2) 从**定理 14.6** 的证明过程中可以得到: 假设函数列 $\{f_n(x)\}_{n\ge1}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $f(x)$, 且 $f_n(x)\in R([a,b]) \Longrightarrow f\in R([a,b])$ 和 (14.2.3) 成立.

(3) 同样可把 (1) 中的条件减弱为每项可积: 假设函数项级数 $\sum_{n\ge1} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $S(x)$, 且 $f_n(x)\in C([a,b]) \Longrightarrow S(x)\in R([a,b])$ 和 (14.2.4) 成立.

♣

定理 14.7

(1) 假设函数列 $\{f_n(x)\}_{n\ge1}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $f(x)$, 且 $f_n(x)\in R([a,b]) \Longrightarrow f\in R([a,b])$ 和 (14.2.3) 成立.

(2) 假设函数项级数 $\sum_{n\ge1} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $S(x)$, 且 $f_n(x)\in C([a,b]) \Longrightarrow S(x)\in R([a,b])$ 和 (14.2.4) 成立.

♡

证: 只给出 (1) 的证明. 根据一致收敛性, 对任意 $\epsilon>0$ 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得对任意 $x\in[a,b]$ 都有 $|f_N(x)-f(x)|<\epsilon$. 因为 $f_N(x)\in R([a,b])$, 所以存在 $\delta>0$ 对 $[a,b]$ 的任意分割 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$, 只要 $||T||<\delta$ 就有

$$\sum_{1\le i\le m}\omega_i(f_N,T)\Delta x_i<\epsilon,\quad \omega_i(f_N,T):=\sup_{[x_{i-1},x_i]} f_N-\inf_{[x_{i-1},x_i]} f_N.$$

故

$$\sum_{1\le i\le m}\left(\sup_{[x_{i-1},x_i]}|f_N(x')-f_N(x'')|\right)\Delta x_i<\epsilon.$$

从而对任意 $x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]$ 有

$$\begin{aligned}|f(x') - f(x'')| &\leq |f(x') - f_N(x')| + |f_N(x') - f_N(x'')| + |f(x'') - f_N(x'')| \\ &< 2\epsilon + |f_N(x') - f_N(x'')|\end{aligned}$$

和

$$\sum_{1\leq i\leq m} \omega_i(f, T)\Delta x_i \leq \epsilon + 2\epsilon(b-a) = [1 + 2(b-a)]\epsilon.$$

这表明 $f(x) \in R([a,b])$. 令 $g_n(x) := f_n(x) - f(x)$, 得到

$$g_n(x) \rightrightarrows_{[a,b]} 0, \quad g_n(x) \in R([a,b]), \quad \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,b]} |g_n(x)| = 0.$$

从而利用积分不等式得到

$$\left|\int_a^b g_n(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |g_n(x)|dx \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |g_n(x)| \to 0, \quad n \to +\infty.$$

因此

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b g_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \left[\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right] \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx. \quad \Box\end{aligned}$$

例 14.8

(1) 证明

$$\arctan x = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}, \quad |x| < 1. \tag{14.2.5}$$

证: 因为

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n\geq 0} (-1)^n t^{2n} dt = \int_0^x \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} t^{2n-2} dt,$$

所以只要证明函数项级数 $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}x^{2n-2}$ 在 $(-1,1)$ 内闭一致收敛, 即证明在 $[-1+\delta, 1-\delta]$ 上一致收敛, $0 < \delta < 1$. 但 $\left|(-1)^{n-1}x^{2n-2}\right| = |x|^{2n-2} \leq (1-\delta)^{2n-2}$, 故利用比较判别法得到一致收敛性. □

(2) 证明

$$\ln(1+x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad |x| < 1. \tag{14.2.6}$$

证: 因为

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} t^{n-1} dt,$$

所以只要证明函数项级数 $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}x^{n-1}$ 在 $(-1,1)$ 内闭一致收敛, 即证明在 $[-1+\delta, 1-\delta]$ 上一致收敛, $0 < \delta < 1$, 显然这是对的.

公式 (14.2.6) 的一个直接推论 (这里要利用 Abel 第三引理, **定理 14.13**) 是

$$\ln 2 = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots.$$

14.2.3 可导性

这个性质是说, 若把一致收敛性搬到函数列或函数项级数的每项上, 则极限 (或者, 求和) 和求导数可相交换. 具体陈述如下

定理 14.8

假设函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 在 $[a,b]$ 上逐点收敛到 $f(x)$, $f_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 且 $f(x)\in C^1([a,b]) \Longrightarrow f_n(x)\in C^1([a,b])$ 且

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = \frac{d}{dx}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f'(x). \tag{14.2.7}$$

证: 令 $f_n'(x) \rightrightarrows_{[a,b]} g(x)$. 根据**定理 14.4** 和**定理 14.6** 知 $g(x)\in C([a,b])$ 且

$$\int_a^x g(t)\,dt = \int_a^x \lim_{n\to+\infty} f_n'(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_a^x f_n'(t)\,dt = f(x)-f(a).$$

因此 $f'(x)$ 存在且 $f'(x)=g(x)\in C([a,b])$. □

注 14.4

(1) **定理 14.8** 的函数项级数版本如下: 假设函数项级数 $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上逐点收敛到 $S(x)$, $f_n'(x)\in C^1([a,b])$, $\sum_{n\geq 1} f_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛 $\Longrightarrow S(x)\in C^1([a,b])$ 且

$$\sum_{n\geq 1} f_n'(x) = \frac{d}{dx}\sum_{n\geq 1} f_n(x) = S'(x). \tag{14.2.8}$$

(2) **定理 14.8** 中的假设条件推出函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $f(x)$, 这可从**定理 14.6** 得到.

同理, 在 (1) 中的假设条件下, 得到函数项级数 $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $S(x)$.

例 14.9

(1) 证明函数 $S(x)=\sum_{n\geq 1}\sin(nx)/n^3$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续可微.

证: 因为函数 $f_n(x)=\sin(nx)/n^3\in C^1(\mathbb{R})$ 且 $f_n'(x)=\cos(nx)/n^2\leq 1/n^2$, 所以根据**定理 14.8** 可知函数 $S(x)\in C^1(\mathbb{R})$ 且

$$S'(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

(2) 证明

$$\sum_{n\geq 1} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2},\quad |x|<1. \tag{14.2.9}$$

证: 因为

$$\sum_{n\geq 1} nx^n = x\sum_{n\geq 1}(x^n)',$$

故只要证明 $\sum_{n\geq 1} x^n$ 满足**定理 14.8** 中的条件. 显然函数项级数 $\sum_{n\geq 1} x^n$ 在 $(-1,1)$ 上逐点收敛到 $S(x)=(1-x)^{-1}$, $f_n'(x)=nx^{n-1}\in C^1((-1,1))$, 且 $\sum_{n\geq 1} f_n'(x)$ 在

$(-1,1)$ 内闭一致收敛 ($|x| \le r < 1$ 时, $f'_{n+1}(x)/f'_n(x) = \frac{n+1}{n}|x| \le \frac{n+1}{n}r \to r < 1$).

作为本节结束, 我们来研究其它一些例题.

例 14.10

研究如下函数列或函数项级数的一致收敛性:

(1) $\sum_{n\ge1} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $x \in \mathbb{R}$.

解: 和函数为

$$S(x) = x^2 \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1, \quad x \ne 0,$$

从而

$$S(x) = \begin{cases} 1, & x \ne 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

和函数不连续, 所以函数项级数不是一致收敛的. □

(2) $\sum_{n\ge1} ne^{-nx}$, $x \in (0,+\infty)$ 和 $x \in [\delta,+\infty)$ $(\delta > 0)$.

解: $u_n(\frac{1}{n}) = \frac{n}{e} \to +\infty$, 故函数项级数在 $(0,+\infty)$ 上不是一致收敛的. 当 $x \ge \delta$ 时,

$$\sum_{n\ge1} ne^{-nx} \le \sum_{n\ge1} \frac{n}{e^{n\delta}} \le \sum_{n\ge1} \frac{n}{\frac{1}{3!}(n\delta)^3} = \frac{6}{\delta^3} \sum_{n\ge1} \frac{1}{n^2}.$$

故此时函数项级数一致收敛且和函数 $S(x) \le \pi^2/\delta^3$. □

(3) $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$, $x \in [0,a]$ $(a > 0)$ 和 $x \in [0,+\infty)$.

解: 计算得到

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

$\{f_n(x)\}_{n\ge1}$ 逐点单调递增, 根据**定理 14.5** 可知函数列在 $[0,a]$ 上一致收敛到 e^x. 但

$$|f_n(n) - f(n)| = |2^n - e^n| \to +\infty$$

告诉我们函数列在 $(0,+\infty)$ 不是一致收敛的. □

(4) $f(x) \in C([0,1])$, $f(1) = 0$, $g_n(x) := x^n f(x) \Longrightarrow g_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上是一致收敛的.

证: 计算得到

$$g(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \lim_{n\to+\infty} x^n f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ f(1) = 0, & x = 1. \end{cases}$$

故 $g(x) \equiv 1$, $x \in [0,1]$. 因为 $\{g_n(x)\}_{n\ge1}$ 逐点单调递减, 所以根据**定理 14.5** 可知函数列在 $[0,a]$ 上一致收敛到 0. □

(5) $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ 且 $f^{(n)}(x) \rightrightarrows_{\mathbb{R}} \varphi(x) \Longrightarrow \varphi(x) = Ce^x$.

证: 因为 $(f^{(n)}(x)')_{n\ge1} \rightrightarrows \varphi(x)$, 所以

$$\varphi'(x) = \lim_{n\to+\infty} f^{(n+1)}(x) = \varphi(x) \quad \Longrightarrow \quad \left(e^{-x}\varphi(x)\right)' = 0.$$

即 $e^{-x}\varphi(x) = C$. □

(6) Riemann ζ 函数 $\zeta(x) = \sum_{n\ge1} 1/n^x$ 在 $(1,+\infty)$ 内是光滑的.

证: 我们已证 $\zeta(x)$ 当 $x>1$ 时收敛. 对任意 $[a,b]\subset(1,+\infty)$ 有

$$\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^x}\leq\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^a},\quad a>1,$$

所以 $\sum_{n\geq1}1/n^x$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛且 $\zeta(x)\in C([a,b])$. 根据 $[a,b]$ 的任意性可知 $\zeta(x)\in C((1,+\infty))$. 对上述 $x\in[a,b]\subset(1,+\infty)$ 有

$$\sum_{n\geq1}\left(\frac{1}{n^x}\right)'=\sum_{n\geq1}\frac{-\ln n}{n^x},\quad\frac{\ln n}{n^x}\leq\frac{\ln n}{n^a}\leq\frac{1}{n^{a-\epsilon}},\quad n\text{ 充分大, 存在 }\epsilon>0.$$

因此函数项级数 $\sum_{n\geq1}(1/n^x)'$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛且 $\zeta'(x)\in C([a,b])$, 从而 $\zeta(x)\in C'((1,+\infty))$. 持续这个步骤得到 $\zeta(x)\in C^\infty((1,+\infty))$ 且

$$\zeta^{(k)}(x)=(-1)^k\sum_{n\geq1}\frac{(\ln n)^k}{n^x}.\quad\square$$

例 14.11

(1) 计算定积分

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3}S(x)\,dx,\quad S(x):=\sum_{n\geq1}ne^{-nx}.$$

解: 记 $f_n(x)=ne^{-nx}$, $x\in[\ln 2,\ln 3]$. 则 $\sum_{n\geq1}f_n(x)$ 在 $[\ln 2,\ln 3]$ 上一致收敛从而

$$\begin{aligned}\int_{\ln 2}^{\ln 3}S(x)\,dx &= \sum_{n\geq1}\int_{\ln 2}^{\ln 3}ne^{-nx}dx = \sum_{n\geq1}\left(-e^{-nx}\right)\Big|_{\ln 2}^{\ln 3}\\ &= \sum_{n\geq1}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right) = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.\quad\square\end{aligned}$$

(2) 证明函数项级数

$$\sum_{n\geq1}\left[nxe^{-nx^2}-(n-1)xe^{-(n-1)x^2}\right]$$

满足

$$\int_a^b\sum_{n\geq1}f_n(x)\,dx\neq\sum_{n\geq1}\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

证: 和函数为 $S(x)\equiv0$, $x\in\mathbb{R}$, 从而得到

$$\int_0^1 S(x)\,dx=0.$$

但是另一方面,

$$\begin{aligned}\int_0^1\left[nxe^{-nx^2}-(n-1)xe^{-(n-1)x^2}\right]dx &= \left[-\frac{1}{2}e^{-nx^2}+\frac{1}{2}e^{-(n-1)x^2}\right]_0^1\\ &= -\frac{1}{2}e^{-n}+\frac{1}{2}e^{-(n-1)}\end{aligned}$$

和

$$\sum_{n\geq1}\int_0^1 f_n(x)\,dx=\sum_{n\geq1}-\frac{1}{2}\left(e^{-n}-e^{-(n-1)}\right)=\frac{1}{2}\neq0.\quad\square$$

14.2.4 常微分方程基本定理

函数项级数的一个直接应用是来证明常微分方程解的存在性. Cauchy 是首位考虑微分方程解的存在性问题的数学家, 并给出了定理 14.9 的两个证明. 他在 1820 年到 1830 年期间, 对 F, F_y 都是连续时给出了第一个证明 (综述在《Exercices d'analyse》(1840) 里), 想法本质上已存在Euler 1768 年的著作中; Lipschitz[3] 在 1876 年把Cauchy 的条件减弱为现在定理 14.9 中的条件. Cauchy 的第二个证明是假设 F 此时是实解析的, 从而得到解也是实解析的.

第三个关于微分方程解的存在性的证明是Picard[4] 在 1890 年给出的, 即逐次逼近法, 虽然这个方法首先是由Liouville 在 1838 年对二阶方程提出来的. 我们给出的证明是基于Picard 的工作.

定理 14.9. (Cauchy-Lipschitz-Picard 定理)

假设 $x_0 \in \mathbb{R}$, $F(t,x)$ 在 $(0,x_0) \in \mathbb{R}^2$ 附近连续, 且

$$|F(t,x) - F(t,x')| \le L|x - x'|, \quad \text{存在 } L > 0.$$

则存在唯一的函数 $x(t)$ 在 $t = 0$ 附近满足

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad x(0) = x_0. \tag{14.2.10}$$

♡

证: 微分方程 (14.2.10) 等价于积分方程

$$x(t) = x_0 + \int_0^t F(s, x(s))\,ds.$$

定义

$$x_0(t) := x_0, \quad x_1(t) := x_0 + \int_0^t F(s, x_0)\,ds, \quad x_k(t) := x_0 + \int_0^t F(s, x_{k-1}(s))\,ds, \quad k \ge 1.$$

则得到

$$\begin{aligned} |x_k(t) - x_{k-1}(t)| &\le \int_0^t |F(s, x_{k-1}(s)) - F(s, x_{k-2}(s))|\,ds \\ &\le L\int_0^t |x_{k-1}(s) - x_{k-2}(s)|\,ds. \end{aligned}$$

[3]Rudolf Otto Sigismund Lipschitz, 1832 年 5 月 14 日 - 1903 年 10 月 7 日, 今俄罗斯加里宁格勒州加里宁格勒 (原普鲁士柯尼斯堡) 人, 德国数学家. 1853 年获 Humboldt University of Berlin 博士学位, 博士导师是Gustav Dirichlet. Lipschitz 的数学研究涉及数论、贝塞尔函数论、傅里叶级数论、常微分方程、分析力学、位势理论及黎曼微分几何, 其中在微分方程和微分几何方面尤为突出. 1873 年他对柯西提出的微分方程初值问题解的存在惟一性定理作出改进, 提出著名的 "Lipschitz 条件" . Lipschitz 被认为是Riemann 事业的继承者之一. Riemann 于 1854 年系统地阐述了高维流形微分几何的主要内容, 并于 1868 年发表了研究 n 维流形的度量结构的文章. 1869 年起Lipschitz 对Riemann 的思想作出进一步阐述和推广, 其中对 n 维 Riemannian 流形的子流形性质以及对微分不变量的研究取得了开创性的成果. 他还是最早使用共变微分研究微分不变量的人, 这个概念后来被Ricci 有效地用于张量分析.

[4]Charles Émile Picard, 1856 年 7 月 24 日 - 1941 年 11 月 11 日, 今法国巴黎人, 法国数学家. 他是法国十九世纪末二十世纪初最杰出的数学家之一, 1877 年 École Normale Supérieure 毕业, 1924 年称为法兰西学院院士. 博士导师是Gaston Darboux, 有名的博士生有Sergei Bernstein、Jacques Hadamard、Gaston Julia、Paul Painlevé、André Weil 等. Picard 的主要贡献在于解析函数、微分方程以及代数几何学等方面. 1879 年, 他提出皮卡小定理, 次年证明皮卡大定理. 这两个定理为复变函数论指引了新的方向. 1883 年–1888 年, Picard 将Poincaré 自守函数的方法推广到二元复变函数, 进而研究代数曲面, 建立 "Picard 群" . 他还推广了逐步逼近法.

对 $k=1,2,3$ 分别得到

$$\begin{aligned} |x_1(t)-x_0| &\le \int_0^t |F(s,x_0)|ds \le Mt, \\ |x_2(t)-x_1(t)| &\le L\int_0^t |x_1(s)-x_0(s)|ds \le L\int_0^t Msds = LM\frac{t^2}{2}, \\ |x_3(t)-x_2(t)| &\le L\int_0^t |x_2(s)-x_1(s)|ds \le L\cdot LM\cdot\frac{1}{2}\int_0^t s^2ds = \frac{ML^2}{3!}t^3. \end{aligned}$$

这里 M 是二元函数 $F(t,x)$ 在 $(0,x_0)$ 附近的最大值. 一般地可证

$$|x_k(t)-x_{k-1}(t)| \le \frac{ML^{k-1}}{k!}t^k, \quad k\ge 1.$$

考虑函数项级数

$$\sum_{k\ge 0} u_k(t), \quad u_0(t) := x_0, \quad u_k(t) := x_k(t)-x_{k-1}(t), \quad k\ge 1.$$

对任意 n, 任意 $p\in\mathbb{N}$, 和任意充分小的 t 有

$$\left|\sum_{n+1\le k\le n+p} u_k(t)\right| \le \sum_{n+1\le k\le n+p} |u_k(t)| \le \sum_{n+1\le k\le n+p} \frac{M}{L}\frac{(Lt)^k}{k!} \le \frac{M}{L}\cdot\frac{(Lt)^{n+1}}{1-Lt},$$

所以当 $t\le 1/2L$ 时,

$$\left|\sum_{n+1\le k\le n+p} u_k(t)\right| \le \frac{M}{L}\cdot\frac{1}{2^n} \to 0, \quad n\to+\infty.$$

故函数项级数 $\sum_{n\ge 1} u_n(t)$ 在 0 附近是一致收敛的, 从而函数列 $\{x_n(t)\}_{n\ge 1}$ 在 0 附近是一致收敛的, 和函数列 $\{F(t,x_n(t))\}_{n\ge 1}$ 也在 0 附近是一致收敛的 (利用函数 $F(t,x)$ 关于 x 满足 Lipschitz 条件). 若把极限函数记为 $x(t)$ 则得到

$$|x_n(t)-x_0| \le \sum_{1\le k\le n} |x_k(t)-x_{k-1}(t)| \le \sum_{1\le k\le n} \frac{M}{L}\frac{(Lt)^k}{k!} \le \frac{M}{L}e^{Lt} \le \frac{M}{L}e, \quad t\le\frac{1}{2},$$

和

$$x(t) = \lim_{n\to+\infty} x_n(t) = x_0 + \int_0^t \lim_{n\to+\infty} F(s,x_{n-1}(s))ds = x_0 + \int_0^t F(s,x(s))ds. \quad \square$$

14.3 幂级数

回顾 Taylor 公式 (4.7.2), (4.7.4), 或 (4.7.8), 在适当的条件下函数 $f(x)$ 可分解成

$$f(x) = \sum_{0\le k\le n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x)$$

其中 $r_n(x)$ 是余项. 一个很自然的问题是: 当 $n\to+\infty$, $f(x)=\sum_{n\ge 0} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n/n!$ 是否成立? 之前的**定理 4.20** 已经给出了部分答案.

本节我们系统地研究级数展开问题, 并回答**注 4.14** (3) 中提到的初等函数的级数展开. 首先给出**幂级数 (power series)** 的定义:

$$\sum_{n\ge 0} a_n(x-x_0)^n \quad 或 \quad \sum_{n\ge 0} a_nx^n.$$

14.3.1 幂级数收敛域

我们已经知道函数项级数 $\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛到 $(1+x)^{-1}$. 若令 $a_n := (-1)^n$ 则得到

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1} = 1.$$

下面证明函数项级数 $\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n$ 在 $(-1,1)$ 内绝对收敛. 事实上, 对任意 $x\in(-1,1)$

$$\sum_{n\geq 0}|(-1)^n x^n| = \sum_{n\geq 0}|x|^n = \frac{1}{1-|x|} < +\infty.$$

但是这个函数项级数在端点处 $x=\pm 1$ 是发散的.

定理 14.10. (Cauchy, 1821; Hadamard, 1888)

给定幂级数 $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, 并令

$$\rho := \overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}. \tag{14.3.1}$$

则

(1) $\rho > 0 \Longrightarrow$ 幂级数在 $(-\frac{1}{\rho},\frac{1}{\rho})$ 内绝对收敛, 而在 $(-\infty,-\frac{1}{\rho})\cup(\frac{1}{\rho},+\infty)$ 内发散. 幂级数在端点 $x=\pm\frac{1}{\rho}$ 处的敛散性无法判断.

(2) $\rho = 0 \Longrightarrow$ 幂级数在 $\mathbb{R}$ 上绝对收敛.

(3) $\rho = +\infty \Longrightarrow$ 幂级数只在 $x=0$ 处绝对收敛. ♡

证: 利用根式判别法可知

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \rho|x|\begin{cases} <1, & |x|<\frac{1}{\rho}, \\ >1, & |x|>\frac{1}{\rho}. \end{cases}$$

故完成证明. □

注 14.5

(1) 作平移得到: 幂级数 $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ 在 $|x-x_0|<\frac{1}{\rho}$ 内绝对收敛, 而在 $|x-x_0|>\frac{1}{\rho}$ 上发散. 在端点 $|x-x_0|=\frac{1}{\rho}$ 处的敛散性无法判断, 必须具体问题具体分析.

(2) 称 $r := \frac{1}{\rho}$ 为幂级数的**收敛半径 (radius of convergence)**, 把相应的区间 $(-r,r)$ 称为**收敛区间 (interval of convergence)**. 要注意记号, 如果 $\rho=0$ 则收敛半径为 $r=+\infty$ 和收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$; 当 $\rho=+\infty$ 时, 收敛半径为 $r=0$ 和收敛区间此时仅为一点 $\{0\}$.

(3) 因为 $\lim_{n\to+\infty}|a_{n+1}/a_n| = a$ 存在可推出 $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=a$. 故此时收敛半径为 $r=1/a$.

(4) **定理 14.10** 对一般级数不一定成立. 比如考察级数

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(nx)}{n}.$$

根据**例 14.6** 知道, 上述级数在 $(0,2\pi)$ 内条件收敛. 利用周期性, 易知上述级数在 $\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ 上条件收敛, 且在 $2\pi\mathbb{Z}$ 处发散. 而根据 (14.3.1) 得到 $\rho = \overline{\lim}_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|1/n|} =$

1; 如果利用**定理 14.10** 则在 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ 内发散, 矛盾!

(5) 在研究幂级数的收敛域时, 除了利用 (14.3.1) 求出收敛区间外, 不要忘记检查幂级数在收敛半径端点处的敛散性. ♣

例 14.12

求下列幂级数的收敛域:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(x-1)^n}{n},\quad \sum_{n\geq 1}\frac{(x-1)^n}{n^2},\quad \sum_{n\geq 1}n(x-1)^n,\quad \sum_{n\geq 1}\frac{2^n+(-1)^n}{n(n+2)}x^n,$$

$$\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n,\quad \sum_{n\geq 1}\frac{(2n)!}{(n!)^2}(x-1)^{2n-1},\quad \sum_{n\geq 1}\frac{(x-1)^n}{2^n n},$$

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},\quad \sum_{n\geq 1}\frac{\ln(1+n)}{n}x^{n-1},\quad \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^p}\ (p>0),$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n x^n,\quad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n,\quad \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n+\sqrt{n}}x^n,$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{(n+2)3^n},\quad \sum_{n\geq 1}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x-1)^n,\quad \sum_{n\geq 1}n2^{2n}x^n(1-x)^n,$$

$$\sum_{n\geq 1}\sin\frac{1}{3n}\left(\frac{3+x}{3-2x}\right)^n,\quad \sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^{-nx},$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1^n+2^n+\cdots+2020^n}{n^2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n,\quad \sum_{n\geq 1}\left[\frac{1}{n^2}+(-1)^n+\sin n\right]x^n,$$

$$\sum_{n\geq 1}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{4n}\right]x^n,\quad \sum_{n\geq 1}\left(\frac{a^n}{n^2}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n\ (a,b>0),$$

$$\sum_{n\geq 0}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2},\quad \sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!},\quad \sum_{n\geq 0}n^{n^2}x^{n^3},\quad \sum_{n\geq 0}\frac{x^{n^2}}{2^n},\quad \sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n|x|^n}.$$

解: (1) $\rho=\overline{\lim}_{n\to+\infty}1/\sqrt[n]{n}=1$, 故收敛区间为 $|x-1|<1$ 即 $0<x<2$. 下面检查端点处的敛散性. 如果 $x=0$, 则级数变为 $\sum_{n\geq 1}(-1)^n/n$ 收敛, 当 $x=2$, 则级数变为 $\sum_{n\geq 1}1/n$ 发散. 因此收敛域为 $[0,2)$.

(2) 和 (1) 一样, 收敛区间为 $(0,2)$. 如果 $x=0$, 则级数变为 $\sum_{n\geq 1}(-1)^n/n^2$ 收敛, 当 $x=2$, 则级数变为 $\sum_{n\geq 1}1/n^2$ 收敛. 因此收敛域为 $[0,2]$.

(3) 和 (1) 一样, 收敛区间为 $(0,2)$. 如果 $x=0$, 则级数变为 $\sum_{n\geq 1}(-1)^n n$ 发散, 当 $x=2$, 则级数变为 $\sum_{n\geq 1}n$ 发散. 因此收敛域为 $(0,2)$.

(4) 收敛半径为

$$\rho=\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{\frac{2^n+(-1)^n}{n(n+2)}}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2^n+(-1)^n}=2,$$

所以收敛区间为 $(-1/2,1/2)$. 当 $x=\pm 1/2$ 时

$$\left|\frac{2^n+(-1)^n}{n(n+2)}\left(\pm\frac{1}{2}\right)^n\right| \le \frac{2^n+1}{2^n}\frac{1}{n(n+2)} \le \frac{2}{n(n+2)} \le \frac{2}{n^2},$$

故此时也收敛. 因此收敛域为 $[-1/2,1/2]$.

(5) 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}} = 1,$$

所以收敛区间为 $(-1,1)$. 当 $x=\pm 1$ 时因为 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\to+\infty$, 故此时级数发散. 因此收敛域为 $(-1,1)$.

(6) 将级数写成 $\sum_{n\ge1}(2n)![(x-1)^2]^{n-1}/(n!)^2$. 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+2)!/((n+1)!)^2}{(2n)!/(n!)^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2(2n+1)}{n+1} = 4,$$

所以收敛区间为 $|(x-1)^2|\le 1/4$, 即 $(1/2,3/2)$. 当 $x=1/2$ 或 $x=3/2$ 时级数变成

$$\pm 2\sum_{n\ge1}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2},\quad a_n := \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2};$$

此时

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2n+2}{2n+1} = 1+\frac{1}{2n+1} = 1+\frac{1/2}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

根据 Gauss 判别法可知级数发散. 最后得到收敛域为 $(1/2,3/2)$.

(7) 因为

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n n}} = \frac{1}{2},$$

所以收敛区间为 $|x-1|<2$ 即 $-1<x<3$. 当 $x=-1$ 时级数 $\sum_{n\ge1}(-1)^n/n$ 收敛, 而当 $x=3$ 时级数 $\sum_{n\ge1}1/n$ 发散, 所以收敛域为 $[-1,3)$.

(8) 因为

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}\right|} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2n-1}} = 1,$$

所以收敛区间为 $(-1,1)$. 当 $x=\pm1$ 时级数 $\pm\sum_{n\ge1}(-1)^{n+1}/(2n-1)$ 都是收敛, 因此收敛域为 $[-1,1]$.

(9) 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\ln(2+n)}{n+1}}{\frac{\ln(1+n)}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}\frac{\ln(2+n)}{\ln(1+n)} = 1,$$

所以收敛区间为 $(-1,1)$. 当 $x=-1$ 时, 级数变成 $\sum_{n\ge1}(-1)^{n-1}\ln(1+n)/n$. 由于函数 $f(x):=\frac{\ln(1+x)}{x}$ 满足

$$f'(x) = \frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} \le 0,$$

根据 Leibniz 判别法可知 $\sum_{n\ge1}(-1)^{n-1}\frac{\ln(1+n)}{n}$ 收敛. 当 $x=1$ 时, 级数变成

$$\sum_{n\ge1}\frac{\ln(1+n)}{n} =: \sum_{n\ge1}f(n),\quad f(n)\text{ 非负且单调递减}.$$

因为

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}dx \geq \int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{1+x}dx = \frac{1}{2}\ln^2(1+x)\Big|_1^{+\infty} = +\infty,$$

所以利用积分判别法可知级数发散. 因此收敛域为 $[-1,1)$.

(10) 因为

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}\right|} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^p = 1,$$

所以收敛区间为 $(-1,1)$. 当 $x=-1$ 时级数变成 $-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^p}$, 故仅当 $p>1$ 时收敛. 当 $x=1$ 时级数变成 $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}/n^p$, 故对任意 $p>0$ 都收敛. 最后得到收敛域为 $[-1,1]$ 若 $p>1$, 和 $(-1,1]$ 若 $0<p\leq 1$.

(11) 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}\Big/\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1,$$

所以收敛区间为 $(-1,1)$. 当 $x=1$ 时级数变成 $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$; 利用公式 $n!\sim\sqrt{2\pi n}(n/e)^n$ 得到

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi n}},$$

故此时级数发散. 当 $x=-1$ 时级数变成

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n,\quad a_n := \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

因为 $a_{n+1}/a_n=(1+1/n)^n/e<1$ 且 $a_n\to 0$, 所以根据 Leibniz 判别法此时级数收敛. 最后得到收敛域为 $[-1,1)$.

(12) 因为

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{(2n-1)2^n}\right|} = \frac{1}{2},$$

所以收敛区间为 $|(x-2)/2|<2$, 即 $0<x<4$. 当 $x=0$ 时级数变成 $\sum_{n\geq 1}(-1)^n/(2n+1)$, 故收敛. 当 $x=4$ 时级数变成 $\sum_{n\geq 1}1/(2n-1)$, 故发散. 最后得到收敛域为 $[0,4)$.

(13) 因为

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n+\sqrt{n}}\right|} = 1,$$

所以收敛区间为 $(-1,1)$. 当 $x=-1$ 时级数变成 $\sum_{n\geq 1}-1/(n+\sqrt{n})$, 故发散. 当 $x=1$ 时级数变成 $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}/(n+\sqrt{n})$, 故收敛. 最后得到收敛域为 $(-1,1]$.

(14) 因为

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n(n+2)}} = \frac{1}{3},$$

所以收敛区间为 $(-3,3)$. 当 $x=-3$ 时级数变成 $\sum_{n\geq 1}(-1)^n/(n+2)$, 故收敛. 当 $x=3$ 时级数变成 $\sum_{n\geq 1}1/(n+2)$, 故发散. 最后得到收敛域为 $[-3,3)$.

(15) 因为

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{\frac{3^n+(-2)^n}{n}}=3,$$

所以收敛区间为 $|x-1|<\frac{1}{3}$, 即 $\frac{2}{3}<x<\frac{4}{3}$. 当 $x=\frac{2}{3}$ 时级数变成

$$\sum_{n\geq1}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\frac{(-1)^n}{3^n}=\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^n}{n}\left[1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right],$$

故收敛. 当 $x=\frac{4}{3}$ 时级数变成

$$\sum_{n\geq1}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\frac{1}{3^n}=\sum_{n\geq1}\left[\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n(3/2)^n}\right],$$

故发散. 最后得到收敛域为 $[2/3,4/3)$.

(16) 因为

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{n2^{2n}}=4,$$

所以收敛区间为 $|x(1-x)|<\frac{1}{4}$, 即 $x\in(\frac{1}{2},\frac{1+\sqrt{2}}{2})\cup(\frac{1-\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})$. 当 $x=\frac{1}{2}$ 时级数变成 $\sum_{n\geq1}n$, 故发散. 当 $x=\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$ 时级数变成 $\sum_{n\geq1}(-1)^n n2^n$, 故发散. 最后得到收敛域为 $(\frac{1}{2},\frac{1+\sqrt{2}}{2})\cup(\frac{1-\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})$.

(17) 因为 $\lim_{n\to+\infty}\sin\frac{1}{3(n+1)}/\sin\frac{1}{3n}=1$, 故收敛区间为 $-1<\frac{3+x}{3-2x}<1$, 即 $x\in(-\infty,0)\cup(6,+\infty)$. 当 $x=0$ 时级数变成 $\sum_{n\geq1}\sin\frac{1}{3n}\sim\sum_{n\geq1}\frac{1}{3n}$, 故发散. 当 $x=6$ 时级数变成 $\sum_{n\geq1}(-1)^n\sin\frac{1}{3n}$, 故收敛. 最后得到收敛域为 $(-\infty,0)\cup[6,+\infty)$.

(18) 因为

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^{-nx}}=\frac{1}{e^{1+x}},$$

所以当 $x>-1$ 时级数收敛, 而当 $x<-1$ 时级数发散. 当 $x=-1$ 时级数变成

$$\sum_{n\geq1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^n=\sum_{n\geq1}\left[\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}\right]^n.$$

利用**例 6.6** (3) 中的渐近展开得到

$$\left[\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}\right]^n=\left[\frac{e}{e^{1-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})}}\right]^n=e^{\frac{1}{2}+o(1)},$$

故此时发散. 最后得到收敛域为 $(-1,+\infty)$.

(19) 因为, 利用**例 2.9** (1),

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{\frac{1^n+\cdots+2020^n}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1^n+\cdots+50^n}=\max\{1,\cdots,2020\}=2020,$$

所以收敛区间为 $|(1-x)/(1+x)|<1/2020$, 即 $2019/2021<x<2021/2019$. 当 $x=2019/2021$ 或 $x=2021/2019$ 时级数变成

$$\sum_{n\geq1}(\pm1)^n\frac{1^n+\cdots+2020^n}{2020^n n^2}.$$

由于

$$\frac{1^n+\cdots+2020^n}{2020^n n^2}=\sum_{1\leq k\leq n}\frac{(k/2020)^n}{n^2}\leq\frac{2020}{n^2},$$

可知此时级数收敛. 最后得到收敛域为 $[2019/2021, 2021/2019]$.

(20) 因为

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}+(-1)^n+\sin n}=1,$$

所以收敛区间为 $(-1,1)$. 当 $x=\pm1$ 时级数变成

$$\sum_{n\geq1}\left[\frac{1}{n^2}+(-1)^n+\sin b\right](-1)^n,$$

故发散. 最后得到收敛域为 $(-1,1)$.

(21) 因为

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{4n}+\frac{(-1)^n}{n}}=\frac{4}{4}=1,$$

所以收敛区间为 $(-1,1)$. 当 $x=-1$ 时级数变成

$$\sum_{n\geq1}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{4^n}\right](-1)^n=\sum_{n\geq1}\left[\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{4^n}\right],$$

故发散. 当 $x=1$ 时级数变成

$$\sum_{n\geq1}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{4^n}\right],$$

故收敛. 最后得到收敛域为 $(-1,1]$.

(22) 因为

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=\max\{a,b\},$$

所以收敛区间为 $-\min\{\frac{1}{a},\frac{1}{b}\}<x<\min\{\frac{1}{a},\frac{1}{b}\}$. 显然当 $x=\pm\min\{\frac{1}{a},\frac{1}{b}\}$ 时级数收敛. 最后得到收敛域为 $[-\min\{1/a,1/b\},\min\{1/a,1/b\}]$.

(23) 因为 $\overline{\lim}_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{2n-1}{2^n}}=\frac{1}{2}$, 所以收敛区间为 $|x^2|<2$, 即 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$. 当 $x=\pm2$ 时级数为 $\sum_{n\geq0}(n-\frac{1}{2})$, 故发散. 最后得到收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

(24) 级数可写成

$$\sum_{n\geq0}\frac{1}{(2n-1)(2n-1)!}\left(x^{2-1/n}\right)^n=\sum_{k\geq0}a_kx^k,$$

其中

$$a_k:=\begin{cases}\frac{1}{(2n-1)(2n-1)!}, & k=2n-1,\\ 0, & k\neq 2n-1.\end{cases}$$

因为 $\overline{\lim}_{n\to+\infty}\sqrt[k]{|a_k|}=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{k!}}=0$, 所以收敛区间为 $\mathbb{R}$.

(25) 级数可写成

$$\sum_{n\geq0}n^{n^2}x^{n^3}=\sum_{k\geq0}a_kx^k,$$

这里

$$a_k=\begin{cases}n^{n^2}, & k=n^3,\\ 0, & k\neq n^3.\end{cases}$$

因为

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[k]{|a_k|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n^3]{n^{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1,$$

所以收敛区间为 $(-1,1)$. 当 $x=\pm1$ 时级数变成 $\sum_{n\geq0}(\pm1)^{n^3}n^{n^2}$, 故发散. 最后得到了收敛域为 $(-1,1)$.

(26) 级数可写成 $\sum_{n\geq0}x^{n^2}/2^n=\sum_{k\geq0}a_kx^k$, 其中

$$a_k=\begin{cases}\frac{1}{2^n}, & k=n^2,\\ 0, & k\neq n^2.\end{cases}$$

因为 $\overline{\lim}_{k\to+\infty}\sqrt[k]{|a_k|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n^2]{\frac{1}{2^n}}=1$, 所以收敛区间为 $(-1,1)$. 当 $x=\pm1$ 时级数变成 $\sum_{n\geq0}(\pm1)^n/2^n$, 故收敛. 最后得到收敛域为 $[-1,1]$.

(27) 因为 $x=0$, 级数无定义. 当 $x>0$ 时级数为 $\sum_{n\geq1}1/n$, 故发散. 当 $x<0$ 时级数为 $\sum_{n\geq1}(-1)^n/n$, 故收敛. 最后得到收敛域为 $(-\infty,0)$. ♠

14.3.2 幂级数基本性质

由于幂级数是特殊的函数项级数, 我们自然要问什么时候幂级数具有连续性、可积性和可导性. 我们将证明上述三个性质在幂级数的收敛区间内成立.

定理 14.11. (Abel 第一定理)

(1) 如果幂级数 $\sum_{n\geq0}a_nx^n$ 在 $x_1\neq0$ 处收敛, 则其在 $(-|x_1|,|x_1|)$ 内绝对收敛.

(2) 如果幂级数 $\sum_{n\geq0}a_nx^n$ 在 x_1 处发散, 则其在 $(-\infty,-|x_1|)\cup(|x_1|,+\infty)$ 内发散. ♡

证: (1) 因为级数 $\sum_{n\geq0}a_nx_1^n$ 收敛, 故 $\lim_{n\to+\infty}a_nx_1^n=0$. 从而得到数列 $\{a_nx_1^n\}_{n\geq0}$ 有界, 即存在正数 $M>0$ 满足 $|a_nx^n|\leq M$. 对任意 $|x|<|x_1|$ 有

$$|a_nx^n|=|a_nx_1^n|\cdot\left|\frac{x}{x_1}\right|^n\leq M\left|\frac{x}{x_1}\right|^n.$$

由于 $\sum_{n\geq0}M(|x|/|x_1|)^n$ 收敛, 故幂级数 $\sum_{n\geq0}a_nx^n$ 绝对收敛.

(2) 如果幂级数 $\sum_{n\geq0}a_nx^n$ 在 x_0 处收敛, 这里 $|x_0|>|x_1|$, 则根据 (1) 幂级数 $\sum_{n\geq0}a_nx^n$ 在 $(-|x_0|,|x_0|)$ 内绝对收敛. 特别地, $\sum_{n\geq0}a_nx_1^n$ 收敛, 矛盾. □

定理 14.12. (Abel 第二定理)

幂级数 $\sum_{n\geq0}a_nx^n$ 在其收敛区内闭一致收敛. 如果幂级数 $\sum_{n\geq0}a_nx^n$ 进一步在 $x=r$ (或者, 在 $x=-r$) 处收敛, 则其在任意闭区间 $[a,r]\subset(-r,r]$ (或者, 任意闭区间 $[-r,b]\subset[-r,r)$) 从而在 $(-r,r]$ (或者, $[-r,r)$) 内闭一致收敛. ♡

证: 任取闭区间 $[a,b]\subset(-r,r)$, 并令 $x_1:=\max\{|a|,|b|\}$. 则得到

$$|a_nx^n|\leq|a_nx_1^n|,\quad 任意\ n\in\mathbb{N},\ 任意\ x\in[a,b].$$

因为 $\sum_{n\geq0}a_n|x_1|^n$ 收敛, 所以幂级数 $\sum_{n\geq0}a_nx^n$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

现在假设 $\sum_{n\geq 0} a_n r^n$ 收敛, 则对任意 $x \in [0,r]$ 有

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} a_n r^n \left(\frac{x}{r}\right)^n.$$

因为 $(x/r)^n$ 逐点单调递减且一致有上界 1, 根据 Abel 判别法知幂级数在 $[0,r]$ 上一致收敛. 特别地, 当 $a \geq 0$ 时幂级数在 $[a,r]$ 上一致收敛. 当 $-r < a < 0$ 时, 根据 (1) 得到幂级数 $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ 在 $[a,0]$ 上一致收敛. 因此幂级数在 $[a,r]$ 上一致收敛. □

命题 14.1

幂级数

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n, \quad \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1},$$

都有一样的收敛区间, 但是它们可能会有不同的收敛域.

证: 因为 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 所以三个幂级数收敛半径都一样. 考虑幂级数 $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$. 该幂级数的收敛域为 $[-1,1]$, 而幂级数 $\sum_{n\geq 1} (x^n/n^2)'$ 的收敛域为 $[-1,1)$, 再次求导后的幂级数 $\sum_{n\geq 1} (x^n/n^2)''$ 的收敛域为 $(-1,1)$. □

定理 14.13. (Abel 第三定理)

如果幂级数 $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ 的收敛半径为 r, 则其和函数在 $(-r,r)$ 内连续. 如果幂级数 $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ 在 $x = r$ (或者, $x = -r$) 处收敛, 则其和函数在 $x = r$ (或者, $x = -r$) 左 (或者, 右) 连续.

证: 根据定理 **14.12** 和注 **14.2** (1), 可知幂级数在 $(-r,r)$ 内闭连续从而在 $(-r,r)$ 内连续. 单侧收敛推出单侧连续也是利用定理 **14.12**. □

定理 14.14. (幂级数的可积性和可导性)

假设幂级数 $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ 的收敛半径为 $r \neq 0$, 且记

$$f(x) := \sum_{n\geq 0} a_n x^n, \quad x \in (-r,r).$$

(1) **(逐项积分)** 对任意 $-r < a < b < r$ 有

$$\int_a^b \sum_{n\geq 0} a_n x^n dx = \sum_{n\geq 0} \int_a^b a_n x^n dx, \tag{14.3.2}$$

特别地得到

$$\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x \sum_{n\geq 0} a_n t^n dt, \quad |x| < r. \tag{14.3.3}$$

由性质 **14.1**知逐项积分后的幂级数 $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n x^n}{n+1}$ 和原幂级数 $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ 具有相同的收敛半径.

(2) **(逐项求导)** 对任意 $x \in (-r,r)$ 有

$$f'(x) = \sum_{n\geq 0} (a_n x^n)' = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}, \tag{14.3.4}$$

特别地得到

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n\geq k}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_nx^{n-k},\quad f^{(k)}(0)=k!a_k.\qquad(14.3.5)$$

由**性质 14.1**知逐项求导后的幂级数 $\sum_{n\geq 0}na_nx^{n-1}$ 和原幂级数 $\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ 具有相同的收敛半径.

证: (1) 根据**定理 14.12** 幂级数在收敛区间内闭一致收敛，故利用**注 14.3** (1) 推出 (14.3.2).

(2) 根据**定理 14.12** 和**性质 14.1** 可知幂级数在其收敛区间内可任意次求导，从而利用**注 14.4** (1) 推出 (14.3.4) 和 (14.3.5). □

注 14.6

(1) 对幂级数来说，逐项积分后收敛域一般会变大，而逐项求导后收敛域一般会变小. 比如考察**性质 14.1** 证明过程中的例子.

(2) **定理 14.14** 可用来求一些函数的幂级数展开或恒等式.

例 14.13

(1) 证明

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)x^n=\frac{1}{(1-x)^2},\quad |x|<1;\quad \sum_{n\geq 1}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^3},\quad |x|<1;$$

$$\sum_{n\geq 2}\frac{(n-1)n(n+1)}{6}x^{n-2}=\frac{1}{(1-x)^4},\quad |x|<1;$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\quad |x|<1;\quad \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\arctan x,\quad |x|<1;$$

$$\sum_{n\geq 2}\frac{2n+1}{n!}2^n=5e^2,\quad \sum_{n\geq 0}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

证: (a) 幂级数 $\sum_{n\geq 0}x^n=\frac{1}{1-x}$ 收敛区间为 $(-1,1)$, 故在收敛区间内逐项求导得到

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)x^n=\left(\sum_{n\geq 0}x^{n+1}\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

(b) 根据 (a) 得到

$$\sum_{n\geq 1}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}(n+1)x^n\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)'=\frac{1}{(1-x)^3}.$$

(c) 对 (b) 继续求导得到

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 2}\frac{(n-1)n(n+1)}{6}x^{n-2}&=\left(\frac{1}{6}\sum_{n\geq 1}n(n+1)x^{n-1}\right)'\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(1-x)^3}\right)'=\frac{1}{(1-x)^4}.\end{aligned}$$

(*d*) 幂级数 $\sum_{n\geq 1} x^{2n-1}/(2n-1)$ 的收敛半径为 $r=1$. 任意 $x\in(-1,1)$ 得到

$$\sum_{n\geq 1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\sum_{n\geq 1}\int_0^x t^{2n-2}dt=\int_0^x\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

(*e*) 幂级数的收敛半径为 $r=1$, 故对任意 $x\in(-1,1)$ 得到

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\int_0^x t^{2n-2}dt=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\arctan x.$$

(*f*) 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(2n+3)/(n+1)!}{(2n+1)/n!}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\frac{2n+3}{2n+1}=0,$$

所以幂级数 $\sum_{n\geq 1}(2n+1)x^{2n}/n!$ 的收敛区间为 $\mathbb{R}$. 令

$$f(x):=\sum_{n\geq 1}\frac{2n+1}{n!}x^{2n},\quad x\in\mathbb{R}.$$

逐步积分得到

$$\int_0^x f(t)\,dt=\sum_{n\geq 1}\frac{2n+1}{n!}\int_0^x t^{2n}dt=\sum_{n\geq 1}\frac{x^{2n+1}}{n!}=x\sum_{n\geq 1}\frac{(x^2)^n}{n!}=x\left(e^{x^2}-1\right).$$

两边求导可得

$$f(x)=(2x^2+1)e^{x^2}-1,\quad\Longrightarrow\quad S(2)=5e^2-1\quad\Longrightarrow\quad\sum_{n\geq 0}\frac{2n+1}{n!}2^n=5e^2.$$

(*g*) 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{((n+1)!)^2}{(2n+3)!}\Big/\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)}=\frac{1}{4},$$

所以幂级数 $\sum_{n\geq 0}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ 的收敛区间为 $(-4,4)$. 令

$$f(x):=\sum_{n\geq 0}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^{2n},\quad |x|<4.$$

逐步求导得到

$$f'(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^{2n}\quad\Longrightarrow\quad\left(2-\frac{x^2}{2}\right)f'(x)=2+\frac{x}{2}f(x).$$

即得到

$$f'(x)-\frac{x}{4-x^2}f(x)=\frac{4}{4-x^2}\quad\Longrightarrow\quad f(x)=\frac{4}{\sqrt{4-x^2}}\left(\arcsin\frac{x}{2}+C\right).$$

根据 $f(0)=0$, 得到 $C=0$ 从而 $f(x)=\frac{4}{\sqrt{4-x^2}}\arcsin\frac{x}{2}$. 故 $f(1)=2\pi/3\sqrt{3}$. □

(2) **Bessel 函数**

$$B_0(x):=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

满足 $xB_0''(x)+B_0'(x)+xB_0(x)=0$.

证: 因为幂级数的收敛半径为 $+\infty$, 所以逐项求导得到

$$B_0'(x)=\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{2n}{(n!)^2 2^{2n}}x^{2n-1},\quad B_0''(x)=\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{2n(2n-1)}{(n!)^2 2^{2n}}x^{2n-2}.$$

此时易得到所要满足的常微分方程. □

(3) 证明函数

$$f(x) := \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2\ln(1+n)}$$

满足 $f\in C([-1,1])$, $x=-1$ 处可导, 在 $x=1$ 处不可导且 $\lim_{x\to 1-} f'(x)=+\infty$.

证: 因为

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)^2\ln(2+n)}\bigg/\frac{1}{n^2\ln(1+n)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\ln(1+n)}{(n+1)^2\ln(2+n)} = 1,$$

所以幂级数收敛区间为 $(-1,1)$. 当 $x=\pm 1$ 时级数

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(\pm 1)^n}{n^2\ln(1+n)} \quad \text{满足} \quad \left|\frac{(\pm 1)^n}{n^2\ln(1+n)}\right| \leq \frac{1}{n^2\ln 2},$$

故收敛域为 $[-1,1]$ 从而幂级数 $\sum_{n\geq 1} x^n/n^2\ln(1+n)$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛. 因此 $f(x)\in C([-1,1])$ 和

$$f'(x) = \sum_{n\geq 1}\frac{x^{n-1}}{n\ln(1+n)}, \quad |x|<1.$$

但是 $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln(1+n)}$ 根据 Leibniz 判别法知是收敛的. 利用**定理 14.13** 得到

$$f'(-1) = \lim_{x\to -1+} f'(x) = \lim_{x\to -1+}\sum_{n\geq 1}\frac{x^{n-1}}{n\ln(1+n)} = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln(1+n)}.$$

但是级数 $\sum_{n\geq 1} 1/n\ln(1+n)$ 是发散的, 这是因为反常积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t\ln(1+t)} \leq \int_1^{+\infty}\frac{dt}{(1+t)\ln(1+t)} = \ln\ln(1+t)\Big|_1^{+\infty} = +\infty.$$

故 $f'(1)$ 不存在. □

(4) 如果 $a_1=a_2=1$ 且 $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$, 则

$$\sum_{n\geq 1} a_n x^{n-1} = \frac{1}{1-x-x^2}, \quad |x|<\frac{1}{2}.$$

证: 易知 $a_n>0$ 且 a_n 递增. 若 $|x|<1/2$, 则

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \frac{a_n+a_{n-1}}{a_n}|x| < \frac{2a_n}{a_n}\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

故幂级数 $\sum_{n\geq 1} a_n x^{n-1}$ 在区间 $(-1/21/2)$ 内收敛. 若令 $f(x) := \sum_{n\geq 1} a_n x^{n-1}$ 则得到

$$\begin{aligned} f(x) &= 1+x+\sum_{n\geq 3} a_n x^{n-1} = 1+x+\sum_{n\geq 3}(a_{n-1}+a_{n-2})x^{n-1} \\ &= 1+x+x\sum_{n\geq 3} a_{n-1}x^{n-2} + x^2\sum_{n\geq 3} a_{n-2}x^{n-3} \\ &= 1+x\left(1+\sum_{n\geq 2} a_n x^{n-1}\right) + x^2\sum_{n\geq 1} a_n x^{n-1} = 1+xf(x)+x^2 f(x) \end{aligned}$$

所以, 利用**推论 14.2**,

$$f(x) = \frac{1}{1-x-x^2} = \frac{-1}{x^2+x-1} = \frac{-1}{(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2})(x+\frac{1-\sqrt{5}}{2})}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-1}{\sqrt{5}}\left[\frac{2}{1-\sqrt{5}}\sum_{n\ge 0}\left(-\frac{2x}{1-\sqrt{5}}\right)^n - \frac{2}{1+\sqrt{5}}\sum_{n\ge 0}\left(-\frac{2x}{1+\sqrt{5}}\right)^n\right]\\
&= \frac{-1}{\sqrt{5}}\left[\frac{2}{1-\sqrt{5}}\sum_{n\ge 0}\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}x\right)^n - \frac{2}{1+\sqrt{5}}\sum_{n\ge 0}\left(\frac{-2}{1+\sqrt{5}}x\right)^n\right]\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n\ge 1}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]x^{n-1}
\end{aligned}
$$

和

$$
a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \quad n \ge 1. \quad \square
$$

(5) 如果 $a_n \ge 0$, 级数 $\sum_{n\ge 0} a_n$ 发散, 且

$$
\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_1+\cdots+a_n} = 0,
$$

则 $\overline{\lim}_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = 1$.

证: 因为 $\sum_{n\ge 0} a_n$ 发散, 故根据**定理 14.11** 幂级数 $\sum_{n\ge 0} a_n x^n$ 在 $|x| > 1$ 内发散, 故 $\overline{\lim}_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} \ge 1$. 令 $A_n := \sum_{1\le k\le n} a_k$. 根据

$$
\frac{a_n}{A_n} = \frac{A_n - A_{n-1}}{A_n} = 1 - \frac{A_{n-1}}{A_n} \to 0,
$$

因此 $A_{n-1}/A_n \to 1$ 且 $A_n \to +\infty$. 所以 $\sqrt[n]{A_n} \to 1$. 从

$$
\sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{A_n} \to 1 \quad \Longrightarrow \quad \overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{a_n} \le 1. \quad \square
$$

(6) 若幂级数 $f(x) = \sum_{n\ge 0} a_n x^n$ 的收敛区间为 $(-r, r)$, 级数 $\sum_{n\ge 0}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$ 收敛, 则

$$
\int_0^r f(x)\,dx := \lim_{x\to r-}\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n\ge 0}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}.
$$

特别地

$$
\sum_{n\ge 1}\frac{1}{n^2} = \int_0^1 \frac{1}{x}\ln\frac{1}{1-x}dx.
$$

证: 根据**定理 14.13** 和**定理 14.14** 得到

$$
\begin{aligned}
\int_0^r f(t)\,dt &= \lim_{x\to r-}\left(\sum_{n\ge 0}\int_0^x a_n t^n\,dt\right)\\
&= \lim_{x\to r-}\left(\sum_{n\ge 0}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\right) = \sum_{n\ge 0}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}. \quad \square
\end{aligned}
$$

(7) 证明

$$
\sum_{n\ge 1}\frac{(-1)^n\ln n}{n} = \gamma\ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2}
$$

这里 γ 是 Euler 常数.

证: 计算得到

$$\begin{aligned}\sum_{1\le n\le 2N}\frac{(-1)^n\ln n}{n} &= \sum_{1\le n=2k\le 2N}\frac{\ln n}{n}-\sum_{1\le n=2k-1\le 2N}\frac{\ln n}{n}\\ &=\sum_{1\le n\le N}\frac{\ln 2+\ln k}{2k}-\sum_{1\le k\le N}\frac{\ln(2k-1)}{2k-1}\\ &=\frac{\ln 2}{2}\sum_{1\le k\le N}\frac{1}{k}+\frac{1}{2}\sum_{1\le k\le N}\frac{\ln k}{k}-\sum_{1\le k\le N}\frac{\ln(2k-1)}{2k-1}\end{aligned}$$

两边乘以 2 化简得到

$$\begin{aligned}\sum_{1\le n\le 2N}\frac{(-1)^n\ln n}{n} &= \ln 2\sum_{1\le k\le N}\frac{1}{k}+\sum_{1\le k\le N}\frac{\ln k}{k}\\ &\quad -2\sum_{1\le k\le}\frac{\ln(2k-1)}{2k-1}-\sum_{1\le n\le 2N}\frac{(-1)^n\ln n}{n}\\ &=\ln 2\sum_{1\le k\le N}\frac{1}{k}+\sum_{1\le k\le N}\frac{\ln k}{k}-\sum_{1\le k\le N}\frac{\ln(2k-1)}{2k-1}-\sum_{1\le k\le N}\frac{\ln(2k)}{2k}\\ &=\ln 2\sum_{1\le k\le N}\frac{1}{k}-\sum_{N+1\le k\le N}\frac{\ln k}{k}.\end{aligned}$$

下面主要来估计第二项的求和. 考虑函数 $f(x):=\ln x/x$ 并计算得到

$$f'(x)=\frac{1/x\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}\le 0,\quad \text{如果 } x\ge e.$$

假设 $N\ge e$ 得到

$$\frac{\ln(k+1)}{k+1}\le\int_k^{k+1}\frac{\ln x}{x}dx\le\frac{\ln k}{k},\quad k\ge N.$$

两边对 k 求和得到

$$\sum_{N\le k\le 2N-1}\frac{\ln(k+1)}{k+1}\le\int_N^{2N}\frac{\ln x}{x}dx\le\sum_{N\le k\le 2N-1}\frac{\ln k}{k}.$$

即得

$$\int_N^{2N}\frac{\ln x}{x}dx+\frac{\ln(2N)}{2N}-\frac{\ln N}{N}\le\sum_{N+1\le k\le 2N}\frac{\ln k}{k}\le\int_N^{2N}\frac{\ln x}{x}dx$$

或者

$$\frac{\ln 2-\ln N}{2N}\le\sum_{N+1\le k\le 2N}\frac{\ln k}{k}-\frac{\ln^2 2}{2}-\ln 2\ln N\le 0,\quad N\ge e.$$

用 o 符号来表示就是

$$\sum_{N+1\le k\le 2N}\frac{\ln k}{k}=\frac{\ln^2 2}{2}+\ln 2\ln N+o(1),\quad N\to+\infty.$$

因此

$$\sum_{1\le n\le 2N}\frac{(-1)^n\ln n}{n}=\ln 2\left(\sum_{1\le k\le N}\frac{1}{k}-\ln N\right)-\frac{\ln^2 2}{2}+o(1)=\gamma\ln 2-\frac{\ln^2 2}{2}+o(1).$$

(8)* 对任意 $m\in\mathbb{Z}_{\ge0}$ 和 $\delta\in\mathbb{R}$ 定义

$$||f||_{H^m_\delta}:=\sum_{|\boldsymbol{\beta}|\le m}\left[\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\boldsymbol{x}|^2)^{\delta+|\boldsymbol{\beta}|}\left|\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{\beta}}f(\boldsymbol{x})\right|^2d\boldsymbol{x}\right]^{1/2}.$$

如果级数

$$\sum_{n\ge2}\sqrt{\frac{n}{n-1}}||f||_{H^0_{2-1/n}}$$

存在, 证明积分

$$\int_{\mathbb{R}^2}|f(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}<+\infty.$$

证: 对任何 $\delta\in(-1,0)$ 得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}|f| &= \int_{\mathbb{R}^2}|f|\frac{(1+|\boldsymbol{x}|^2)^{\frac{\delta}{2}+1}}{(1+|\boldsymbol{x}|^2)^{\frac{\delta}{2}+1}}\le\left[\int_{\mathbb{R}^2}\frac{d\boldsymbol{x}}{(1+|\boldsymbol{x}|^2)^{\delta+2}}\right]^{1/2}||f||_{H^0_{\delta+2}}\\ &\le\left(\int_0^1 rdr+\int_1^{+\infty}\frac{rdr}{r^{2\delta+4}}\right)^{1/2}||f||_{H^0_{\delta+2}}\le\left(\frac12+\int_1^{+\infty}\frac{dr}{r^{2\delta+3}}\right)^{1/2}||f||_{H^0_{\delta+2}}\\ &\le\left[\frac12+\frac{1}{2(1+\delta)}\right]^{1/2}||f||_{H^0_{\delta+2}}\le\frac{1}{\sqrt{1+\delta}}||f||_{H^0_{\delta+2}}.\end{aligned}$$

现在取 $\delta=-1/n$ 并结合假设条件得到所给的积分是有限的. □

推论 14.2

(1) **(幂级数乘法)** 假设 $\sum_{n\ge0}a_nx^n$ 和 $\sum_{n\ge0}b_nx^n$ 收敛半径分别为 r_a 和 r_b, 则

$$\sum_{n\ge0}a_nx^n\cdot\sum_{n\ge0}b_nx^n=\sum_{n\ge0}c_nx^n,\quad |x|<r:=\min\{r_a,r_b\},\tag{14.3.6}$$

这里 $c_n:=\sum_{i+j=n}a_ib_j$.

(2) **(幂级数除法)** 假设幂级数 $\sum_{n\ge0}a_nx^n$ 的收敛区间为 $(-r,r)$, 其中 $r>0$ 且 $a_0\ne0$, 则存在 $r'>0$ 和幂级数 $\sum_{n\ge0}b_nx^n$ 使得其在 $(-r',r')$ 内收敛其满足

$$\sum_{n\ge0}a_nx^n\cdot\sum_{n\ge0}b_nx^n\equiv1,\quad x\in(-r',r').$$

证: (1) 利用**定理 14.10**.

(2) 不妨假设 $a_0=1$. 递推定义

$$b_0:=1,\quad b_n:=-\sum_{0\le k\le n-1}a_{n-k}b_k\ (n\ge1).$$

则得到

$$c_n:=\sum_{i+j=n}a_ib_j=1,\quad n\ge0.$$

下证幂级数 $\sum_{n\ge0}b_nx^n$ 有正的收敛半径. 因为幂级数 $\sum_{n\ge0}a_nx^n$ 在 $(-r,r)$ 内收敛, 所以级数 $\sum_{n\ge0}a_n(r/2)^n$ 收敛. 故存在正数 $M>0$ 满足

$$\left|a_n\left(\frac{r}{2}\right)^n\right|\le M,\quad\forall\,n\ge0.$$

则得到

$$\left|b_n\left(\frac{r}{2}\right)^n\right| \le \sum_{0\le k\le n-1}\left|a_{n-k}\left(\frac{r}{2}\right)^{n-k}\right|\left|b_k\left(\frac{r}{2}\right)^k\right| \le M\sum_{0\le k\le n-1}\left|b_k\left(\frac{r}{2}\right)^k\right|;$$

前面几项不等式为

$$\left|b_1\left(\frac{r}{2}\right)\right| \le M,\quad \left|b_2\left(\frac{r}{2}\right)^2\right| \le M\left[b_0+\left|b_1\left(\frac{r}{2}\right)\right|\right] \le M(1+M) \le (1+M)^2.$$

利用归纳法可得

$$\left|b_n\left(\frac{r}{2}\right)^n\right| \le (1+M)^n,\quad n\ge 0.$$

因此我们可以取 $r_0 := r/2(1+M) \in (0, r/2)$. 最后令 $r' := \min\{r, \frac{r}{2(1+M)}\}$ 并利用 (1). □

14.3.3 Taylor 级数再探和初等函数的幂级数展开

假设幂级数 $\sum_{n\ge 0} a_n(x-x_0)^n$ 收敛区间为 (x_0-r, x_0+r), 则**定理 14.14** 告诉我们和函数 $f(x) := \sum_{n\ge 0} a_n(x-x_0)^n$ 在区间 (x_0-r, x_0+r) 内是光滑的且

$$f^{(k)}(x_0) = k!a_k,\quad k\ge 0.$$

故此时

$$f(x) = \sum_{n\ge 0}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

这样我们就得到了之前定义的 **Taylor 级数** (4.7.30).

一般地, 光滑函数 $f(x)$ 和其 Taylor 级数的关系用如下记号表示:

$$f(x) \sim \sum_{n\ge 0}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = P_\infty(x; x_0, f). \tag{14.3.7}$$

当 $x_0 = 0$ 得到了 **Maclaurin 级数 (Maclaurin series)**.

注 14.7

(1) 给定光滑函数 $f(x)\in C^\infty((x_0-r, x_0+r))$, 则其 Taylor 级数 $\sum_{n\ge 0} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n/n!$ 不一定收敛. 比如考察函数项级数

$$f(x) := \sum_{n\ge 0}\frac{\sin(2^n x)}{n!},\quad x\in\mathbb{R},\quad u_n(x) := \frac{\sin(2^n x)}{n!}.$$

由于 $|u_n(x)| \le 1/n!$, 函数项级数 $\sum_{n\ge 0} u_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛. 又因为

$$|u_n'(x)| = \left|\frac{2^n\cos(2^n x)}{n!}\right| \le \frac{2^n}{n!},$$

故函数项级数 $\sum_{n\ge 0} u_n'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上也是一致收敛的. 因此得到

$$f'(x) = \sum_{n\ge 0} u_n'(x).$$

类似地可证明

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n\ge 0} u_n^{(k)}(x) = \sum_{n\ge 0}\frac{2^{kn}\sin(2^n x + \frac{k\pi}{2})}{n!}$$

从而

$$f(x) \sim \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} e^{2^k} \sin \frac{k\pi}{2} x^k.$$

但是

$$\varlimsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{1}{k!} \sin \frac{k\pi}{2}\right| e^{2^k}} \geq \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\frac{e^{2^k}}{k^k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} e^{2^k/k} = +\infty.$$

故收敛区间仅是一点 $x=0$, 即函数项级数 $\sum_{k\geq 0} \sin \frac{k\pi}{2} e^{2^k} x^k / k!$ 仅在 $x=0$ 处收敛.

(2) Taylor 级数收敛 $\not\Rightarrow f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$. 反例见**注 4.14** (2). ♣

如何保证光滑函数的 Taylor 级数就是该函数本身? 已经有**定理 4.20**. 除此之外, 我们再来介绍两个有效的判别法.

定理 14.15

(1) $f \in C^\infty((x_0-r, x_0+r))$ 且积分型余项

$$r_n(x) := \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \longrightarrow 0, \quad n \to \infty,$$

则

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad |x-x_0| < r. \tag{14.3.8}$$

(2) $f \in C^\infty((x_0-r, x_0+r))$ 且存在正数 > 0 满足 $|f^{(n)}(x)| \leq M^n$ 对任意 $x \in (x_0-r, x_0+r)$, 则 (14.3.8) 成立.

(3) **(Bernstein)** $f \in C^\infty([a,b])$ 且 $f^{(n)}(x) \geq 0$, 则对任意 $x, x_0 \in (a,b)$ 只要 $|x-x_0| < b-x_0$ 就有 (14.3.8) 成立. ♡

证: (1) 根据**定理 ??** 得到

$$f(x) = \sum_{1\leq k\leq n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x).$$

如果 $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$, 得到 (14.3.8).

(2) 参见**定理 4.20**.

(3) 令 $M = f(b) - f(a)$. 利用 $f', f'' \geq 0$ 对任意 $x \in (a,b)$ 得到

$$M \geq f(b) - f(x) = (b-x)f'(\xi_x) \geq (b-a)f'(x), \quad \xi_x \text{ 是介于 } b \text{ 和 } x \text{ 之间}.$$

利用 Taylor 公式展开到二阶得到, η_x 是介于 b 和 x 之间,

$$M \geq f(b) - f(x) = f'(x)(b-x) + \frac{f''(\eta_x)}{2}(b-x)^2 \geq \frac{f''(x)}{2}(b-x)^2.$$

一般地就得到

$$0 \leq f^{(n)}(x) \leq \frac{n!M}{(b-x)^n}, \quad x \in (a,b), \quad n \geq 1.$$

如果 $x > x_0$ 则根据**定理 5.12** 得到

$$0 \;\leq\; r_n(x) \;=\; \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \;\leq\; (n+1)M \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{(b-t)^{n+1}} dt$$

$$\leq \frac{(n+1)M}{b-x}\int_{x_0}^{x}\left(\frac{x-t}{b-t}\right)^n dt \leq \frac{(n+1)M}{b-x}\left(\frac{x-x_0}{b-x_0}\right)^n (x-x_0) \to 0.$$

如果 $x < x_0$ 且 $x_0 - x < b - x_0$ 则根据**定理 5.12** 得到

$$\begin{aligned}|r_n(x)| &= \frac{1}{n!}\left|\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt\right| \leq \frac{1}{n!}\int_{x}^{x_0} f^{(n+1)}(t)(t-x)^n dt \\ &\leq \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n!}\int_{x}^{x_0}(t-x)^n dt \leq \frac{1}{n!}\cdot\frac{(n+1)!M}{(b-x_0)^{n+1}}\cdot\frac{(x_0-x)^{n+1}}{n+1} \\ &\leq M\left(\frac{x_0-x}{b-x_0}\right)^{n+1} \to 0.\end{aligned}$$

根据 (1) 得到所求的结论. □

例 14.14

(1) 初等函数的 Taylor 级数展开, 参见**注 4.14** (3):

$$e^x = \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\sin x = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \quad \cos x = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n, \quad -1 < x \leq 1,$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n\geq 0}\binom{n}{\alpha}x^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad -1 < x < 1,$$

$$\arcsin x = x + \sum_{n\geq 1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}, \quad |x| < 1,$$

$$\arctan x = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}, \quad |x| \leq 1.$$

证: (a) 因为 $f(x) = e^x$ 满足 $f^{(n)}(x) = e^x \geq 0$.

(b) 因为 $f(x) = \sin x$ 满足 $f^{(n)}(x) = \sin(x + n\pi/2) \in [-1, 1]$.

(c) 类似于 (b).

(d) 因为 $f(x) = \ln(1+x)$ 满足 $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}/(1+x)^n$. 对任意 $r \in (0,1)$ 和任意 $x \in (-r, r)$ 得到 $1 + x \in (1-r, 1+r)$. 从而 $|f^{(n)}(x)| \leq 1/(1-r)^n$.

(e) 根据 Taylor 公式得到

$$(1+x)^\alpha = \sum_{0\leq k\leq n}\binom{k}{\alpha}x^k + r_n(x),$$

这里

$$\begin{aligned}r_n(x) &:= \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\theta x)(1-\theta)^n x^{n+1} \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^{n+1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n (1+\theta x)^{\alpha-1}.\end{aligned}$$

当 $x > -1$ 时

$$1 + \theta x \geq 1 - \theta > 0 \implies 0 \leq \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \leq 1.$$

因此 $\lim_{n\to+\infty} r_n(x) = 0$.

(f) 计算可知

$$\begin{aligned}
\arcsin x &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x (1-t^2)^{-1/2} dt \\
&= \int_0^x \left[\sum_{n\geq 0} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-t^2)^n\right] dt \\
&= \int_0^x \left[\sum_{n\geq 0} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n}\right] dt \quad (\text{幂级数收敛区间为 } (-1,1)) \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n\geq 0} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1}
\end{aligned}$$

其中约定 $(-1)!! = 0!! \equiv 1$.

(g) 计算得到

$$\begin{aligned}
\arctan x &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x (1+t^2)^{-1} dt = \int_0^x \left[\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n n!}{n!} t^{2n}\right] dt \\
&= \int_0^x \left[\sum_{n\geq 0} (-1)^n t^{2n}\right] dt = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \left(\int_0^x t^{2n} dt\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}. \quad \square
\end{aligned}$$

(2) (**例 4.22** (1)) 考虑函数

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots} = 1 + \cdots.$$

因为幂级数 $\sum_{n\geq 1} x^n/n!$ 的收敛区间为 $\mathbb{R}$, 所以根据**推论 14.2** (2) 得到

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \implies x = x \cdot \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(n+1)!} \cdot \sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

根据 Taylor 展开的唯一性得到

$$1 = \sum_{n\geq 0} \left[\sum_{i+j=n} \frac{a_j}{(i+1)!}\right] x^n = a_0 + \sum_{n\geq 1} \left[\sum_{i+j=n} \frac{a_j}{(i+1)!}\right] x^n$$

从而得到

$$a_0 = 1, \quad 0 = \sum_{i+j=n} \frac{a_j}{(i+1)!} \quad (n \geq 1).$$

前面几项为

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{12}, \quad a_3 = 0, \quad \cdots.$$

一般地可证明

$$a_{2k+1} = 0, \quad k \geq 1.$$

实际上，

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = f(x) = \frac{x}{e^x-1}, \quad f(-x) = \frac{-x}{e^{-x}-1} = \frac{x}{e^x-1}e^x = f(x)e^x.$$

故得到

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n x^n = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \cdot \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}\left[\sum_{i+j=n}\frac{a_i}{j!}\right]x^n$$

所以有

$$a_n = (-1)^n \sum_{i+j=n}\frac{a_i}{j!} = (-1)^n \sum_{0\leq i\leq n}\frac{a_i}{(n-i)!}, \quad n\geq 0.$$

最后推出

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (-1)^{n+1}\sum_{0\leq i\leq n+1}\frac{a_i}{(n+1-i)!} = (-1)^{n+1}\left[\sum_{0\leq i\leq n}\frac{a_i}{(n+1-i)!} + a_{n+1}\right] \\ &= (-1)^{n+1}a_{n+1} \end{aligned}$$

因此导致 $a_{n+1}=0$ 如果 n 时偶数. 这样我们可以把 $x/(e^x-1)$ 写成

$$\begin{aligned} \frac{x}{e^x-1} &= \sum_{n\geq 0} a_n x^n = 1+\sum_{n\geq 1} a_n x^n = 1+\sum_{n\geq 1} a_{2n}x^{2n} + \sum_{n\geq 0} a_{2n+1}x^{2n+1} \\ &= 1-\frac{1}{2}x+\sum_{n\geq} a_{2n}x^{2n} = 1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2 - = \frac{1}{720}x^4+\cdots. \end{aligned}$$

和 (4.7.32) 比较得到

$$a_n = \frac{b_n}{n!}, \quad a_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}B_n}{(2n)!}, \quad n\geq 1. \quad \square \tag{14.3.9}$$

(3) 求幂级数

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n, \quad a_n := \int_0^n e^{Ct^\alpha n^{-\beta}}dt, \quad C>0,\ \alpha>\beta\geq 0$$

的收敛区间.

解: 观察到

$$a_n \leq e^{Cn^{\alpha-\beta}}\int_0^n dt = ne^{Cn^{\alpha-\beta}}$$

和

$$a_n \geq \int_{n-1}^n e^{Ct^\alpha n^{-\beta}}dt \geq e^{C(n-1)^\alpha n^{-\beta}}\int_{n-1}^n dt = e^{C(n-1)^\alpha n^{-\beta}}.$$

两边求 n 次根得到

$$e^{C(\frac{n-1}{n})^\alpha n^{\alpha-\beta-1}} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq e^{Cn^{\alpha-\beta-1}}\sqrt[n]{n}, \quad n\geq 2,$$

从而推出

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} 1, & \alpha-\beta-1<0, \\ e^C, & \alpha-\beta-1=0, \\ +\infty, & \alpha-\beta-1>0. \end{cases}$$

故当 $\alpha-\beta<1$ 时收敛区间为 $(-1,1)$, 当 $\alpha-\beta=1$ 时收敛区间为 $(-e^{-C},e^{-C})$, 而当 $\alpha-\beta>1$ 时收敛区间仅为单点集 $\{0\}$. □

(4) 求函数

$$e^{e^x}=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$$

Taylor 级数的前 4 项, a_0,a_1,a_2,a_3. 一般地可证明

$$\frac{e/C^n}{(\ln n)^n}\leq a_n\leq\frac{e^n}{(\ln n)^n},\quad n\geq 2,\ \text{存在}\ C\geq e.$$

解: 令 $f(x):=e^{e^x}$. 则得到

$$f(0)=e,\quad f'(x)=e^{e^x}e^x,\quad f'(0)=e,$$
$$f''(x)=e^{e^x}(e^x)^2+e^{e^x}e^x=e^{e^x}\left(e^{2x}+e^x\right),\quad f''(0)=2e,$$
$$f'''(x)=e^{e^x}\left(e^{3x}+e^{2x}+2e^{2x}+e^x\right)=e^{e^x}\left(e^{3x}+3e^{2x}+e^x\right),\quad f'''(0)=5e.$$

故 $a_0=e, a_1=e, a_3=5e/6$. 若记 $y=e^x$ 则

$$e^y=\sum_{n\geq 0}a_n(\ln y)^n\quad\Longrightarrow\quad a_n(\ln n)^n\leq e^n\quad\Longrightarrow\quad a_n\leq\frac{e^n}{(\ln n)^n}.\quad\square$$

(5) 求幂级数

$$\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n,\quad \sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^{-1}x^n$$

的收敛域.

解: 令

$$a_n:=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\sim\gamma+\ln n.$$

则得到

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{\gamma\to+\infty}\frac{\gamma+\ln(n+1)+o(1)}{\gamma+\ln n+o(1)}=1\quad\Longrightarrow\quad\text{收敛区间为}\ (-1,1).$$

但是 $a_n\to+\infty$, 第一个幂级数的收敛域为 $(-1,1)$. 对第二个幂级数令

$$b_n:=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^{-1}=\frac{1}{a_n}\quad\Longrightarrow\quad\text{收敛区间为}\ (-1,1).$$

当 $x=-1$ 时级数变成 $\sum_{n\geq 1}(-1)^n/a_n$, 利用 Leibniz 判别法可知此时是收敛的. 当 $x=1$ 时技术变成 $\sum_{n\geq 1}1/a_n$. 根据积分不等式推出

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\int_1^n\frac{dx}{x}<1+\ln n<2\ln n,\quad n>e.$$

因此

$$\sum_{n\geq 3}\frac{1}{a_n}>\frac{1}{2}\sum_{n\geq 3}\frac{1}{\ln n},$$

故此时级数发散. 第二个幂级数的收敛域为 $[-1,1)$. □

(6) 假设 $a_0=1, a_1=-7, a_2=-1, a_3=-43$, 且满足递推

$$a_{n+2}+c_1a_{n+1}+c_2a_n=0,\quad n\geq 0,$$

这里 c_1, c_2 是常数. 求 a_n 通项和幂级数 $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ 的收敛区间.

解: 令

$$f(x) := \sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

则推出

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n\geq 0}(a_{n+2}+c_1a_{n+1}+c_2a_n)x^{n+2} \\ &= [f(x)-a_0-a_1x]+c_1x[f(x)-a_0]+c_2x^2f(x) \\ &= (c_2x^2+c_1x+1)f(x)-(a_0c_1+a_1)x-a_0. \end{aligned}$$

即

$$f(x) = \frac{a_0+(a_1+c_1a_0)x}{c_2x^2+c_1x+1}, \quad c_2x^2+c_1x+1\neq 0.$$

已知条件告诉我们 $-43-c_1-7c_2=0=-1-7c_1+c_2$ 推出

$$c_1=-1,\ c_2=-6,\ f(x)=\frac{1-8x}{1-x-6x^2}.$$

进一步得到

$$f(x)=\frac{2}{1+2x}-\frac{1}{1-3x}=\sum_{n\geq 0}\left[(-1)^n2^{n+1}-3^n\right]x^n,$$

因为共同的收敛区间为 $(-1/3,1/3)$. □

(7) 定义**Laguerre 多项式**为

$$L_n(x) := \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^ne^{-x}\right), \quad n\geq 0.$$

证明

$$L_n(x)=\sum_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k}\frac{(-x)^k}{k!}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}L_n(x)\,dx=\frac{(\alpha-1)^n}{\alpha^{n+1}}.$$

证: 事实上

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \frac{e^x}{n!}\sum_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k}(x^n)^{(k)}(e^{-x})^{(n-k)} \\ &= \frac{e^x}{n!}\sum_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k}n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}(-1)^{n-k}e^{-x} \\ &= \sum_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k}\frac{(-x)^{n-k}}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

特别地得到

$$\frac{1}{\alpha}=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\lim_{n\to+\infty}L_n(x)\,dx, \quad 0<\alpha<1. \quad \square$$

(8) 假设 $a_0, a_1>0$ 且

$$a_{n+1}=a_n+\frac{2}{n+1}a_{n-1}, \quad n\geq 1.$$

求幂级数 $\sum_{n\geq 0}a_nx^n$, $|x|>1$.

解: 易知 $a_n>0$ 且单调递增. 注意到

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2}-\frac{a_n}{n^2} &= \frac{a_n}{(n+1)^2}+\frac{2a_{n-1}}{(n+1)^3}-\frac{a_n}{n^2}\\ &\le \frac{a_n}{(n+1)^2}+\frac{2a_n}{(n+1)^3}-\frac{a_n}{n^2} = -\frac{3n+1}{n^2(n+1)^3}a_n \le 0.\end{aligned}$$

故 $\{a_n/n^2\}_{n\ge1}$ 单调递减从而极限 $\lim_{n\to+\infty}a_n/n^2$ 存在. 令

$$f(x):=\sum_{n\ge0}a_nx^n=\sum_{n\ge0}\frac{a_n}{n^2}\cdot n^2x^2;$$

因为幂级数 $\sum_{n\ge0}n^2x^n$ 收敛域为 $(-1,1)$, 所以幂级数 $\sum_{n\ge0}a_nx^n$ 的收敛域至少为 $(-1,1)$. 求导得到

$$\begin{aligned}f'(x) &= \sum_{n\ge1}na_nx^{n-1} = a_1+\sum_{n\ge1}(n+1)a_{n+1}x^n\\ &= a_1+\sum_{n\ge1}(na_n+a_n+2a_{n-1})x^n\\ &= a_1+xf'(x)+f(x)-a_0+2xf(x).\end{aligned}$$

从而得到常微分方程

$$(1-x)f'(x)-(1+2x)f(x)=a_1-a_0,\quad f(0)=a_0.$$

这个方程的相应的齐次方程为

$$(1-x)y'-(1+2x)y=0 \implies y=c(1-x)^{-3}e^{-2x}.$$

故令

$$f(x)=c(x)(1-x)^{-3}e^{-2x}$$

得到

$$c(x)=\frac{a_1-a_0}{4}\left(2x^2-6x+5\right)e^{2x}+\lambda$$

和

$$f(x)=\frac{g(x)}{(1-x)^3},\quad g(x):=\frac{a_1-a_0}{4}\left(2x^2-6x+5\right)+\lambda e^{-2x}.$$

根据 $f(0)=a_0$ 推出 $\lambda=(9a_0-5a_1)/4$. □

(9) 因为

$$x\coth x=x\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=x\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}=x\left(1+\frac{2}{e^{2x}-1}\right)=x+\frac{2x}{e^{2x}-1},$$

所以根据 (4.7.32) 或 (14.3.9) 得到

$$x\coth x=1+\sum_{n\ge1}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n}B_n}{(2n)!}x^{2n}. \tag{14.3.10}$$

另一方面类似 (6.4.4) 或 (6.4.28) 可以证明

$$\sinh x=x\prod_{n\ge1}\left(1+\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),\quad \cosh x=\prod_{n\ge1}\left[1+\frac{x^2}{(\frac{2n-1}{2}\pi)^2}\right]. \tag{14.3.11}$$

求导得到

$$\coth x=\frac{1}{x}+\sum_{n\ge 1}\frac{2x}{x^2+n^2\pi^2},\quad \frac{1}{\sinh x}=\frac{1}{x}+\sum_{n\ge 1}(-1)^n\frac{2x}{x^2+n^2\pi^2}. \tag{14.3.12}$$

根据 (6.4.4) 或 (6.4.28) 得到

$$\ln|\sin x|=\ln|x|+\sum_{n\ge 1}\ln\left|1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right|,\quad x\ne\pi\mathbb{Z}$$

和 (因为 $1/\sin x=(\cot(x/2)+\tan(x/2))/2$)

$$\cot x=\frac{1}{x}+\sum_{n\ge 1}\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2},\quad \frac{1}{\sin x}=\frac{1}{x}+\sum_{n\ge 1}(-1)^n\frac{2x}{x^2+n^2\pi^2}. \tag{14.3.13}$$

利用 Riemann zeta 函数从 (14.3.12) 和 (14.3.13) 推出

$$\pi x\cdot\coth\pi x=1+2\sum_{n\ge 1}(-1)^{n-1}\zeta(2n)x^{2n},\quad \pi x\cdot\cot x=1-2\sum_{n\ge 1}\zeta(2n)x^{2n}, \tag{14.3.14}$$

这里 $|x|<1$. 比较 (14.3.10) 和 (14.3.14) 得到

$$\zeta(2n)=\frac{(2\pi)^{2n}B_n}{2(2n)!},\quad n\ge 1. \tag{14.3.15}$$

特别地我们有

$$\pi x\cdot\coth\pi x=1+\sum_{n\ge 1}(-1)^{n-1}\frac{(2\pi)^{2n}B_n}{(2n)!}x^{2n},\ \pi x\cdot\cot\pi x=1-\sum_{n\ge 1}\frac{(2\pi)^{2n}B_n}{(2n)!}x^{2n}. \tag{14.3.16}$$

利用恒等式 $\tan x=\cot x-2\cot(2x)$ 得到

$$\tan x=\sum_{n\ge 1}\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!}x^{2n-1}=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\cdots,\quad |x|<\frac{\pi}{2}.\ \square \tag{14.3.17}$$

(10) 令单位圆的内接正 n 边形周长为 $2a_n$, 则有 $\pi=\lim_{n\to\infty}a_n$. 比如

$$a_4=2\sqrt{2},\quad a_6=3,\quad a_{12}=3.10582854,\quad a_{24}=3.13262861.$$

定义

$$b_n:=\frac{4a_{2n}-a_n}{3},\quad c_n:=\frac{16b_{2n}-b_n}{15}.$$

证明数列 $\{c_n\}_{n\ge 3}$ 比数列 $\{a_n\}_{n\ge 3}$ 更快地收敛到 π.

证: 因为 $a_n=n\sin(\pi/n)$, 所以根据

$$\sin x=\sum_{k\ge 1}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1},\quad x\in\mathbb{R},$$

得到

$$\begin{aligned}a_n &= n\sum_{k\ge 1}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2k-1} = \pi\sum_{k\ge 1}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2(k-1)}\\ &= \pi\left[1+\sum_{k\ge 2}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2(k-1)}\right] = \pi\left[1-\frac{\pi^2}{6}\frac{1}{n^2}+\cdots\right].\end{aligned}$$

即 $a_n-\pi\sim-\pi^3/6n^2$. 同样计算得到

$$\begin{aligned}4a_{2n} &= \pi\left[4+\sum_{k\ge2}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\frac{1}{4^{-2}}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2(k-1)}\right]\\ b_n &= \frac{4a_{2n}-a_n}{3} = \pi\left[1+\frac{1}{3}\sum_{k\ge3}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\left(\frac{1}{4^{k-2}}-1\right)\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2(k-1)}\right].\end{aligned}$$

故 $b_n-\pi\sim-\pi^5/480n^4$. 从而得到

$$c_n = \pi\left[1+\sum_{k\ge4}\frac{1}{45}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\left(\frac{1}{4^{k-2}}-1\right)\left(\frac{1}{4^{k-3}}-1\right)\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2(k-1)}\right]$$

和 $c_n-\pi\sim-\pi^7/322560n^6$. 因此数列 $\{c_n\}_{n\ge3}$ 比数列 $\{a_n\}_{n\ge3}$ 收敛地快. □

(11) 对 $n\times n$ 阶实对称矩阵 A 定义

$$e^A:=\sum_{k\ge0}\frac{1}{k!}A^k.$$

证明

$$\det(e^A)=e^{\mathrm{tr}(A)}.$$

证: 存在 $n\times n$ 非奇异矩阵 P 满足 $P^{-1}AP=\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, 这里 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是矩阵 A 的特征根. 从而得到

$$e^{P^{-1}AP}=\sum_{k\ge0}\frac{1}{k!}(P^{-1}AP)^k=\sum_{k\ge0}\frac{1}{k!}P^{-1}A^kP=P^{-1}\left(\sum_{k\ge0}\frac{1}{k!}A^k\right)P=P^{-1}e^AP$$

和

$$\det\left(e^{P^{-1}AP}\right)=\det(e^A),\quad e^{\mathrm{tr}(P^{-1}AP)}=e^{\mathrm{tr}A}.$$

故只需要对 $A=\Lambda$ 证明即可. 此时

$$e^\Lambda=\sum_{k\ge0}\frac{1}{k!}\mathrm{diag}(\lambda_1^k,\cdots,\lambda_n^k)=\mathrm{diag}(e^{\lambda_1},\cdots,e^{\lambda_n})$$

和

$$\det(e^\Lambda)=\prod_{1\le i\le n}\det(e^{\lambda_i})=e^{\sum_{1\le i\le k}\lambda_i}=e^{\mathrm{tr}(\Lambda)}.\quad\square$$

实际上**例 14.14** (1) 中 e^x 的级数展开当 x 是复数时也成立 (细节之后章节给出), 即

$$e^z=\sum_{n\ge0}\frac{z^n}{n!},\quad z\in\mathbb{C}.$$

特别地取 $z=\sqrt{-1}x$ 得到

$$\cos x+\sqrt{-1}\sin x=\sum_{n\ge0}\frac{(\sqrt{-1}x)^n}{n!}=\sum_{n\ge0}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n\ge0}\frac{(-1)^n\sqrt{-1}x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

分离实部和虚部得到

$$\cos x=\sum_{n\ge0}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},\quad \sin x=\sum_{n\ge0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},\quad x\in\mathbb{R}.$$

这个和**例 14.14** (1) 中是一摸一样的.

14.3.4 *Fibonacci 数列

在例 14.13 (4) 中我们得到了 Fibonacci 数列的通项公式. 本小节我们来系统地研究下 Fibonacci 数列, 主要参考文献是吴振奎的专著《斐波那契数列欣赏》.

Fibonacci 数列或者生兔问题是意大利数学家Leonardo Fibonacci[5] 于 1202 年在他的专著《珠算原理》(Liber Abaci) 中提出的:

> *兔子出生以后两个月就能生兔子, 如果每次恰好生一对 (雌雄) 兔子且每月生一次. 假如养了初生的一对小兔, 则一年后共可由多少对兔子 (如果生下来的小兔都不死的话)?*

如果 F_n 表示第 n 个月时的兔子数, 则得到

- $F_1 = 1$: 第一个月只有 1 对兔子;
- $F_2 = 1$: 第一个月的这对兔子还没有成熟故不能生小兔子, 从而第二个月仍旧只有 1 对兔子;
- $F_3 = 2$: 在第三个月, 第一个月的这对兔子生了 1 对兔子, 加上它本身就得到 2 对兔子;
- $F_4 = 3$: 在第四个月, 第一个月的这对兔子又生了 1 对兔子, 但是上个月生的 1 对兔子由于未成熟所以不能生小兔子, 从而共有 3 对兔子;
- $F_5 = 5$: 在第五个月, 第一个月的这对兔子和第三个月的这对兔子都生了 1 对兔子, 再加上第四个月的 1 对兔子, 现在共有 5 对兔子;
- $F_n =?: \cdots$

1634 年Girard 发现了 Fibonacci 数列满足递推关系

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad n \geq 2. \tag{14.3.18}$$

上述关系可解释为第 $n+1$ 个月时的兔子对数等于第 $n+1$ 个月时刚出生的新兔子对数加上第 n 个月时的兔子对数; 而第 $n+1$ 个月刚出生的新兔子对数恰好是第 $(n+1)-2 = n-1$ 个月时的兔子对数.

1680 年Cassini 发现了如下恒等式

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n. \tag{14.3.19}$$

利用数学归纳法得到

$$\begin{aligned} F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 &= (F_{n+1} + F_n)F_n - F_{n+1}^2 \\ &= F_{n+1}(F_n - F_{n+1})F_n^2 \\ &= -(F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2) = (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

[5]Leonardo Fibonacci, 1170-1240, 生于意大利的比萨, Fibonacci 是 Filius Bonacci 的缩写, 是“波那契之子”的意思. 他是第一个研究印度和阿拉伯数学的欧洲人.

恒等式 (14.3.19) 可表示为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} \tag{14.3.20}$$

作为直接推论得到 F_n 和 F_{n+1} 是互素的

$$(F_n, F_{n+1}) = 1.$$

18 世纪初, de Moivre 在他的专著《Miscellanea Analytica》中给出了 F_n 的通项公式:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]. \tag{14.3.21}$$

第一个严格证明是Binet 所给出的. 利用数学归纳法易证 (14.3.21), 或者利用幂级数 (参见**例 14.13** (4)).

练习 14.1

证明如下恒等式

$$F_{n-k}F_{m+k} - F_nF_m = (-1)^n F_{m-n-k}F_k,$$

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}, \quad F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}, \quad F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3 = F_{3n},$$

$$F_1^2 + F_{2n+1}^2 + F_{2n+3}^2 = 3F_1F_{2n+1}F_{2n+3}.$$

练习 14.2

证明如下恒等式 (DiDomenico, 1991)

$$\begin{aligned}
F_nF_{n+4} - F_{n+1}F_{n+3} &= 2(-1)^{n-1}, \\
F_nF_{n+4} + F_{n+1}F_{n+3} &= 2F_{n+2}^2, \\
(F_nF_{n+4})^2 - (F_{n+1}F_{n+3})^2 &= (-1)^{n-1}(2F_{n+2})^2, \\
F_nF_{n+5} + 2F_{n+1}F_{n+4} &= 3F_{n+2}F_{n+3}, \\
F_{n+1}F_{n-1} - F_{n+3}F_{n+1} &= (-1)^{n-1}3, \quad n \geq 2, \\
F_{n+1}^2 - F_{n+4}F_{n-2} &= (-1)^n 4, \quad n \geq 3, \\
F_{n+4}F_{n-2} - F_{n+3}F_{n-} &= (-)^n 5, \quad n \neq 1.
\end{aligned}$$

Fibonacci 数列有限和满足一些有趣的恒等式:

$$\sum_{1\leq k\leq n} F_k = F_{n+2} - 1, \quad \sum_{1\leq k\leq n} F_{2k-1} = F_{2n}, \quad \sum_{1\leq k\leq n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1. \tag{14.3.22}$$

练习 14.3

证明 (14.3.22) 和

$$\sum_{1\leq k\leq n} (-1)^{k+1}F_k = (-1)^{n+1}F_{n-1} + 1, \quad \sum_{1\leq k\leq n} F_{3k} = \frac{1}{2}(F_{3n+2} - 1),$$

$$\sum_{1\leq k\leq n} F_k^2 = F_nF_{n+1}, \quad \sum_{1\leq k\leq n} F_k^3 = \frac{1}{10}[F_{3n+2} + (-1)^{n+1}6F_{n-1} + 5],$$

$$\sum_{1\le k\le n}(n-k+1)F_k = F_{n+4}-n-3,$$

$$\sum_{1\le k\le 2n-1}F_kF_{k+1}=F_{2n}^2,\quad \sum_{1\le k\le 2n}F_kF_{k+1}=F_{2n+1}^2-1,\quad \sum_{1\le k\le n}\binom{n}{k}F_{m+k}=F_{m+2n}$$

下面来研究 Fibonacci 数列的无穷和问题. 引入记号

$$\alpha := \frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad \beta := \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\alpha}.$$

命题 14.2

(1) 如果 $a,b,k\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ 且满足 $a>b$ 和 $\alpha^a<10^k$, 则

$$\sum_{n\ge 0}\frac{F_{an+b}}{10^{k(n+1)}} = \frac{10^kF_b-(-1)^aF_{b-a}}{10^{2k}-10^k(\alpha^a+\beta^a)+(-1)^a}. \tag{14.3.23}$$

(2) 下面级数收敛:

$$\sum_{n\ge 1}\frac{(-1)^n}{F_nF_{n+1}F_{n+2}} = \sum_{n\ge 1}\frac{1}{F_n}-\sum_{n\ge 1}\frac{1}{F_{n+1}}-\sum_{n\ge 1}\frac{1}{F_{n+2}} \tag{14.3.24}$$

证: (1) 根据 (14.3.21) 得到

$$\begin{aligned}\sum_{n\ge 0}\frac{F_{an+b}}{10^{k(n+1)}} &= \sum_{n\ge 0}\frac{1}{10^{k(n+1)}}\frac{\alpha^{an+b}-\beta^{an+b}}{\alpha-\beta}\\ &= \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\frac{\alpha^b}{10^k}\sum_{k\ge 0}\left(\frac{\alpha^a}{10^k}\right)^n-\frac{\beta^b}{10^k}\sum_{k\ge 0}\left(\frac{\beta^a}{10^k}\right)^n\right].\end{aligned}$$

因为 $|\beta|<1$ 所以 $|\beta^a/10^k|<1$. 根据假设条件得到 $|\alpha^a/10^k|<1$. 因此

$$\sum_{n\ge 0}\frac{F_{an+b}}{10^{k(n+1)}} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\frac{\alpha^b}{10^k}\frac{1}{1-\alpha^a/10^k}-\frac{\beta^b}{10^k}\frac{1}{1-\beta^a/10^k}\right]$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha^b}{10^k-\alpha^a}-\frac{\beta^b}{10^k-\beta^a}\right)=\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\frac{10^k(\alpha^b-\beta^b)-\alpha^b\beta^a+\alpha^a\beta^b}{10^{2k}-10^k(\alpha^a+\beta^a)+(-1)^a}$$

$$=\frac{10^kF_b-(-1)^aF_{b-a}}{10^{2k}-10^k(\alpha^a+\beta^a)+(-1)^a}=\frac{10^kF_b+(-1)^bF_{a-b}}{10^{2k}-10^k(\alpha^a+\beta^a)+(-1)^a}.$$

(2) 利用 (14.3.19) 得到

$$\frac{1}{F_n}-\frac{1}{F_{n+1}}-\frac{1}{F_{n+2}}=\frac{F_{n+1}F_{n+2}-F_nF_{n+2}-F_nF_{n+1}}{F_nF_{n+1}F_{n+2}}$$

$$=\frac{F_{n+1}F_{n+2}-F_nF_{n+1}-F_{n+1}^2+(-1)^k}{F_nF_{n+1}F_{n+2}}=\frac{F_{n+1}(F_{n+2}-F_n)-F_{n+1}^2+(-1)^n}{F_nF_{n+1}F_{n+2}}$$

$$=\frac{(-1)^n}{F_nF_{n+1}F_{n+2}}.\quad\square$$

当 $(a,b,k)=(1,0,1)$ 得到

$$\sum_{k\ge 1}\frac{F_k}{10^{k+2}}=\frac{F_1}{10^2-10(\alpha+\beta)-1}=\frac{1}{89}=\frac{1}{F_{11}}$$ (Stancliff, 1953);

当 $(a,b,k)=(2,0,1)$ 得到

$$\sum_{k\geq 0}\frac{F_{2k}}{10^{k+1}}=\frac{F_2}{10^2-10(\alpha^2+\beta^2)+1}=\frac{1}{71};$$

当 $(a,b,k)=(1,0,2)$ 得到

$$\sum_{k\geq 0}\frac{F_n}{10^{2n+2}}=\frac{F_1}{10^4-10^2(\alpha+\beta)-1}=\frac{1}{9899}.$$

练习 14.4

证明如下关于 Fibonacci 数列的不等式:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}<F_n<\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1},$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-\frac{1}{n}}\leq F_n\leq\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+\frac{1}{n}},$$

$$F_{n+1}\leq\sum_{1\leq k\leq n}F_k\leq F_{n+2},\quad F_mF_n<F_{m+n},\quad F_n^m<F_{mn},$$

$$\sum_{1\leq k\leq n}\frac{F_k}{2^n}<2,\quad 1+\frac{1}{\sqrt[n]{F_n}}\leq\sqrt[n]{F_{n+1}}.$$

14.4 *Tauberian 理论简介

本节来回答本章一开始提到的两个级数的“和”,

$$1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2},\quad 1+2+4+8+\cdots=-1.$$

本节部分内容取自如下两本名著:

- Hardy, G. H. *Divergent series*. Oxford, at the Clarendon Press, 1949. xvi+396 pp.
- Korevaar, Jacob. *Tauberian theory. A century of developments*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **329**, Springer-Verlag, Berlin, 2004, xvi+483 pp. ISBN; 3-540-21058-X

14.4.1 * 发散级数

最早系统地研究无穷级数的数学家Newton 和Leibniz 曾尝试着使用发散级数, 他们发现发散级数非常有用而且总是可以 (不严格地) 导出非常重要的结论, 而这些重要的结论可以独立的用其它方法来证明.

首先回顾下通常收敛级数求和满足如下性质 (这里级数的通项可以是复数):

$(S1)$ 如果 $\sum_{n\geq 0}a_n=S$, 则对任意 $k\in\mathbb{C}$ 都有 $\sum_{n\geq 0}ka_n=kS$;

$(S2)$ 如果 $\sum_{n\geq 0}a_n=S$ 和 $\sum_{n\geq 0}b_n=T$, 则 $\sum_{n\geq 0}(a_n+b_n)=S+T$;

$(S3)$ 如果 $S=\sum_{n\geq 0}a_n$ 则 $\sum_{n\geq 1}a_n=S-a_0$, 且反之亦对.

上述三条性质我们抽象出来做成所谓的“**公理**”.

一个发散级数的某些计算. 我们知道幂级数

$$\sum_{n\geq 0} x^n = 1+x+x^2+\cdots = \frac{1}{1-x}, \tag{14.4.1}$$

的收敛域是 $(-1,1)$. 但是如果从 (14.4.1) 的右边函数 $(1-x)^{-1}$ 出发, 只要 $x\neq 1$ 时该函数均有意义. 一个很自然的问题是若 $|x|>1$ 时, (14.4.1) 的左边级数能否“定义”. 当然这种定义不是通常意义下级数的定义 (通常意义下该级数是发散的), 即通常意义下的求和. 假设可在“某种意义”下定义 (14.4.1) 中左边的级数并把它的“和”记为 S. 那么形式上有

$$S = 1+x+x^2+x^3+\cdots = 1+x(1+x+x^2+\cdots) = 1+xS.$$

注意在这里我们已经假设在“某种意义”下的求和满足上述公理. 此时得到在“某种意义”下求出来的和就等于 $(1-x)^{-1}, x\neq 1$.

(1) 假设 (14.4.1) 在“某种意义”对任何 $x\neq 1$ 都成立. 把 $x=e^{\sqrt{-1}\theta}, 0<\theta<2\pi$, 带入

$$1+e^{\sqrt{-1}\theta}+e^{2\sqrt{-1}\theta}+\cdots = \frac{1}{1-e^{\sqrt{-1}\theta}} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-1}}{2}\cot\frac{\theta}{2}, \tag{14.4.2}$$

从而得到

$$\sum_{n\geq 1}\cos n\theta = -\frac{1}{2}, \quad 0<\theta<2\pi, \tag{14.4.3}$$

$$\sum_{n\geq 1}\sin n\theta = \frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}, \quad 0<\theta<2\pi. \tag{14.4.4}$$

作变换 $\theta\to\theta+\pi$ 得到

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n\cos n\theta = -\frac{1}{2}, \quad -\pi<\theta<\pi, \tag{14.4.5}$$

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n\sin n\theta = -\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}, \quad -\pi<\theta<\pi. \tag{14.4.6}$$

在 (14.4.5) 中令 $\theta=0$ 得到

$$1-1+1-\cdots = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1} = \frac{1}{2}. \tag{14.4.7}$$

如果“某种意义”下的求和满足公理 $(S1)$ – $(S3)$, 则立即得到

$$S = 1-1+1-1+\cdots = 1-(1-1+1-1+\cdots) = 1-S \implies S=\frac{1}{2}.$$

(2) 对 (14.4.5) 和 (14.4.6) 关于 θ 求多次导数得到 $(-\pi<\theta<\pi)$

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}n^{2k}\cos n\theta = 0, \quad k\geq 1, \tag{14.4.8}$$

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}n^{2k+1}\sin n\theta = 0, \quad k\geq 0, \tag{14.4.9}$$

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^k+n-1n^{2k}\sin n\theta = \left(\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}\right)^{(2k)}, \ k\geq 0, \tag{14.4.10}$$

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{k+n-1}n^{2k+1}\cos n\theta = \left(\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}\right)^{(2k+1)}, \ k\geq 0. \tag{14.4.11}$$

在 (14.4.8) 和 (14.4.11) 中令 $\theta=0$ 和在 (14.4.9) 中令 $\theta=\pi/2$ 分别得到

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}n^{2k} = 0,\ k\geq 1, \tag{14.4.12}$$

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}n^{2k+1} = (-1)^k\frac{2^{2k+2}-1}{2k+2}B_{k+1},\ k\geq 0, \tag{14.4.13}$$

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}(2n-1)^{2k+1} = 0,\quad k\geq 0, \tag{14.4.14}$$

在这里用到了 $\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}$ 的 Taylor 级数 (14.3.17)

$$\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}=\sum_{k\geq 0}\frac{2^{2k+2}-1}{(2k+2)!}B_{k+1}\theta^{2k+1},$$

类似地, 从级数

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}e^{\sqrt{-1}(2n-1)\theta}=\frac{e^{\sqrt{-1}\theta}}{1+e^{2\sqrt{-1}\theta}}=\frac{1}{2}\sec\theta, \tag{14.4.15}$$

并利用 (4.7.33), 这里 E_k 是 Euler 常数,

$$\sec\theta=\frac{2e^x}{e^{2x}+1}=1+\sum_{k\geq 1}\frac{E_k}{(2k)!}x^{2k},$$

得到 (14.4.14) 和

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}(2n-1)^{2k}=\frac{(-1)^k}{2}E_k,\quad k\geq 1. \tag{14.4.16}$$

在 (14.4.13) 中令 $k=0$ 得到

$$1-2+3-4+\cdots=\frac{1}{4}. \tag{14.4.17}$$

如果 “某种意义” 下的求和满足公理 $(S1)$ – $(S3)$, 则立即得到

$$\begin{aligned}S&=1-2+3-4-\cdots=1+(-2+3-4+\cdots)=1-(2-3+4-\cdots)\\&=1-(1-1+1-\cdots)-(1-2+3-\cdots)=1-\frac{1}{2}-S\quad\Longrightarrow\quad S=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

(3) 对 (14.4.5) 积分得到

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{\sin n\theta}{n}=\frac{\theta}{2},\quad |\theta|<\pi. \tag{14.4.18}$$

根据 Abel 判别法可知, 上述级数在通常意义下是收敛的. 对 (14.4.18) 再次积分得到 (显然级数对任意 θ 都成立, 因为绝对一致收敛)

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{1-\cos n\theta}{n^2}=\frac{\theta^2}{4},\quad |\theta|\leq\pi. \tag{14.4.19}$$

特别地取 $\theta=\pi$ 得到

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}. \tag{14.4.20}$$

由于

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n-1)^2}=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{3}{4}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2},$$

我们得到

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \tag{14.4.21}$$

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \tag{14.4.22}$$

从而 (14.4.19) 变成

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{\cos n\theta}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}-\frac{\theta^2}{4}, \quad |\theta|\leq\pi. \tag{14.4.23}$$

(4) 利用 (14.4.7) 和 (14.4.12), 我们可以从形式上推导出 (14.4.19):

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{1-\cos n\theta}{n^2} &= \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\sum_{k\geq 0}(-1)^k\frac{(n\theta)^{2k+2}}{(2k+2)!}\\ &= \sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k\theta^{2k+2}}{(2k+2)!}\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}n^{2k} = \frac{\theta^2}{2}(1-1+1-\cdots) = \frac{\theta^2}{4}.\end{aligned}$$

上述“形式推导”可以推广如下. 假设幂级数

$$f(\theta)=\sum_{n\geq 0}a_n\theta^{2n}$$

对任意 θ 都收敛, 即它的收敛区间为 $\mathbb{R}$. 则形式上推导出

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{f(n\theta)}{n^2} &= \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\sum_{k\geq 0}a_k(n\theta)^{2k} = \sum_{k\geq 0}a_k\theta^{2k}\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}n^{2k-2}\\ &= a_0\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}+a_1\theta^2\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1} = \frac{\pi^2}{12}a_0+\frac{\theta^2}{2}a_1.\end{aligned} \tag{14.4.24}$$

然而上述公式一般来说是不对的, 比如取 $f(\theta)=e^{-\theta^2}$, 此时

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{e^{-n^2\theta^2}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}-\frac{\theta^2}{2},$$

对任意 θ 不一定成立. 但是对相当一大类函数公式 (14.4.24) 是对的, 比如对 **Bessel 函数**[6](参见**注 14.6** (2))

$$J_0(\theta):=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{[(2n)!!]^2}\theta^{2n}=1-\frac{\theta^2}{2^2}+\frac{\theta^4}{2^2\cdot 4^2}-\cdots,$$

就有

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{J_0(n\theta)}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}-\frac{\theta^2}{8}, \quad |\theta|<\pi. \tag{14.4.25}$$

(5) 根据 (14.4.4) 得到

$$\sum_{n\geq 1}\cos n\theta\cdot\sin n\phi = \frac{1}{4}\left[\cot\frac{\phi+\theta}{2}+\cot\frac{\phi-\theta}{2}\right] = \frac{1}{2}\frac{\sin\phi}{\cos\theta-\cos\phi}$$

[6] k 阶 Bessel 函数定义为

$$J_k(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}, \quad k\geq 0.$$

和

$$\frac{\cos m\theta-\cos m\phi}{\cos\theta-\cos\phi}=2\sum_{n\geq 1}\frac{\sin n\phi}{\sin\phi}\cos n\theta(\cos m\theta-\cos m\phi),\quad m\geq 1.$$

两边积分得到

$$\int_0^\pi \frac{\cos m\theta-\cos m\phi}{\cos\theta-\cos\phi}d\theta=\pi\frac{\sin m\phi}{\sin\phi}. \tag{14.4.26}$$

当然公式 (14.4.26) 可以用其它方法独立得到.

(6) 从 (14.4.4) 和 (14.4.6) 推出

$$\sum_{n\geq 1}\sin[(2n-1)\theta]=\frac{1}{2}\csc\theta,\quad \sum_{n\geq 1}\sin[(2n)\theta]=\frac{1}{2}\cot\theta.$$

由于

$$\int_0^{\pi/2}\theta\sin[(2n-1)\theta]\,d\theta=\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2},\quad \int_0^{\pi/2}\theta\sin(2n\theta)\,d\theta=\frac{(-1)^{n-1}}{4n}\pi,$$

所以得到

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\theta}{\sin\theta}d\theta = 2\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}, \tag{14.4.27}$$

$$\int_0^{\pi/2}\theta\cot\theta\,d\theta = \frac{\ln 2}{2}\pi. \tag{14.4.28}$$

当然这两个公式可由其它方法独立得到.

目前为止, 上述公式中只有 (14.4.18) – (14.4.23), (14.4.25) – (14.4.28) 是正确的. 其它公式我们希望在 “某种意义” 下是正确的.

14.4.2 * 级数求和的一般定义

本小节我们给出级数求和的一般定义. 给定数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$, 若在意义 P 下可定义求和 $\sum_{n\geq 0}a_n=S$, 则称级数 $\sum_{n\geq 0}a_n$ 是**P-求和的 (P-summable)** 或 S 是 $\sum_{n\geq 0}a_n$ 的**P-和 (P-sum)**, 并记作

$$\sum_{n\geq 0}a_n=_{\mathbf{P}}S.$$

同时也称 S 是部分和 S_n 的**P-极限 (P-limit)** 并记作

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=_{\mathbf{P}}S.$$

如果 “意义 P” 就是 “通常意义” 则上述定义回归到级数收敛的原始定义上来. 下面我们给出其它意义下的级数和.

(1) Cesàro $(\mathbf{C},1)$-和. 如果 $S_n:=\sum_{0\leq k\leq n}a_k$ 且

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{0\leq k\leq n}S_k=S, \tag{14.4.29}$$

则称S **是 $\sum_{n\geq 1}a_n$ 的 $(\mathbf{C},1)$-和**并记作

$$\sum_{n\geq 0}a_n=_{\mathbf{C}}S.$$

D. Bernoulli 在 1771 年使用 $(\mathbf{C},1)$-和来研究某类特殊的级数, 之后Leibniz 在 1713 年用该求和方法来研究发散级数 $1-1+1-1+\cdots$. 当然D. Bernoulli 和Leibniz 都没有给出 $(\mathbf{C},1)$-和的定义 (或许他们早就知道定义了). Frobenius 在 1880 年和Hölder 在 1882 年也隐约地使用 $(\mathbf{C},1)$-和, 直到 1890 年, Cesàro 在他发表的关于级数乘法的论文中第一次给出 $(\mathbf{C},1)$-和的确切定义.

(2) Abel A-和. 假设幂级数 $\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ 在 $|x|<1$ 内收敛并假设和函数 $f(x)$ 满足

$$\lim_{x\to 1-}f(x)=S, \tag{14.4.30}$$

则称S **是** $\sum_{n\geq 1}a_n$ **的 A-和**并记作

$$\sum_{n\geq 0}a_n =_{\mathbf{A}} S.$$

$\mathbf{A}$-和也成为 $\mathbf{P}$-和, 这是因为Poisson 在研究 Fourier 级数求和时使用过. 当然这个求和方法可追溯到Euler 和Leibniz. 这个方法之所以被称为 $\mathbf{A}$-和主要是因为该方法依赖于 Abel 关于幂级数的连续性的定理, 即**定理 14.13**.

(3) Euler $(\mathbf{E},1)$-和. 假设幂级数 $\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ 对充分小的 x 收敛, 并记

$$x=\frac{y}{1-y},\quad y=\frac{x}{1+x}. \tag{14.4.31}$$

当 x 和 y 充分小时得到展开

$$\begin{aligned}
xf(x) &= \sum_{n\geq 0}a_nx^{n+1} = \sum_{n\geq 0}a_n\left(\frac{y}{1-y}\right)^{n+1} = \sum_{n\geq 0}a_n\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{k}y^{n+k+1}\\
&= \sum_{n\geq 0}a_n\sum_{k\geq n}\binom{k}{k-n}y^{k+1} = \sum_{k\geq 0}y^{k+1}\sum_{0\leq n\leq k}\binom{k}{k-n}a_n\\
&= \sum_{k\geq 0}y^{k+1}\sum_{0\leq n\leq k}\binom{k}{n}a_n = \sum_{k\geq 0}b_ky^{k+1},
\end{aligned}$$

其中

$$b_0=a_0,\quad b_k=\sum_{0\leq n\leq k}\binom{k}{n}a_n. \tag{14.4.32}$$

因为当 $y=1/2$ 时 $x=1$, 所以称S **是** $\sum_{n\geq 1}a_n$ **的** $(\mathbf{E},1)$**-和**并记作

$$\sum_{n\geq 0}a_n =_{\mathbf{E}} S$$

如果

$$\sum_{k\geq 0}\frac{b_k}{2^{k+1}}=S \tag{14.4.33}$$

成立.

$(\mathbf{E},1)$-和方法来自“Euler 变换”, 这个变换可以把收敛速度较慢的级数转换成收敛速度很快的级数.

(4) Borel B-和. 假设幂级数 $\sum_{n\geq 0} S_n x^n/n!$ 对任意 x 都收敛且函数

$$F(x) := e^{-x}\sum_{n\geq 0}\frac{S_n}{n!}x^n \to S, \quad x\to +\infty, \tag{14.4.34}$$

则称S **是** $\sum_{n\geq 1} a_n$ **的 B-和**并记作

$$\sum_{n\geq 0} a_n =_{\mathbf{B}} S.$$

这个求和方法是Borel 在 1899 年给出的.

(5) Hutton $(\mathbf{H},1)$**-和.** 令 $S_n^{(0)} := S_n\ (n\geq 0)$, $S_{-1}^{(k)} = S_{-2}^{(k)} := 0\ (k\geq 0)$, 和递推定义

$$S_n^{(k)} := \frac{1}{2}S_{n-1}^{(k-1)} + \frac{1}{2}S_n^{(k-1)}, \quad n\geq 0.$$

计算易得

$$S_n^{(1)} = \frac{1}{2}S_{n-1} + \frac{1}{2}S_n, \quad S_n^{(2)} = \frac{1}{2}S_{n-2} + \frac{1}{4}S_{n-1} + \frac{1}{4}S_n, \quad n\geq 0.$$

如果

$$\lim_{n\to+\infty} S_n^{(k)} = S, \tag{14.4.35}$$

则称S **是** $\sum_{n\geq 1} a_n$ **的** $(\mathbf{H},k)$**-和**并记作

$$\sum_{n\geq 0} a_n =_{\mathbf{H},k} S.$$

这个求和方法是Hutton 在 1812 年给出的.

可以证明 $(\mathbf{C},1)$-和, $\mathbf{A}$-和, 以及 $(\mathbf{E},1)$-和都满足公理 $(S1)-(S3)$. 具体细节可参考本节一开始提到的Hardy 的名著.

例 14.15

(1) 考虑, 通常意义下的, 发散级数

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n = 1-1+1-1+\cdots.$$

则部分和为

$$S_n = \begin{cases} 1, & n\ 偶数, \\ 0 & n\ 奇数. \end{cases}$$

因此 (14.4.29) 的极限为 $\frac{1}{2}$. 同理可证, 因为 $\sum_{n\geq 0}(-x)^n = (1+x)^{-1}$, (14.4.30) 可给出 $\frac{1}{2}$. 从 (14.4.32) 得到 $b_0 = 1$ 和 $b_k = 0\ (k\geq 1)$, 故 (14.4.33) 也给出 $\frac{1}{2}$. 但是 (14.4.34) 给出了 $F(x) = e^{-x}e^{-x} = e^{-2x} \to 0, x\to+\infty$. 而 (14.4.35) 同样又给出了 $S_n^{(1)} = \frac{1}{2}, n\geq 0$.

	$(\mathbf{C},1)$	$\mathbf{A}$	$(\mathbf{E},1)$	$\mathbf{B}$	$(\mathbf{H},1)$	$(\mathbf{H},2)$
$\sum_{n\geq 0}(-1)^n$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\nexists$

(2) 考虑, 通常意义下的, 发散级数

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n(n+1) = 1-2+3-4+\cdots.$$

类似地可计算得到

	$(\mathbf{C},1)$	$\mathbf{A}$	$(\mathbf{E},1)$	$\mathbf{B}$	$(\mathbf{H},1)$	$(\mathbf{H},2)$
$\sum_{n\geq 0}(-1)^n(n+1)$	$\nexists$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\nexists$	$\frac{1}{4}$

(3) 考虑, 通常意义下的, 发散级数

$$\sum_{n\geq 0}(n+1) = 1+1+1+1+\cdots.$$

类似地可计算得到

	$(\mathbf{C},1)$	$\mathbf{A}$	$(\mathbf{E},1)$	$\mathbf{B}$	$(\mathbf{H},1)$	$(\mathbf{H},2)$
$\sum_{n\geq 0}(n+1)$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$

练习 14.5

完成**例 14.15** 中剩下例子的计算.

14.4.3 * 求和的正则性问题

给出上述几个关于 P-求和的例子后, 一个很自然的问题就是: 如果级数 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 本身就是收敛的话, 那对这个级数的 P-求和就是通常意义下的求和. 这就是所谓的**求和的正则性问题 (regularity of summation)**, 如果某个 P-求和是正则的, 则这个求和方法就是把对收敛级数求和推广到发散级数求和. 在上节我们已经看到对发散级数做些运算往往会得到意想不到的结果, 当然为了使运算过程合理化, 我们需要对发散级数的求和进行新的定义.

可以证明上述提到的四种求和方法都是正则的, 具体细节可参考本节一开始提到的两本名著.

14.4.4 *Tauberian 理论

求和的正则性告诉我们, 收敛级数的 P-求和就是普通意义下的求和. 反之, 就是著名的 **Tauberian 问题** (1897), 即, 可 P-求和的级数什么时候可在普通意义下收敛?. 用数学语言可表示为

$$\sum_{n\geq 0} a_n \text{ 是 } P\text{-可求和的} \quad ??? \Longrightarrow ??? \quad \sum_{n\geq 0} a_n \text{ 是收敛的.} \tag{14.4.36}$$

为了回答上述问题, Tauber 引入了 **Tauberian 条件**, 即关于通项 a_n 的条件, 简记为 $\mathbf{T}\{a_n\}$. Tauber 给出的定理可简单概括为

定理 14.16. (Tauber, 1897)

级数的 Tauberian 定理可表述为

$$\sum_{n\geq 0} a_n \text{ 是 } P\text{-可求和的且满足条件 } T\{a_n\} \implies \sum_{n\geq 0} a_n \text{ 是收敛的.} \tag{14.4.37}$$

当然对不同的 P-求和, 条件 $T\{a_n\}$ 是不相同的.

定理 14.17. (Hardy, 1910; Laudau, 1910)

考虑 **Hardy 条件**

$$|na_n| \leq C,$$

或者 **Laudau 条件**

$$na_n \geq -C.$$

则有

$$\sum_{n\geq 0} a_n \text{ 是 } (\mathbf{C},1)\text{-可求和的且满足条件 } T\{a_n\} \implies \sum_{n\geq 0} a_n \text{ 是收敛的.}$$

Hardy 在 1910 年提出了如下猜想: **定理 14.17** 中的 Hardy 条件是否也适用于 Abel 求和? Littlewood 在 1911 年证实了 Hardy 的猜想.

定理 14.18. (Tauber, 1897; Hardy-Littlewood, 1911; Hardy-Littlewood, 1914)

考虑 **Tauber 条件**

$$na_n \to 0,$$

或者 **Hardy 条件**

$$|na_n| \leq C,$$

或者 **Hardy-Littlewood-Laudau 条件**

$$na_n \geq -C.$$

则有

$$\sum_{n\geq 0} a_n \text{ 是 } \mathbf{A}\text{-可求和的且满足条件 } T\{a_n\} \implies \sum_{n\geq 0} a_n \text{ 是收敛的.}$$

除此之外, Hardy 和Littlewood 还给出了这样的结论: 如果 $\sum_{n\geq 0} a_n$ 是可 Abel 求和的且部分和满足 $S_n \geq -C$, 则 $\sum_{n\geq 0} a_n$ 是可 Cesàro 可求和的.

定理 14.19. (Hardy-Littlewood, 1916; Schmidt, 1925)

考虑 **Hardy-Littlewood 条件**

$$|\sqrt{n}a_n| \leq C,$$

或者 **Schmidt 条件**

$$\sqrt{n}a_n \geq -C.$$

则有

$$\sum_{n\geq 0} a_n \text{ 是 } \mathbf{B}\text{-可求和的且满足条件 } T\{a_n\} \implies \sum_{n\geq 0} a_n \text{ 是收敛的.}$$

♡

在 Hardy-Littlewood 条件下, Hardy 和Littlewood 在 1943 年给出了上述定理的另一个证明.

14.4.5 Sine 积分函数

本节主要参考《拉玛努金遗失笔记 (第 4 卷)》和《Classical Fourier analysis (third edition)》中的部分内容. 其应用在**第一卷第 6.2.8 小节** 中已给出.

对 $x \geq 0$ 定义 **sine 积分函数**为

$$\mathbf{Si}(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt. \tag{14.4.38}$$

利用分部积分得到

$$\mathbf{Si}(x) = \int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt - \frac{\cos x}{x} + \cos 1 - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt$$

从而得到

$$\lim_{x\to+\infty} \mathbf{Si}(x) = \int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt + \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

故极限 $\lim_{x\to+\infty} \mathbf{Si}(x)$ 存在. 但是确切的值我们将在**例 15.8** 中求得, 即

$$\lim_{x\to+\infty} \mathbf{Si}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

利用**例 14.14** (1) 中 $\sin x$ 的级数展开得到

$$\mathbf{Si}(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}, \quad x \geq 0. \tag{14.4.39}$$

命题 14.3

对任意 $x > 0$ 有

$$\left|\frac{\pi}{2} - \mathbf{Si}(x)\right| \leq \frac{2}{x}. \tag{14.4.40}$$

因此函数列 $\{\mathbf{Si}(nx)\}_{n\geq 1}$ 在任意区间 $[\delta, +\infty)$ 上时一致收敛到 $\pi/2$, 这里 $\delta > 0$.

♡

证: 利用分部积分得到

$$\begin{aligned}\left|\frac{\pi}{2} - \mathbf{Si}(x)\right| &= \left|\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt\right| = \left|\int_x^{+\infty} \frac{-1}{t} d\cos t\right| \\ &= \left|\frac{\cos x}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt\right| \leq \frac{1}{x} + \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{2}{x}. \quad \square\end{aligned}$$

根据

$$\mathbf{Si}'(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad \mathbf{Si}''(x) = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2},$$

我们得到

$$\mathbf{Si}'(n\pi)=0,\quad \mathbf{Si}''(x)(n\pi)=\frac{(-1)^n}{n\pi},\quad n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

因此函数 $\mathbf{Si}(x)$ 在 $\pi, 3\pi, 5\pi, \cdots$ 处有极大值而在 $2\pi, 4\pi, 6\pi, \cdots$ 处有极小值. 进一步, 函数 $\mathbf{Si}(x)$ 在区间 $[2k\pi,(2k+1)\pi]$ 上单调递增而在区间 $[(2k+1)\pi,(2k+2)\pi]$ 上单调递减. 计算得到

$$\begin{aligned}\mathbf{Si}((2k+1)\pi)-\mathbf{Si}((2k-1)\pi) &= \int_0^{(2k+1)\pi}\frac{\sin t}{t}dt-\int_0^{(2k-1)\pi}\frac{\sin t}{t}dt\\ &= \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi}\frac{\sin t}{t}dt \ = \ \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\frac{\sin t}{t}dt+\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi}\frac{\sin t}{t}dt\\ &= \int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi}\sin t\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+\pi}\right)dt \ = \ \int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi}\frac{\pi\sin t}{t(t+\pi)}dt \ < \ 0.\end{aligned}$$

故得到

$$\mathbf{Si}(\pi)>\mathbf{Si}(3\pi)>\mathbf{Si}(5\pi)>\cdots>\frac{\pi}{2}. \tag{14.4.41}$$

同样可以证明

$$\mathbf{Si}(2\pi)<\mathbf{Si}(4\pi)<\mathbf{Si}(6\pi)<\cdots<\frac{\pi}{2}. \tag{14.4.42}$$

最后得到

$$\max_{[0,+\infty)}\mathbf{Si}(x)=\mathbf{Si}(\pi),\quad \min_{[0,+\infty)}\mathbf{Si}(x)=0,\quad \min_{[\pi,+\infty)}\mathbf{Si}(x)=\mathbf{Si}(2\pi). \tag{14.4.43}$$

Ramanujan 给出了 $\mathbf{Si}(x)$ 在极值点处的具体值. 引入函数

$$\mathbf{si}(x):=-\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt,\quad \mathbf{ci}(x):=-\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}dt. \tag{14.4.44}$$

因此得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{x+t}dt=\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t-x)}{t}dt=\mathbf{ci}(x)\sin x-\mathbf{si}(x)\cos x,\quad x>0.$$

因为

$$\mathbf{si}'(x)=\frac{\sin x}{x},\quad \mathbf{ci}'(x)=\frac{\cos x}{x}.$$

所以

$$\begin{aligned}\left[\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t-x)}{t}dt\right]'' &= \left[\frac{\sin x\cos x}{x}+\mathbf{ci}(x)\cos x-\frac{\sin x\cos x}{x}+\mathbf{si}(x)\sin x\right]'\\ &= [\mathbf{ci}(x)\cos x+\mathbf{si}(x)\sin x]'\\ &= \frac{\cos^2 x}{x}-\mathbf{ci}(x)\sin x+\frac{\sin^2 x}{x}+\mathbf{si}(x)\cos x\\ &= \frac{1}{x}-\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t-x)}{t}dt.\end{aligned}$$

根据**定理 15.7** (3), 求导和求积分可积交换 (一致收敛性非常容易验证), 有

$$\begin{aligned}\left[\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt\right]''\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt &= \left[\int_0^{+\infty}\frac{-te^{-xt}}{1+t^2}dt\right]'+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{t^2e^{-xt}+e^{-xt}}{1+t^2}dt \ = \ \int_0^{+\infty}e^{-xt}dt \ = \ 1.\end{aligned}$$

从而得到

$$y := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt - \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}dt \quad \text{满足常微分方程} \quad y'' + y = 0.$$

通解为 $y = c_1 \sin(c_2 + x)$, 这里 c_1, c_2 是两个常数. 令 $x \to +\infty$ 时得到 $c_1 = 0$ 从而有 $y \equiv 0$.

引理 14.1

当 $x > 0$ 时有

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt = \mathbf{ci}(x)\sin x - \mathbf{si}(x)\cos x, \tag{14.4.45}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t^2}dt = -\mathbf{ci}(x)\cos x - \mathbf{si}(x)\sin x, \tag{14.4.46}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}\ln(1+t^2)dt = \mathbf{ci}^2(x) + \mathbf{si}^2(x). \tag{14.4.47}$$

♡

练习 14.6

验证恒等式 (14.4.46) 和 (14.4.47).

♠

命题 14.4. (Ramanujan)

对每个 $x \geq 0$ 若定义 $r > 0$ 和 $\theta \in (0, \pi/2)$ 如下

$$r\cos\theta := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt, \quad r\sin\theta := \int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t^2}dt, \tag{14.4.48}$$

则

$$r^2 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}\ln(1+t^2)dt, \quad \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2} - r\cos(x-\theta). \tag{14.4.49}$$

因此

$$\mathbf{Si}((2n+1)\pi) = \frac{\pi}{2} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(2n+1)\pi t}}{1+t^2}dt, \tag{14.4.50}$$

$$\mathbf{Si}(2n\pi) = \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2n\pi t}}{1+t^2}dt. \tag{14.4.51}$$

♡

证: 根据定义和引理 14.1 得到

$$\begin{aligned} r^2 &= r^2\cos\theta^2 + r^2\sin^2\theta \\ &= [\mathbf{ci}(x)\sin x - \mathbf{si}(x)\cos x]^2 + [-\mathbf{ci}(x)\cos x - \mathbf{si}(x)\sin x]^2 \\ &= \mathbf{ci}^2(x) + \mathbf{si}^2(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}\ln(1+t^2)dt. \end{aligned}$$

类似地得到

$$r\cos(x-\theta) = r\cos x\cos\theta + r\sin x\sin\theta$$

$$= \cos x[\mathbf{ci}(x)\sin x - \mathbf{si}(x)\cos x] + \sin x[-\mathbf{ci}(x)\cos x - \mathbf{si}(x)\sin x] = -\mathbf{si}(x).$$

作为推论得到

$$\mathbf{Si}((2n+1)\pi) = \frac{\pi}{2} - r\cos((2n+1)\pi - \theta) = \frac{\pi}{2} + r\cos\theta$$

这里 r 和 θ 是 $x=(2n+1)\pi$ 所对应的值. 从而可知

$$\mathbf{Si}((2n+1)\pi)=\frac{\pi}{2}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-(2n+1)\pi t}}{1+t^2}dt. \quad \square$$

14.5 习题

14.6 参考文献

1. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis I*, Translated from the 1988 German original by Gary Brookfield, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. xiv+426 pp. ISBN: 3-7643-7153-6
2. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis II*, Translated from the 1999 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. xii+400 pp. ISBN: 978-3-7643-7472-3; 3-7643-7472-3
3. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis III*, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. xii+468 pp. ISBN: 978-3-7643-7479-2; 3-7643-7479-2
4. Grafakos, Loukas. *Classical Fourier analysis*, Third edition, Graduate Texts in Mathematics, **249**, Springer, New York, 2014. xviii+638 pp. ISBN: 978-1-4939-1193-6; 978-1-4939-1194-3
5. Hardy, G. H. *Divergent series*, Oxford, at the Clarendon Press, 1949. xvi+396 pp.
6. Korevaar, Jacob. *Tauberian theory. A century of developments*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **329**, Springer-Verlag, Berlin, 2004, xvi+483 pp. ISBN; 3-540-21058-X
7. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis I*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+574 pp. ISBN: 3-540-40386-8
8. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis II*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xvi+681 pp. ISBN: 3-540-40633-6
9. 布鲁斯 · C. 伯恩特 (Bruce C. Berndt) 主编: **拉玛努金笔记** (第 1, 2, 3, 4 卷), 哈尔滨工业大学出版社, 2019.
10. 布鲁斯 · C. 伯恩特 (Bruce C. Berndt), 乔治 · E. 安德鲁斯 (George E. Andrews) 主编: **拉玛努金遗失笔记** (第 1, 2, 3, 4 卷), 哈尔滨工业大学出版社, 2019.
11. 常庚哲, 史济怀 编: **数学分析教程** (上、下册), 高等教育出版社, 2003.
12. 陈天权 编著: **数学分析讲义** (第一、二、三册), 北京大学出版社, 2009.
13. 邓建平 编: **微积分 I 和 II**, 科学出版社, 2019.
14. Duhham, William 著 (李伯民, 汪军, 张怀勇 译): **微积分的历程** – 从牛顿到勒贝格, 人民邮电出版社, 2013.
15. 吉米多维奇 著 (李荣🄵, 李植 译): **数学分析习题集** (根据 2010 年俄文版翻译), 俄罗

斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.

16. Kline, Morris 著 (张理京, 张炎热, 江泽涵等 译): **古今数学思想** (第一、二、三册), 上海科学技术出版社, 2014.
17. 李傅山, 王培合 编著: **数学分析习题课讲义** (1、2、3), 北京大学出版社, 2018.
18. 李逸 编著: **数学分析讲义**, 上海交通大学数学分析课讲义 (未出版), 2016.
19. 林源渠, 方企勤 编: **数学分析解题指南**, 北京大学出版社, 2003.
20. 梅加强 编著: **数学分析**, 高等教育出版社, 2015.
21. 裴礼文 编著: **数学分析中的典型问题与方法** (第二版), 高等教育出版社, 2015.
22. Riemann, Bernhard 著 (李培廉 译): **黎曼全集** (第一、二卷), 高等教育出版社, 2016.
23. 汪林 著: **数学分析中的问题和反例**, 现代数学基础 **56**, 高等教育出版社, 2015.
24. Weir, D. Maurice; Hass, R. Joel; Giordano, R. Frank. *Thomas' calculus*, Eleventh Edition, (影印版, 上、下册), 高等教育出版社, 2016.
25. 吴振奎 编著: **斐波那契而数列欣赏**, 第 2 版, 哈尔滨工业大学出版社, 2018.
26. 徐森林, 薛春华 编著: **数学分析**, 清华出版社, 2005.
27. 杨小远, 孙玉泉, 薛玉梅, 杨卓琴 编著: **工科数学分析教程** (上、下册), 科学出版社, 2011.
28. 张福保, 薛金美, 潮小李 主编: **数学分析讲义**, 科学出版社, 2019.
29. 张筑生 编著: **数学分析新讲** (第一、二、三册), 北京大学出版社, 1990.
30. 周民强 编著: **数学分析习题演练** (第一、二、三册), 科学出版社, 2018.
31. 朱尧辰 编著: **数学分析例选通过范例学技巧**, 哈尔滨工业大学出版社, 2013.

第十五章 含参变量积分

Ramanujan 不等式.

$$\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{e}\right)^x\left(8x^3+4x^2+x+\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{6}} < \Gamma(x+1)$$
$$< \sqrt{\pi}\left(\frac{x}{e}\right)^x\left(8x^3+4x^2+x+\frac{1}{30}\right)^{\frac{1}{6}}, \quad x\geq 0.$$

稍微精确的不等式以征求问题解的形式由Ramanujan 于 1916 年发表在印度数学会期刊上, 而上述精确的不等式则出现在Ramanujan 遗失的笔记中 (见本章的参考文献). 完整的证明则分别由Karatsuba 在 2001 年给出 ($x\geq 1$) 和Alzer 在 2003 年给出 ($0\leq x\leq 1$). 在第三节我们将给出 Ramanujan 不等式.

15.1 含参变量定积分

给定多元函数 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in X\times Y\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$, 其中 X, Y 都是区域. 如果对任意给定的 $\boldsymbol{y}\in Y$, 函数 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 在 Y 上可积或广义可积, 则得到定积分或反常积分

$$I(\boldsymbol{y}):=\int_X f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{y}\in Y, \tag{15.1.1}$$

并称为**含参变量积分 (integral depending on parameters)**.

例 15.1

考虑反常积分

$$I:=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx.$$

在**例 5.27** (1) 已经证明上述反常积分是条件收敛的. 在**例 14.14** (1) 我们得到了 $\sin x/x$ 的幂级数展开

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\sum_{n\geq 0}\frac{(-x^2)^n}{(2n+1)!}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

为了求出 I 的值, 我们观察到 $\sin x/x$ 当 $x\to 0+$ 时趋于 1, 而当 $x\to+\infty$ 时趋于 0. 但是当 $x\to+\infty$ 时 $\sin x/x$ 的收敛到 0 的速度不够快, 为此我们乘以因子 $e^{-\alpha x}$ 而考虑含参变量积分

$$I(\alpha):=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx, \quad \alpha\geq 0.$$

当 $\alpha>0$ 时作形式上的求导 (即暂且不考虑求积分和求导是否可以交换)

$$I'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\left(-e^{-\alpha x}\sin x\right)dx=\left.\frac{e^{-\alpha x}(\alpha\sin x+\cos x)}{1+\alpha^2}\right|_0^{+\infty}=\frac{-1}{1+\alpha^2}.$$

从而得到 (这里假设函数 $I(\alpha)\in C^([0,+\infty)))$

$$I(\alpha)=-\tan^{-1}\alpha+I(0), \quad \alpha>0.$$

因为

$$|I(\alpha)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \to 0, \quad \alpha \to +\infty.$$

最后得到 $I(0) = \pi/2$.

上述推导有两个问题没有解决, 即

$$\frac{d}{d\alpha}\int_0^{+\infty} ??? = ??? \int_0^{+\infty}\frac{d}{d\alpha}, \quad \lim_{\alpha\to+\infty}\int_0^{+\infty} ??? = ??? \int_0^{+\infty}\lim_{\alpha\to 0+}.$$

本节和下节就来回答这些问题.

15.1.1 含参变量定积分的定义

假设二元函数 $f(x,y)$ 定义在闭矩形 $D := [a,b]\times[c,d]$ 上, 且对任意 $y \in [c,d]$, 函数 $f(\cdot,x) \in R([a,b])$. 定义函数

$$I(y) := \int_a^b f(x,y)\,dx, \quad c \leq x \leq d. \tag{15.1.2}$$

如果

$$a \leq \varphi(y), \psi(y) \leq b, \quad \forall\, y \in [c,d],$$

则定义函数

$$J(y) := \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx, \quad c \leq y \leq d. \tag{15.1.3}$$

15.1.2 含参变量定积分的基本性质

和函数项级数一样, 含参变量定积分也具有求积分和求极限、求积分、求导数相交换的性质.

定理 15.1. (基本性质)

(1) **(连续性定理)** $f \in C(D) \Longrightarrow I(y) \in C([c,d])$. 作为推论得到

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,dx. \tag{15.1.4}$$

(2) **(积分顺序可交换定理)** $f \in C(D) \Longrightarrow$

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx. \tag{15.1.5}$$

(3) **(积分号下求导定理)** $f, f_y \in C(D) \Longrightarrow I(y) \in D([a,b])$ 且

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b f_y(x,y)\,dx. \tag{15.1.6}$$

(4) $f \in C(D)$, $\varphi, \psi \in C([c,d]) \Longrightarrow J(y) \in C([c,d])$.

(5) $f, f_y \in C(D)$, $\varphi, \psi \in D([c,d]) \Longrightarrow J(y) \in D([c,d])$ 且

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx &= \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f_y(x,y)\,dx \\ &\quad + \psi'(y) f(\psi(y),y) - \varphi'(y) f(\varphi(y),y).\end{aligned} \tag{15.1.7}$$

证: (1) 因为 $f(x,y)\in C(D)$, 所以 $f(x,y)$ 在 D 上是一致连续的. 对任意 $\epsilon>0$ 存在 $\delta>0$ 对任意 $(x,y+\Delta y),(x,y)\in D$ 只要 $|\Delta y|<\delta$ 就有

$$|f(x,y+\Delta y)-f(x,y)|<\epsilon.$$

给定 $y_0\in[c,d]$. 对任意 $y\in(y_0-\delta,y_0+\delta)$ 得到

$$|I(y)-I(y_0)|\le\int_a^b|f(x,y)-f(x,y_0)|dx<(b-a)\epsilon.$$

故 I 在 y_0 处连续.

(2) 根据**定理 13.3** 得到.

(3) 给定 $y_0\in[c,d]$. 我们得到

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx \;=\; I'(y) \;=\; \lim_{\Delta y\to0}\frac{I(y+\Delta y)-I(y)}{\Delta y}$$

和

$$\begin{aligned}\frac{I(y+\Delta y)-I(y)}{\Delta y}-\int_a^b f_y(x,y)dx &= \int_a^b\left[\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}-f_y(x,y)\right]dx\\ &= \int_a^b[f_y(x,y+\theta\Delta y)-f_y(x,y)]\,dx,\quad 存在\ \theta=\theta(y,\Delta y)\in[0,1].\end{aligned}$$

因为 f_y 在 $[a,b]$ 上时是连续的, 所以其在 $[a,b]$ 上必一致连续的. 因此对任意 $\epsilon>0$ 存在 $\delta>0$ 只要 $|y_1-y_2|<\delta$ 就有 $|f_x(x,y_1)-f(x,y_2)|<\epsilon$. 因为 $|(y+\theta\Delta y)-y|=|\theta\Delta y|\le|\Delta y|$, 所以只有 $|\Delta y|<\delta$ 就得到

$$\left|\frac{I(y+\Delta y)-I(y)}{\Delta y}-\int_a^b f_y(x,y)dx\right|<(b-a)\epsilon.$$

即得到 (15.1.6).

(4) 在 (15.1.3) 中作替换 $x=\varphi(y)+[\psi(y)-\varphi(y)]t$ 得到

$$J(y)=\int_0^1 f(\varphi(y)+(\psi(y)-\varphi(y))t,y)[\psi(y)-\varphi(y)]dt.$$

根据 (1) 得到 $J(y)\in C([c,d])$.

(5) 令 $u:=\varphi(y)$, $v:=\psi(y)$. 考虑积分

$$J(y)=\int_u^v f(x,y)dx=:\Phi(y,u,v).$$

则 $\Phi_v=f(v,y)$, $\Phi_u=-f(u,y)$, 和

$$\Phi_y=\int_u^v f_y(x,y)dx.$$

因此

$$J'(y)=\frac{\partial}{\partial y}\Phi(y,u,v)=\Phi_y+\Phi_u u'+\Phi_v v'=\int_u^v f_y(x,y)dx+f(v,y)\psi'(y)-f(u,y)\varphi'(y).$$

这就得到了 (15.1.7). □

推论 15.1. (Hadamard 引理)

如果 $f\in C^1(I)$, 这里 $I\subset\mathbb{R}$ 是包含 $x_0\in\mathbb{R}$ 的开区间, 则

$$f(x)=f(x_0)+\varphi(x)(x-x_0) \tag{15.1.8}$$

在 x_0 附近成立, 其中函数 φ 是连续的且满足 $\varphi(x_0)=f'(x_0)$.

证: 根据微积分基本定理得到

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\left[\int_0^1 f'(x_0+th)\,dt\right]h$$

这里 h 充分小来保证 $x_0+h\in I$. 如果定义函数

$$\varphi(x):=\int_0^1 f'(x_0+t(x-x_0))\,dt$$

则**定理 15.1** (1) 告诉我们 φ 是连续的且满足 $\varphi(x_0)=f'(x_0)$. □

注 15.1

(1) **定理 15.1** (3) 不能直接推广到反常积分, 比如考察函数

$$F(a):=\int_0^\infty e^{-ax}\,dx,\quad a>0.$$

计算得到 $F(a)=1/a$ 和 $F'(a)=-1/a^2$. 但是

$$\int_0^\infty \frac{d}{dx}e^{-ax}\,dx=\int_0^\infty -ae^{-ax}\,dx=-1.$$

此时求积分和求导数不能交换的原因是上述含参变量积分不是一致收敛的, 具体定义以及相关内容在下一小节给出.

(2) 同样可证, 如果 $f\in C(D)$ 且 $f_x\in C(D)$ 则

$$\frac{d}{dx}\int_c^d f(x,y)\,dy=\int_c^d f_x(x,y)\,dy. \tag{15.1.9}$$

(3) 我们可以把**定理 15.1** 做如下的推广. 若 $f(x,y)\in C(D)$, 这里 $D=[a,b]\times[c,d]$, $h(y)\in R([c,d])$, 令

$$F(x):=\int_c^d f(x,y)h(y)\,dy.$$

则

- $f(x,y)\in C(D)$ 和 $h(y)\in R([c,d])\Longrightarrow F(x)\in C([a,b])$ 且
$$\lim_{x\to x_0}\int_c^d f(x,y)h(y)\,dy=\int_c^d \lim_{x\to x_0} f(x,y)h(y)\,dy.$$
- $f(x,y)\in C(D)$ 和 $h(y)\in R([c,d])\Longrightarrow$ 有
$$\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)h(y)\,dy\right]dx=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)h(y)\,dx\right]dy.$$
- $f(x,y), f_y(x,y)\in C(D)$ 和 $h(y)\in R([a,b])\Longrightarrow$ 有
$$\frac{d}{dx}\int_c^d f(x,y)h(y)\,dy=\int_c^d f_x(x,y)h(y)\,dy.$$

♣

例 15.2

求下列极限、导数或积分:

$$\lim_{t\to0}\int_0^2 x^2\cos(tx)\,dx,\quad \lim_{\alpha\to0}\int_0^1\frac{dx}{1+x^2\cos\alpha x},\quad \int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx\ (0<a<b),$$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin x}\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}dx\ (0<a<1),\quad \int_0^\pi \ln(1+\theta\cos x)\,dx\ (|\theta|<1),$$

$$\int_0^\pi \ln(1-2a\cos x+a^2)dx\ (|a|<1),\quad \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\ln(1+xy)}{y}dy,$$

$$\int_0^1 \left[\int_\pi^{2\pi} \frac{y\sin(xy)}{y-\sin y}dy\right]dx,\quad \int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}}dx,\quad \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx,$$

$$\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx\ (a,b>0),$$

解: (1) 函数 $f(x,t)=x^2\cos(tx)$ 在 $[0,2]\times[-1,1]$ 上连续, 从而得到

$$\lim_{t\to 0}\int_0^2 x^2\cos(tx)\,dx=\int_0^2 x^2dx=\frac{8}{3}.$$

(2) 函数 $f(x,\alpha)=(1+x^2\cos(\alpha x))^{-1}$ 在 $[0,1]\times[-1,1]$ 上连续, 从而得到

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2\cos\alpha x}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

(3) 利用积分

$$\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^y dy$$

得到

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int_0^1\left[\int_a^b x^y dy\right]dx=\int_a^b\left[\int_0^1 x^y dx\right]dy=\int_a^b\frac{dy}{1+y}=\ln\frac{1+b}{1+a},$$

因为二元函数 $f(x,y)=x^y$ 在 $[0,1]\times[a,b]$ 上连续.

(4) 根据

$$\frac{1}{2\sin x}\ln\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}=\int_0^a\frac{dy}{1-y^2\sin^2 x}$$

得到

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin x}\ln\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}dx &= 2\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^a\frac{dy}{1-y^2\sin^2 x}\right]dx\\ &= 2\int_0^a\left[\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1-y^2\sin^2 x}\right]dy = 2\int_0^a\left[\frac{1}{2-y^2}\int_0^\pi\frac{dx}{1+\frac{y^2}{2-y^2}\cos x}\right]dy.\end{aligned}$$

利用一般公式

$$\int\frac{dx}{1+\epsilon\cos x}=\frac{2}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}\tan\frac{x}{2}\right)+C,\quad |\epsilon|<1,$$

计算得到

$$\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin x}\ln\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}dx = \int_0^a\frac{\pi}{\sqrt{1-y^2}}dy=\pi\arcsin a.$$

(5) 任给 $a\in(0,1)$, 则二元函数 $f(x,\theta):=\ln(1+\theta\cos x)$ 在 $[0,\pi]\times[-a,a]$ 上连续并且 $f_\theta(x,\theta)=\cos x/(1+\theta\cos x)$ 也是连续的. 从而首先对 $\theta\neq 0$ 得到

$$\begin{aligned}I'(\theta) &:= \frac{d}{d\theta}\int_0^\pi \ln(1+\theta\cos x)dx = \int_0^\pi\frac{\cos x}{1+\theta\cos x}dx = \frac{\pi}{\theta}-\frac{\pi}{\theta}\int_0^\pi\frac{dx}{1+\theta\cos x}\\ &= \frac{\pi}{\theta}-\frac{1}{\theta\sqrt{1-\theta^2}} = \frac{-\pi\theta}{(1+\sqrt{1-\theta^2})\sqrt{1-\theta^2}}.\end{aligned}$$

上述显然当 $\theta=0$ 时也成立. 两边积分得到

$$I(\theta)=\pi\ln(1+\sqrt{1-\theta^2})+C.$$

由于 $I(0)=0$ 故 $C=-\pi\ln 2$ 和

$$I(\theta)=\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\theta^2}}{2}.$$

(6) 积分内求导并做变换 $t=\tan(x/2)$ 得到

$$\begin{aligned}I'(a) &:= \frac{d}{da}\int_0^\pi\ln(1-2a\cos x+a^2)dx = \int_0^\pi\frac{2a-2\cos x}{1-2a\cos x+a^2}dx\\ &= \frac{2}{a}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}+2\left(a-\frac{1}{a}\right)\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1-a)^2+(1+a)^2t^2} = 0.\end{aligned}$$

(7) 由于

$$f(x,y)=\frac{\ln(1+xy)}{y},\quad f_x(x,y)=\frac{1}{1+xy},$$

所以得到

$$I'(x)=\int_0^x f_x(x,y)dy+f(x,x)=\int_0^x\frac{dy}{1+yx}+\frac{\ln(1+x^2)}{x}=\frac{2}{x}\ln(1+x^2).$$

(8) 积分交换得到

$$\int_0^1\left[\int_\pi^{2\pi}\frac{y\sin(xy)}{y-\sin y}dy\right]dx=\int_\pi^{2\pi}\left[\int_0^1\frac{y\sin(xy)}{y-\sin y}\right]dx=\int_\pi^{2\pi}\frac{1-\cos y}{y-\sin y}dy=\ln 2.$$

(9) 利用

$$\frac{\arctan x}{x}=\int_0^1\frac{dy}{1+x^2y^2},$$

得到

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}}dx &= \int_0^1\left[\int_0^1\frac{dy}{1+x^2y^2}\right]\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\\ = \int_0^1\left[\int_0^1\frac{1}{1+x^2y^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\right]dy &= \int_0^1\left[\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{1+y^2\cos^2 t}\right]dy\\ = \int_0^1\left[\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+y^2+u^2}\right]dy &= \frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2}),\end{aligned}$$

这里作了变换 $x=\cos t$ 和 $u=\tan t$.

(10) 引入含参变量积分

$$I(a):=\int_0^1\frac{\ln(1+ax)}{1+x^2}dx,\quad -\frac{1}{2}\le\alpha\le\frac{1}{2}.$$

积分内求导得到

$$\begin{aligned}I'(a) &= \int_0^1\frac{x}{(1+ax)(1+x^2)}dx = \frac{1}{1+a^2}\int_0^1\left(\frac{-a}{1+ax}+\frac{a+x}{1+x^2}\right)dx\\ = \frac{1}{1+a^2}\left[-\ln(1+ax)\Big|_0^1+\int_0^1\frac{a+x}{1+x^2}dx\right] &= \frac{1}{1+a^2}\left[-\ln(1+a)+\int_0^1\frac{a+x}{1+x^2}dx\right]\\ &= \frac{1}{1+a^2}\left[-\ln(1+a)+a\arctan x\Big|_0^1+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1+a^2}\left[-\ln(1+a)+a\left(\frac{\pi}{4}-0\right)+\frac{1}{2}\ln 2\right] = \frac{\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}a-\ln(1+a)}{1+a^2}.$$

因此推出

$$I(1)-I(0)=\frac{\ln 2}{2}\int_0^1\frac{da}{1+a^2}+\frac{\pi}{4}\int_0^1\frac{ada}{1+a^2}-\int_0^1\frac{\ln(1+a)}{1+a^2}da$$

从而

$$I(1)=\frac{\ln 2}{2}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\ln 2-I(1) \implies I(1)=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

(11) 交换积分顺序得到

$$\begin{aligned}\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx &= \int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\left[\int_a^b x^y dy\right]dx\\ =\int_a^b\left[\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx\right]dy &= \int_a^b\left[\int_0^{+\infty}e^{-(1+y)t}\sin t\,dt\right]dy\\ =\int_a^b\frac{dy}{1+(1+y)^2} &= \arctan(1+b)-\arctan(1+a),\end{aligned}$$

这里作了变换 $x=e^{-t}$.

例 15.3

(Bessel 方程) 函数

$$u(x):=\int_0^\pi\cos(n\varphi-x\sin\varphi)d\varphi \tag{15.1.10}$$

满足二阶常微分方程

$$x^2u''(x)+xu'(x)+(x^2-n^2)u(x)=0. \tag{15.1.11}$$

回顾**第一卷第 5.6.6 小节** 中的椭圆积分.

例 15.4. (椭圆积分)

第二类完备椭圆积分定义为

$$E(k):=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta=\int_0^1\frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx,\quad 0\le k\le 1.$$

利用**例 14.14** (1) 得到

$$\sqrt{1-k^2x^2}=\sum_{n\ge 0}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{k^{2n}}{1-2n}x^{2n}$$

从而利用**定理 14.14** (1) 和 (5.4.30) 可得到

$$\begin{aligned}E(k) &= \sum_{n\ge 0}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{k^{2n}}{1-2n}\int_0^1\frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}dx\\ &= \sum_{n\ge 0}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{k^{2n}}{1-2n}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}\theta\,d\theta\\ &= \sum_{n\ge 0}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{k^{2n}}{1-2n}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

即得到

$$E(k)=\frac{\pi}{2}\sum_{n\geq 0}\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]^2\frac{k^{2n}}{1-2n}. \tag{15.1.12}$$

第一类完备椭圆积分定义为

$$K(k):=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\quad 0\leq k\leq 1.$$

同理可证

$$K(k)=\frac{\pi}{2}\sum_{n\geq 0}\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]^2 k^{2n}. \tag{15.1.13}$$

第三类完备椭圆积分定义为

$$\Pi(n,k):=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}(1-n\sin^2\theta)},\quad 0\leq k\leq 1.$$

练习 15.1

(1) 证明 (15.1.13).

(2) 验证如下等式

$$\begin{aligned}
E'(k) &= \frac{R(k)-K(k)}{k},\\
K'(k) &= \frac{E(k)}{k(1-k^2)}-\frac{K(k)}{k},\\
\Pi_n(n,k) &= \frac{E(k)+\frac{k^2-n}{n}K(k)+\frac{n^2-k^2}{n}\Pi(n,k)}{2(k^2-n)(n-1)},\\
\Pi_k(n,k) &= \frac{k}{n-k^2}\left[\frac{E(k)}{k^2-1}+\Pi(n,k)\right].
\end{aligned}$$

15.2 含参变量广义积分

假设二元函数 $f(x,y)$ 定义在区域 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 上 (当然可以把闭区间换成任意的区间 $Y\subset\mathbb{R}$), 并考虑**含参变量的广义积分**

$$I(y):=\int_a^{+\infty}f(x,y)\,dx. \tag{15.2.1}$$

称 $y_0\in[c,d]$ 为 $I(y)$ 的**收敛点 (point of convergence)** 如果广义积分

$$\int_a^{+\infty}f(x,y_0)\,dx$$

收敛. 所有的收敛点就构成了**收敛域 (domain of convergence)**.

例 15.5

(1) 在**注 15.1** (1) 我们知道对含参变量广义积分, 求积分和求导数不一定可以交换.

(2) 对含参变量广义积分来说, 求积分和求极限不一定可以交换. 考虑积分

$$I(y):=\int_0^{+\infty}xye^{-yx^2}\,dx,\quad y\geq 0.$$

则

$$I(0)=\int^{+\infty}\left[\lim_{y\to0+}xye^{-yx^2}\right]dx=0$$

但是

$$\lim_{y\to0+}I(y)=\lim_{y\to0+}\left[\frac{1}{2}e^{-yx^2}\Big|_0^{+\infty}\right]=\frac{1}{2}.$$

(3) 对含参变量广义积分来说, 积分顺序不一定可以交换. 考虑二元函数

$$f(x,y):=(2y-2xy^3)e^{-xy^2},\quad (x,y)\in[0,+\infty)\times[0,1].$$

从而得到

$$\int_0^1\left[\int_0^{+\infty}(2y-2xy^3)e^{-xy^2}dx\right]dy=\int_0^1 0\,dy=0$$

和

$$\int_0^{+\infty}\left[\int_0^1(2y-2xy^3)e^{-xy^2}dy\right]dx=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=1.$$

当然除了上面提到的含参变量广义积分 (无穷积分), 我们还可以定义**含参变量瑕积分**. 假设二元函数 $f(x,y)$ 定义在 $[a,b)\times[c,d]$ (其中 $[c,d]\subset\mathbb{R}$), 且对任意 $y\in Y$, 瑕积分

$$I(y):=\int_a^b f(x,y)\,dx \tag{15.2.2}$$

都存在.

15.2.1 含参变量广义积分的一致收敛

下面给出 (15.2.1) 和 (15.2.2) 的一致收敛的定义.

定义 15.1. (含参变量广义积分的一致收敛)

(1) 假设二元函数 $f(x,y)$ 定义在 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 上且对任意 $y\in[c,d]$ 无穷积分 (15.2.1) 都收敛. 称含参变量广义积分 (15.2.1) 关于 $y\in[c,d]$ 是**一致收敛的 (uniformly convergent)** 如果对任意 $\epsilon>0$ 存在常数 $A_0\ge a$ 使得当 $A>A_0$ 时有

$$\max_{c\le y\le d}\left|\int_A^{+\infty}f(x,y)\,dx\right|\le\epsilon. \tag{15.2.3}$$

(2) 假设二元函数 $f(x,y)$ 定义在 $[a,b)\times[c,d]$ 上且对任意 $y\in[c,d]$ 瑕积分 (15.2.2) 都收敛. 称含参变量广义积分 (15.2.2) 关于 $y\in[c,d]$ 是**一致收敛的 (uniformly convergent)** 如果对任意 $\epsilon>0$ 存在常数 $\delta\in(0,b-a)$ 使得当 $0<\eta<\delta$ 时有

$$\max_{c\le y\le d}\left|\int_{b-\eta}^b f(x,y)\,dx\right|\le\epsilon. \tag{15.2.4}$$

注 15.2

(1) 同理我们可以给出

$$\int_{-\infty}^a f(x,y)\,dx \quad 和 \quad \int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx$$

一致收敛的定义.

(2) 含参变量广义积分 (15.2.1) 在 $[c,d]$ 上不是一致收敛的 $\Longleftrightarrow$ 存在 $\epsilon_0>0$ 使得对任意 $A\ge a$ 存在 $A_0>A$ 和存在 $y_0\in[c,d]$ 有

$$\left|\int_{A_0}^{+\infty} f(x,y_0)\,dx\right|\ge\epsilon_0.$$

♣

例 15.6

(1) 证明含参变量广义积分

$$I(y)=\int_0^{+\infty} e^{-xy}dx$$

在 $[c,+\infty)$ 上一致收敛 ($c>0$), 但在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

证: 对任意 $A>c$ 有

$$0\le\int_A^{+\infty} e^{-xy}dy\le\frac{1}{x}e^{-xA}\le\frac{1}{c}e^{-cA}\to 0,\quad A\to+\infty.$$

因此, 对任意 $\epsilon>0$ 存在 $A_0>-\frac{1}{\delta}\ln(\delta\epsilon)$ 使得当 $A>A_0$ 和任意 $x\ge c$ 有

$$\left|\int_A^{+\infty} e^{-xY}dy\right|\le\frac{1}{c}e^{-cA}<\epsilon.$$

但是在 $(0,+\infty)$ 上不是一致收敛的. 取 $\epsilon_0=1/e$, $A_k=k$, $x_k=1/k\in(0,+\infty)$, 则得到

$$\left|\int_k^{+\infty} e^{-y/k}dy\right|=k\int_k^{+\infty} e^{-y/k}d(y/k)=k\left(-e^{-y/k}\Big|_k^{+\infty}\right)=\frac{k}{e}\ge\epsilon_0.$$

(2) 证明含参变量广义积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+y^2}$$

在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

证: 因为

$$\int_A^{+\infty}\frac{dx}{x^2+y^2}\le\int_A^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{A}<\epsilon$$

如果 $A>1/\epsilon$.

(3) 证明含参变量广义积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{y}dy$$

在 $[c,+\infty)$ 上一致收敛 $(c>0)$, 但在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

证: 对任意 $A>0$ 有

$$\int_A^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{y}dy=\int_{Ax}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du.$$

因为反常积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du\ \text{ 收敛},$$

所以对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $A_0 > 0$ 对任意 $A > A_0$ 和任意 $x \geq c$ 得到

$$\left|\int_A^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y} dy\right| < \epsilon.$$

另一方面, 对任意 $\epsilon_0 > 0$ 和任意 $M > 0$ 存在 $x > 0$ 满足

$$\left|\int_{Mx}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du\right| < \epsilon_0.$$

从而得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \epsilon_0 < \int_{Mx}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du \leq \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du + \epsilon_0.$$

选择

$$\epsilon_0 := \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du,$$

对任意 $M > 0$ 存在 $x > 0$ 满足

$$\left|\int_M^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y} dy\right| = \left|\int_{Mx}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du\right| \geq \epsilon_0.$$

(4) 证明含参变量广义积分

$$\Phi(x) = \int_0^{+\infty} x^\alpha y^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+x)y} dy, \quad \alpha, \beta > 0$$

在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛的.

证: 计算得到

$$\int_A^\infty (xy)^\alpha e^{-xy} y^{\beta+1} e^{-y} dy \leq M_\alpha \int_A^\infty y^{\beta+1} e^{-y} dy$$

这里 $M_\alpha = \max_{t\geq 0} t^\alpha / e^t = \alpha^\alpha / e^\alpha$. 因为

$$\int_0^\infty y^{\beta+1} e^{-y} dy = \Gamma(\beta+2),$$

所以

$$\int_A^\infty y^{\beta+1} e^{-y} dy < \epsilon, \quad A \gg 1.$$

15.2.2 含参变量广义积分的一致收敛的判别法

本小节给出一致收敛的几个常用判别法, 主要是针对含参变量广义积分 (15.2.1).

定理 15.2. (Cauchy 判别法)

含参变量广义积分 (15.2.1) 在 $[c, d]$ 上一致收敛 $\Longleftrightarrow$ 对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $A_0 \geq a$ 使得对任意 $A_1, A_2 > A_0$ 有

$$\max_{c \leq y \leq d} \left|\int_{A_1}^{A_2} f(x, y) dx\right| < \epsilon.$$

证: 假设含参变量广义积分 (15.2.1) 在 $[c, d]$ 上一致收敛, 则利用不等式

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x, y) dx\right| \leq \left|\int_{A_1}^{+\infty} f(x, y) dx\right| + \left|\int_{A_2}^{+\infty} f(x, y) dx\right|$$

推出所需要的不等式.

反之, 给定 $y \in [c,d]$. 任意 $\epsilon > 0$ 存在 $A_0 \geq a$ 只要 $A_1, A_2 > A_0$ 就有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)\,dx\right| < \epsilon.$$

根据反常积分的 Cauchy 判别法, **注 5.7** (1), 可知

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

对任给 $y \in [c,d]$ 都收敛. 令 $A_2 \to +\infty$ 得到

$$\max_{c \leq y \leq d}\left|\int_{A_1}^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| \leq \epsilon, \quad A_1 > A_0.$$

从而含参变量积分 (15.2.1) 在 $[c,d]$ 上一致收敛. □

作为直接推论得到, 如果存在 $\epsilon_0 > 0$, $A_n, A_n' \to +\infty$, 和 $y_n \in [c,d]$, 使得

$$\left|\int_{A_n}^{A_n'} f(x,y_n)\,dx\right| \geq \epsilon_0,$$

则含参变量积分 (15.2.1) 在 $[c,d]$ 上非一致收敛.

根据定义可知, 绝对一致收敛必是一致收敛, 即若含参变量积分

$$\int_a^{+\infty} |f(x,y)|dx$$

在 $[c,d]$ 上一致收敛, 则含参变量广义积分 (15.2.1) 在 $[c,d]$ 上一致收敛.

定理 15.3. (Weierstrass 判别法)

假设二元函数 $f(x,y)$ 满足条件

$$|f(x,y)| \leq g(x), \quad x \geq a, \quad y \in [c,d]$$

且无穷积分

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

收敛, 则含参变量广义积分 (15.2.1) 在 $[c,d]$ 上一致收敛.

证: 显然. □

定理 15.4. (Abel 和 Dirichlet 判别法)

假设二元函数 $f(x,y), g(x,y)$ 都定义在 $[a,+\infty) \times [c,d]$ 上. 如果

(1) **(Abel)** 含参变量广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

在 $[c,d]$ 上一致收敛, 且 $g(x,y)$ 逐点单调 (对任意 $y \in [c,d]$, 函数 $g(x,y)$ 关于 x 是单调的) 和一致有界 (即存在正数 $M > 0$ 使得 $|g(x,y)| \leq M$ 对任意 $(x,y) \in [a,+\infty) \times [c,d]$ 都成立), 或者

(2) **(Dirichlet)** 含参变量积分列
$$\left\{\int_a^A f(x,y)\,dy\right\}_{A\geq a}$$
一致有界 (即存在正数 $M>0$ 使得
$$\left|\int_a^A f(x,y)\,dy\right|\leq M,\quad \forall\, y\in[c,d],\ \forall\, A>a$$
成立), 且 $g(x,y)$ 逐点单调和一致趋于 0 (即对任意 $\epsilon>0$ 存在 $A_0>a$ 使得对任意 $x\geq A_0$ 都有 $\max_{c\leq y\leq d}|g(x,y)|\leq\epsilon$),

则含参变量广义积分
$$\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\,dx$$
在 $[c,d]$ 上一致收敛.

证: 在这里我们只给出 (2) 的证明. 根据积分中值定理, **定理 5.14**, 对任意 $A_2>A_1>a$ 存在 $\xi\in(A_1,A_2)$ 满足
$$\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)g(x,y)\,dx=g(A_1,y)\int_{A_1}^{\xi} f(x,y)\,dx+g(A_2,y)\int_{\xi}^{A_2} f(x,y)\,dx.$$
因为 $g(x,y)$ 一致趋于 0, 对任意 $\epsilon>0$ 我们可以找到 $A_0>a$ 使得 $|g(x,y)|<\epsilon/4M$ 对任意 $x>A_0$ 和任意 $y\in[c,d]$ 都成立. 因此只要 $A_2>A_1>A_0$ 就有
$$\begin{aligned}\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)g(x,y)\,dx\right| &\leq \frac{\epsilon}{4M}\left|\int_a^{\xi} f(x,y)\,dx-\int_a^{A_1} f(x,y)\,dx\right|\\ +\frac{\epsilon}{4M}\left|\int_a^{A_2} f(x,y)\,dx-\int_a^{\xi} f(x,y)\,dx\right| &\leq \frac{\epsilon}{4M}(2M+2M) = \epsilon.\end{aligned}$$
从而根据**定理 15.2** 得到一致收敛性. □

对含参变量的瑕积分, 同样有 Cauchy 判别法、Weierstrass 判别法、Abel-Dirichlet 判别法. 当然我们也可以把含参变量的瑕积分通过变量替换写成含参变量的无穷积分, 这样就可以使用上述的判别法.

定理 15.5. (Dini)

假设函数 $f(x,y)\in C([a,+\infty)\times[c,d])$ 且 $f(x,y)\geq 0$. 如果含参变量广义积分 (15.2.1) 在 $[c,d]$ 上连续, 则其在 $[c,d]$ 上一致收敛.

证: 否则的话, 存在 $\epsilon_0>0$ 使得对任意 $n>a$ 我们总可以找到 $y_n\in[c,d]$ 满足
$$\int_n^{\infty} f(x,y_n)\,dx\geq\epsilon_0.$$
闭区间 $[c,d]$ 的紧性可以使我们不妨假设 $y_n\to y_0\in[c,d]$, 当 $n\to\infty$. 因为反常积分
$$\int_a^{\infty} f(x,y_0)\,dx$$

是收敛的, 所以可以找到 $A > a$ 使得

$$\int_A^\infty f(x, y_0)\,dx < \frac{\epsilon_0}{2}$$

成立. 当 $n > A$, 得到

$$\int_A^\infty f(x, y_n)\,dx \geq \int_n^\infty f(x, y_n)\,dx \geq \epsilon_0.$$

连续性表明

$$\int_A^\infty f(x, y)\,dx = \int_a^\infty f(x, y)\,dx - \int_a^A f(x, y)\,dx$$

也是连续的从而推出

$$\epsilon_0 \leq \lim_{n\to\infty} \int_A^\infty f(x, y_n)\,dx = \int_A^\infty f(x, y_0)\,dx < \frac{\epsilon_0}{2}$$

产生矛盾! □

例 15.7

(1) 证明含参变量广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{1+x^2}dx$$

在 $(0, +\infty)$ 上一致收敛.

证: 因为 $|\cos(xy)/(1+x^2)| \leq 1/(1+x^2)$ 且

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2},$$

所以在 $(0, +\infty)$ 上一致收敛. □

(2) 证明含参变量广义积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \sin x\,dx$$

在 $[a, +\infty)$ $(a > 0)$ 上一致收敛, 但在 $(0, +\infty)$ 上不是一致收敛.

证: 因为当 $t \geq a$ 时得到

$$\left|e^{-tx^2} \sin x\right| \leq e^{-ax^2} \quad 且 \quad \int_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

所以在 $[a, +\infty)$ 上一致收敛. 但是在 $(0, +\infty)$ 却不是一致收敛, 这是因为取

$$A_n := 2n\pi + \frac{\pi}{4}, \quad A_n' = 2n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad t_n = \frac{1}{(A_n')^2},$$

我们得到

$$\int_{A_n}^{A_n'} e^{-t_n x^2} \sin x\,dx \geq e^{-1} \sin A_n (A_n' - A_n) = \frac{\pi\sqrt{2}}{8e} > 0. \quad \square$$

(3) 证明含参变量广义积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx$$

在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

证: 因为

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

收敛, 根据 Abel 判别法只要证明 e^{-xy} 是逐点单调和一致有界. 但是这两件事是显然的. □

(4) 讨论含参变量广义积分

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}dx$$

关于 p 在 $(0,2)$ 上的一致收敛性.

解: 做变量替换 $t=1/x$ 得到

$$I:=\int_0^1 \frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}dx=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{2-p}}dt.$$

根据反常积分的 Dirichlet 判别法可知当 $0<p<1$ 时 I 绝对收敛,

而当 $1\le p<2$ 时 I 条件收敛. 根据含参变量广义积分的 Dirichlet 判别法可知 I 是在任意 $(0,p_0]$ 上都是一致收敛, 这里 $p_0\in(0,2)$. 但是 I 在 $(0,2)$ 不是一致收敛的, 这是因为若取

$$A_n=2n\pi,\quad A_n'=(2n+1)\pi,\quad p_n=2-\frac{1}{n},$$

则得到

$$\left|\int_{A_n}^{A_n'}\frac{\sin t}{t^{2-p_n}}dt\right|\ge\frac{1}{[(2n+1)\pi]^{2-p_n}}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin t\,dt=\frac{2}{[(2n+1)\pi]^{1/n}}\to 2.\quad\square$$

(5) 讨论含参变量广义积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{x^p}dx,\quad 0<p<2,$$

关于 y 在 $[0,+\infty)$ 上的一致收敛性.

解: 首先将上述积分拆成两部分

$$I:=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x,y)}{x^p}dx=\int_0^1\frac{\sin(xy)}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{x^p}dx=:I_1+I_2.$$

对 I_1, 因为

$$\left|\frac{\sin(xy)}{x^p}\right|\le\frac{1}{x^p},\quad\left|\frac{\sin(xy)}{x^p}\right|\le\frac{xy}{x^p},$$

所以当 $0<p<1$ 时 I_1 在 $[0,+\infty)$ 上是一致收敛的; 而当 $1\le p<2$ 时 I_1 在 $[0,+\infty)$ 内闭一致收敛, 但在 $[0,+\infty)$ 上不是一致收敛的. 这是因为

$$\int_{\pi/4n}^{\pi/2n}\frac{\sin(nx)}{x^p}dx\ge\left(\frac{2n}{\pi}\right)^p\frac{\sqrt{2}}{2n}\ge\frac{\sqrt{2}}{\pi},\quad\forall\, n\ge 1.$$

对 I_2, 当 $p>1$ 时 I_2 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛. 当 $0<p\le 1$ 时, 函数 $1/x^p$ 关于 x 是单调递减且趋于 0. 因为

$$\left|\int_1^A\sin(xy)\,dx\right|=\left|\frac{\cos y-\cos(Ay)}{y}\right|\le\frac{2}{y},$$

根据 Dirichlet 判别法可知此时 I_2 在任意 $[a,+\infty)$ 上是一致收敛的, $a>0$. 然而, I_2 在 $[0,+\infty)$ 不是一致收敛的, 这是因为

$$\left|\int_{n\pi}^{3n\pi/2}\frac{\sin(x/n)}{x^p}dx\right|>\frac{1}{(3n\pi/2)^p}\left|\int_{n\pi}^{3n\pi/2}\sin(x/n)dx\right|$$

$$= \frac{n^{1-p}}{(3\pi/2)^p} \geq (2/3\pi)^p.$$

综上所述，当 $0 < p < 2$ 时含参变量积分在 $[0, +\infty)$ 上内闭一致收敛但在 $[0, +\infty)$ 上不是一致收敛. □

(6) 研究含参变量广义积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-(x+1)y} \sin y \, dy, \quad x \geq 0,$$

的一致收敛性.

解: 因为 $|e^{-(x+1)y} \sin y| \leq e^{-(x+1)y} \leq e^{-y}$, 所以一致收敛. □

(7) 研究含参变量广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(xy)}{a^2 + x^2} dx, \quad a > 0, \quad y \geq y_0 > 0,$$

的一致收敛性.

解: 把原来积分写成

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{a^2 + x^2} \sin(xy) \, dx.$$

因为

$$\left| \int_0^A \sin(xy) \, dx \right| = \frac{|1 - \cos(Ay)|}{y} \leq \frac{2}{y_0}, \quad \frac{x}{a^2 + x^2} \text{ 逐点单调且一致收敛到 } 0,$$

根据 Dirichlet 判别法这个含参变量积分在 $[y_0, +\infty)$ 上一致收敛. □

(8) 研究含参变量广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{1 + x^y} dx, \quad y \geq 0,$$

的一致收敛性.

解: 把原来积分写成

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{1 + x^y} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^y} \sin(x^2) \, dx.$$

因为

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \text{ 收敛且 } \frac{1}{1 + x^y} \text{ 逐点单调且一致有界,}$$

所以根据 Abel 判别法这个含参变量广义积分在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛. □

(9) 研究含参变量广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{x^p} dx, \quad -1 < p < 1,$$

的一致收敛性.

解: 做分解

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{x^p} dx = \int_0^1 \frac{\cos(x^2)}{x^p} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{x^p} dx =: I_1 + I_2.$$

在 I_2 中做变换 $t = x^2$ 得到

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{(p+1)/2}} dt;$$

从而可知 I_2 在任意 $[p_0, 1)$ 上一致收敛, 这里 $p_0 \in (-1, 1)$. 同理在 I_1 中做变换 $t = x^2$ 得到

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\cos t}{t^{(p+1)/2}} dt;$$

从而可知 I_1 在任意 $(-1, p_1]$ 上一致收敛, 这里 $p_1 \in (-1, 1)$. 综上所述, 这个含参变量广义积分在 $(-1, 1)$ 内闭一致收敛. □

(10) 研究含参变量广义积分

$$\int_0^{+\infty} x^y e^{-x} dx, \quad a \le y \le b,$$

的一致收敛性.

解: 只要研究含参变量广义积分

$$\int_1^{+\infty} x^y e^{-x} dx, \quad a \le y \le b.$$

此时下列不等式

$$0 < x^y e^{-x} \le x^b e^{-x}$$

告诉我们

$$\int_1^{+\infty} x^b e^{-x} dx \le \int_1^{+\infty} \frac{x^b}{x^n/n!} dx = n! \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{n-b}} < +\infty,$$

这里取任意自然数 n 满足条件 $n - b \ge 2$ 即可. 因此这个含参变量广义积分在 $[a, b]$ 上一致收敛. □

(11) 研究含参变量广义积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{y}{(x+y)^2} dx, \quad y \ge 0,$$

的一致收敛性.

解: 对任意 $A > 0$ 取 $y = A > 0$ 得到

$$\left| \int_A^{+\infty} \frac{y}{(x+y)^2} dx \right| = \frac{y}{A+y} = \frac{1}{2}.$$

因此含参变量广义积分在 $[0, +\infty)$ 上不是一致收敛. □

15.2.3 含参变量广义积分的基本性质

假设含参变量广义积分

$$\int_a^{\infty} f(x, y) dx$$

关于 y 在 $[c, d]$ 上一致收敛. 令

$$I(y) := \int_a^{\infty} f(x, y) dx, \quad y \in [c, d].$$

任取严格递增数列 $\{a_n\}_{n \ge 0}$ 满足 $a_0 = a$ 和 $a_n \to \infty$, 并令

$$u_n(y) := \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x, y) dx, \quad n \ge 1. \tag{15.2.5}$$

则得到

$$F(y)=\sum_{n\geq 1}u_n(y). \tag{15.2.6}$$

作为推论得到

定理 15.6

含参变量广义积分 (15.2.1) 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛 $\Longleftrightarrow$ 对任意满足 $a_0=a$ 和 $\lim_{n\to+\infty}a_n=+\infty$ 的严格递增数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$, 函数项级数 $\sum_{n\geq 0}u_n(y)$ 在 $[c,d]$ 上一致收敛, 这里 $u_n(y)$ 是由 (15.2.3) 所定义.

下面我们来证明含参变量广义积分满足连续性、可积性和可微性.

定理 15.7

(1) **(连续性)** 若 $f(x,y)\in C([a,+\infty)\times[c,d])$ 且含参变量广义积分 (15.2.1) 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛, 则

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^{\infty}f(x,y)\,dx=\int_a^{\infty}\lim_{y\to y_0}f(x,y)\,dx \tag{15.2.7}$$

对任意 $y_0\in[c,d]$ 都成立.

(2) **(可积性)** 若 $f(x,y)\in C([a,+\infty)\times[c,d])$ 且含参变量广义积分 (15.2.1) 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛, 则

$$\int_c^d dy\int_a^{\infty}f(x,y)\,dx=\int_a^{\infty}dx\int_c^d f(x,y)\,dy. \tag{15.2.8}$$

(3) **(可微性)** 若 $f(x,y),f_y(x,y)\in C([a,+\infty)\times[c,d])$, 含参变量广义积分 (15.2.1) 对任意 $y\in[c,d]$ 都收敛, 且含参变量广义积分

$$\int_a^{\infty}f_y(x,y)\,dx$$

关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛, 则 (15.2.1) 在 $[c,d]$ 上可导且

$$\frac{d}{dy}\int_a^{\infty}f(x,y)\,dx=\int_a^{\infty}f_y(x,y)\,dx. \tag{15.2.9}$$

证: (1) 一致收敛推出函数项级数 $\sum_{n\geq 1}u_n(y)$ 关于 $y\in[c,d]$ 是一致收敛的. 由于

$$u_n(y)=\int_{a_{n-1}}^{a_n}f(x,y)\,dx$$

是连续的, 所以函数项级数 $\sum_{n\geq 1}u_n(y)=I(y)$ 是连续的. 则含参变量广义积分的连续性可由 (14.2.2) 得到.

当然我们可以直接证明. 根据计算可得

$$\begin{aligned}|I(y+\Delta y)-I(y)| &= \left|\int_a^{+\infty}[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]dx\right|\\ &\leq \int_A^{+\infty}|f(x,y+\Delta y)-f(x,y)|dx+\left|\int_a^A[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]dx\right|\\ &\leq \left|\int_a^A[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]dx\right|+\left|\int_A^{+\infty}f(x,y+\Delta y)\,dx\right|+\left|\int_A^{+\infty}f(x,y)\,dx\right|.\end{aligned}$$

一致收敛性告诉我们对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $A_0 > a$ 对任意 $A > A_0$ 和任意 $y, y + \Delta y \in [c, d]$ 有

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x, y + \Delta y)\,dx\right| < \epsilon, \quad \left|\int_A^{+\infty} f(x, y)\,dy\right| < \epsilon.$$

因为 $f(x, y) \in C([a, +\infty) \times [c, d])$, 所以

$$\int_a^A f(x, y)\,dx \in C([c, d]),$$

从而存在 $\delta > 0$ 对任意 $|\Delta y| < \delta$ 和对任意 $y \in [c, d]$ 有

$$\left|\int_a^A [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]dx\right| < \epsilon.$$

故 $|I(y + \Delta y) - I(y)| \leq \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon$.

(2) 这是因为

$$\begin{aligned}\int_c^d \sum_{n\geq 1} u_n(y)\,dy &= \sum_{n\geq 1}\int_c^d u_n(y)\,dy = \sum_{n\geq 1}\int_{a_{n-1}}^{a_n} dx \int_c^d f(x, y)\,dy \\ &= \int_a^{\infty} dx \int_c^d f(x, y)\,dy.\end{aligned}$$

(3) 定义

$$G(y) := \int_a^{\infty} f_y(x, y)\,dx.$$

根据 (1) 函数 $G(y)$ 是连续的. 利用 (1) 得到

$$\int_c^y G(z)\,dz = \int_c^y dz \int_a^{\infty} f_z(x, z)\,dx = \int_a^{\infty} dx \int_c^y f_z(x, z)\,dx = I(y) - I(c).$$

故 $G(y) = I'(y)$. □

注 15.3

(1) **定理 15.7** (1) 的逆定理不一定正确. 比如考察函数 $f(x, a) := e^{-ax}\sin x \in C([0, +\infty) \times (0, 1/2])$, 显然

$$\int_0^{+\infty} f(x, a)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin x\,dx = \frac{1}{1 + a^2} \in C((0, 1/2]).$$

但是含参变量广义积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin x\,dx$$

关于 a 在 $(0, 1/2]$ 上不是一致收敛的, 这是因为

$$\begin{aligned}\left|\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} e^{-[(2n+1)\pi]^{-1}x}\sin x\,dx\right| &= \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} e^{\frac{-x}{(2n+1)\pi}}\sin x\,dx \\ &\geq \frac{1}{e}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin x\,dx = \frac{2}{e}.\end{aligned}$$

(2) 如果二元函数 $f(x, y) \in C([a, +\infty) \times [c, d])$ 且非负的 (或者非正的), 则结合**定理 15.5** 和**定理 15.7** (1), 可知 (15.2.1) 连续当且仅当参变量广义积分一致收敛. ♣

我们可以把**定理 15.7** (2) 中的定义域改成 $[a, +\infty) \times [c, +\infty)$, 但此时则必须增加额外条件来保证 (15.2.8) 成立.

定理 15.8

若 $f(x,y)\in C([a,+\infty)\times[c,+\infty))$, 含参变量广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

关于 y 在 $[c,C]\subset[c,+\infty)$ 上一致收敛, 含参变量广义积分

$$\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

关于 x 在 $[a,A]\subset[a,+\infty)$ 上一致收敛, 且

$$\int_a^{+\infty} dx\int_c^{+\infty}|f(x,y)|dy \quad 和 \quad \int_c^{+\infty} dy\int_a^{+\infty}|f(x,y)|dx$$

中至少有一个存在, 则

$$\int_a^{+\infty} dx\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int_c^{+\infty} dy\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx. \tag{15.2.10}$$

♡

证: 不妨假设

$$\int_a^{+\infty} dx\int_c^{+\infty}|f(x,y)|dy$$

存在. 如果 (15.2.10) 成立, 即

$$\begin{aligned}\int_c^{+\infty} dy\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx &= \lim_{C\to+\infty}\int_c^{C} dy\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\\ &= \lim_{C\to+\infty}\int_a^{+\infty} dx\int_c^{C} f(x,y)\,dy = \int_a^{\infty} dx\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy\end{aligned}$$

这里用到了含参变量广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

关于 y 在 $[c,C]\subset[c,+\infty)$ 上一致收敛, 和**定理 15.7** (2). 因此只需要证明

$$\lim_{C\to+\infty}\int_a^{+\infty} dx\int_C^{+\infty} f(x,y)\,dy=0.$$

但是注意到上面推导是基于积分

$$\int_a^{+\infty} dx\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

收敛的, 所以首先来说明该积分的收敛性. 根据**定理 15.7** (1) 可知含参变量广义积分

$$\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

在任意闭区间 $[A_1,A_2]\subset[a,+\infty)$ 上是连续的, 从而在整个区间 $[a,+\infty)$ 上是连续的. 因为

$$\left|\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy\right|\le\int_c^{+\infty}|f(x,y)|dy,$$

所以根据比较判别法可知

$$\int_a^{+\infty} dx\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

绝对收敛从而必是收敛.

因为
$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} |f(x,y)|dy$$
存在, 所以可做分解
$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} dx \int_C^{+\infty} f(x,y)\,dy &= \int_a^A dx \int_C^{+\infty} f(x,y)\,dy + \int_A^{+\infty} dx \int_C^{+\infty} f(x,y)\,dy \\ &=: I_1 + I_2,\end{aligned}$$
且对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $A_0 \geq a$ 对任意 $A > A_0$ 都有
$$|I_2| \leq \int_A^{+\infty} dx \int_C^{+\infty} |f(x,y)|dy \leq \int_A^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} |f(x,y)|dy < \epsilon.$$
对上述 $A > A_0$, 由于
$$\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$$
关于 x 在 $[a,A]$ 上一致收敛, 我们可以找到 $C_0 \geq c$ 使得对任意 $C > C_0$ 都有
$$\left|\int_C^{+\infty} f(x,y)\,dy\right| < \frac{\epsilon}{A-a}, \quad \forall\, x \in [a,A].$$
从而最后得到
$$\left|\int_a^{+\infty} dx \int_C^{+\infty} f(x,y)\,dy\right| \leq \epsilon + \int_a^A \frac{\epsilon}{A-a}dx < 2\epsilon$$
只要 $C > C_0$. □

例 15.8

(1) 确定函数
$$I(y) := \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^y}dx$$
的连续范围.

解: 做分解
$$I(y) = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^y}dx + \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^y}dx =: I_1 + I_2.$$
考虑极限
$$\lim_{x\to+\infty} x^p \frac{\ln(1+x)}{x^y} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{y-p}} = 0, \quad y-p>0.$$
根据反常积分收敛判别法, 当 $p>1$ 且 $y-p>0$ 时 I_1 收敛, 从而当 $y>1$ 时 I_1 收敛. 另一方面, 当 $y \leq 1$ 时, 取 $p=y$ 则推出 I_1 发散. 同理考虑极限
$$\lim_{x\to0+} x^p \frac{\ln(1+x)}{x^y} = \lim_{x\to0+} \frac{x^{p+1}}{x^y}\text{存在}, \quad p+1-y \geq 0.$$
此时仅当 $y<2$ 时 I_1 收敛. 综上可得, $I(y)$ 的定义域是开区间 $(1,2)$.
要证 $I(y)$ 在 $(1,2)$ 内连续, 只要证明 $I(y)$ 在 $(1,2)$ 内闭连续即可, 即对任意闭区间 $[a,b] \subset (1,2)$ 证明 $I(y) \in C([a,b])$. 对 I_1 根据
$$0 < \frac{\ln(1+x)}{x^y} \leq \frac{\ln(1+x)}{x^a}, \quad \text{任意 } x \geq 1,$$
可知 I_1 在 $[a,b]$ 上一致收敛. 同理可证 I_2 也在 $[a,b]$ 上一致收敛. 因此 $I(y)$ 在 $[a,b]$ 上连续. □

(2) 求**Dirichlet 积分**

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

的值.

证: 形式上的推导见**例 15.1**. 但是我们要验证下面两件事:

$$I(\alpha)\in C([0,+\infty)),\quad \int_0^{+\infty}\left(e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\right)'_\alpha dx \text{ 在 } (0,+\infty) \text{ 内闭一致收敛}.$$

根据**例 15.7** (3) 可知 $I(\alpha)\in C([0,+\infty))$. 因为

$$\left(e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\right)'_\alpha=-e^{-\alpha x}\sin x,$$

所以根据 Weierstrass 判别法得到

$$\int_0^{+\infty}\left(e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\right)'_\alpha dx$$

在任意区间 $[\alpha_0,+\infty)$ 上一致收敛从而在 $(0,+\infty)$ 内闭一致收敛.

类似可证

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(\alpha).\quad\Box \tag{15.2.11}$$

(3) 求反常积分

$$I:=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx$$

的值.

解: 利用分部积分得到

$$\begin{aligned}I &= 2x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\Big|_0^{+\infty}-2\int_0^{+\infty}2x\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}dx\\ &= -2\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx+2I \quad\Longrightarrow\quad I=\pi.\quad\Box\end{aligned}$$

(4) 求反常积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\cos(\lambda x)\,dx$$

的值.

解: 根据

$$\sin x\cos(\lambda x)=\frac{\sin[(1-\lambda)x]+\sin[(1+\lambda)x]}{2},$$

得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\cos(\lambda x)\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin[(1-\lambda)x]}{x}dx+\int_0^{+\infty}\frac{\sin[(1+\lambda)x]}{x}dx.$$

从 (15.2.11) 得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\cos(\lambda x)\,dx=\frac{\pi}{2}[\mathrm{sgn}(1-\lambda)+\mathrm{sgn}(1+\lambda)]=\begin{cases}0, & |\lambda|>1,\\ \pi/2, & |\lambda|=1,\\ \pi, & |\lambda|<1.\end{cases}\quad\Box$$

(5) 求**Euler-Poisson 积分**

$$I := \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

的值.

解: 利用二重积分法求解课参见**例 5.22** (2) 或**例 13.6** (1). 现在考虑利用含参变量广义积分法来求解. 定义函数

$$\varphi(x) := \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+u^2)}}{1+u^2} dy, \quad f(x) := \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2.$$

计算得到

$$\varphi'(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+u^2)}[-2x(1+u^2)]}{1+u^2} du = -2\int_0^1 xe^{-x^2(1+u^2)} du$$

和

$$f'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt = 2\int_0^x e^{-(t^2+x^2)} dt = 2\int_0^1 xe^{-x^2(1+u^2)} du.$$

因此 $\varphi'(x) + f'(x) = 0$ 和 $f(x) + \varphi(x) = C$, 其中 C 是常数. 由于

$$C = f(0) + \varphi(0) = \varphi(0) = \int_0^1 \frac{dy}{1+u^2} = \frac{\pi}{4},$$

我们得到

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \varphi(x).$$

令 $x \to +\infty$ 得到

$$I^2 = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{4} - \lim_{x\to+\infty} \varphi(x).$$

因为含参变量积分

$$\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+u^2)}}{1+u^2} du$$

一致收敛, 所以

$$I^2 = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x^2(1+u^2)}}{1+u^2} du = \frac{\pi}{4} \quad I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \ \Box$$

(6) 考察函数

$$F(x) := e^{x^2/2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt, \quad x \geq 0.$$

求极限 $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ 并证明函数 $F(x)$ 单调递减.

解: 计算可得

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt}{e^{-x^2/2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-e^{-x^2/2}}{-xe^{-x^2/2}} = 0$$

和

$$\begin{aligned} F'(x) &= xe^{x^2/2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt - e^{x^2/2} e^{-x^2/2} = \int_x^{+\infty} xe^{\frac{x^2-t^2}{2}} dt - 1 \\ &\leq \int_x^{+\infty} te^{\frac{x^2-t^2}{2}} dt - 1 = -e^{\frac{x^2-t^2}{2}}\Big|_{t=x}^{+\infty} - 1 = 0. \ \Box \end{aligned}$$

(7) 假设函数 $f(x)\in C([-\infty,+\infty))$, $f>0$, 且对任意 $t\in\mathbb{R}$ 都有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(x)\,dx \le 1.$$

证明

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \frac{b-a}{2}+1,\quad \forall\, a<b.$$

证: 根据假设条件得到

$$\int_a^b dt \int_a^b e^{-|t-x|} f(x)\,dx \le \int_a^b dt = b-a.$$

交换积分顺序得到

$$b-a \ge \int_a^b f(x)\left[\int_a^b e^{-|t-x|}dt\right]dx = \int_a^b f(x)\left(2-e^{a-x}-e^{x-b}\right)dx.$$

故

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \frac{b-a}{2}+\frac{1}{2}\left[\int_a^b e^{a-x} f(x)\,dx + \int_a^b e^{x-b} f(x)\,dx\right];$$

但是

$$\int_a^b e^{a-x} f(x)\,dx = \int_a^b e^{-|a-x|} f(x)\,dx \le 1$$

和

$$\int_a^b e^{x-b} f(x)\,dx = \int_a^b e^{-|b-x|} f(x)\,dx \le 1,$$

我们得到

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \frac{b-a}{2}+1. \quad \square$$

(8) 证明对任意 $b\in(0,1)$, 含参变量广义积分

$$I(\alpha) := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{|\sin x|^\alpha}dx$$

关于 α 在 $[0,b]$ 上一致收敛.

证: 把积分改写成级数形式

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \sum_{n\ge 0}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{e^{-\alpha}}{|\sin x|^\alpha}dx = \sum_{n\ge 0} e^{-n\pi}\int_0^\pi \frac{e^{-t}}{\sin^\alpha t}dt \\ &= \frac{1}{1-e^{\pi}}\int_0^\pi \frac{e^{-t}}{\sin^\alpha t}dt = \frac{1}{1-e^{-\pi}}\left[\int_0^{\pi/2} \frac{e^{-t}}{\sin^\alpha t}dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{e^{-t}}{\sin^\alpha t}dt\right]. \end{aligned}$$

当 $0\le t\le \pi/2$ 时有不等式 $\sin t \ge 2t/\pi$ 从而得到

$$\int_0^{\pi/2} \frac{e^{-t}}{\sin^\alpha t}dt \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \int_0^{\pi/2} t^{-\alpha}e^{-t}dt.$$

由于

$$t^{-\alpha} \le \begin{cases} t^{-b}, & 0<t<1, \\ 1, & t\ge 1, \end{cases}$$

因此含参变量积分

$$\int_0^{\pi/2} \frac{e^{-t}}{\sin^\alpha t} dt$$

关于 α 在 $[0, b]$ 上一致收敛. 同理可证含参变量积分

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{e^{-t}}{\sin^\alpha t} dt$$

关于 α 在 $[0, b]$ 上也是一致收敛. □

(9) 证明**Fresnel 积分**

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx = \int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

证: 做变量替换 $t = x^2$ 得到

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt \\ = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} du\right) dt &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} \left(e^{-tu^2} \sin t\right) dt \\ = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{-tu^2} \sin t\,dt\right] du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\end{aligned}$$

这里利用了**定理 15.8**. □

(10) 求下面积分的值:

$$A := \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx, \quad B_n := \int_0^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{e^{2\pi x}-1} dx\ (n \geq 1)$$

和

$$C := \int_0^{+\infty} \frac{\sin(mx)}{e^{2\pi x}-1} dx\ (m > 0).$$

解: 因为

$$\frac{\ln x}{1-x^2} = \sum_{n\geq 0} x^{2n} \ln x, \quad 0 < x < 1,$$

所以

$$\begin{aligned}A &= \sum_{n\geq 0} \int_0^1 x^{2n} \ln x\,dx = \sum_{n\geq 0} \int_0^1 \frac{\ln x}{1n+1} d(x^{2n+1}) = \sum_{n\geq 0} -\int_0^1 \frac{x^{2n}}{2n+1} dx \\ &= -\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = -\left[\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\right] = -\left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24}\right) = -\frac{\pi^2}{8}.\end{aligned}$$

因为

$$\frac{x^{2n-1}}{e^{2\pi x}-1} = \sum_{k\geq 1} x^{2n-1} e^{-2k\pi x},$$

所以

$$B = \sum_{k\geq 1} \int_0^{+\infty} x^{2n-1} e^{-2k\pi x} dx = \sum_{k\geq 1} \frac{(2n-1)!}{(2k\pi)^{2n}} = \frac{(2n-1)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^{2n}}.$$

利用 (14.3.15) 得到 $B = B_n/4n$.

因为

$$\frac{\sin(mx)}{e^{2\pi x}-1}=\sum_{k\ge1}e^{-2k\pi x}\sin(mx),$$

所以

$$\begin{aligned}C &= \sum_{k\ge1}\int_0^{+\infty}e^{-2k\pi x}\sin(mx)\,dx = \sum_{k\ge1}\frac{m}{(2k\pi)^2+m^2} = \frac{1}{4}\coth\frac{m}{2}-\frac{1}{2m}\\ &= \frac{1}{4}\frac{e^m+1}{e^m-1}-\frac{1}{2m} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^m-1}-\frac{1}{m}+\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

这里利用了 (14.3.12). □

15.3 * 二探 Euler 积分

本节部分内容取自参考文献中的谭琳的专著. Gamma 函数 $\Gamma(s)$ 定义为

$$\Gamma(s):=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx,\quad s>0.$$

在**第一卷第 5.5.4 小节**我们已经证明了 $\Gamma(s)$ 在 $s>0$ 时有定义. 因为

$$\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\ln x\,dx$$

在 $(0,+\infty)$ 内闭一致收敛, 因此 $\Gamma'(s)\in C((0,+\infty))$. 同理可证

$$\Gamma(s)\in C^\infty((0,+\infty)),\quad \Gamma^{(n)}(s)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}(\ln x)^s dx. \tag{15.3.1}$$

因为 γ 是 Euler 常数

$$\gamma:=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{1\le k\le n}\frac{1}{k}-\ln n\right)$$

所以得到

$$\Gamma'(1)=-\int_0^1\frac{1-e^{-u}-e^{-\frac{1}{u}}}{u}dy=-\gamma. \tag{15.3.2}$$

事实上根据 (15.3.1) 有

$$\Gamma'(1)=\int_0^\infty e^{-t}\ln t\,dt=\lim_{n\to\infty}\left(\int_{1/n}^1 e^{-t}\ln t\,dt+\int_1^n e^{-t}\ln t\,dt\right).$$

由分部积分计算得到

$$\int_{1/n}^1 e^{-t}\ln t\,dt=-\int_{1/n}^1\ln t\,de^{-t}=-e^{-1/n}\ln n+\int_{1/n}^1\frac{e^{-t}}{t}dt$$

和

$$\int_1^n e^{-t}\ln t\,dt=-e^{-n}\ln n+\int_1^n\frac{e^{-t}}{t}dt=-e^{-n}\ln n+\int_{1/n}^1\frac{e^{-1/u}}{u}du,$$

因此

$$\Gamma'(1) = \lim_{n\to\infty}\left[-\left(e^{-n}+e^{-1/n}\right)\ln n+\int_{1/n}^1\frac{e^{-u}+e^{-1/u}}{u}du\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty}\left[-\left(e^{-n}+e^{-1/n}\right)\ln n-\int_{1/n}^{1}\frac{1-e^{-u}-e^{-1/u}}{u}du+\ln n\right]\\
&= -\int_0^1\frac{1-e^{-u}-e^{-1/u}}{u}du+\lim_{n\to\infty}\left(1-e^{-1/u}\right)\ln n-\lim_{n\to\infty}e^{-n}\ln n\\
&= -\int_0^1\frac{1-e^{-u}-e^{-1/u}}{u}du
\end{aligned}
$$

和

$$-\Gamma'(1)=\int_0^1\frac{1-e^{-u}-e^{-1/u}}{u}du=\int_0^1\frac{1-e^{-u}}{u}du-\int_1^\infty\frac{e^{-u}}{u}du.$$

利用求极限和求积分可以相交换 (可行性请自证)

$$
\begin{aligned}
\int_1^\infty\frac{e^{-u}}{u}du &= \int_1^\infty\frac{1}{u}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{u}{n}\right)^n du,\\
\int_0^1\frac{1-e^{-u}}{u}du &= \int_0^1\frac{1}{u}\lim_{n\to\infty}\left[1-\left(1-\frac{u}{n}\right)^n\right]du,
\end{aligned}
$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
-\Gamma'(1) &= \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^1\frac{1-(1-\frac{u}{n})^n}{u}du-\int_1^n\frac{(1-\frac{u}{n})^n}{u}du\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^n\frac{1-(1-\frac{u}{n})^n}{u}du-\int_1^n\frac{du}{u}\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^n\frac{1-y^n}{1-y}dy-\ln n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{1\le k\le n}\frac{1}{k}-\ln n\right) = \gamma.
\end{aligned}
$$

定理 15.9. (Γ 函数基本性质)

$\Gamma(s)$ 函数具有下列性质:

(1) $\Gamma(1+s)=s\Gamma(s)$, 任意 $s>0$.

(2) $\Gamma(s)$ 可以延拓到 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_{\le 0}$.

(3) $\lim_{s\to -n}(s+n)\Gamma(s)=(-1)^n/n!$.

证: (1) 在**第一卷第 5.5.4 小节**已给出. 为了证明 (2) 我们首先考虑区间 $-1<s<0$. 此时 $1+s>0$ 且 $\Gamma(1+s)$ 有定义. 因此

$$\frac{\Gamma(1+s)}{s}=\int_0^\infty e^{-t}\frac{t^s}{s}dt.$$

对任意 $\delta,\Delta>0$, 计算得到

$$
\begin{aligned}
\int_\delta^\Delta e^{-t}\frac{t^s}{s}dt &= -e^{-t}\frac{t^s}{s}\Big|_\delta^\Delta+\int_\delta^\Delta e^{-t}t^{s-1}dt\\
&= \int_\delta^\Delta\left(e^{-t}-1\right)t^{s-1}dt+\left(1-e^{-t}\right)\frac{t^s}{s}\Big|_\delta^\Delta.
\end{aligned}
$$

令 $\delta\to 0$ 和 $\Delta\to\infty$, 我们得到当 $s\in(-1,0)$ 时的 Γ 函数定义

$$\Gamma(s):=\frac{\Gamma(s+1)}{s}=\int_0^\infty\left(e^{-t}-1\right)t^{s-1}ds,\quad s\in(-1,0).$$

类似地, 当 $s \in (-n, -n+1)$, 我们得到

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty \left[e^{-t} + \sum_{0 \le k \le n-1} (-1)^{k+1} \frac{t^k}{k!} \right] t^{s-1} dt, \quad t \in (-n, -n+1).$$

这样我们就把 Γ 函数延拓到 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\le 0}$ 上且仍旧满足 (1).

对 (3), 利用 (1) 推出

$$\begin{aligned}\lim_{s \to -n} (s+n)\Gamma(s) &= \lim_{s \to -n} \frac{\Gamma(s+n+1)}{s(s+1)\cdots(s+n-1)} \\ &= \frac{\Gamma(1)}{(-n)(-n+1)\cdots(-n+n-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}.\end{aligned}$$

即 $\Gamma(s) \approx \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{s+n}$, 当 $s \to -n$. □

根据定理 15.9 我们观察到 $\Gamma(s)\Gamma(1-s)$ 的所有极点是整数集 $\mathbb{Z}$. 根据 (6.4.4) 得到

$$\sin(\pi s) = \pi s \prod_{n \ge 1} \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right)$$

的所有零点也是整数集. 从而可知函数

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)\sin(\pi s)$$

既没有零点也没有极点.

我们可以把 $\Gamma(z)$ 函数的定义推广到 $z \in \mathbb{C}$:

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{15.3.3}$$

同样可得, $\Gamma(z)$ 当 $\mathrm{Re}(z) > 0$ 时也有定义且定理 15.9 仍旧成立. 函数

$$f(z) := \Gamma(z)\Gamma(1-z)\sin(\pi z)$$

满足条件

$$\begin{aligned}\lim_{z \to 0} f(z) &= \lim_{z \to 0} \frac{\sin(\pi z)}{z} = \pi, \\ f(\sqrt{-1}y) &= \sqrt{-1}y|\Gamma(\sqrt{-1}y)|^2 \sinh(\pi y) \\ &= -\sqrt{-1}y \frac{2\pi}{y(e^{\pi y} - e^{-\pi y})} \frac{e^{-\pi y} - e^{\pi y}}{2\sqrt{-1}} = \pi,\end{aligned}$$

利用之后章节中的复变函数知识可以证明 $f(z) \equiv \pi$ 对任意 $z \in \mathbb{C}$ 都成立.

定理 15.10

对任意 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ 有

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \tag{15.3.4}$$

♡

证: 当 $z \in \mathbb{R}$ 时的证明可参见第一卷第 6.4.4 小节. □

考虑 **Euler 乘积**

$$E := \prod_{1 \le k \le n-1} \Gamma\left(\frac{k}{n}\right), \quad n \ge 2. \tag{15.3.5}$$

下面来证明

$$E=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}, \tag{15.3.6}$$

这个结果归功于Euler. 根据 (15.3.4) 得到

$$E^2=\prod_{1\le k\le n-1}\left[\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-k}{n}\right)\right]=\prod_{1\le k\le n-1}\frac{\pi}{\sin\frac{k\pi}{n}}.$$

注意到

$$\sum_{0\le k\le n-1}x^k=\frac{x^n-1}{x-1}=\prod_{1\le k\le n-1}\left(x-e^{\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{n}}\right).$$

令 $x\to 1$ 得到

$$\begin{aligned} n &= \prod_{1\le k\le n-1}\left(1-e^{\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{n}}\right)=\prod_{1\le k\le n-1}-e^{\frac{k\pi\sqrt{-1}}{n}}\left(e^{\frac{k\pi\sqrt{-1}}{n}}-e^{-\frac{k\pi\sqrt{-1}}{n}}\right)\\ &= \prod_{1\le k\le n-1}\left(-2\sqrt{-1}e^{\frac{k\pi\sqrt{-1}}{n}}\sin\frac{k\pi}{n}\right)=(-2\sqrt{-1})^{n-1}e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{1\le k\le n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\\ &= 2^{n-1}\left(-\sqrt{-1}e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}}\right)^{n-1}\prod_{1\le k\le n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=2^{n-1}\prod_{1\le k\le n-1}\sin\frac{k\pi}{n}. \end{aligned}$$

即恒等式 (15.3.6).

15.3.1 *Ramanujan 不等式

本小节来证明本章一开始所陈述的 **Ramanujan 不等式**[1]:

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi}\left(\frac{x}{e}\right)^x\left(8x^3+4x^2+x+\frac{1}{100}\right)^{1/6} &< \Gamma(x+1)\\ < \sqrt{\pi}\left(\frac{x}{e}\right)^x\left(8x^3+4x^2+x+\frac{1}{30}\right)^{1/6}, &\quad x\ge 0. \end{aligned} \tag{15.3.7}$$

Ramanujan 本人提出了一个非常有趣的公式

$$\Gamma(x+1)=\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{e}\right)^x\left(8x^3+4x^2+x+\frac{\theta_x}{30}\right)^{1/6}, \tag{15.3.8}$$

部分 θ_x 的值如下

$$\theta_0=\frac{30}{\pi^3}=0.9675,\quad \theta_1=0.3359,\quad \theta_\infty=1.$$

进一步有如上不等式 (15.3.7). 早在 1916 年Ramanujan 在印度数学会杂志提了如下问题: 证明

$$e^x x^{-x}\pi^{-1/2}\Gamma(x+1)=(8x^3+4x^2+x+E_x)^{1/6},$$

其中对任何 $x\ge 0$ 都有 $E_x\in[\frac{1}{100},\frac{1}{30}]$. 依照Ponnusamy 和Vuorinen (1997) 定义函数

$$h(x):=[g(x)]^6-(8x^3+4x^2+x),\quad g(x):=\left(\frac{e}{x}\right)^x\frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{\pi}}, \tag{15.3.9}$$

并证明了只要说明函数 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增且满足 $\frac{1}{100}\le h(x)\le\frac{1}{30}$, 则当 $x\ge 1$ 时 (15.3.7) 成立.

[1]本证明取自参考文献中《拉玛努金遗失笔记》第四卷.

定理 15.11

函数 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上严格递增且

$$h(1)=\frac{e^6}{\pi^3}-13,\quad h(+\infty)=\frac{1}{30}.$$

Alzer (2003) 证明了 (15.3.7) 对 $0<x<1$ 也成立. 和**定理 15.11** 相反的是, 函数 $h(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内不是单调的. 可以证明函数 $h(x)$ 在 $[0,a]$ 上递增, 在 $[a,b]$ 上递减, 而在 $[b,1]$ 上递增, 其中

$$a\approx 0.007714449,\quad b\approx 0.671503766,\quad h(a)\approx 0.033250349.$$

Mortici 在 2011 年证明了

$$\begin{aligned}&\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{e}\right)^x\left(8x^3+4x^2+x+\frac{1}{30}-\frac{11}{240x}\right)^{1/6}\quad<\quad\Gamma(x+1)\\ <\quad&\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{e}\right)^x\left(8x^3+4x^2+x+\frac{1}{30}-\frac{10}{240x}\right)^{1/6},\quad x\geq 8.\end{aligned}\tag{15.3.10}$$

Hirschhorn 在 2012 年把 (15.3.10) 改进到

$$\begin{aligned}&\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{e}\right)^x\left(8x^3+4x^2+x+\frac{1}{30}-\frac{11}{240x}+\frac{5}{240n^2}\right)^{1/6}\quad<\quad\Gamma(x+1)\\ <\quad&\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{e}\right)^x\left(8x^3+4x^2+x+\frac{1}{30}-\frac{11}{240x}+\frac{9}{240n^2}\right)^{1/6},\quad x\geq 8.\end{aligned}\tag{15.3.11}$$

显然**定理 15.11** 可直接从如下引理推出.

引理 15.1

(1) 对任意 $x\geq x_0:=2.4$, 函数 $h(x)$ 满足不等式

$$\frac{1}{100}<h(x)<\frac{1}{30}$$

且 $\lim_{x\to+\infty}h(x)=1/30$.

(2) 对任意 $x\geq x_1:=4.21$, 函数 $h(x)$ 严格递增.

(3) 对任意 $1<x\leq\max\{x_0,x_1\}=4.21$, 函数 $h(x)$ 严格递增.

对 (15.3.9) 取对数得到

$$\ln g(x)=x-x\ln x+\ln x-\ln\sqrt{\pi}+\ln\Gamma(x).\tag{15.3.12}$$

在**第 15.4 节**我们将证明

$$\ln\Gamma(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\ln x-x+\ln\sqrt{2\pi}+J(x),\tag{15.3.13}$$

这里

$$J(x):=\int_0^{+\infty}\frac{\sigma(u)}{(x+u)^2}du,\quad \sigma(u):=\int_0^u\rho(t)\,dt,\quad \rho(t):=\frac{1}{2}-\{t\}\tag{15.3.14}$$

其中 $\{t\}:=t-\lfloor t\rfloor$ 表示 t 的小数部分. 把 (15.3.14) 带入 (15.3.12) 得到

$$\ln g(x)=\ln\sqrt{2x}+J(x),\quad g(x)=\sqrt{2x}e^{J(x)},\tag{15.3.15}$$

从而

$$h(x)=8x^3e^{6J(x)}-(8x^3+4x^2+x).\tag{15.3.16}$$

在第 15.4节我们将证明 $J(x)$ 的 **Stirling 级数展开**:

$$J(x)=\sum_{1\le k\le n-1}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)x^{2k-1}}+R_n(x), \tag{15.3.17}$$

这里

$$R_n(x)=(-1)^{n+1}\theta_n\frac{B_{2n}}{2n(2n-1)x^{2n+1}},\quad \theta_n\in(0,1). \tag{15.3.18}$$

若取 $n=3$ 得到

$$J(x)=\frac{1}{12x}-\frac{1}{360x^3}+R_3(x),\quad 0<R_3(x)<\frac{1}{1260x^5}. \tag{15.3.19}$$

证明引理 15.1. (1) 利用 (15.3.19) 我们可以把 $e^{6J(x)}$ 写成

$$e^{6J(x)}=e^{1/2x}e^{-\alpha(x)},$$

这里

$$\alpha(x):=\frac{1}{60x^3}-R(x),\quad 0<R(x)<\frac{1}{210x^5}.$$

因此

$$0<\frac{1}{84x^5}<\alpha(x)<\frac{1}{60x^3}\le\frac{1}{60},\quad x\ge 1.$$

对 $\alpha>0$ 得到如下不等式

$$1-\alpha\le e^{-\alpha}\le 1-\alpha+\frac{\alpha^2}{2},\quad \alpha>0.$$

故得到

$$1-\frac{1}{60x^3}+R(x)\le e^{-\alpha(x)}\le 1-\frac{1}{60x^3}+R(x)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{60x^3}-R(x)\right)^2$$

从而

$$e^{1/2x}\left(1-\frac{1}{60x^3}\right)\le e^{6J(x)}\le e^{1/2x}\left(1-\frac{1}{60x^3}+\frac{1}{210x^5}+\frac{9}{39200x^6}\right).$$

根据 $e^{1/2x}$ 的 Taylor 级数展开就得到

$$e^{6J(x)}\ge\left(1-\frac{1}{60x^3}\right)\left[1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2!(2x)^2}+\frac{1}{3!(2x)^3}+\frac{1}{4!(2x)^4}+\frac{1}{5!(2x)^5}\right]$$

和

$$e^{6J(x)}\le\left(1-\frac{1}{60x^3}+\frac{1}{210x^5}+\frac{9}{39200x^6}\right)\left(1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2!(2x)^2}+\cdots\right).$$

断言 1: 对任意 $x\ge 2.4$ 有

$$h(x)>0.0114>h(1). \tag{15.3.20}$$

因为

$$\begin{aligned}
h(x) &= 8x^3e^{6J(x)}-(8x^3+4x^2+x)\\
&\ge \left(8x^3+4x^2+x+\frac{1}{6}+\frac{1}{48x}+\frac{1}{480x^2}\right)\left(1-\frac{1}{60x^3}\right)-(8x^3+4x^2+x)\\
&\ge \frac{1}{30}-\frac{11}{240x}-\frac{7}{480x^2}-\frac{1}{360x^3}-\frac{1}{2880x^4}-\frac{1}{28800x^5}.
\end{aligned}$$

从中得到 (15.3.20).

断言 2: 对任意 $x \geq 1.04$ 有

$$h(x) \leq \frac{1}{30}, \tag{15.3.21}$$

且 $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 1/30$. 令

$$\begin{aligned} S(x) &:= 1 - \frac{1}{60x^3} + \frac{1}{210x^5}, \\ T(x) &:= 1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{8x^2} + \frac{1}{48x^3} + \frac{1}{384x^4} + \frac{1}{3840x^5}, \\ \delta(x) &:= \frac{9}{39200x^6}T(x) + \left(S(x) + \frac{9}{39200x^6}\right)\left[\frac{1}{6!(2x)^6} + \frac{1}{7!(2x)^7} + \cdots\right]. \end{aligned}$$

从而得到

$$e^{6J(x)} \leq S(x)T(x) + \delta(x). \tag{15.3.22}$$

观察到, 当 $x \geq 1$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{6!(2x)^6} + \frac{1}{7!(2x)^7} + \cdots &\leq \frac{1}{6!(2x)^6}\left[1 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{(2x)^2} + \cdots\right)\right] \\ &\leq \frac{1}{6!(2x)^6}\frac{3}{2} = \frac{1}{30720x^6} \end{aligned}$$

和

$$S(x) \leq 1, \quad T(x) \leq \frac{33}{20}, \quad c \geq 1.$$

这些不等式给出

$$0 \leq \delta(x) \leq \frac{297}{784000x^6} + \left(1 + \frac{9}{39200x^6}\right)\frac{1}{30720x^6} \leq \frac{21}{50000x^6}.$$

从而

$$h(x) \leq 8x^3S(x)T(x) - (8x^3 + 4x^2 + x) + \delta_1(x),$$

这里

$$0 \leq \delta_1(x) := 8x^3\delta(x) \leq \frac{21}{6250x^3}.$$

最后得到

$$\begin{aligned} 8x^3S(x)T(x) - (8x^3 + 4x^2 + x) &= \left(8x^3 + 4x^2 + x + \frac{1}{6} + \frac{1}{48x} + \frac{1}{480x^2}\right) \\ \cdot\left(1 - \frac{1}{60x^3} + \frac{1}{210x^5}\right) - (8x^3 + 4x^2 + x) &= \frac{1}{30} - \frac{11}{240x} + \frac{79}{3360x^2} + \delta_2(x), \end{aligned}$$

这里

$$0 \leq \delta_2(x) \leq \frac{41}{2520x^3} + \frac{89}{20160x^4} + \frac{17}{22400x^5} + \frac{1}{10080x^6} + \frac{1}{100800x^7} \leq \frac{1}{46x^3}.$$

整理可得

$$\begin{aligned} h(x) &\leq \frac{1}{30} - \frac{11}{240x} + \frac{79}{3360x^2} + \frac{21}{6250x^3} + \frac{1}{46x^3} \\ &\leq \frac{1}{30} - \frac{11}{240x} + \frac{79}{3360x^2} + \frac{251}{10000x^3} \leq \frac{1}{30}, \quad x \geq 1.04. \end{aligned}$$

根据两个断言中的证明得到 $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 1/30$.

(2) 对 (15.3.9) 求导得到

$$h'(x) = 6g'(x)[g(x)]^5 - (24x^2 + 8x + 1), \quad g'(x) = g(x)\left[\frac{1}{x} + \psi(x) - \ln x\right]$$

这里

$$\psi(x) := \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \ln x - \frac{1}{2x} + J'(x)$$

和

$$J'(x) = -2\int_0^{+\infty} \frac{\sigma(u)}{(x+u)^3} du.$$

因此得到

$$g'(x) = g(x)\left[\frac{1}{2x} + J'(x)\right]$$

和

$$h'(x) = 48x^3 e^{6J(x)}\left[\frac{1}{2x} + J'(x)\right] - (24x^2 + 8x + 1).$$

所以为了证明 $h'(x) > 0$ 只要证明

$$\frac{1}{2x} + J'(x) > \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{48x^3}\right)e^{-06J(x)}.$$

根据 (15.3.19) 推出

$$-6J(x) = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{60x^3} - \frac{\eta_1(x)}{210x^5}, \quad 0 \le \eta_1(x) \le 1.$$

这样就只要去证明如下不等式

$$e^{-1/60x^3}\left[\frac{1}{2x} + J'(x)\right] > \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{48x^3}\right)e^{-1/2x}.$$

根据不等式

$$1 - \beta \le e^{-\beta} < 1 - \beta + \frac{\beta^2}{2!} - \frac{\beta^3}{3!} + \frac{\beta^4}{4!}$$

我们只需证明

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{1}{60x^3}\right)\left[\frac{1}{2x} + J'(x)\right] \quad > \quad & \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{48x^3}\right) \\ & \cdot\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{8x^2} - \frac{1}{48x^3} + \frac{1}{384x^4}\right).\end{aligned}$$

对 (15.3.17) 求导得到

$$J'(x) = -\frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4} - \frac{1}{252x^6} + \frac{\eta_2(x)}{120x^8}, \quad 0 \le \eta_2(x) \le 1.$$

所以只要证明

$$\begin{aligned}&\left(1 - \frac{1}{60x^3}\right)\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4} - \frac{1}{252x^6}\right) \\ > \ &\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{48x^3}\right)\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{8x^2} - \frac{1}{48x^3} + \frac{1}{384x^4}\right)\end{aligned}$$

或者

$$\frac{11}{11520} > \frac{1}{252x} + \frac{89}{460800x^2} - \frac{1}{15120x^4}.$$

最后这个不等式当 $x \ge 4.21$ 时成立.

(3) 当 $1 < x \le 4.21$ 时, 要证明 $h'(x) > 0$ 我们需要 $h''(x)$ 和 $J''(x)$ 的渐进分析. 具体

细节可参考Karatsuba 的论文[2]. □

15.3.2 *Gamma-函数和 Riemann zeta-函数

Riemann ζ-函数 定义为

$$\zeta(z) := \sum_{n\ge 1}\frac{1}{n^z},\quad \mathrm{Re}(z) > 1. \tag{15.3.23}$$

实际上, 我们可以把 $\zeta(z)$ 延拓到整个复平面而成为亚纯函数且仅有唯一的奇异点 $z = 1$. 原因如下: 对任意 $\mathrm{Re}(z) > 1$, 我们有

$$\begin{aligned}\zeta(z) &= \sum_{n\ge 1} z\int_n^{\infty}\frac{dt}{t^{z+1}} = z\int_0^{\infty}\left(\sum_{n\le t}1\right)\frac{dt}{t^{n+1}}\\ &= z\int_1^{\infty}\frac{\lfloor t\rfloor}{t^{n+1}}dt = \frac{z}{z-1} - z\int_1^{\infty}\frac{\langle t\rangle}{t^{n+1}}dt.\end{aligned} \tag{15.3.24}$$

这样我们可以把 Riemann ζ 函数全纯延拓到 $\mathrm{Re}(z) > 0$, 但是除了 $z = 1$. 为了把它全纯延拓到整个复平面, 我们需要 **Riemann 方程**.

因为

$$\Gamma(z)n^{-z} = \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-nt}dt,\quad \mathrm{Re}(z) > 0, \tag{15.3.25}$$

所以

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^{\infty}\frac{t^{z-1}}{e^t - 1}dt,\quad \mathrm{Re}(z) > 0. \tag{15.3.26}$$

若引入函数

$$\xi(z) := \pi^{-z/2}\Gamma(z/2)\zeta(z), \tag{15.3.27}$$

则得到如下著名的 Riemann 方程

$$\xi(z) = \xi(1-z),\quad z \ne 0, 1. \tag{15.3.28}$$

特别地

$$\xi(z) = \left[2^z\pi^{z-1}\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)\Gamma(1-z)\right]\zeta(1-z). \tag{15.3.29}$$

这意味着 $\zeta(z)$ 可以全纯延拓到 $\mathrm{Re}(z) \le 0$. 事实上我们可以证明

$$\xi(z) = \int_0^{\infty}\vartheta_1(t)t^{z/2-1}dt,\quad \mathrm{Re}(z) > 1, \tag{15.3.30}$$

这里 $\vartheta_1(t) := (\vartheta(t) - 1)/2$ 和

$$\vartheta(t) := \sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{-\pi n^2 t} \tag{15.3.31}$$

是 **Jacobi ϑ 函数** (根据下章 Fourier 分析, 我们将证明 $\vartheta(1/r) = \sqrt{t}\vartheta(t)$ 对任意 $t > 0$ 都成立). 在 (15.3.29) 中令 $z \to 2n + 1$, 这里 $n \in \mathbb{N}$, 得到 $\zeta(-2n) = 0$. 因此 $-2\mathbb{N}$ 是 $\zeta(z)$ 的 (平凡) 零点. 注意到 $\zeta(0) = -1/2$ 和 $\zeta'(0) = -\frac{1}{2}\ln 2\pi$.

[2]Karatsuba. *On the asymptotic representation of the Euler gamma function by Ramanujan*, J. Comp. Appl. Math., **135**(2001), 225-240.

问题 15.1. (Riemann, 1859)

$\zeta(z)$ 的任意非平凡零点都落在直线 $\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}$ 上.

根据 (14.3.15) 我们得到 $\zeta(2n)\in\mathbb{Q}\pi^{2n}$, 即

$$\zeta(2n)=\frac{(2\pi)^n B_n}{2(2n)!},\quad n\geq 1. \tag{15.3.32}$$

问题 15.2

$\zeta(2n+1)$ 是否是无理数?

目前为止上述猜想至少对 $\zeta(3)$ 是正确的.

15.3.3 *Gamma 函数和 Hausdorff 维数

给定 $\epsilon>0$ 和 $\rho\geq 0$. 对任何集合 $D\subset\mathbb{R}^n$ 定义

$$\mathcal{H}_{p,\epsilon}(D):=\left\{w_p\left(\{S_i\}_{i\in I}\right): D=\bigcup_{i\in I}S_i,\ \mathrm{diam}(S_i)<\epsilon \text{ 对任意 } i\in I\right\}. \tag{15.3.33}$$

这里 $\{S_i\}_{i\in I}$ 是 D 的开覆盖, $\mathrm{diam}(S_i):=\sup_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in S_i}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ 是 S_i 的直径, 且 $w_p(\{S_i\}_{i\in I})$ 定义为

$$w_p\left(\{S_i\}_{i\in I}\right):=\sum_{i\in I}C_p\left(\frac{1}{2}\mathrm{diam}(S_i)\right)^p,\quad C_p:=\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^p)=\frac{\pi^{p/2}}{\Gamma(2+p/2)} \tag{15.3.34}$$

($\mathbb{B}^p\subset\mathbb{R}^p$ 是 $\mathbb{R}^p$ 中的单位开球使得当 p 是正整数时是通常意义下的单位开球). 若 $p\in\mathbb{N}$ 得到

$$|\mathbb{B}^p|\equiv\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^p)=\int_{|\boldsymbol{x}|\leq 1,\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^p}d\boldsymbol{x}=\frac{\pi^{p/2}}{\Gamma\left(1+\frac{p}{2}\right)}.$$

当 $\epsilon\to 0+$ 时, $\mathcal{H}_{p,\epsilon}(D)$ 时递增的. 因此可定义

$$\mathcal{H}_p(D):=\sup_{\epsilon>0}\mathcal{H}_{p,\epsilon}(D), \tag{15.3.35}$$

称为***p*-维 Hausdorff 测度 (*p*-dimensional Hausdorff measure)**.

我们先讨论测度的一般定义. 假设 X 是任意集合. X 的子集 $\mathfrak{A}$ 称为**σ-代数 (σ-algebra)** 如果满足下面条件:

(1) $\emptyset, X\in\mathfrak{A}$.

(2) 如果 $A,B\in\mathfrak{A}$, 则 $A\setminus B\in\mathfrak{A}$.

(3) 如果 $\{A_i\}_{i\in I}$ 是 $\mathfrak{A}$ 中的有限或者可数子集族, 则它们的并 $\cup_{i\in I}A_i$ 也属于 $\mathfrak{A}$.

定义 15.2

σ-代数 $\mathfrak{A}$ 上的**测度 (measure)** 是指函数 $\mu:\mathfrak{A}\to\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}=[0,+\infty]$ 且满足

(1) $\mu(\emptyset)=0$, 和

(2) **(σ-可加性)** 若 $\{A_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ 是 $\mathfrak{A}$ 中的有限或可数子集族且 A_i 互不相交, 则

$$\mu\left(\bigcup_{i\geq 1}A_i\right)=\sum_{i\in\geq 1}\mu(A_i).$$

♣

注意到 $\sum_{i\geq 1}\mu(A_i)$ 是有限和或无限级数.

命题 15.1

假设 μ 是 σ-代数 $\mathfrak{A}$ 上的测度.

(a) 令 $\{A_i\}_{i\geq 1}$ 是满足条件 $A_i\subset A_{i+1}$ 的可测集序列. 则数列 $\{\mu(A_i)\}_{i\geq 1}$ 是单调非减的且满足

$$\lim_{i\to+\infty}\mu(A_i)=\mu(\cup_{i\geq 1}A_i). \tag{15.3.36}$$

(b) 令 $\{A_i\}_{i\geq 1}$ 是满足条件 $A_i\supset A_{i+1}$ 和 $\mu(A_1)<+\infty$ 的可测集序列. 则数列 $\{\mu(A_i)\}_{i\geq 1}$ 是单调非增的且满足

$$\lim_{i\to+\infty}\mu(A_i)=\mu(\cap_{i\geq 1}A_i). \tag{15.3.37}$$

♡

证: (a) 因为 $A_{i+1}=A_i\bigsqcup(A_{i+1}\setminus A_i)$, 所以

$$\mu(A_{i+1})=\mu(A_i)+\mu(A_{i+1}\setminus A_i)\geq\mu(A_i)$$

且数列 $\{\mu(A_i)\}_{i\geq 1}$ 是单调非减的. 令 $A:=\cup_{i\geq 1}A_i$ 并记 $B_i:=A_i\setminus A_{i-1}$ 其中 $A_0=\emptyset$. 得到

$$A_i=\bigsqcup_{1\leq k\leq i}B_k,\quad A=\bigcup_{i\geq 1}A_i=\bigsqcup_{k\geq 1}B_k,\quad \mu(A)=\sum_{k\geq 1}\mu(B_k)=\lim_{k\to+\infty}\sum_{1\leq i\leq k}\mu(B_i).$$

这样就得到 (15.3.36).

(b) 由于 $A_i\supset A_{i+1}$, 我们有 $\mu(A_i)\geq\mu(A_{i+1})$ 且数列 $\{\mu(A_i)\}_{i\geq 1}$ 是单调非增的. 令 $B_i:=A_i\setminus A_{i+1}$ 得到

$$\mu(A_i)=\mu(A_{i+1})+\mu(B_i),\quad \mu(A_1)-\mu(A_{i+1})=\sum_{1\leq k\leq i}\mu(B_k)=\mu(A_1\setminus A_{i+1}).$$

若记 $C_i:=A_1\setminus A_i$ 则数列 $\{C_i\}_{i\geq 1}$ 是单调非减的从而根据 (a) 得到

$$\mu\left(A_1\setminus\bigcap_{i\geq 1}A_i\right)=\mu\left(\bigcup_{i\geq 1}C_i\right)=\lim_{i\to+\infty}\mu(C_i)=\lim_{i\to+\infty}\mu(A_1\setminus A_i).$$

故

$$\lim_{i\to+\infty}[\mu(A_1)-\mu(A_i)]=\mu(A_1)-\mu\left(\bigcap_{i\geq 1}A_i\right).$$

因为 $\mu(A_1)<+\infty$, 所以上述等式推出 (15.3.37). □

性质 15.1 (b) 中的有限假设条件 $\mu(A_1)<+\infty$ 是必须的. 比如考虑集合列 $A_i=(i,+\infty)$ 和通常的长度测度 μ, 则得到 $\mu(A_i)=+\infty$ 但是 $\cap_{i\geq 1}A_i=\emptyset$.

如果 $\mathfrak{S}$ 是集合 X 的任意子集族, 则存在唯一的最小 σ-代数包含 $\mathfrak{S}$; 这个最小的 σ-代数称为**由 $\mathfrak{S}$ 所生成的 σ-代数 (σ-algebra generated by $\mathfrak{S}$)**. 事实上, 考虑集合

$$\sigma(\mathfrak{S}) := \bigcap\{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \text{ 是 } \sigma\text{-代数且 } \mathfrak{A} \supset \mathfrak{S}\}. \tag{15.3.38}$$

因为 X 本身就是 σ-代数, 所以这样的集合 $\mathfrak{A}$ 总是存在的. 对任何包含 $\mathfrak{S}$ 的 σ-代数 $\mathfrak{A}$ 我们必有 $\emptyset, X \in \mathfrak{A}$ 从而得到 $\emptyset, X \in \sigma(\mathfrak{S})$. 若 $\{A_i\}_{i\in I}$ 是 $\sigma(\mathfrak{S})$ 中的有限个或可数个元素构成的序列, 则 $A_i \in \mathfrak{A}$ 对每个 $i \in I$ 都成立, 从而 $\cup_{i\in I}A_i \in \mathfrak{A}$ 和 $\cup_{i\in I}A_i \in \sigma(\mathfrak{S})$. 最小性可从定义推出.

(1) 如果 X 是拓扑空间, 则有其拓扑所生成的 (即由该拓扑中的开集所生成的) σ-代数称为 X 上的 **Borel σ-代数 (Borel σ-algebra)**. Borel σ-代数中的元素称为 **Borel 集 (Borel set)**.

(2) 定义在 Borel σ-代数上的测度称为 X 上的 **Borel 测度 (Borel measure)**.

定理 15.12. (Lebesgue)

$\mathbb{R}^m$ 上存在唯一的 Borel 测度 $\mathcal{L}_m$ 满足如下性质: 平移变换下保持不变且 $\mathcal{L}_m([0,1]^m) = 1$. ♡

上述测度 $\mathcal{L}_n$ 称为 **Lebesgue 测度 (Lebesgue measure)**. 唯一性表明在单位立方体上取有限值的 $\mathbb{R}^m$ 上的平移不变的 Borel 测度是 $\mathcal{L}_m$ 的常数倍.

(1) Lebesgue 测度关于 $\mathbb{R}^m$ 上的等距映射是不变的.

(2) 如果 $\mathbf{L} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ 是线性映射, 则

$$\mathcal{L}_m(\mathbf{L}(A)) = |\det \mathbf{L}|\mathcal{L}_m(A), \tag{15.3.39}$$

对每个可测集 $A \subseteq \mathbb{R}^m$ 都成立.

假设 (X, d) 是测度空间且 p 是非负实数. 类似于 (15.3.35) 我们可以定义关于 X 的 p-维 Hausdorff 测度 $\mathcal{H}_p(X)$. 因为当 $\epsilon \to 0+$ 时 $\mathcal{H}_{p,\epsilon}(X)$ 有极限 (可能是无穷的), $\mathcal{H}_p(X)$ 对任何度量空间 (X, d) 都是有定义的. 但是可能是非负实数或者是 $+\infty$.

定理 15.13

假设 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 是度量空间, 且 A 和 B 是 X 的子集. 则

(1) 如果 $A \subseteq B$ 则 $\mathcal{H}_p(A) \le \mathcal{H}_p(B)$.

(2) $\mathcal{H}_p(\cup_{i\in I}A_i) \le \sum_{i\in I}\mu_d(A_i)$ 对任意有限的或可数的子集族 $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq X$ 都成立.

(3) 如果 $\mathrm{dist}(A, B) > 0$, 则 $\mathcal{H}_p(A \cup B) = \mathcal{H}_p(A) + \mathcal{H}_p(B)$.

(4) 如果 $f : X \to Y$ 是 Lipschitz 映射且 Lipschitz 常数为 C, 则 $\mathcal{H}_p(f(X)) \le C^p\mathcal{H}_p(X)$.

(5) 如果 $f : X \to Y$ 是**C-相似的**, 即, $d_Y(f(x_1), f(x_2)) = Cd_X(x_1, x_2)$ 对任何 $x_1, x_2 \in X$ 都成立, 则 $\mathcal{H}_p(f(X)) = C^p\mathcal{H}_p(X)$. ♡

在《实变函数》课程中或在之后的章节中, 我们将利用 **Carathéodory 判别法**来证明

满足定理 15.13 中五条性质且定义在 X 的 Borel σ-代数上的非负函数必是测度.

定理 15.14

对任何度量空间 (X,d) 和任何 $p \geq 0$, $\mathcal{H}_p$ 是 X 的 Borel σ-代数上的测度. ♡

例 15.9

集合的 0-维 Hausdorff 测度就是它的势. 换句话说, $\mathcal{H}_0(X)$ 是 X 中元素个数如果 X 是有限的, 和 $\mathcal{H}_0(X) = +\infty$ 如果 X 是无限的. ♠

对 $\mathbb{R}^m$ 中的单位立方体 $[0,1]^m$ 有 $\mathcal{H}_m([0,1]^m) = 1$. 更进一步得到

定理 15.15

对每个 $m \in \mathbb{N}$, 在 $\mathbb{R}^m$ 上成立 $\mathcal{L}_m = \mathcal{H}_m$. ♡

定理 15.16. (Vitali 覆盖定理)

假设 X 是 $\mathbb{R}^m$ 中的有界集. 定义集族 $\mathfrak{B}$ 为 $\mathbb{R}^m$ 中满足如下性质的闭球集: 对任意 $x \in X$ 和任意 $\epsilon > 0$ 存在闭球 $\mathbf{B} \in \mathfrak{B}$ 满足 $x \in \mathbf{B}$ 和 $\mathrm{diam}(\mathbf{B}) < \epsilon$. 则 $\mathfrak{B}$ 包含有限的或可数的子集族 $\{\mathbf{B}_i\}_{i\in I}$ 满足

$$\mathbf{B}_i \cap \mathbf{B}_j = \emptyset \quad 若\ i \neq j \quad 且 \quad \mathcal{H}_m(X \setminus \cup_{i\in I}\mathbf{B}_i) = 0.$$

♡

证: 不失一般性我们不妨假设每个球 $\mathbf{B} \in \mathfrak{B}$ 包含 X 中的至少一个点且把半径大于 1 的球都排除在外. 此时所有这样的闭球都包含在 X 的某个有界的 2-领域内.

我们利用归纳法来构造闭球序列 $\{\mathbf{B}_i\}_{i\geq 1}$. 如果 $\mathbf{B}_1, \cdots, \mathbf{B}_n$ 已经构造, 我们选择下一个闭球 $\mathbf{B}_{n+1}$ 如下. 记

$$\mathfrak{B}_n := \{\mathbf{B} \in \mathfrak{B} | \mathbf{B}\ 和\ \mathbf{B}_1, \cdots, \mathbf{B}_n\ 都不相交\}.$$

若 $\mathfrak{B}_n = \emptyset$, 则 $\mathbf{B}_1 \cup \cdots \cup \mathbf{B}_n$ 覆盖整个集合 X. 若 $\mathfrak{B}_n \neq \emptyset$, 选择 $\mathbf{B}_{n+1} \in \mathfrak{B}_n$ 满足

$$\mathrm{diam}(\mathbf{B}_{n+1}) > \frac{1}{2} \sup_{\mathbf{B}\in\mathfrak{B}_n} \mathrm{diam}(\mathbf{B}). \tag{15.3.40}$$

根据构造诸球 $\mathbf{B}_i$ 互不相交. 我们现在来证明除了差一个 m-维 Hausdorff 0 测集外, 这些闭球覆盖 X. 因为闭球都是互不相交的且都包含在某个具有有限体积的集合内, 所以得到

$$\sum_{i\geq 1} \mathcal{H}_m(\mathbf{B}_i) < +\infty.$$

固定 $\epsilon > 0$. 存在 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $\sum_{i\geq n+1} \mathcal{H}_m(\mathbf{B}_i) < \epsilon$. 令 $x \in X \setminus \cup_{i\geq 1}\mathbf{B}_i$, 并令 $\mathbf{B}$ 是任何包含 x 且和 $\mathbf{B}_1, \cdots, \mathbf{B}_n$ 都不相交的球. 注意到 $\mathbf{B}$ 必和 $\cup_{i\geq 1}\mathbf{B}_i$ 相交, 这是因为否则的话对任何 n 有 $\mathbf{B} \in \mathfrak{B}_n$. 根据 (15.3.40), 得到

$$\mathcal{H}_m(\mathbf{B}) = \mathcal{L}_m(\mathbf{B}) = C(m)\left(\frac{\mathrm{diam}(\mathbf{B})}{2}\right)^m \leq C(m)\left(\mathrm{diam}(\mathbf{B}_n)\right)^m = 2^m \mathcal{H}_m(\mathbf{B}_n).$$

令 $n \to +\infty$ 得到 $\mathcal{H}_m(\mathbf{B}) = 0$, 矛盾! 令 $k > n$ 是最小的指标使得 $\mathbf{B} \cap \mathbf{B}_k \neq \emptyset$ 成立. 则 $\mathbf{B} \in \mathfrak{B}_{k-1}$ 从而根据 (15.3.40) 得到

$$\mathrm{diam}(\mathbf{B}_k) > \frac{1}{2}\mathrm{diam}(\mathbf{B}).$$

若记 (x,r) 和 (x_k,r_k) 分别为 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{B}_k$ 的中心和半径, 则 $r\le 2r_k$ 和

$$|x-x_k|\le|x-x_0|+|x_0-x_k|\le r+(r_k+r)\le 2r+r_k\le 5r_k.$$

因此 $x\in 5\mathbf{B}_k$. 我们已经证明了每个 $x\in X\setminus\cup_{i\ge1}\mathbf{B}_i$ 属于球 $5\mathbf{B}_k$, 这里 $k>n$. 即 $X\setminus\cup_{i\ge1}\mathbf{B}_i\subset\cup_{i\ge n+1}5\mathbf{B}_i$ 从而

$$\mathcal{H}_m\left(X\setminus\cup_{i\ge1}\mathbf{B}_i\right)\le\sum_{i\ge n+1}\mathcal{H}_m(5\mathbf{B}_i)=5^m\sum_{i\ge n+1}\mathcal{H}_m(\mathbf{B}_i)<5^m\epsilon.$$

根据 ϵ 的任意性可知 $\mathcal{H}_m(X\setminus\cup_{i\ge1}\mathbf{B}_i)=0$. □

定理 15.17

对任何度量空间 (X,d) 存在非负实数 $p_0\in[0,+\infty]$ 使得当 $p>p_0$ 时 $\mathcal{H}_p(X)=0$ 和当 $p<p_0$ 时 $\mathcal{H}_p(X)=+\infty$.

♡

证: 令 $p_0:=\inf\{p\ge0:\mathcal{H}_p(X)<+\infty\}$. 显然对任何 $p<p_0$ 有 $\mathcal{H}_p(X)=+\infty$. 如果 $p>p_0$, 则存在 $p'\in[p_0,p)$ 满足 $\mathcal{H}_{p'}(X)=M<+\infty$. 因此对任意 $\epsilon>0$ 存在 X 的开覆盖 $\{S_i\}_{i\in I}$ 满足

$$\operatorname{diam}(S_i)<\epsilon,\quad\sum_{i\in I}C(p')[\operatorname{diam}(S_i)]^{p'}<2M.$$

故得到

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}C(p)\left[\operatorname{diam}(S_i)\right]^p&=\sum_{i\in I}C(p)\left[\operatorname{diam}(S_i)\right]^{p-p'}\left[\operatorname{diam}(S_i)\right]^{p'}\\&\le\ \epsilon^{p-p'}\frac{C(p)}{C(p')}\sum_{i\in I}C(p')\left[\operatorname{diam}(S_i)\right]^{p'}\ \le\ 2\frac{C(p)}{C(p')}\epsilon^{p-p'}M.\end{aligned}$$

即得到 $\mathcal{H}_{p,\epsilon}(X)\le 2\epsilon^{p-p'}C(p)M/C(p')$. 最后令 $\epsilon\to0+$ 得到 $\mathcal{H}_p(X)=0$. □

定理 15.17 中的数 p_0 称为 X 的 **Hausdorff 维数 (Hausdorff dimension)** 并记为 $\dim_{\mathcal{H}}(X)$. 注意到当 $p=\dim_{\mathcal{H}}(X)$ 时, 测度 $\mathcal{H}_p(X)$ 只有三种可能性, 即, 零, 正数 (可能不是整数) 或无穷.

例 15.10

回顾下第一卷第 2.3.6 小节中定义的 Cantor 集 C

$$\begin{aligned}C&=\bigcap_{m\ge1}\bigcap_{0\le k\le 3^{m-1}-1}\left(\left[0,\frac{3k+1}{3^m}\right]\cup\left[\frac{3k+2}{3^m},1\right]\right)\\&=[0,1]\setminus\bigcup_{m\ge1}\bigcup_{0\le k\le 3^{m-1}-1}\left(\frac{3k+1}{3^m},\frac{3k+2}{3^m}\right).\end{aligned}$$

若记 C_n 是第 n 步的剩余部分, 则得到 $\mathcal{H}_p(C_n)=C(p)2^n/3^{np}$ 和

$$\mathcal{H}_p(C)=\lim_{n\to+\infty}\mathcal{H}_p(C_n)=\lim_{n\to+\infty}C(p)2^n\left(\frac{1}{3^n}\right)^p=\begin{cases}+\infty,&p<\log_3 2,\\C(p),&p=\log_3 2,\\0,&p>\log_3 2.\end{cases}$$

从而得到 $\dim_{\mathcal{H}}(C)=\log_3 2=\ln 2/\ln 3$, 但是 Cantor 集的通常维数是 0.

♠

命题 15.2

假设 (X,d_X) 和 (Y,d_Y) 是度量空间.

(1) 如果 $Y\subset X$, 则 $\dim_{\mathcal{H}}(Y)\le\dim_{\mathcal{H}}(X)$.

(2) 如果 X 被有限或可数子集族 $\{X_i\}_{i\in I}$ 所覆盖, 则

$$\dim_{\mathcal{H}}(X)=\sup_{i\in I}\dim_{\mathcal{H}}(X_i).$$

(3) 如果 $f:X\to Y$ 是 Lipschitz 映射, 则 $\dim_{\mathcal{H}}(f(X))\le\dim_{\mathcal{H}}(X)$. 特别地, 双-Lipschitz 等价的度量空间必有相同的 Hausdorff 维数.

(4) $\dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^m)=\dim_{\mathcal{H}}([0,1]^m)=m$.

♡

假设 (X,d_X) 和 (Y,d_Y) 是度量空间且映射 $f:X\to Y$ 满足条件

$$d_Y(f(x_1),f(x_2))\le Cd_X(x_1,x_2)^{\alpha},\quad x_1,x_2\in X, \tag{15.3.41}$$

这里 C,α 都是正常数. 则

$$\mathcal{H}_p(f(X))\le C^p\mathcal{H}_{p\alpha}(X),\ \ \dim_{\mathcal{H}}(f(X))\le\frac{1}{\alpha}\dim_{\mathcal{H}}(X).$$

15.4 * 三探 Gamma 函数和 Mellin 变换

本节绝大部分内容取自谭琳的专著, 参见参考文献中的书名. 在这里我们仅是依照我们的需要从专著中进行择取, 更重要的是把专著中的部分习题写入本节中. 除此之外, 我们也补充了部分关于 L 函数的内容.

令 G 是 Abel 群且令 $\mathcal{F}(G)$ 是定义在 G 上的所有复值函数构成的集合. 对任何 $f_1,f_2\in\mathcal{F}(G)$ 和 $\lambda\in\mathbb{C}$ 定义

$$(f_1+f_2)(g):=f_1(g)+f_2(g),\quad (cf)(g):=c\cdot f(g),\quad g\in G.$$

则 $\mathcal{F}(G)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的向量空间.

练习 15.2

证明 $\mathcal{F}(G)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的向量空间. 当 G 是有限时, $\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{F}(G)=|G|$.

♠

称 $\chi\in\mathcal{F}(G)$ 是 G 的**特征 (character)** 如果满足下列条件

(i) 对任何 $g\in G$ 有 $|\chi(g)|=1$, 且

(ii) 对任何 $g_1,g_2\in G$ 有 $\chi(g_1g_2)=\chi(g_1)\chi(g_2)$.

G 的所有特征构成的集合记为 $\widehat{G}$. 对任意 $\chi\in\widehat{G}$ 有 $\chi(e)=1$, 这里 e 是 G 的单位元.

练习 15.3

令 $\mathbb{T}:=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$. 则 $\mathbb{T}$ 是乘法群且 $\hat{G}=\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(G,\mathbb{T})$.

♠

对任何 $\chi,\varphi\in\widehat{G}$ 定义 $\chi\varphi\in\widehat{G}$ 为

$$(\chi\varphi)(g):=\chi(g)\varphi(g),\quad g\in G.$$

则 $\widehat{G}$ 是 Abel 群. $\widehat{G}$ 中的单位元是 ι, 即 $\iota(g) := 1$. $\chi \in \widehat{G}$ 的逆元由下面给出

$$\chi^{-1}(g) := \overline{\chi(g)} = \frac{1}{\chi(g)}, \quad g \in G.$$

首先假设 G 是有限 Abel 群. 则 $\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{F}(G) = |G|$. 对任意 $\chi \in \widehat{G}$ 且 $\chi \neq \iota$, 我们可以找到 $g_0 \in G$ 使得 $\chi(g_0) \neq 1$ 且 $g_0 \neq e$. 计算得到

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = \sum_{g \in G} \chi(g_0 g) = \sum_{g \in G} \chi(g_0)\chi(g) = \chi(g_0) \sum_{g \in G} \chi(g).$$

因此

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = 0.$$

作为推论对任意 $\chi, \varphi \in \widehat{G}$, 只要 $\chi \neq \varphi$ 就得到

$$\sum_{g \in G} (\chi\varphi^{-1})(g) = \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\varphi(g)} = 0.$$

另一方面有

$$\sum_{g \in G} (\chi\chi^{-1})(g) = \sum_{h \in G} \iota(g) = \sum_{g \in G} 1 = |G|.$$

则得到

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\chi\chi^{-1})(g) = 1.$$

上述计算促使我们在 $\mathcal{F}(G)$ 上定义**内积 (inner product)** 如下

$$\langle f_1, f_2 \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g)\overline{f_2(g)}, \quad f_1, f_2 \in \mathcal{F}(G). \tag{15.4.1}$$

从而得到

$$\langle \chi, \varphi \rangle = \delta_{\chi\varphi}, \quad \chi, \varphi \in \widehat{G}. \tag{15.4.2}$$

定理 15.18

(a) 若 $G = \mathbb{Z}_n = \{[0], [1], \cdots, [n-1]\}$ 和 $\xi = e^{2\pi\sqrt{-1}/n}$, 则

$$\widehat{G} = \{\chi_0, \chi_1, \cdots, \chi_{n-1}\},$$

这里 $\chi_1([j]) = \xi^j$ $(0 \leq j \leq n-1)$ 和 $\chi_k = \chi_1^k$ $(0 \leq k \leq n-1)$.

(b) 若 G_1 和 G_2 都是有限 Abel 群, 则 $\widehat{G_1 \times G_2} = \widehat{G_1} \times \widehat{G_2}$.

(c) 对任何有限 Abel 群 G 有 $|\widehat{G}| = |G|$.

♡

练习 15.4

证明定理 15.18.

♠

定理 15.19

假设 G 是有限 Abel 群.

(a) $\widehat{G}$ 是 $\mathcal{F}(G)$ 的正交基.

(b) 对任何 $f \in \mathcal{F}(G)$ 有

$$f = \sum_{\chi \in G} c(\chi)\chi, \quad c(\chi) := \langle f, \chi \rangle. \tag{15.4.3}$$

♡

证: (a) 利用 (15.4.2) 和**定理 15.18**.

(b) 根据 (a) 得到

$$f = \sum_{\chi \in \widehat{G}} c\chi$$

对某个 $c \in \mathbb{C}$ 成立. 从而推出

$$c = \langle f, \chi \rangle = \sum_{\varphi \in \widehat{G}} \langle c(\varphi)\varphi, \chi \rangle = \sum_{\varphi \in \widehat{G}} c(\varphi)\delta_{\varphi\chi} = c(\chi). \quad \square$$

我们接下来考虑群 $G = \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. 群 G 也是拓扑空间, 即运算 $(z, w) \mapsto zw$ 和 $z \mapsto z^{-1}$ 都是连续的. 因此 G 是拓扑群 (事实上是 Lie 群). 在此我们考虑 **T** 的所有**连续特征 (continuous character)**, 即, 集合 $\widehat{\mathbf{T}}$. 注意到原先的特征相对于有限群上的离散拓扑也是连续的.

对任意 $a \in \mathbb{R}$ 定义

$$\mu_a(x) := ax, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{15.4.4}$$

注意到 μ_a 是连续同态[3].

(A) 选择连续同态 $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 并记 $a := \psi(1) \in \mathbb{R}$. 则 $\psi = \mu_a$. 事实上, 对任何 $m \in \mathbb{Z}$, 我们有 $\psi(m) = ma$. 若 $\psi(1/n) =: b$, 则

$$a = \psi(1) = \psi\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = n\psi\left(\frac{1}{n}\right) = nb;$$

即, $b = \frac{1}{n}a$. 作为推论, $\psi(x) = ax$ 对任何 $x \in \mathbb{Q}$ 都成立. 因为 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 内稠密且 ψ 是连续的, 所以 $\psi(x) = ax$ 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 都成立.

(B) 定义指数映射为

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T}, \quad x \longmapsto e^{2\pi\sqrt{-1}t}. \tag{15.4.5}$$

显然 exp 是连续同态, 局部同构, 和 $\ker(\exp) = \mathbb{Z}$. 也就是说 $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ 是覆盖映射. 利用拓扑学结果可以证明对任意连续映射 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ 存在唯一的连续映射 $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足 $\varphi = \exp \circ \tilde{\varphi}$.

(C) $\widehat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$. 这里 $\widehat{\mathbb{R}}$ 表示 $\mathbb{R}$ 上所有连续特征构成的集合. 对任意 $a \in \mathbb{R}$ 定义 $\varphi_a \in \widehat{\mathbb{R}}$ 为 $\varphi_a(x) := e^{2\pi\sqrt{-1}ax}$, $x \in \mathbb{R}$. 反之, 如果 $\varphi \in \widehat{\mathbb{R}}$ 则 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ 是连续的和同态的. 根据 (B), 存在唯一的连续同态 $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足 $\varphi = \exp \circ \tilde{\varphi}$. 现在定义 $a := \tilde{\varphi}(1) \in \mathbb{R}$.

给定连续同态映射 $\chi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ 定义

$$\varphi_\chi := \chi \circ \exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T}. \tag{15.4.6}$$

[3]映射 $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 称为**同态 (homomorphism)**, 如果其是 $\mathbb{R}$ 上的群同态.

则 φ_χ 也是连续同态的且 $\varphi_\chi(0)=\varphi_\chi(1)=\chi(1)=1$. 根据以上讨论我们得到连续同态映射 $\tilde{\varphi}_\chi=\mu_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 且满足

$$\exp\circ\tilde{\varphi}_\chi=\varphi_\chi=\chi\circ\exp\,. \tag{15.4.7}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "\tilde{\varphi}_\chi"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\exp"] \\
\mathbb{T} \arrow[r, "\chi"'] & \mathbb{T}
\end{tikzcd}$$

特别地对 $\chi=1$ 得到

$$\exp(a)=\chi\left(\exp(1)\right)=\chi(1)=1\Longrightarrow a=n\in\mathbb{Z}$$

并称 $a=n$ 是 χ 的**度 (degree)** 且记为 $\deg(\chi)$. 因此, (15.4.7) 变成

$$\chi(z)=z^n,\quad n:=\deg(\chi),\quad z\in\mathbb{T}. \tag{15.4.8}$$

反之, 对任意 $n\in\mathbb{Z}$ 定义

$$\chi_n:=z^n,\quad z\in\mathbb{T}. \tag{15.4.9}$$

注意到 $\chi_n\in\widehat{\mathbb{T}}$ 和 $\chi_n\chi_m=\chi_{n+m}, m,n\in\mathbb{Z}$.

定理 15.20

我们有 $\widehat{\mathbb{T}}=(\chi_n)_{n\in\mathbb{Z}}\cong\mathbb{Z}$.

对任意 $f\in\mathcal{F}(\mathbb{T})$ (等价地说, f 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的复值函数且周期为 2π) 和 $\chi\in\widehat{\mathbb{T}}$ 定义

$$c(\chi):=\langle f,\chi\rangle=\frac{1}{|\mathbb{T}|}\int_{\mathbb{T}}f(x)\overline{\chi(x)}dx. \tag{15.4.10}$$

因此形式上有

$$f=\sum_{\chi\in\widehat{\mathbb{T}}}c(\chi)\chi=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c(\chi_n)\chi_n. \tag{15.4.11}$$

记

$$c_n:=c(\chi_n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}nx}dx \tag{15.4.12}$$

则 (15.4.11) 等于

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_ne^{2\pi\sqrt{-1}nx}. \tag{15.4.13}$$

这是下章即将讨论的关于圆上的 Fourier 分析 (参见**第 16 章**).

对 $\mathbb{R}$, 我们在 (15.4.11) 中把 $\sum_{\chi\in\widehat{\mathbb{T}}}$ 代替为 $\int_{\mathbb{R}}$ 从而得到

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}c(\varphi_a)\varphi_a da,\quad c(\varphi_a)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\overline{\varphi_a(t)}dt. \tag{15.4.14}$$

由于 $\varphi_a(t)=e^{2\pi\sqrt{-1}at}$ 故

$$\hat{f}(a)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}ax}dx,\quad f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(a)e^{2\pi\sqrt{-1}ax}da. \tag{15.4.15}$$

这是 $\mathbb{R}$ 上的经典 Fourier 分析. 令 $L^1(\mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}$ 上 (Riemann 或 Lebesgue) 可积函数构成的集合.

(*i*) 如果 $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$, 则 (15.4.15) 中的第一个积分有定义. 如果 $\int_{-\infty}^{\infty}$ 是 Cauchy 主值积分 $\lim_{\Delta\to\infty}\int_{-\Delta}^{\Delta}$ 则 (15.4.15) 中的第二个恒等式成立.

(*ii*) **(平移不变性)** 如果 $G = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{T}$ 则

$$\int_G f(x)\,dx = \int_G f(gx)\,dx, \quad g \in G.$$

特别的对 $G = \mathbb{R}$ 得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+a)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx;$$

如果 $G = \mathbb{T}$ 得到

$$\int_0^{2\pi} f(e^{2\pi\sqrt{-1}(\theta+\alpha)})d\theta = \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(e^{2\pi\sqrt{-1}\theta})d\theta.$$

(*iii*) 如果 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 则由 (15.4.15) 给出的函数 $\hat{f}$ 是有界的和连续的. 对每个 $h \in \mathbb{R}$ 定义

$$\mathbf{L}_h : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow L^1(\mathbb{R}), \quad f \longmapsto \mathbf{L}_h(f)(x) := f(x+h).$$

从而得到

$$\widehat{\mathbf{L}_h(f)} = \varphi_h \hat{f}$$

这里 $\varphi_h(x) = e^{2\pi\sqrt{-1}hx}$.

15.4.1 * 正数轴上的调和函数

集合 $\mathbb{R}^+$ 在乘法下构成一个拓扑群. 映射

$$\epsilon : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad x \longmapsto e^x, \tag{15.4.16}$$

是**拓扑同构 (topological isomorphism)** (即, ϵ 不仅是群同构而且也是拓扑同胚). ϵ 的逆映射 λ 为

$$\lambda : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \longmapsto \ln y. \tag{15.4.17}$$

更进一步我们有如下两个映射

$$\hat{\epsilon} : \widehat{\mathbb{R}^+} \longrightarrow \widehat{\mathbb{R}}, \quad \varphi \longmapsto \varphi \circ \epsilon, \tag{15.4.18}$$

和

$$\hat{\lambda} : \widehat{\mathbb{R}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{R}^+}, \quad \psi \longmapsto \psi \circ \lambda. \tag{15.4.19}$$

因为 $\widehat{\mathbb{R}} = \langle \varphi_a \rangle_{a\in\mathbb{R}}$, 所以

$$\varphi_a^+(x) := \hat{\lambda}(\varphi_a)(x) = \varphi_a(\ln x) = e^{2\pi\sqrt{-1}a\ln x} = x^{2\pi\sqrt{-1}a}, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{15.4.20}$$

定理 15.21

$\widehat{\mathbb{R}^+} = \langle \varphi_a^+ \rangle_{a\in\mathbb{R}}$. 作为拓扑群, $\widehat{\mathbb{R}^+}$ 和 $\mathbb{R}$ 是同构的. ♡

在群 $\mathbb{R}^+$ 存在不变测度 dx/x 满足

$$\int_{ra}^{rb}\frac{dx}{x}=\ln\frac{rb}{ra}=\ln\frac{b}{a}=\int_a^b\frac{dx}{x},\quad a,b>0.$$

定义

$$\tilde{f}(a)=c(\varphi_a^+)=\int_{\mathbb{R}^+}f(x)\overline{\varphi_a^+(x)}\frac{dx}{x}=\langle f,\varphi_a^+\rangle_{L^2(\mathbb{R}^+,dx/x)};\tag{15.4.21}$$

则得到

$$f(x)=\int_{\widehat{\mathbb{R}^+}}c(\varphi_a^+)\varphi_a^+=\int_{\mathbb{R}}c(\varphi_a^+)\varphi_a^+da=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(a)x^{2\pi\sqrt{-1}a}da.\tag{15.4.22}$$

公式 (15.4.21) 和 (15.4.22) 是 $\mathbb{R}^+$ 上的 Fourier 分析. 引入

$$\tau:=-2\pi a,\quad \hat{f}(\tau):=\tilde{f}\left(-\frac{\tau}{2\pi}\right)=\tilde{f}(a).\tag{15.4.23}$$

则 (15.4.22) 和 (15.4.22) 变为

$$\hat{f}(\tau)=\int_0^{\infty}f(x)x^{\sqrt{-1}\tau}\frac{dx}{x},\quad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\tau)x^{-\sqrt{-1}\tau}d\tau.\tag{15.4.24}$$

定理 15.22

(a) 如果 $f\in L^1(\mathbb{R}^+,dx/x)\cap C^1((0,+\infty))$, 则 (15.4.24) 中的第一个积分是有定义的. 更进一步如果 $\int_{-\infty}^{\infty}$ 表示 Cauchy 主值积分 $\lim_{\Delta\to\infty}\int_{-\Delta}^{\Delta}$ 则 (15.4.24) 中的第二个恒等式成立.

(b) 如果 $F\in L^1((-\infty,\infty))\cap C^1((-\infty,\infty))$, 则积分

$$f(x):=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\tau)x^{-\sqrt{-1}\tau}d\tau$$

是有定义的. 进一步有

$$F(\tau)=\lim_{\Delta\to\infty}\int_{\frac{1}{\Delta}}^{\Delta}f(x)x^{\sqrt{-1}\tau}\frac{dx}{x}.$$

♡

给定 $f\in C^1(\mathbb{R}^+)$ 和 $\sigma>0$, 定义

$$f_\sigma(x):=x^\sigma f(x).\tag{15.4.25}$$

注意到 $f_\sigma\in C^1(\mathbb{R}^+)$. 若进一步假设 $f_\sigma\in L^1(\mathbb{R}^+,dx/x)$, 此时根据定理 15.22 (a) 定义

$$\widehat{f_\sigma}(\tau)=\int_0^{\infty}f(x)x^{\sigma+\sqrt{-1}\tau}\frac{dx}{x}.\tag{15.4.26}$$

定理 15.23. (Mellin 变换)

如果 $f\in C^1(\mathbb{R}^+)$ 和 $f_\sigma\in L^1(\mathbb{R}^+,dx/x)$ 其中 $\sigma\in(a,b)\subset\mathbb{R}^+$, 则

$$F(z):=\int_0^{\infty}f(x)x^z\frac{dx}{x}\tag{15.4.27}$$

关于 z(其中 $a<\mathrm{Re}(z)<b$) 是全纯的, 且

$$f(x)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty}F(z)x^{-z}dz\tag{15.4.28}$$

该积分和 $\sigma\in(a,b)$ 的选择无关.

♡

证: 显然 $F(z):=\widehat{f_\sigma}(\tau)$ 关于 $z:=\sigma+\sqrt{-1}\tau$, 其中 $a<\sigma<b$, 是全纯的. 根据定理

15.22 (b) 我们有

$$x^\sigma f(x) = f_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f_\sigma}(\tau) x^{-\sqrt{-1}\tau} d\tau$$

则

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f_\sigma}(\tau) x^{-\sigma-\sqrt{-1}\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty} F(z) x^{-z} dz.$$

根据 Cauchy 定理最后的积分和 σ 无关. □

称 $(f(x), F(z))$ 为 **Mellin 对 (Mellin pair)** 并通常把 $F(z)$ 记作 $\mathcal{M}(f)(z)$. 若 $f(x) = e^{-x}$, 则 $f_\sigma \in L^1(\mathbb{R}^+, dx/x)$ 对任何 $\sigma \in \mathbb{R}^+$ 都成立. 则 $F(z) = \Gamma(z)$.

定理 15.24

(a) $(e^{-x}, \Gamma(z))$ 是 Mellin 对.

(b) 我们有

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x} x^z \frac{dx}{x}, \quad e^{-x} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty} \Gamma(z) x^{-z} dz \tag{15.4.29}$$

对任何 $\mathrm{Re}(z) > 0$ 都成立.

♡

练习 15.5

$e^{-x} - 1 + \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ 和 $\Gamma(z)$ $(-n < \mathrm{Re}(z) < -(n-1))$ 是 Mellin 对.

♠

练习 15.6

令 $(f(x), F(z))$ 是 Mellin 对. 证明对任何 $a, b > 0$ 和 $c, \ell \in \mathbb{C}$ 如下都是 Mellin 对:

(a) $f(x^a)$ 和 $\frac{1}{a}F(\frac{z}{a})$,

(b) $\frac{1}{x^\ell} f(\frac{1}{x})$ 和 $F(\ell - z)$,

(c) $f(bx)$ 和 $\frac{F(z)}{b^z}$,

(d) $x^c f(x)$ 和 $F(z + c)$,

(e) $f(bx^a)$ 和 $F(\frac{z}{a})/ab^{z/a}$.

♠

练习 15.7

假设 $(f(x), F(z))$ 是 Mellin 对. 对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 证明 $f(x)(\ln x)^n$ 和 $F^{(n)}(z)$ 是 Mellin 对.

♠

若 $(f(x), F(z)$ 和 $(g(x), G(z))$ 都是 Mellin 对, 则

$$\begin{aligned} F(z)G(z) &= \int_0^\infty f(t)t^z \frac{dt}{t} \cdot \int_0^\infty g(y)y^z \frac{dy}{y} = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(t)g(y)(ty)^z \frac{dt}{t}\right] \frac{dy}{y} \\ &= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(t) g\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t}\right] x^z \frac{dx}{x} = \int_0^\infty (f * g)(x) x^z \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

这里 $f * g$ 表示 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $L^1(\mathbb{R}^+, d/x)$ 上的**卷积 (convolution)**:

$$(f * g)(x) := \int_0^\infty f(t) g\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t}. \tag{15.4.30}$$

定理 15.25

对任意 $f,g\in L^1(\mathbb{R}^+,dx/x)$, 有 $\mathcal{M}(f*g)=\mathcal{M}(f)\mathcal{M}(g)$.

练习 15.8

(a) 若 $f,g\in L^1(\mathbb{R}^+,\frac{dx}{x})$, 则 $f*g\in L^1(\mathbb{R}^+,\frac{dx}{x})$.

(b) 若 $f,g,h\in L^1(\mathbb{R}^+,\frac{dx}{x})$, 则 $(f*g)*h=f*(g*h)$.

(c) 若 $f,g\in L^1(\mathbb{R}^+,\frac{dx}{x})$, 则 $f*g=g*f$.

(d) 若 $f_1,f_2,g\in L^1(\mathbb{R}^+,\frac{dx}{x})$ 和 $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, 则 $(c_1f_1+c_2f_2)*g=c_1(f_1*g)+c_2(f_2*g)$.

上述练习表明 $(L^1(\mathbb{R}^+,dx/x),*)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的交换代数. 另一方面 $\mathbb{C}$ 上的所有亚纯函数构成的集合 $\mathscr{M}$ 也是 $\mathbb{R}$ 上的交换代数

定理 15.26

(a) $\mathcal{M}:L^1(\mathbb{R}^+,dx/x)\to\mathscr{M}$ 是代数同态.

(b) 如果 $f_1,\cdots,f_n\in L^1(\mathbb{R}^+,dx/x)$, 则

$$\prod_{1\le i\le n}\mathcal{M}(f_i)=\mathcal{M}\Big(*_{1\le i\le n}f_i\Big),\tag{15.4.31}$$

这里

$$\begin{aligned}\Big(*_{1\le i\le n}f_i\Big)(x) &= \underbrace{\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty}_{n-1} f_1(x_1)f_2(x_2)\cdots f_{n-1}(x_{n-1})\\ &\qquad f_n\left(\frac{x}{x_1x_2\cdots x_{n-1}}\right)\frac{dx_{n-1}}{x_{n-1}}\cdots\frac{dx_2}{x_2}\frac{dx_1}{x_1}.\end{aligned}$$

易证

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \Gamma(z)\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{-z}dt = \int_0^{+\infty}t^ze^{-t}y^{z-1}dy\cdot\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{-z}dt\\ &= \int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}e^{-t(y+1)}dt\right]y^{z-1}dy = \int_0^{\infty}\frac{1}{1+y}y^{z-1}dy.\end{aligned}$$

因此 $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$ 和 $\frac{1}{1+x}$ 是 Mellin 对. 下面练习给出另一个证明.

练习 15.9

证明

(a) $\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$ 和 $\Gamma(1-z)$ 是 Mellin 对.

(b) $e^{-x}*(\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}})=\frac{1}{1+x}$.

(c) $e^{-nx^{1/n}}$ 和 $\Gamma(nz)/n^{nz-1}$ 是 Mellin 对.

定理 15.27. (Gauss)

对任意 $n\ge1$ 有

$$\prod_{0\le k\le n-1}\Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\Gamma(nz)}{n^{nz-1}}.\tag{15.4.32}$$

证: 对每个 k, $\Gamma(z+\frac{k}{n})$ 和 $x^{k/n}e^{-x}$ 是 Mellin 对. 根据 (15.4.31), 得到 $\prod_{0\le k\le n}\Gamma(z+\frac{k}{n})$

和

$$\begin{aligned} f(x) &= \underbrace{\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty}_{n-1} e^{\frac{-x}{x_1x_2\cdots x_{n-1}}} x_{n-1}^{\frac{1}{n}} e^{-x_{n-1}} \cdots x_2^{\frac{n-2}{n}} e^{-x_2} x_1^{\frac{n-1}{n}} e^{-x_1} \frac{dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1}}{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} \\ &= \underbrace{\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty}_{n-1} e^{-(x_1 \cdots + x_{n-1} + \frac{x}{x_1 \cdots x_{n-1}})} \frac{dx_1 \cdots dx_{n-1}}{x_1^{\frac{1}{n}} \cdots x_{n-1}^{\frac{n-1}{n}}} \end{aligned}$$

是 Mellin 对. 利用 (15.3.10) 得到

$$\begin{aligned} \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}} &= \prod_{1\le k\le n-1} \Gamma\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \int_0^\infty e^{-x_1} x_1^{\frac{n-1}{n}} \frac{dx_1}{x_1} \int_0^\infty e^{-x_2} x_2^{\frac{n-2}{n}} \frac{dx_2}{x_2} \cdots \int_0^\infty e^{-x_n} x_{n-1}^{\frac{1}{n}} \frac{dx_{n-1}}{x_{n-1}} \\ &= \underbrace{\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty}_{n-1} e^{-(x_1+\cdots+x_{n-1})} \frac{dx_1 \cdots dx_{n-1}}{x_1^{\frac{1}{n}} \cdots x_{n-1}^{\frac{n-1}{n}}}. \end{aligned}$$

考虑函数

$$f(x) - \frac{(2\pi)^{n-1}}{\sqrt{n}} e^{-n\sqrt[n]{x}}. \tag{15.4.33}$$

利用下面练习可推出

$$f(x) = \frac{(2\pi)^{n-1}}{\sqrt{n}} e^{-n\sqrt[n]{x}}.$$

另一方面利用**练习 15.9** (c), 得到 $(e^{-n\sqrt[n]{x}}, \Gamma(nz)/n^{nz-1})$ 是 Mellin 对. □

练习 15.10

证明函数 (15.4.33) 恒等于 0. (**提示:** 考虑它的导数).

定理 15.9 和**定理 15.10** 证明了 $\Gamma(s)$ 的值由其在区间 $(0,1/2]$ 上的值所决定的. 我们现在来证明 $\Gamma(s)$ 的值由其在区间 $(0,1/3]$ 上的值所决定的. 根据**定理 15.10** 得到

$$\Gamma\left(\frac{1+x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{2})}.$$

根据 (5.5.24) 得到

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+x}{2}\right) = \sqrt{\pi}2^{1-x}\Gamma(x).$$

因此

$$\Gamma(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{1-x}\cos\frac{\pi x}{2}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{x}{2})}{\Gamma(\frac{1-x}{2})}. \tag{15.4.34}$$

当 $x \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ 时有 $\frac{x}{2}, \frac{1-x}{2} \in (0, \frac{1}{3}]$. 则对任意 $x \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$, $\Gamma(x)$ 有 (15.4.34) 所给出.

练习 15.11

证明 $\Gamma(x)$ 的值由其在区间 $(0,1/4]$ 上的值所决定:

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}-2x\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{1}{3}+2x}\cos(\frac{\pi}{6}-\pi x)} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{6}-x)}{\Gamma(\frac{1}{3}+x)},$$

$$\Gamma\left(\frac{2}{3}+x\right)\Gamma\left(\frac{7}{6}+x\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{1}{3}+2x}}\Gamma\left(\frac{4}{3}+2x\right),$$

$$\Gamma(3x) = \frac{3^{3x-\frac{1}{2}}2^{-\frac{5}{3}-2x}}{\sqrt{\pi}\cos(\frac{\pi}{6}-\pi x)}\frac{\Gamma(\frac{2}{3}+x)\Gamma(x)\Gamma(\frac{1}{6}-x)}{\Gamma(\frac{1}{3}-2x)}.$$

因此

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \frac{2^{-\frac{5+2x}{3}}3^{x-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}{\sin\frac{\pi+\pi x}{3}\sin\frac{\pi-\pi x}{3}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{x}{3})\Gamma(\frac{1-2x}{6})}{\Gamma(\frac{1-x}{3})\Gamma(\frac{1-2x}{3})}, & x \in \left(\frac{1}{4},\frac{3}{8}\right), \\ \frac{4^{-x}\sqrt{\pi}}{\sin(\pi x)} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1-2x}{2})}{\Gamma(1-2x)}, & x \in \left[\frac{3}{8},\frac{1}{2}\right). \end{cases}$$

练习 15.12

利用**定理 15.27** 证明

$$\sin x = 2^{n-1}\prod_{0\le k\le n-1}\sin\frac{x+k\pi}{n}.$$

(**提出:** 取 $z = x/n$).

定理 15.28

如果 $f,g \in L^1(\mathbb{R}^+, dx/x)$, 则 $\mathcal{M}(fg) = \mathcal{M}(f) * \mathcal{M}(g)$.

证: 令 $F = \mathcal{M}(f)$ 和 $G = \mathcal{M}(g)$. 因为

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty} F(w)x^{-w}dw,$$

我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(fg)(z) &= \int_0^\infty f(x)g(x)x^z\frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_0^\infty\left[\int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty}F(w)x^{-w}dw\right]g(x)x^z\frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty}F(w)\left[\int_0^\infty g(x)x^{z-w}\frac{dx}{x}\right]dw \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty}F(w)G(z-w)dw. \end{aligned}$$

最后一步是 $(F*G)(z)$ 的定义. □

在**练习 15.9** (c) 中令 $y = nx$ 得到 $(e^{-nx}, \Gamma(z)/n^z)$ 对每个 $n \ge 1$ 都是 Mellin 对. 回顾 Riemann ζ 函数

$$\zeta(z) := \sum_{n\ge1}\frac{1}{n^z}.$$

定理 15.29

(1) 如果 $\mathrm{Re}(z) > 1$, 则 $(\frac{1}{e^x-1}, \Gamma(z)\zeta(z))$ 是 Mellin 对.

(2) 如果 $\mathrm{Re}(z) \in (0,1)$, 则 $(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}, \Gamma(z)\zeta(z))$ 是 Mellin 对.

(3) 如果 $\sigma > 1$, 则

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty} \Gamma(z)\zeta(z)x^{-z}dz.$$

证: 这可以从函数项级数 $\frac{1}{u-1} = \sum_{n\geq 1} u^{-n}$ 推出. □

练习 15.13

完成定理 15.29 的证明.

如果函数 f 有如下的 (Fourier 级数) 展开

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} a_n e^{-nx},$$

使得对任何 $\sigma \in (a, \infty)$ 都有 $f_\sigma(x) = x^\sigma f(x) \in L^1(\mathbb{R}^+, dx/x)$, 则此时 (请同学们自证)

$$\mathcal{M}(f_\sigma)(\tau) = \Gamma(\sigma + \sqrt{-1}\tau) \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^{\sigma+\sqrt{-1}\tau}}, \quad \sigma > a.$$

定理 15.30

如果对任何 $\sigma \in (a, \infty) \subset \mathbb{R}^+$ 都有 $x^\sigma \sum_{n\geq 1} a_n e^{-nx} \in L^1(\mathbb{R}^+, \frac{dx}{x})$, 则 $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-nx}$ 和 $\Gamma(z) \sum_{n\in\geq 1} \frac{a_n}{n^z}$, $\mathrm{Re}(z) > a$, 是 Mellin 对.

级数

$$D(z, \{a_n\}_{n\geq 1}) := \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^z} \tag{15.4.35}$$

称为数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 的 **Dirichlet 级数 (Dirichlet series)**. Dirichlet 级数也可以用算术函数来重新描述. 称 $\mathbb{N}$ 上的复值函数 f 为**算术函数 (arithmetic function)**, 此时若定义 $a_n := f(n)$ 则 (15.4.35) 可改写成

$$D_f(z) := \sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^z}.$$

这也称为函数 f 的**生成函数 (generating series)**. 算术函数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ 称为**加性函数 (additive function)** 如果

$$f(mn) = f(m) + f(n), \quad (m, n) = 1.$$

函数 f 称为**完全加性函数 (completely additive function)** 如果这个性质对任何 $m, n \in \mathbb{N}$ 都成立. 同样地, f 称为**乘性函数 (multiplicative function)** 如果

$$f(mn) = f(m)f(n), \quad (m, n) = 1.$$

函数 f 称为**完全乘性函数 (completely multiplicative function)** 如果这个性质对任何 $m, n \in \mathbb{N}$ 都成立. 比如 $f(n) = \ln n$ 是完全加性函数而 $f(n) = n^{-z}$ 是完全乘性函数.

如果 f 是乘性函数, 则只要下面的级数和乘积都是绝对收敛就有

$$D_f(z) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left[\sum_{n\geq 0} \frac{f(p^n)}{p^{nz}}\right] = \prod_{p\in\mathbb{P}} [1 + f(p)p^{-s} + f(p^2)p^{-2s} + \cdots]$$

这里 $\mathbb{P}$ 表示所有素数构成的集合. 取特殊情形 $f(n)\equiv 1$ 得到 **Euler 乘积 (Euler product)**

$$\zeta(z)=D_1(z)=\prod_{p\in\mathbb{P}}(1-p^{-z})^{-1},\quad \mathrm{Re}(z)>1.$$

$\zeta(z)$ 的倒数也具有 Dirichlet 级数展开,

$$\frac{1}{\zeta(z)}=\prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1-\frac{1}{p^z}\right)=\sum_{n\geq 1}\frac{\mu(n)}{n^z}$$

这里

$$\mu(n):=\begin{cases}(-1)^r, & m=p_1\cdots p_r \text{ 且 } p_1,\cdots,p_r \text{ 互不相同},\\ 0, & \text{其余情形}.\end{cases}$$

是Möbius 在 1832 年引入的, 现在称为 **Möbius 函数 (Möbius function)**. 从 $\zeta(z)\cdot\zeta^{-1}(z)=1$ 得到

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\delta_{m1}.$$

作为推论得到 **Möbius 反演公式 (Möbius inversion)**:

$$g(n)=\sum_{d|n}f(d)\quad\Longleftrightarrow\quad f(n)=\sum_{d|n}\mu(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

上述形式是Dedekind 在 1857 年给出的. 可以证明 Möbius 函数是乘性函数, 一般地可以证明如果 f,g 都是乘性函数则 fg 和 $f*g$ 也都是乘性函数.

若令 $\tau(n)$ 是自然数 n 的正因子个数, 则得到

$$\zeta^2(z)=\sum_{n\geq 1}\frac{\tau(n)}{n^z}.$$

一般地定义 $\tau_k(n)$ 为 n 分解成 k 个自然数的不同乘积数, 所以

$$\zeta^k(n)=\sum_{n\geq}\frac{\tau_k(n)}{n^z},\quad \tau(n)=\tau_2(n).$$

可以证明

$$\tau_k(n)=\binom{a_1+k-1}{k-1}\cdots\binom{a_r+k-1}{k-1},\quad n=p_1^{a_1}\cdots p_r^{q_r}.$$

对任意 $\nu\in\mathbb{C}$ 定义 $\sigma_\nu(n)$ 如下

$$\zeta(z)\zeta(z-\nu)=\sum_{n\geq 1}\frac{\sigma_\nu(n)}{n^z}$$

从而得到

$$\sigma_\nu(n)=\sum_{d|n}d^\nu.$$

这样就得到了 **Ramanujan 公式 (Ramanujan formula)**

$$\zeta(z)\zeta(z-\alpha)\zeta(z-\beta)\zeta(z-\alpha-\beta)\zeta^{-1}(2z-\alpha-\beta)=\sum_{n\geq 1}\frac{\sigma_\alpha(n)\sigma_\beta(n)}{n^z}.$$

特别地

$$\zeta^4(z)\zeta^{-1}(2z)=\sum_{n\geq 1}\frac{\tau(n)^2}{n^z}.$$

上面的 **Ramanuja 级数 (Ramanuja series)** 是所谓的 **Rankin-Selberg 卷积 L-函数 (Rankin-Selberg convolution L-function)** 的特殊情形.

假设 Dirichlet 级数 $D_f(z)$ 和 $D_g(z)$ 绝对收敛, 则乘积 $D_f(z)D_g(s)$ 也是 Dirichlet 级数且可以表示成

$$D_f(z)D_g(z)=\sum_{n\ge1}\frac{h(n)}{n^z},\quad h(n):=\sum_{d|n}f(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

这里算术函数 h 称为 f 和 g 的 **Dirichlet 卷积 (Dirichlet convolution)** 并记作 $h=f*g$.

利用分部积分法计算得到

$$\Gamma(z)\zeta(z)=\int_0^\infty\frac{x^z}{e^x-1}\frac{dx}{x}=\int_0^\infty\frac{x\cdot x^{z-2}dx}{e^x-1}=-\frac{1}{z-1}\int_0^\infty\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)x^z\frac{dx}{x};$$

一般的对 $k=0,1,2,\cdots$ 有

$$\Gamma(z)\zeta(z)=\frac{(-1)^{k+1}}{(z-1)z(z+1)\cdots(z+k-1)}\int_0^\infty x^{z+k-1}\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)dx.$$

等价地, 对每个 $k=0,1,2,\cdots$, 得到

$$\zeta(z)=\frac{(-1)^{k+1}}{(z-1)\Gamma(z+k)}\int_0^\infty x^{z+k}\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)\frac{dx}{x}. \tag{15.4.36}$$

当 $\mathrm{Re}(z)>-k$ 时, 反常积分

$$\int_0^\infty x^{z+k}\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)\frac{dx}{x}$$

收敛, 所以 (15.4.36) 的右边关于 z 是全纯的, 当然只要满足 $\mathrm{Re}(z)>-k$ 和 $z\neq1$ (因为 $\Gamma(z+k)$ 是全纯的和恒不为 0). 因此我们可以把 Riemann zeta 函数全纯延拓到整个复平面除了 $z=1$.

定理 15.31

(a) $\zeta(z)$ 在 $\mathbf{C}\setminus\{z=1\}$ 上是全纯的.

(b) $\lim_{z\to1}(z-1)\zeta(z)=1$.

(c) 如果 $\mathrm{Re}(z)>-k$, 则 $\zeta(z)$ 由 (15.4.36) 所给出.

(d) $(z-1)\zeta(z)$ 是全纯函数.

(e) $\zeta(0)=\frac{1}{2}$.

♡

证: 计算得到

$$(z-1)\zeta(z)=-\frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^\infty\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)x^z\frac{dx}{x}.$$

令 $z\to1$ 得到

$$\lim_{z\to1}(z-1)\zeta(z)=-\frac{1}{\Gamma(1)}\int_0^\infty\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)dx=-\frac{x}{e^x-1}\Big|_0^\infty=1.$$

因此 $z=1$ 是 $\zeta(z)$ 的简单极点.

最后来计算 $\zeta(0)$ 的值. 在 (15.4.36) 中令 $k=1$ 和 $z=0$ 就得到

$$\zeta(0)\;=\;-\int_0^\infty\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)dx\;=\;-\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)\Big|_0^\infty$$

$$= \left.\frac{(x-1)e^x+1}{(e^x-1)^2}\right|_0^\infty = -\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)e^x+1}{(e^x-1)^2}$$
$$= -\lim_{x\to\infty}\frac{e^x = (x-1)e^x}{2(e^x-1)e^x} = -\lim_{x\to 0}\frac{x}{2(e^x-1)} = -\frac{1}{2}.$$

故 $\zeta(0) = -1/2$. □

练习 15.14

对每个正数 $a>0$, 定义 **Hurwitz ζ 函数** 为

$$\zeta(z,a) := \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+a)^z}.$$

证明 $\zeta(z,a)$ 关于 z 收敛只要 $\mathrm{Re}(z)>1$, 和关于 z 是一致收敛只要 $\mathrm{Re}(z)>1+\delta$ ($\delta>0$). 进一步 $(\frac{e^{-ax}}{1-e^{-x}}, \Gamma(z)\zeta(z,a))$ 是 Mellin 对.

定义函数 I, J 如下

$$I := \int_0^\infty e^{-t}\cos(ut)\,dt, \quad J := \int_0^\infty e^{-t}\sin(ut)\,dt. \tag{15.4.37}$$

注意到

$$I+\sqrt{-1}J = \int_0^\infty e^{-t+\sqrt{-1}ut}dt.$$

计算

$$I = -\int_0^\infty \cos(ut)\,de^{-t} = -\left[0-1+u\int_0^\infty e^{-t}\sin(ut)\,dt\right] = 1-uJ,$$
$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{u}\,d\sin(ut) = \int_0^\infty \frac{\sin(ut)}{u}e^{-t}dt = \frac{1}{u}J.$$

因此

$$I = \frac{1}{1+u^2}, \quad J = \frac{u}{1+u^2}. \tag{15.4.38}$$

记

$$\hat{c}(z) := \mathcal{M}(\cos x), \quad \hat{s}(z) := \mathcal{M}(\sin x) \tag{15.4.39}$$

分别是 $\cos x$ 和 $\sin x$ 的 Mellin 变换.

练习 15.15. (Euler)

证明

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{u^{-z}\hat{c}(z)}{1+u^2}du = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt = \Gamma(z),$$
$$\int_0^\infty \frac{x^{-z}}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}\sec\frac{\pi z}{2},$$
$$\hat{c}(z) = \Gamma(z)\cos\frac{\pi z}{2}, \quad \mathrm{Re}(z)>0,$$
$$\hat{s}(z) = \Gamma(z)\sin\frac{\pi z}{2}, \quad \mathrm{Re}(z)>-1.$$

利用**练习 15.6** (c) 我们得到

推论 15.2. (Euler)

(a) 对每个 $t > 0$, $(\cos(tx), \Gamma(z)\cos\frac{\pi z}{2}\cdot t^{-z})$ 是 Mellin 对. 因此

$$\int_0^\infty \cos(tx)x^z\frac{dx}{x} = \frac{\Gamma(z)}{t^z}\cos\frac{\pi z}{2}, \quad \mathrm{Re}(z) > 0, \tag{15.4.40}$$

和

$$\cos(tx) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty}\Gamma(z)\cos\frac{\pi z}{2}(tx)^{-z}dz. \tag{15.4.41}$$

(b) 对每个 $t > 0$, $(\sin(tx), \Gamma(z)\sin\frac{\pi z}{2}\cdot t^{-z})$ 是 Mellin 对. 因此

$$\int_0^\infty \sin(tx)x^z\frac{dx}{x} = \frac{\Gamma(z)}{t^z}\sin\frac{\pi z}{2}, \quad \mathrm{Re}(z) > -1, \tag{15.4.42}$$

和

$$\sin(tx) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty}\Gamma(z)\sin\frac{\pi z}{2}(tx)^{-z}dz. \tag{15.4.43}$$

♡

上述练习给出了如下恒等式

$$\frac{\pi}{2\Gamma(z)\sin\frac{\pi z}{2}} = \Gamma(1-z)\cos\frac{\pi z}{2} = \int_0^\infty \sin x\cdot x^{1-z}\frac{dx}{x} = \int_0^\infty\frac{\sin x}{x^z}dx. \tag{15.4.44}$$

在 (15.4.44) 中令 $z = 1$ 得到

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}. \tag{15.4.45}$$

定理 15.32

(1) 假设 $(f(x), F(z))$ 是 Mellin 对. 则下面命题等价

(i) $f(x)$ 满足

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos(tx)\,dt. \tag{15.4.46}$$

(ii) $F(z)$ 满足

$$\frac{F(z)}{2^{\frac{z}{2}}\Gamma(\frac{z}{2})} = \frac{F(1-z)}{2^{\frac{1-z}{2}}\Gamma(\frac{1-z}{2})}. \tag{15.4.47}$$

(2) 假设 $(f(x), F(z))$ 是 Mellin 对. 则下面命题等价

(i) $f(x)$ 满足

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin(tx)\,dt. \tag{15.4.48}$$

(ii) $F(z)$ 满足

$$\frac{F(z)}{2^{\frac{z}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{z}{2})} = \frac{F(1-z)}{2^{\frac{1-z}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1-z}{2})}. \tag{15.4.49}$$

♡

证: 我们给出 (1) 的证明. $(i) \Rightarrow (ii)$: 利用 (15.4.46) 和 (15.4.40) 得到

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_0^\infty f(x)x^z\frac{dx}{x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f(t)\cos(tx)\,dt\right]x^z\frac{dx}{x} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\left[\int_0^\infty\cos(tx)x^z\frac{dx}{x}\right]dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(z)\cos\frac{\pi z}{2}\int_0^\infty f(t)t^{1-z}\frac{dt}{t} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(z)\cos\frac{\pi z}{2}F(1-z). \end{aligned}$$

根据恒等式 (请诸位自证)

$$\frac{2^{\frac{z}{2}}\Gamma(\frac{z}{2})}{2^{\frac{1-z}{2}}\Gamma(\frac{1-z}{2})} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(z)\cos\frac{\pi z}{2},$$

得到 (15.4.47).

$(ii) \Rightarrow (i)$: 上面恒等式结合 (15.4.47) 给出

$$F(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(t)\cos(tx)\,dt\right] x^z \frac{dx}{x}.$$

利用 Mellin 变换的唯一性推出 (15.4.46). □

令 $K_c(z)$ 和 $K_s(z)$ 分别为 $\sqrt{2/\pi}\cos x$ 和 $\sqrt{2/\pi}\sin x$ 的 Mellin 变换. 则

$$K_c(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(z)\cos\frac{\pi z}{2}, \quad K_s(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(z)\sin\frac{\pi z}{2} \tag{15.4.50}$$

根据**练习 15.15**.

练习 15.16

假设 $(f(x), F(z))$ 和 $(g(x), G(z))$ 是 Mellin 对.

(1) 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(t)\cos(tx)\,dt, \quad g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos(tx)\,dt,$$

则

$$F(z) = G(1-z)K_c(z), \quad G(z) = F(1-z)K_c(z).$$

(2) 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(t)\sin(tx)\,dt, \quad g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin(tx)\,dt,$$

则

$$F(z) = G(1-z)K_s(z), \quad G(z) = F(1-z)K_s(z).$$

为了应用**定理 15.32** 我们需要找到满足条件 (15.4.46) 或 (15.4.48) 的函数. 比如考虑函数

(i) $x^{-\frac{1}{2}}, e^{-\frac{1}{2}x^2}, \mathrm{sech}(\sqrt{\frac{\pi}{2}}x), \cdots$, 满足 (15.4.46).

(ii) $x^{-\frac{1}{2}}, xe^{-\frac{1}{2}x^2}, \frac{1}{e^{\sqrt{2\pi x}}-1} - \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}, \cdots$, 满足 (15.4.48).

我们排除掉函数 $e^{-\frac{1}{2}}$ 这是因为它不属于 $L^1(\mathbb{R}^+, dx/x)$.

(1) $f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x^2}$. 因为 $(e^{-x}, \Gamma(z))$ 是 Mellin 对, 故根据**练习 15.6** (e) 得到 $(f(x), F(z))$ 是 Mellin 对, 这里 $F(z) = 2^{\frac{z}{2}}\Gamma(\frac{z}{2})$. 因此得到 (15.4.47).

(2) $f(x) = \sqrt{2}xe^{-\frac{1}{2}x^2}$. 因为 $(2e^{-\frac{1}{2}x^2}, 2^{\frac{z}{2}}\Gamma(\frac{z}{2}))$ 是 Mellin 对, 根据**练习 15.6** (d) 得到 $(f(x), F(z))$ 是 Mellin 对, 这里 $F(z) = 2^{\frac{z}{2}}\Gamma(\frac{z+1}{2})$. 因此得到 (15.4.49).

(3) $f(x) = \mathrm{sech}(\sqrt{\frac{\pi}{2}}x)$. 回顾

$$\frac{1}{2}\mathrm{sech}(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n e^{-(2n+1)x}$$

从而积分得到

$$\int_0^\infty \frac{1}{2}\mathrm{sech}(x)\frac{dx}{x} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\int_0^\infty e^{-(2n+1)x}x^z\frac{dx}{x} = \Gamma(z)\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^z}.$$

若定义 $\chi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_3$ 为

$$\chi_1(2k) = 0, \quad \chi_1(4k+1) = 1, \quad \chi_1(4k+3) = -1, \tag{15.4.51}$$

其相应的 Dirichlet 级数为

$$L(z,\chi_1) \equiv D_{\chi_1}(z) := \sum_{n\geq 1}\frac{\chi_1(n)}{n^z}. \tag{15.4.52}$$

所以得到

$$\left(\frac{1}{2}\mathrm{sech}(x), \Gamma(z)L(z,\chi_1)\right) \text{ 是 Mellin 对.} \tag{15.4.53}$$

作为推论可知 $(f(x), 2(\frac{2}{\pi})^{\frac{z}{2}}\Gamma(z)L(z,\chi_1))$ 是 Mellin 对.

(4) $f(x) = \cosh(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}x)/\cosh(\sqrt{\pi}x)$ 满足 (15.4.46). 则 $(f(x), F(z))$ 是 Mellin 对, 这里 $F(z) = L(z,\chi_2) = \sum_{n\geq 1}\chi_2(n)/n^z$ 和

$$\chi_2(n) := \begin{cases} 1, & n \equiv 1, 3 \pmod 8, \\ -1, & n \equiv 5, 7 \pmod 8, \\ 0, & \text{其他情形.} \end{cases} \tag{15.4.54}$$

(5) $f(x) = \sinh(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}x)/\sinh(\sqrt{\pi}x)$ 满足 (15.4.48). 则 $(f(x), F(z))$ 是 Mellin 对, 这里 $F(z) = L(z,\chi_3) = \sum_{n\geq 1}\chi_3(n)/n^z$ 和

$$\chi_3(n) := \begin{cases} 1, & n \equiv 1, 7 \pmod 8, \\ -1, & n \equiv 3, 5 \pmod 8, \\ 0, & \text{其他情形.} \end{cases} \tag{15.4.55}$$

(6) $f(x) = \frac{1}{1+2\cosh(\sqrt{\frac{2\pi}{3}}x)}$ 满足 (15.4.46). 则 $(f(x), F(z))$ 是 Mellin 对, 这里 $F(z) = L(z,\chi_4) = \sum_{n\geq 1}\chi_4(n)/n^z$ 和

$$\chi_4(n) := \begin{cases} 1, & n \equiv 1 \pmod 3, \\ -1, & n \equiv -1 \pmod 3, \\ 0, & \text{其他情形.} \end{cases} \tag{15.4.56}$$

(7) $f(x) = \frac{\sinh(\sqrt{\frac{\pi}{6}}x)}{\cosh(\sqrt{\frac{2\pi}{3}}x)-1}$ 满足 (15.4.48). 则 $(f(x), F(z))$ 是 Mellin 对, 这里 $F(z) = L(z,\chi_5) = \sum_{n\in\mathbf{N}}\chi_5(n)/n^z$ 和

$$\chi_5(n) := \begin{cases} 1, & n \equiv 1, 11 \pmod{12}, \\ -1, & n \equiv 5, 7 \pmod{12}, \\ 0, & \text{其他情形.} \end{cases} \tag{15.4.57}$$

(8) $f(x) = (e^{\sqrt{2\pi}x} - 1)^{-1} - (\sqrt{2\pi}x)^{-1}$. 则 $(f(x), F(z))$ 是 Mellin 对, 这里 $F(z) = (2\pi)^{-\frac{z}{2}}\Gamma(z)\zeta(z)$ 且 $\mathrm{Re}(z) \in (0,1)$. 如果定义

$$\lambda(z) := \frac{F(z)}{2^{\frac{z}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{z}{2})} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z), \tag{15.4.58}$$

则根据 (15.4.49) 得到

$$\lambda(z) = \lambda(1-z), \quad 0 < \mathrm{Re}(z) < 1. \tag{15.4.59}$$

作为推论, 对任意 $z \in \mathbf{C}$ 且 $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$, 有

$$\zeta(1-z) = \left[\frac{2^{z+1}\Gamma(z)}{\pi \sin\frac{\pi z}{2}}\right]\zeta(z), \quad \zeta(z) = \left[2^z \pi^{z-1}\sin\frac{\pi z}{2}\Gamma(1-z)\right]\zeta(1-z). \tag{15.4.60}$$

进一步计算得到

$$\begin{aligned}
\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) &= \pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\left[2^z\pi^{z-1}\sin\frac{\pi z}{2}\Gamma(1-z)\right]\zeta(1-z) \\
&= \pi^{\frac{z}{2}-1}2^z \sin\frac{\pi z}{2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma(1-z)\zeta(1-z) \\
&= \pi^{\frac{z}{2}-1}2^z \frac{\pi}{\Gamma(\frac{z}{2})\Gamma(1-\frac{z}{2})}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma(1-z)\zeta(1-z) \\
&= \pi^{\frac{z}{2}}2^z\frac{\Gamma(1-z)}{\Gamma(1-\frac{z}{2})}\zeta(1-z) \;=\; \pi^{\frac{z}{2}}2^z\frac{\Gamma(\frac{1-z}{2})}{\sqrt{\pi}2^z}\zeta(1-z).
\end{aligned}$$

故

$$\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) = \pi^{-\frac{1-z}{2}}\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\zeta(1-z), \quad 0 < \mathrm{Re}(z) < 1. \tag{15.4.61}$$

定理 15.33. (Riemann)

定义

$$\xi(z) := \begin{cases} \frac{1}{2}z(z-1)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma(\frac{z}{2})\zeta(z), & \mathrm{Re}(z) > 0, \\ \frac{1}{2}z(z-1)\pi^{-\frac{1-z}{2}}\Gamma(\frac{1-z}{2})\zeta(1-z), & \mathrm{Re}(z) < 1. \end{cases} \tag{15.4.62}$$

则 $\xi(z)$ 是整函数且对任意 $z \in \mathbf{C}$ 都满足

$$\xi(z) = \xi(1-z) \tag{15.4.63}$$

♡

证: 根据**定理 15.10** (3) 和**定理 15.31** (b), 可知函数

$$\frac{1}{2}z(z-1)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)$$

关于 z 是全纯的, 这里 $\mathrm{Re}(z) > 0$. 类似地可以证明函数

$$\frac{1}{2}z(z-1)\pi^{-\frac{1-z}{2}}\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\zeta(1-z)$$

关于 z 也是全纯的, 这里 $\mathrm{Re}(z) < 1$. 在区间 $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$ 内, 根据 (15.4.61) 可知上述两个函数是一样的. □

因为 $(e^{-x}, \Gamma(z))$ 是 Mellin 对, 所以 $(e^{-\pi x^2}, \frac{1}{2}\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma(\frac{z}{2}))$ 也是是 Mellin 对.

(i) 对任意 $n \in \mathbf{N}$, $(2e^{-\pi n^2 x^2}, \pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma(\frac{z}{2})\frac{1}{n^z})$ 都是 Mellin 对. 即,

$$\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\frac{1}{n^z} = 2\int_0^\infty e^{-\pi n^2 x^2}x^z\frac{dx}{x}, \mathrm{Re}(z) > 0, \tag{15.4.64}$$

和

$$2e^{-\pi n^2 x^2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty}\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\frac{x^{-z}}{n^z}dz, \sigma > 0. \tag{15.4.65}$$

(ii) 根据 (i) 可知 $(\sum_{n\in\mathbf{N}} 2e^{-\pi n^2x^2}, \pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma(\frac{z}{2})\zeta(z))$ 是 Mellin 对. 定义

$$\theta(x) := \sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{-\pi n^2 x}, \quad \Lambda(z) := \pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z). \tag{15.4.66}$$

定理 15.34

$(\theta(x^2-1), \Lambda(z))$ 是 Mellin 对. 即,

$$\Lambda(z) = \int_0^\infty \left[\theta(x^2) - 1\right] x^z \frac{dx}{x}, \mathrm{Re}(z) > 1 \tag{15.4.67}$$

和

$$\theta(x^2) - 1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty} \pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)x^{-z}dz, \sigma > 1. \tag{15.4.68}$$

因此, $(\frac{1}{2}[\theta(x)-1], \Lambda(2z))$ 对任意 $\mathrm{Re}(z) > \frac{1}{2}$ 都是 Mellin 对.

♡

从 (15.4.68) 和**定理 15.33** 我们看到对任何 $\sigma > 1$ 都有

$$\begin{aligned}
\theta(x^2) - 1 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{1-\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{1-\sigma+\sqrt{-1}\infty} \pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)x^{-z}dz + \frac{1}{x} - 1 \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty} \pi^{-\frac{1-z}{2}}\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\zeta(1-z)x^{-1+z}dz + \frac{1}{x} - 1 \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty} \pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)\left(\frac{1}{x}\right)^{-z}dz + \frac{1}{x} - 1 \\
&= \frac{1}{x}\left[\theta\left(\frac{1}{x^2}\right) - 1\right] - \frac{1}{x} - 1.
\end{aligned}$$

这里第一个恒等式利用 Cauchy 积分公式和**定理 15.31**.

定理 15.35

对任何 $x > 0$ 都有

$$\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\theta\left(\frac{1}{x}\right). \tag{15.4.69}$$

♡

即 $\theta(x)$ 是权为 $1/2$ 的模形式 (具体细节见**第 15.5 节**).

练习 15.17

验证

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\left(\int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty} - \int_{1-\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{1-\sigma+\sqrt{-1}\infty}\right)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)x^{-z}dz = \frac{1}{x} - 1.$$

♠

15.4.2 * 和 Gamma 函数相关的两个函数

对任何 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$ 定义

$$f(z) := -\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

由于当 n 很大时有

$$\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1-z}{n^2} + \frac{z^2-1}{n^3} + \frac{1-z^3}{n^4} + \frac{z^4-1}{n^5} + \cdots \sim \frac{1-z}{n^2}$$

则级数 $\sum_{n\geq 0}(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n+1})$ 是收敛的. 注意到

$$f(z+1)=\frac{1}{z}+f(z).$$

如果 $g'(z)=f(z)$ 和 $h(z)=e^{g(z)}$, 则

$$h(z+1)=Czh(z).$$

因此 $h(z)$ 看起来像 $\Gamma(z)$, 或者 $f(z)$ 看起来像 $\Gamma'(z)/\Gamma(z)$.

定义 **Ψ 函数**为

$$\Psi(z):=-\gamma-\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{n\geq 0}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{z+n}\right]. \tag{15.4.70}$$

定理 15.36

$\Psi(z)$ 满足

$$\Psi(z+1)-\Psi(z) = \frac{1}{z}, \tag{15.4.71}$$

$$\Psi(1-z)-\Psi(z) = \pi\cot(\pi z), \tag{15.4.72}$$

$$\Psi(1+z)-\Psi(1-z) = \frac{1}{z}-\pi\cot(\pi z), \tag{15.4.73}$$

$$\psi\left(\frac{1}{2}+z\right)-\Psi\left(\frac{1}{2}-z\right) = \pi\tan(\pi z). \tag{15.4.74}$$

♡

证: 第一个恒等式时显然的. 利用恒等式 (如果 z 是复数则可令用复变函数知识给出证明. 如果 $z\in\mathbb{R}$ 则利用 Eisenstein 方法得到证明, 参见 (6.4.26))

$$\pi\cot(\pi z)=\frac{1}{z}+\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{z+n}+\frac{1}{z-n}\right) \tag{15.4.75}$$

得到 (15.4.72) 和 (15.4.73). 在 (15.4.72) 中把 z 换成 $\frac{1}{2}-z$ 得到 (15.4.74). □

定理 15.37

$\Psi^{(k)}(z)$ 满足

$$\Psi'(z) = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(z+n)^2}, \tag{15.4.76}$$

$$\pi^2\csc^2(\pi z) = \Psi'(z)+\Psi'(1-z), \tag{15.4.77}$$

$$\Psi^{(k)}(z) = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^{k+1}k!}{(z+n)^{k+1}} = (-1)^{k+1}k!\zeta(k+1,z), \tag{15.4.78}$$

$$\Psi^{(k)}(1) = (-1)^{k+1}k!\zeta(k+1). \tag{15.4.79}$$

这里 $\zeta(k+1,z)$ 是由**练习 15.14** 所给出的 Hurwitz ζ 函数.

♡

证: 回顾到 (利用 (15.4.75))

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}=\pi^2\csc^2(\pi z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z+n)^2}.$$

这样我们就得到 (15.4.76) 和 (15.4.77). 最后两个恒等式是显然的. □

回顾 $\Psi(z) = -\gamma + f(z)$ 这里

$$f(z) = -\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

计算得到

$$\begin{aligned}
f_{2N+1}(z) &:= \sum_{0\leq n\leq 2N+1}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+z}\right) \\
&= \sum_{0\leq n\leq N}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+z}\right) \\
&\quad + \sum_{0\leq n\leq N}\left[\frac{1}{(2n+1)+1} - \frac{1}{(2n+1)+z}\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{0\leq n\leq N}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{n+\frac{z}{2}}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{0\leq n\leq N}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+\frac{z+1}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}f_N\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{1}{2}f_N\left(\frac{z+1}{2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{0\leq n\leq N}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[f_N\left(\frac{z}{2}\right) + f_N\left(\frac{z+1}{2}\right)\right] + \sum_{1\leq n\leq 2N}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.
\end{aligned}$$

令 $N\to\infty$ 得到

定理 15.38

Ψ 满足

$$\Psi(z) = \frac{1}{2}\left[\Psi\left(\frac{z}{2}\right) + \Psi\left(\frac{z+1}{2}\right)\right] + \ln 2, \tag{15.4.80}$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{n}\sum_{0\leq k\leq n-1}\Psi\left(\frac{z+k}{n}\right) + \ln n, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{15.4.81}$$

♡

练习 15.18

证明 (15.4.81).

♠

定义积分

$$\Phi(z) := \int_1^z \Psi(w)\,dw \tag{15.4.82}$$

其中 $\Phi(1) = 0$, 这里积分路径和负实轴不相交.

定理 15.39

我们有

$$\Phi(2) = 0, \quad \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\sqrt{\pi}. \tag{15.4.83}$$

♡

证: 计算得到

$$
\begin{aligned}
\Phi(2) &= \int_1^2 \left[-\gamma - \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] dz \\
&= -\gamma - \sum_{n\geq 0}\int_1^2 \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1}\right) dz \\
&= -\gamma - \sum_{n\geq 0}\left(\ln\frac{n+2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= -\gamma + \lim_{N\to\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N} - \ln(N+1)\right] \\
&= -\gamma+\gamma \ = \ 0.
\end{aligned}
$$

回顾 **Wallis 公式**如下 (参见 (5.4.31))

$$
\frac{\pi}{2} = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{(2N-2)!!}{(2N-1)!!}\right]^2 2N. \tag{15.4.84}
$$

计算可得到

$$
\begin{aligned}
\Phi\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_1^{\frac{1}{2}} \left[-\gamma - \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] dz \\
&= \frac{1}{2}\gamma - \sum_{n\geq 0}\left(\ln\frac{\frac{1}{2}+n}{1+n} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N} - \ln N\right) \\
&\quad - \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{0\leq n\leq N-1}\ln\frac{2n+1}{2n+2} + \frac{1}{2}\ln N\right) \\
&= \lim_{N\to\infty}\ln\left[\frac{(2N)!!}{(2N-1)!!}\cdot\frac{1}{\sqrt{N}}\right].
\end{aligned}
$$

故得到 $2\Phi(1/2) = \ln\pi$. □

练习 15.19

利用 (15.4.84) 证明 $(2n)!!/(2n-1)!! \sim \sqrt{\pi n}$, 当 $n\to\infty$ 时.

对 (15.4.71) 积分得到

$$
\Phi(z+1) - \Phi(z) = \ln z + C_1.
$$

取 $z=1$ 得到 $C_1 = 0$. 对 (15.4.72) 积分得到

$$
-\Phi(1-z) - \Phi(z) = \ln\sin(\pi z) + C_2.
$$

取 $z=\frac{1}{2}$ 得到 $C_2 = -\ln\pi$. 对 (15.4.80) 积分得到

$$
\Phi(z) = \Phi\left(\frac{z}{2}\right) + \Phi\left(\frac{z+1}{2}\right) + z\ln 2 + C_3.
$$

取 $z=1$ 得到 $C_3 = -\ln 2 - \ln\sqrt{\pi}$.

定理 15.40

$$\Phi(z+1) = \Phi(z)+\ln z, \tag{15.4.85}$$

$$\Phi(z)+\Phi(1-z) = \ln\pi - \ln\sin(\pi z), \tag{15.4.86}$$

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \Phi\left(\frac{z}{2}\right)+\Phi\left(\frac{1+z}{2}\right)\\ &\quad + \ln(2^{z-1}) - \ln\sqrt{\pi}.\end{aligned} \tag{15.4.87}$$

♡

若记 $F(z) := e^{\Phi(z)}$ 则**定理 15.40** 可表述成

$$F(1+z)=zF(z),\quad F(z)F(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)},\quad F(z)F\left(z+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}}F(2z).$$

根据**定理 5.26** 得到 $F(z)=\Gamma(z)$.

定理 15.41

我们有

$$\Phi(z)=\ln\Gamma(z),\quad \Psi(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \tag{15.4.88}$$

更进一步有

$$\Phi(z)=-\gamma z-\ln z+\sum_{n\geq 1}\left[\frac{z}{n}-\ln\left(1+\frac{z}{n}\right)\right]. \tag{15.4.89}$$

♡

证: 对 (15.4.70) 积分得到

$$\begin{aligned}
\Phi(z) &= \int_1^z \Psi(w)\,dw\\
&= \int_1^z\left[-\gamma-\frac{1}{w}-\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{w+n}-\frac{1}{n}\right)\right]dw\\
&= -\gamma z+\gamma-\ln z-\sum_{n\geq 1}\left(\ln\frac{z+n}{1+n}-\frac{z}{n}+\frac{1}{n}\right)\\
&= -\gamma z+\gamma-\ln z+\sum_{n\geq 1}\left(\frac{z}{n}-\ln\frac{z+n}{n}\right)+\sum_{n\geq 1}\left(\ln\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n}\right)\\
&= -\gamma z+\gamma-\ln z+\sum_{n\geq 1}\left(\frac{z}{n}-\ln\frac{z+n}{n}\right).
\end{aligned}$$

注意到 (15.4.89) 中的级数时绝对收敛的, 这是因为

$$\frac{z}{n}-\ln(1+\frac{z}{n})\sim\frac{z^2}{2n^2}.\quad \square$$

练习 15.20

证明 (15.4.89) 中的级数时绝对收敛的.

♠

利用 Taylor 级数展开

$$\ln(1+\frac{1}{n})=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{kn^k}$$

得到

$$\ln(1+N)-\sum_{1\leq n\leq N}\frac{1}{n} = \sum_{1\leq n\leq N}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\sum_{1\leq n\leq N}\frac{1}{n} = \sum_{k\geq 2}\sum_{1\leq n\leq N}\frac{(-1)^{k-1}}{kn^k}.$$

令 $N\to\infty$ 得到如下的 (15.4.90), 这是因为 $\zeta(2)>\zeta(3)>\zeta(4)>\cdots$.

命题 15.3

我们有

$$\gamma = \sum_{k\geq 2}\frac{(-1)^k\zeta(k)}{k}, \tag{15.4.90}$$

$$\Psi(1+z) = -\gamma+\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\zeta(n+1)z^n,\ |z|<1, \tag{15.4.91}$$

$$\Phi(1+z) = \ln\Gamma(1+z) = -\gamma z+\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n\zeta(n)}{n}z^n,\ |z|<1, \tag{15.4.92}$$

$$\Psi(z) = \Psi(z_0) + \sum_{k\geq 1}(-1)^{k+1}\zeta(k+1,z_0)(z-z_0)^k,\ z_0\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{Z}_{\leq 0}, \tag{15.4.93}$$

$$\gamma = \sum_{n\geq 2}(-1)^n\frac{\zeta(n)-1}{n}+1-\ln 2, \tag{15.4.94}$$

$$\Phi(1+z) = \ln\Gamma(1+z) = -\ln(1+z)+(1-\gamma)z+\sum_{n\geq 2}(-1)^n\frac{\zeta(n)-1}{n}z^n, \tag{15.4.95}$$

$$\ln\Gamma(1+z) = \frac{1}{2}\ln\frac{\pi z}{\sin(\pi z)}-\gamma z-\sum_{n\geq 1}\frac{\zeta(2n+1)}{2n+1}z^{2n+1}, \tag{15.4.96}$$

$$\ln\Gamma(1+z) = \frac{1}{2}\ln\frac{\pi z}{\sin(\pi z)}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-z}{1+z}+(1-\gamma)z - \sum_{n\geq 1}\frac{\zeta(2n+1)-1}{2n+1}z^{2n+1}, \tag{15.4.97}$$

$$\gamma = 1+\ln 2-\ln 3-\sum_{n\geq 1}\frac{\zeta(2n+1)-1}{(2n+1)4^n}, \tag{15.4.98}$$

$$\Psi(1+z) = \frac{1}{2z}-\frac{\pi}{2}\cot(\pi z)-\sum_{n\geq 0}\zeta(2n+1)z^{2n}, \tag{15.4.99}$$

$$\Psi(1+z) = \frac{1}{2z}-\frac{\pi}{2}\cot(\pi z) - \frac{1}{1-z^2}-\sum_{n\geq 0}\left[\zeta(2n+1)-1\right]z^{2n}. \tag{15.4.100}$$

这里 $\zeta(1):=\gamma$, (15.4.94) 是 *Euler* 得到的, (15.4.95) 和 (15.4.96) 是 *Legendre* 得到的, 和 (15.4.98) 是 *Stieltjes* 得到的. ♡

证: 通过计算得到

$$\begin{aligned}\Psi(1+z) &= -\gamma-\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{z+1+n}-\frac{1}{n+1}\right) = -\gamma-\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right)\\ &= -\gamma-\sum_{n\geq 1}\left[\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{n}\left(\frac{z}{n}\right)^k-\frac{1}{n}\right] = -\gamma-\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{n^{k+1}}z^k\\ &= -\gamma+\sum_{k\geq 1}(-1)^{k+1}\zeta(k+1)z^k.\end{aligned}$$

这里我们可以把 γ 看作是 “$\zeta(1)$” . 对 (15.4.91) 积分得到 (15.4.92).

对任意 $z_0\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_{\leq 0}$ 有

$$\begin{aligned}\Psi(z_0+z)-\Psi(z_0) &= \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{z_0+n}-\frac{1}{z_0+z+n}\right)\\ &= \sum_{n\geq 0}\left[\frac{1}{z_0+n}-\frac{1}{z_0+n}\sum_{k\geq 0}(-1)^k\left(\frac{z}{z_0+n}\right)^k\right]\\ &= \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{(z_0+n)^{k+1}}z^k = \sum_{k\geq 1}(-1)^{k+1}\zeta(k+1,z_0)z^k\end{aligned}$$

因为

$$1<\zeta(n)<1+\frac{1}{2^{n-2}},\quad n\geq 2, \tag{15.4.101}$$

所以得到

$$0<\zeta(n)-1<\frac{1}{2^{n-2}}$$

和 (15.4.94). 公式 (15.4.95) 可从 (15.4.92) 和 $\ln(1+z)=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n$. 在 (15.4.95) 中把 z 替换成 $-z$ 得到

$$\ln\Gamma(1-z)=-\ln(1-z)-(1-\gamma)z+\sum_{n\geq 2}\frac{\zeta(n)-1}{n}z^n.$$

故

$$\ln\Gamma(1+z)-\ln\Gamma(1-z)-\ln\frac{1-z}{1+z}+2(1-\gamma)z-2\sum_{n\geq 1}\frac{\zeta(2n+1)-1}{2n+1}z^{2n+1}.$$

利用恒等式

$$\ln\Gamma(1+z)+\ln\Gamma(1-z)=\ln\frac{\pi z}{\sin(\pi z)},$$

我们得到 (15.4.97). 公式 (15.4.96) 可从恒等式

$$\ln\sin(\pi z)=\ln(\pi z)-\sum_{n\in\mathbf{N}}\frac{\zeta(2n)}{n}z^{2n} \tag{15.4.102}$$

得到. 最后在 (15.4.97) 中取 $z=1/2$ 得到 (15.4.98). □

练习 15.21

证明 (15.4.101) 和 (15.4.102).

定理 15.42. (Binet)

(1) 我们有

$$\Gamma(1+z)=\sum_{n\geq 0}a_nz^n,\quad |z|<1, \tag{15.4.103}$$

其中

$$a_0=1,\quad a_{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{0\leq k\leq n}(-1)^{k+1}\zeta(k+1)a_{n-k},\ n\geq 0. \tag{15.4.104}$$

实际上

$$a_n=(-1)^n\sum_{1\leq k\leq n}\sum_{r_1+\cdots+r_k=n}\frac{1}{k!}\frac{\zeta(r_1)\cdots\zeta(r_k)}{r_1\cdots r_k}. \tag{15.4.105}$$

这里 $\zeta(1):=\gamma$.

(2) 我们有

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)}=\sum_{n\geq 0}b_nz^n,\quad |z|<1, \tag{15.4.106}$$

其中

$$b_0=1,\quad b_{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{0\leq k\leq n}(-1)^{k}\zeta(k+1)b_{n-k},\ n\geq 0. \tag{15.4.107}$$

实际上

$$b_n=(-1)^n\sum_{1\leq k\leq n}\sum_{r_1+\cdots+r_k=n}\frac{(-1)^k}{k}\frac{\zeta(r_1)\cdots\zeta(r_k)}{r_1\cdots r_k}. \tag{15.4.108}$$

♡

证: 由于 $\Gamma'(1+z)=\sum_{n\geq 1}na_nz^{n-1}$, $|z|<1$, 和 $\Psi(1+z)\Gamma(1+z)=\Gamma'(1+z)$, 我们利用 (15.4.91) 得到

$$\sum_{0\leq k\leq n}(-1)^{k+1}\zeta(k+1)a_{n-k}=(n+1)a_{n+1},\quad n\in\mathbb{N}.$$

公式 (15.4.105) 则立即得到. □

比如

$$\begin{aligned} a_1 &= -\zeta(1) = -\gamma, & a_2 &= \frac{1}{2}\zeta(2)+\frac{1}{2}\zeta(1)^2 = \frac{\pi^2}{12}+\frac{\gamma^2}{2} \\ b_1 &= \zeta(1) = \gamma, & b_2 &= -\frac{1}{2}\zeta(2)+\frac{1}{2}\zeta(1)^2 = -\frac{\pi^2}{12}+\frac{\gamma^2}{2}. \end{aligned}$$

.

在 (15.4.70) 中取 $z=x+\sqrt{-1}y$ 就得到

$$\begin{aligned}\Psi(x+\sqrt{-1}y) &= -\gamma+\sum_{n\geq 0}\left[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(x+n)+\sqrt{-1}y}\right]\\ &= -\gamma+\sum_{n\geq 0}\left[\frac{1}{n+1}-\frac{x+n}{(x+n)^2+y^2}\right]+\sqrt{-1}\sum_{n\geq 0}\frac{y}{(x+n)^2+y^2}.\end{aligned}$$

因此函数 $\Psi(z)$ 仅有实零点. 当 $x,y>0$ 时我们得到

$$\Psi(x)-\Psi(y)=(x-y)\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(x+n)(y+n)}. \tag{15.4.109}$$

即 $\Psi(x)$ 在区间 $(0,\infty)$ 内时单调递增的. 因为 $\Psi(1)=-\gamma<0$ 和 $\Psi(2)=1-\gamma>0$, 所以存在唯一的 $r\in(1,2)$ 满足 $\Psi(r)=0$. 另一方面, 对每个 $n\in\mathbb{N}$, 函数 $\Psi(x)$ 在区间 $(-n-1,-n)$ 内时单调递增的且 $\Psi(x)$ 在 $-n$ 处有单极点. 故存在唯一的 $r_n\in(-n-1,-n)$ 满足 $\Psi(r_n)=0$. 根据定义得到

$$\Psi(n)=-\gamma+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}. \tag{15.4.110}$$

定理 15.43

我们有如下性质:

(a) $\Psi(z)$ 仅有实零点.

(b) $\Psi(x)$ 在区间 $(0,\infty)$ 内单调递增且对每个 $n\in\mathbb{N}$ 函数 $\Psi(x)$ 在区间 $(-n-1,-n)$ 内也是单调递增的.

(c) $\Psi(x)$ 有唯一的正实零点 $r\in(1,2)$.

(d) $\Psi(x)$ 在每个区间 $(-n-1,-n)$ 内有唯一的零点 r_n.

(e) $\lim_{x\to\infty}[\Psi(x)-\ln x]=0$.

♡

计算表明

$$r=1.4616321451105, r_0=-0.504083008, r_1=-1.57349847, r_2=-2.61072087.$$

为了研究唯一的负零点, 记

$$r_n:=-n-1+\epsilon_n,\quad \epsilon_n\in(0,1). \tag{15.4.111}$$

在 (15.4.72) 中取 $z=r_n=-n-1+\epsilon_n$, 则根据**定理 15.43** (e) 得到

$$\pi\cot(\pi\epsilon_n)=\Psi(n+2-\epsilon_n)=\ln n+\delta_n$$

这里 $\delta_n\to 0$. 因此

$$\begin{aligned}\epsilon_n &= \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\pi}{\ln n+\delta_n}\right)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{\ln n+\delta_n}-\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\ln n+\delta_n}\right)^3+\cdots\right]\\ &= \frac{1}{\ln n+\delta_n}-\frac{\pi^2}{3(\ln n+\delta_n)^3}+\cdots.\end{aligned}$$

推论 15.3. (Hermite)

我们有, 这里 $\delta_n'=O(1/(\ln n)^3)$,

$$r_n=-n-1+\frac{1}{\ln n}+\delta_n'. \tag{15.4.112}$$

♡

下面结论是**定理 15.10** 的直接推论.

推论 15.4

$\Gamma(x)$ 函数满足如下性质:

(a) $\Gamma(x)$ 在区间 $(0,\infty)$ 上恒为正的且在 r 处取到最小值.

(b) $\Gamma(x)$ 在区间 $(-2n,-2n+1)$ 上恒为正的且在 r_{2n-1} 处取到最小值.

(c) $\Gamma(x)$ 在区间 $(-2n-1,-2n)$ 上恒为负的且在 r_{2n-1} 处取到最大值.

♡

15.4.3 Gamma 函数的 Euler 定义

回顾

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),\quad \ln\Gamma(x)=\Phi(x),\quad \Phi'(x)=\Psi(x),\quad \Psi'(x)>0 \text{ in } (0,\infty).$$

称函数 $F(x)$ 在 (a,b) 上是**凸的**如果

$$F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le \lambda F(x_1)+(1-\lambda)F(x_2)$$

对任何 $\lambda\in(0,1)$ 和 $x_1,x_2\in(a,b)$ 都成立. 如果 $F\in C^2((a,b))$, 则 F 是凸的当且仅当 $F''>0$. 从而以上部分性质可总结如下

(i) $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

(ii) $\ln\Gamma(x)$ 在 $(0,\infty)$ 内是凸的.

(iii) $\Gamma(1)=1$.

定理 15.44

如果函数 $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ 满足如下条件

(i) $f(x+1)=xf(x)$,

(ii) $\ln f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 内是凸的,

(iii) $f(1)=1$,

则必有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

♡

证: 参见定理 3.6 的证明. □

推论 15.5. (Euler)

我们有

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}. \tag{15.4.113}$$

♡

公式 (15.4.113) 可以通过直接计算得到. 根据

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^n dt=\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

得到

$$G_n(x)=n^x\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^n dt=\int_0^n y^{x-1}\left(1-\frac{y}{n}\right)^n dy.$$

因此

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}G_n(x).$$

观察到

$$\frac{G_n(z)}{G_{n-1}(z)}=1+\frac{c_n(z)}{n^2}$$

这里 $\lim_{n\to\infty}c_n(z)=\frac{z(z+1)}{2}$. 故

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}\prod_{n\ge1}\left(1+\frac{c_n(z)}{n^2}\right). \tag{15.4.114}$$

定理 15.45. (Bohr-Mollerup-Artin)

如果函数 $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 满足如下条件

(i) $f(x+1)=xf(x)$,

(ii) $\ln f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 内是凸的,

(iii) $f(1)=1$,

则 $f(x)=\Gamma(x)$ 对任意 $x\in(0,\infty)$ 都成立. ♡

接下来则给出**定理 15.45** 的几个应用.

(A) **定理 15.27**: 对每个 $n\in\mathbb{N}$ 定义

$$f(x):=n^x\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right).$$

则 $f(x+1)=xf(x)$ 和 $\ln f(x)$ 是凸的. 根据**定理 15.45** 我们得到 $f(x)=c_n\Gamma(z)$, 这里根据 (15.3.10) 有

$$c_n=f(1)=n\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=\sqrt{n}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.$$

(B) **定理 15.11**: 令

$$g(x):=\frac{\pi}{\Gamma(1-x)\sin(\pi x)},\quad x\in(0,\infty).$$

则 $\ln g(x)$ 是凸的且 $g(x+1)=xg(x)$. 根据**定理 15.45** 得到 $g(x)=c\Gamma(x)$, 这里

$$c=\frac{\pi}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin(\pi x)}.$$

令 $x\to0$ 推出 $c=1$.

(C) $B(x,a)=\Gamma(x)\Gamma(a)/\Gamma(x+a)$: 计算得到

$$\begin{aligned}B(x,a)&=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(x+a)(x+a+1)\cdots(x=a+n)}{x(x+1)\cdots(x+n)a(a+1)\cdots(a+n)}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{x}{a+1}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{a+n}\right)\\&\quad\times\frac{1}{x}\left(1-\frac{x}{x+1}\right)\left(1-\frac{x}{x+2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{x+n}\right).\end{aligned}$$

推论 15.6

我们有

$$B(a,x)=\frac{1}{x}\prod_{n\geq1}\left[\left(1+\frac{x}{a+n-1}\right)\left(1-\frac{x}{x+n}\right)\right].\tag{15.4.115}$$

♡

考虑多项式

$$P(x)=\prod_{1\leq i\leq d}(x-\alpha_i),\quad Q(x)=\prod_{1\leq i\leq d}(x-\beta_i),$$

这里 $\alpha_1,\cdots,\alpha_d,\beta_1,\cdots,\beta_d\in\mathbb{C}$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_d\notin\mathbb{Z}_{\leq0}$. 因此

$$\prod_{n\geq1}\frac{P(n)}{Q(n)}\text{ 收敛 }\Longleftrightarrow\sum_{1\leq i\leq d}\alpha_i=\sum_{1\leq i\leq d}\beta_i.\tag{15.4.116}$$

此时推出

$$\prod_{n\geq 1}\frac{P(n)}{Q(n)}=\frac{\Gamma(1-\beta_1)\cdots\Gamma(1-\beta_d)}{\Gamma(1-\alpha_1)\cdots\Gamma(1-\alpha_d)}. \tag{15.4.117}$$

练习 15.22

证明等价刻画 (15.4.116). 取 $P(x)=x^2$ 和 $Q(x)=x^2-\frac{1}{4}$ 重新证明 (15.4.84).

15.4.4 *Euler 和 Weierstrass 乘积公式

因为

$$\begin{aligned} n^z &= \left(1+\frac{1}{1}\right)^z\cdots\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^z\left(1+\frac{1}{n}\right)^z\cdot\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^z},\\ \frac{(z+1)\cdots(z+n)}{n!} &= \left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right), \end{aligned}$$

所以根据 (15.4.113) 得到

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}\prod_{n\geq 1}\frac{(1+\frac{1}{n})^z}{(1+\frac{z}{n})}, \tag{15.4.118}$$

称为 **Euler 乘积公式 (Euler product formula)**. 从 Taylor 级数展开

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}=\left(1+\frac{z}{n}\right)\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{z^k}{n^k}=1-\sum_{k\geq 2}\frac{(-1)^k(k-1)}{k!}\frac{z^k}{n^k}$$

和

$$\begin{aligned} \ln[zG_N(z)] &= z\sum_{1\leq n\leq N}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\sum_{1\leq n\leq N}\ln\left(1+\frac{z}{n}\right)-z\ln\left(1+\frac{1}{N}\right)\\ &= \sum_{1\leq n\leq N}\left[\frac{z}{n}-\ln\left(1+\frac{z}{n}\right)\right]-z\sum_{1\leq n\leq N}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]-z\ln\left(1+\frac{1}{N}\right), \end{aligned}$$

我们可知

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \frac{1}{z}\prod_{n\geq 1}\frac{e^{z[\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n}]}}{(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}}=\frac{e^{z\sum_{n\geq 1}[\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n}]}}{z\prod_{n\in\mathbf{N}}[(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}]}\\ &= \frac{e^{-\gamma z}}{z}\cdot\frac{1}{\prod_{n\geq 1}[(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}]}. \end{aligned}$$

定理 15.46. (Weierstrass)

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma z}\prod_{n\geq 1}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right]. \tag{15.4.119}$$

上述公式表明 $1/\Gamma(z)$ 是整函数. 在 (15.4.119) 中取 $z=x+\sqrt{-1}y$ 得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\Gamma(x+\sqrt{-1}y)|} &= \sqrt{x^2+y^2}e^{\gamma x}\prod_{n\geq 1}\left[\sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2}e^{-\frac{x}{n}}\right]\\ &= \sqrt{x^2+y^2}e^{\gamma x}\prod_{n\geq 1}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\sqrt{1+\frac{y^2}{(x+n)^2}}\right]. \end{aligned}$$

另一方面根据

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)}=\frac{1}{x\Gamma(x)}=e^{\gamma x}\prod_{n\ge 1}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right].$$

可得

$$\frac{1}{|\Gamma(x+\sqrt{-1}y)|}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\Gamma(x+1)}\sqrt{\prod_{n\ge 1}\left[1+\frac{y^2}{(x+n)^2}\right]}$$

如果 $x\in(0,1)$ 则有

$$\frac{1}{1+y^2}\prod_{n\ge 1}\left(1+\frac{y^2}{n^2}\right)<\prod_{n\ge 1}\left[1+\frac{y^2}{(x+n)^2}\right]<\prod_{n\ge 1}\left(1+\frac{y^2}{n^2}\right)=\frac{e^{\pi y}-e^{-\pi y}}{2\pi}.$$

定理 15.47

对任意 $x\in(0,1)$ 和 $y\neq 0$, 我们有

$$|\Gamma(x+\sqrt{-1}y)|=\lambda\cdot\frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{\frac{2\pi y}{e^{\pi y}-e^{-\pi y}}} \tag{15.4.120}$$

其中 $\lambda=\lambda(x)\in(1,\sqrt{1+y^2})$.

令 $\xi_3:=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ 则 $\xi_3^3=1$.

推论 15.7. (Liouville)

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(\zeta_3 z)\Gamma(\zeta_3^2 z)}=z^3\prod_{n\ge 1}\left(1+\frac{z^3}{n^3}\right). \tag{15.4.121}$$

证: 计算得到

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(\zeta_3 z)\Gamma(\zeta_3^2 z)}=z^3\prod_{n\in\mathbf{N}}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)\left(1+\frac{\zeta_3 z}{n}\right)\left(1+\frac{\zeta_3^2 z}{n}\right)\right]=z^3\prod_{n\in\mathbf{N}}\left(1+\frac{z^3}{n^3}\right)$$

这是由于 $1+\zeta_3+\zeta_3^2=0$. □

练习 15.23

如果 $\zeta_m:=e^{2\pi\sqrt{-1}/m}$, 则

$$\prod_{0\le k\le m-1}\frac{1}{\Gamma(1-\zeta_m^k z)}=\prod_{n\ge 1}\left(1-\frac{z^m}{n^m}\right).$$

对任意 $w\in\mathbb{C}$ 我们有

$$\prod_{0\le k\le m-1}(w-\zeta_m^k z)=w^m-z^m.$$

从而得到

$$\prod_{0\le k\le m-1}\frac{1}{\Gamma(w-\zeta_m^k z)}$$

$$=\prod_{0\le k\le m-1}\left\{(w-\zeta_m^k z)e^{\gamma(w-\zeta_m^k z)}\prod_{n\ge 1}\left[\left(1+\frac{w-\zeta_m^k z}{n}\right)e^{-\frac{w-\zeta_m^k z}{n}}\right]\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= (w^m - z^m)e^{m\gamma w}\prod_{n\geq 1}\left\{\left[\left(1+\frac{w}{n}\right)^m - \left(\frac{z}{n}\right)^m\right]e^{-\frac{m}{n}w}\right\} \\
&= w^m\left(1-\frac{z^m}{w^m}\right)e^{m\gamma w}\prod_{n\geq 1}\left[\left(1+\frac{w}{n}\right)^m e^{-\frac{m}{n}w}\right]\prod_{n\geq 1}\left[1-\frac{z^m}{(w+n)^m}\right] \\
&= \frac{1}{[\Gamma(w)]^m}\prod_{n\geq 0}\left[1-\frac{z^m}{(w+n)^m}\right].
\end{aligned}
$$

定理 15.48. (Mellin)

$$
\prod_{1\leq k\leq m-1}\frac{\Gamma(w)}{\Gamma(w-\zeta_m^k z)} = \prod_{n\geq 0}\left[1-\left(\frac{w}{z+n}\right)^m\right]. \tag{15.4.122}
$$

♡

因为 $1, \zeta_m, \cdots, \zeta_m^{m-1}$ 是代数方程 $X^m - 1 = 0$ 的所有根, 我们可以问

$$
\prod_{1\leq i\leq m}\frac{1}{\Gamma(w-r_i z)}
$$

的无穷乘积展开, 这里 $r_1, \cdots, r_m$ 是多项式的根.

练习 15.24. (Mellin)

$$
\begin{aligned}
w\Psi(z) &= -\gamma w - \frac{w}{z} - \sum_{n\geq 1}\left(\frac{w}{z+n}-\frac{w}{n}\right), \\
e^{w\Psi(z)} &= e^{-\gamma w}e^{-\frac{w}{z}}\prod_{n\geq 1}e^{-\frac{w}{z+n}+\frac{w}{n}}, \\
e^{w\Psi(z)}\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+w)} &= \prod_{n\geq 1}\left[\left(1+\frac{w}{z+n}\right)e^{-\frac{w}{z+n}}\right], \\
e^{\Psi(z)} &= \prod_{n\geq 1}\left[\left(1+\frac{1}{z+n}\right)e^{-\frac{1}{z+n}}\right].
\end{aligned}
$$

♠

练习 15.25. (Liouville)

令

$$
\begin{aligned}
f(z) &:= z^3\prod_{n\in\mathbf{N}}\left(1+\frac{z^3}{n^3}\right), & g(z) &:= \prod_{n\in\mathbf{N}}\left[1+\frac{8z^3}{(2n+1)^3}\right], \\
g_1(z) &:= \prod_{n\in\mathbf{N}}\left[1+\frac{27z^3}{(3n+1)^3}\right], & g_2(z) &:= \prod_{n\in\mathbf{N}}\left[1+\frac{27z^3}{(3n+2)^3}\right].
\end{aligned}
$$

则

$$
f(2z) = 8f(z)g(z), \quad f(3z) = 27f(z)g_1(z)g_2(z).
$$

♠

15.4.5 *Gamma 函数的渐近展开

如果我们在 (15.4.110) 中把 $1/k$ 替换成

$$
\int_0^1 u^{k-1}du
$$

则得到

定理 15.49. (Legendre)

当 $\mathrm{Re}(z) > 0$ 时我们有

$$\begin{aligned}\Psi(z) &= -\gamma + \int_0^1 \frac{1-u^{z-1}}{1-u}du &(15.4.123)\\ &= -\gamma + \int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^z}\right]\frac{dt}{t} &(15.4.124)\\ &= -\gamma + \int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-x}-e^{-zx}}{1-e^{-x}}\right)dx. &(15.4.125)\end{aligned}$$

证: 分别做变量替换 $u = \frac{1}{1+t}$ 和 $u = e^{-x}$ 就可以得到. □

练习 15.26

$$\begin{aligned}\Psi\left(\frac{3}{2}\right) &= -\gamma + 2 - \ln 2, & \Psi\left(\frac{4}{3}\right) &= -\gamma + 3 - \frac{3}{2}\ln 3 - \frac{\pi}{6}\sqrt{3},\\ \Psi\left(\frac{3}{4}\right) &= -\gamma + \frac{\pi}{2} - 3\ln 2, & \Psi\left(\frac{1}{4}\right) &= -\gamma - \frac{\pi}{2} - 3\ln 2,\\ \Psi\left(\frac{2}{3}\right) &= -\gamma + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{3}{2}\ln 3, & \Psi\left(\frac{1}{3}\right) &= -\gamma - \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{3}{2}\ln 3.\end{aligned}$$

推论 15.8

(1) 如果 $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Re}(w) > 0$, 则

$$\begin{aligned}\Psi(z) - \Psi(w) &= \int_0^1 \frac{u^w - u^z}{1-u}\frac{du}{u} &(15.4.126)\\ &= \int_0^{\infty}\left[\frac{1}{(1+t)^w} - \frac{1}{(1+t)^z}\right]\frac{dt}{t} &(15.4.127)\\ &= \int_0^{\infty}\frac{e^{-wx} - w^{-zx}}{1-e^{-x}}dx. &(15.4.128)\end{aligned}$$

(2) 如果 $-1 < \mathrm{Re}(z) < 1$, 则

$$\frac{1}{z} - \pi\cot(\pi z) = \int_0^1 \frac{u^{-z} - u^z}{1-u}du \qquad (15.4.129)$$

$$= \int_0^{\infty}\left[(1+t)^{z+1} - \frac{1}{(`+t)^{z+1}}\right]\frac{dt}{t} = \int_0^{\infty}\frac{e^{(1+z)x} - e^{(1-z)x}}{1-e^{-x}}dx.$$

(3) 我们有

$$\ln\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \int_0^1 \frac{u^z - u^{-z} - 2}{1-u}\frac{du}{\ln u}. \qquad (15.4.130)$$

练习 15.27

证明

$$\begin{aligned}\ln\frac{\pi}{2} &= \int_0^1 \frac{v-1}{v+1}\frac{dv}{\ln v} = \int_0^1 \frac{(u^{\frac{1}{4}} - u^{-\frac{1}{4}})^2}{u-1}\frac{du}{\ln u},\\ \ln\frac{\pi}{2\sqrt{2}} &= \int_0^1 \frac{(y^2-1)y^2}{(1+y)(1+y^2)}\frac{dy}{\ln y}.\end{aligned}$$

利用 (15.3.5) 得到

$$\begin{aligned}\gamma &= -\int_0^\infty e^{-t}\ln t\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^\infty \left(-e^{-t}\ln t\right)dt\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(e^{-t}\ln t\Big|_{\frac{1}{n}}^\infty - \int_{\frac{1}{n}}^\infty \frac{e^{-t}}{t}dt\right) = \lim_{n\to\infty}\left(e^{-\frac{1}{n}}\ln n - \int_{\frac{1}{n}}^\infty \frac{e^{-t}}{t}dt\right).\end{aligned}$$

另一方面, 因为 $e^{-1/n}\ln n \sim \ln n \sim \ln(n+1)$, 所以

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^\infty \frac{1}{t(t+1)}dt - \int_{\frac{1}{n}}^\infty \frac{e^{-t}}{t}dt\right].$$

定理 15.50. (Euler)

我们有

$$\gamma = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t} - e^{-t}\right)\frac{dt}{t}. \tag{15.4.131}$$

♡

练习 15.28

证明

$$\begin{aligned}\gamma &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{xe^x}\right)dx & (15.4.132)\\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1-v} - \frac{1}{\ln(1/v)}\right)dv & (15.4.133)\\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{u} - \frac{e^{1-\frac{1}{u}}}{u^2}\right)du. & (15.4.134)\end{aligned}$$

♠

推论 15.9. (Dirichlet-Gauss)

当 $\mathrm{Re}(z) > 0$ 时有

$$\begin{aligned}\Psi(z) &= \int_0^\infty \left[e^{-t} - \frac{1}{(1+t)^z}\right]\frac{dt}{t} & (15.4.135)\\ &= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-zx}}{1-e^{-x}}\right)dx. & (15.4.136)\end{aligned}$$

♡

练习 15.29

通过考虑二重积分

$$\iint_{[0,\infty)\times[0,\infty)} e^{-u}u^{z-1}\left(e^{-y} - e^{-uy}\right)\frac{dydu}{y}.$$

重新给出 (15.4.135) 的证明.

♠

练习 15.30

证明

$$\Psi(x) = \int_0^1 \left(e^{1-\frac{1}{y}} - y^z\right)\frac{dy}{y(1-y)} = \int_0^1 \left[\frac{1}{\ln(1/v)} - \frac{v^{z-1}}{1-v}\right]dv.$$

♠

对 (15.4.135) 和 (15.4.136) 积分得到

推论 15.10. (Plana)

当 $\mathrm{Re}(z) > 0$ 时有

$$\ln\Gamma(z) = \int_0^\infty \left[e^{-t}(z-1) - \frac{(1+t)^{-1} - (1+t)^{-z}}{\ln(1+t)}\right]\frac{dt}{t}, \quad (15.4.137)$$

$$\ln\Gamma(z) = \int_0^\infty \left[e^{-x}(z-1) + \frac{e^{-zx} - e^{-x}}{1-e^{-x}}\right]\frac{dx}{x}. \quad (15.4.138)$$

♡

回顾

$$\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \sum_{n\ge 1}\frac{(-1)^{n-1}B_n'}{(2n)!}x^{2n-1} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\coth\frac{x}{2}, \quad 0 < |x| < 1,$$

或

$$\frac{1}{2^{2\pi t}-1} - \frac{1}{2\pi t} + \frac{1}{2} = \sum_{n\ge 1}\frac{(-1)^{n-1}\zeta(2n)}{\pi}t^{2n-1}, \quad 0 < |t| < \frac{1}{2\pi}, \quad (15.4.139)$$

这里 $B_n' := B_{2n} = 2(2n)!\zeta(2n)/(2\pi)^{2n}$ 是第 $2n$ 个 Bernoulli 数 (参见 (15.3.32)). 比如

$$B_1' = \frac{1}{6}, B_2' = \frac{1}{30}, B_3' = \frac{1}{42}, B_4' = \frac{1}{30}, B_5' = \frac{5}{66}, B_6' = \frac{691}{2730}, B_7' = \frac{7}{6}, B_8' = \frac{3617}{510}.$$

又回顾到

$$x\coth(x) = 1 + 2x^2\sum_{n\ge 1}\frac{1}{x^2+(\pi n)^2}. \quad (15.4.140)$$

受 (15.4.139) 启发我们把 (15.4.136) 写成

$$\begin{aligned}\Psi(z+1) &= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-zx}}{e^x-1}\right)dx \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-zx}dx + \int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-zx}}{2}dx - \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)e^{-zx}dx.\end{aligned}$$

定理 15.51

当 $\mathrm{Re}(z) > 0$ 时有

$$\Psi(z+1) = \frac{1}{2z} + \ln z - \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)e^{-zx}dx, \quad (15.4.141)$$

$$\Psi(z) = -\frac{1}{2z} + \ln z - \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)e^{-zx}dx. \quad (15.4.142)$$

♡

证: 可从 $\Psi(z+1) - \Psi(z) = \frac{1}{z}$ 得到. □

根据**定理 15.43** 我们定义

$$\nu(z) := \ln z - \Psi(z). \quad (15.4.143)$$

推论 15.11

当 $\mathrm{Re}(z) > 0$ 时有

$$\nu(z) = \frac{1}{2z} + \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)e^{-zx}dx, \quad (15.4.144)$$

和

$$\nu(z)=\sum_{n\geq 0}\left[\frac{1}{z+n}-\ln\left(1+\frac{1}{z+n}\right)\right], \tag{15.4.145}$$

和

$$\ln\Gamma(z+1)=\frac{1}{2}\ln z+z(\ln z-1)+1+\mu(z)-\mu(1). \tag{15.4.146}$$

这里

$$\mu(z):=\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)e^{-zx}\frac{dx}{x},\quad \mu'(z)=\frac{1}{2z}-\nu(z). \tag{15.4.147}$$

观察到 $\mu(z)$ 可写成

$$\mu(z)=\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)e^{-zx}\frac{dx}{x}.$$

♡

证: 利用 (15.4.70) 和 $\lim_{N\to\infty}\ln\frac{z+N+1}{N+1}=0$ 得到

$$\begin{aligned}
\nu(z) &= \ln z-\sum_{n\geq 0}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{z+n}\right]\\
&= \ln z-\lim_{N\to\infty}\sum_{1\leq n\leq N}\left(\ln\frac{n+1}{n}-\frac{1}{z+n}\right)\\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{0\leq n\leq N}\left[\frac{1}{z+n}-\ln\left(1+\frac{1}{z+n}\right)\right]\\
&\quad +\lim_{N\to\infty}\sum_{0\leq n\leq N}\left(\ln\frac{z+n+1}{z+n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)+\ln z\\
&= \sum_{n\geq 0}\left[\frac{1}{z+n}-\ln\left(1+\frac{1}{z+n}\right)\right]+\lim_{N\to\infty}\ln\frac{z+N+1}{N+1}\\
&= \sum_{n\geq 0}\left[\frac{1}{z+n}-\ln\left(1+\frac{1}{z+n}\right)\right].
\end{aligned}$$

对 (15.4.142) 求积分并使用

$$\ln\Gamma(z+1)=\ln\Gamma(z+1)-\ln\Gamma(2)=\int_1^z\Psi(w+1)dw$$

就得到 (15.4.146). □

从 (15.4.146) 我们得到

$$\Gamma(z+1)=z^{z+\frac{1}{2}}e^{1-z}e^{\mu(z)-\mu(1)}.$$

注意到 $\lim_{x\to\infty}\mu(x)=0$.

考虑二重积分

$$I:=\int_a^c\int_0^{\infty}\frac{e^{-vy}-e^{-by}}{y}dydv.$$

利用**定理 5.27** 得到

$$\ln\frac{b}{v}=\int_0^{\infty}\frac{e^{-vy}-e^{-by}}{y}dy.$$

根据 Fubini 定理推出

$$\int_0^\infty \left[\frac{e^{-ax}-e^{-cx}}{x}-(c-a)e^{-bx}\right]\frac{dx}{x}=(c-a)(1+\ln b)-(c\ln c-a\ln a). \quad (15.4.148)$$

注意到

$$\mu(1)=\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)e^{-x}\frac{dx}{x}=\int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)e^{-x}\frac{dx}{x}.$$

因为

$$\mu(1)=\int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-2x}}-\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}\right)e^{-2x}\frac{dx}{x}$$

和

$$\frac{1}{1-e^{-2x}}=\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{e^{-x}}{1-e^{-2x}},$$

所以

$$0=\int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-2x}}-\frac{2-e^{-x}}{2x}-\frac{1-e^{-x}}{2}\right)e^{-x}\frac{dx}{x}.$$

引理 15.2

我们有

$$\mu\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2,\quad \mu(1)=1-\ln\sqrt{2\pi}. \quad (15.4.149)$$

♡

证: 利用上述恒等式和等式

$$\begin{aligned}\mu\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x}\frac{dx}{x}\\ &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-2x}}-\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}\right)e^{-x}\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{1-e^{-x}}{x}-e^{-x}\right)e^{-x}\frac{dx}{x}\end{aligned}$$

在 (15.4.148) 中取 $a=1$ 和 $b=c=2$ 就得到

$$\mu\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}[(2-1)(1+\ln 2)-(2\ln 2-1\ln 1)]=\frac{1-\ln 2}{2}.$$

在 (15.4.146) 中取 $z=1/2$ 得到

$$\ln\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2}-1\right)+1+\mu\left(\frac{1}{2}\right)-\mu(1).$$

由此推出 $\mu(1)=\frac{1}{2}-\ln\sqrt{\pi}+\mu(1/2)=1-\ln\sqrt{2\pi}$. □

练习 15.31

本练习给出 $C:=1-\mu(1)$ 的另一个计算方法. 证明

(a) $\sum_{1\le k\le n}\ln k=C+(n+\frac{1}{2})\ln n-n+\mu(n)$.

(b) $\sum_{1\le k\le 2n}\ln k=C+(2n+1)\ln(2n)-2n+\mu(2n)$.

(c) $\sum_{1\le k\le n}\ln(2k)=n\ln 2+C+(n+\frac{1}{2})\ln n-n+\mu(n)$.

(d) $\sum_{1\le k\le n}(2k-1)=n\ln n+(n+\frac{1}{2})\ln 2-n+\mu(2n)-\mu(n)$.

(e) 当 $n\to\infty$ 时有

$$(2\ln 2-\ln 1)+\sum_{2\le k\le n-1}[2\ln(2k)-2\ln(2k-1)]+[\ln(2n)-2\ln(2n-1)] \to \ln\frac{\pi}{2}.$$

(f) $C=\ln\sqrt{2\pi}$.

♠

推论 15.12

(1) 当 $\mathrm{Re}(z)>0$ 时有

$$\ln\Gamma(z+1) = \left(z+\frac{1}{2}\right)\ln z - z + \ln\sqrt{2\pi} + \mu(z), \tag{15.4.150}$$

$$\ln\Gamma(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - z + \ln\sqrt{2\pi} + \mu(z). \tag{15.4.151}$$

(2) 当 x 很大时有

$$\ln\Gamma(x+1) \sim \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x - x + \ln\sqrt{2\pi}, \tag{15.4.152}$$

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}. \tag{15.4.153}$$

(3) **(Stirling)** 当 n 很大时有

$$n! \sim \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n} = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n. \tag{15.4.154}$$

♡

证: (1) 中的两个恒等式可从 (15.4.146), (15.4.149), 和 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ 得到. 最后三个恒等式可从 $\mu(x)\to 0$, 当 $x\to\infty$ 时, 得到. □

命题 15.4

(1) $\nu(z)$ 满足

$$\nu(z+1) = \nu(z) + \ln\left(1+\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{z}. \tag{15.4.155}$$

(2) **(Binet)** $\mu(z)$ 满足

$$\mu(z+1) = \mu(z) + \left[1-\left(z+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{z}\right)\right]. \tag{15.4.156}$$

(3) **(Gudermann)** 我们有

$$\mu(z) = \sum_{n\geq 0}\left[\left(z+n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{z+n}\right)-1\right]. \tag{15.4.157}$$

(4) 我们有

$$\nu(z) = \sum_{k\geq 2}\frac{(-1)^k}{k}\zeta(k,z). \tag{15.4.158}$$

(5) 我们有

$$\mu(z) = \sum_{k\geq 2}\frac{(-1)^k(k-1)}{2k(k+1)}\zeta(k,z). \tag{15.4.159}$$

(6) **(Binet)** 我们有

$$\mu(z) = \sum_{k\geq 2}\frac{k-1}{2k(k+1)}\zeta(k,z+1). \tag{15.4.160}$$

(7) 我们有

$$\nu(z) = \frac{1}{z} - \sum_{k\geq 2}\frac{1}{k}\zeta(k,z+1). \tag{15.4.161}$$

♡

证: (1) 可从 (15.4.145) 推出.

(2) 根据 (15.4.147) 得到

$$\begin{aligned}\mu'(z+1)-\mu'(z) &= \frac{1}{2(z+1)}-\nu(z+1)-\frac{1}{2z}+\nu(z)\\ &= \frac{1}{2(z+1)}+\frac{1}{2z}-\ln\left(1+\frac{1}{z}\right).\end{aligned}$$

在 $[1,z]$ 上积分得到

$$\begin{aligned}\mu(z+1)-\mu(2)-\mu(z)+\mu(1) &= \frac{\ln(z+1)-\ln 2}{2}+\frac{1}{2}\ln z+z(\ln z-1)+1\\ &\quad -(z+1)[\ln(z+1)-1]+2(\ln 2-1).\end{aligned}$$

然而 (15.4.146) 告诉我们 $\mu(2)-\mu(1)=-\frac{3}{2}\ln 2+1$ 从而

$$\mu(z+1)-\mu(z)=1-\left(z+\frac{1}{2}\right)\ln(z+1)+\left(z+\frac{1}{2}\right)\ln z.$$

(3) 对每个 $n\geq 0$ 都有

$$\begin{aligned}\mu(z) &= \mu(z+n+1)-\sum_{0\leq k\leq n}[\mu(z+k+1)-\mu(z+k)]\\ &= \mu(z+n+1)-\sum_{0\leq k\leq n}\left[1-\left(z+k+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{z+k}\right)\right]\\ &= \sum_{0\leq k\leq n}\left[\left(z+k+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{z+k}\right)-1\right]+\mu(z+n+1).\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$ 得到 (15.4.157).

(4) 因为 (15.4.145) 中的每项等于

$$\frac{1}{z+n}-\ln\left(1+\frac{1}{z+n}\right)=\frac{1}{z+n}-\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{1}{(z+n)^k}=\sum_{k\geq 2}\frac{(-1)^k}{k}\frac{1}{(z+n)^k},$$

所以得到 (15.4.158).

(5) 同样 (15.4.157) 中的每项等于

$$\left(z+n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{z+n}\right)-1=\sum_{k\geq 2}\frac{(-1)^k(k-1)}{2k(k+1)}\frac{1}{(z+n)^k}.$$

故得到 (15.4.159).

(6) 因为

$$\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}=\frac{e^x(x-2)+(x+2)}{2x^2(e^x-1)},$$

所以

$$\mu(x)=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{e^x(x-2)+(x+2)}{x^2}\cdot\frac{e^{-zx}}{e^x-1}dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty\sum_{k\geq 1}\frac{k}{(k+2)!}\frac{x^ke^{-zx}}{e^x-1}dx.$$

利用 $x^ke^{-zx}/(e^x-1)=\sum_{m\geq 0}x^kw^{-(z+m+1)x}$ 得到 (15.4.160). 同立可得到 (15.4.161). □

练习 15.32. (Lerch)

证明

$$|\Gamma(x+\sqrt{-1}y)|=\sqrt{2\pi}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})}e^{-x-y\tan^{-1}\frac{y}{x}}(1+\epsilon)$$

其中 $\epsilon\to 0$ (x 或 y 趋于 $+\infty$).

对任何 $k \in \mathbb{N}$ 不等式 $k^2 - 5k + 6 = (k-2)(k-3) \geq 0$ 推出

$$\frac{k-1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{6}.$$

(这里我们取 > 当 $l > 3$ 时). 因此对任何 $x > 0$ 有

$$0 < \mu(x) < \frac{1}{12}\sum_{k\geq 2}\zeta(k, x+1). \tag{15.4.162}$$

另一方面

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 2}\zeta(k,x+1) &= \sum_{k\geq 2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(x+n)^k} = \sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 2}\frac{1}{(x+n)^k}\\ &= \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(x+n)^2}\frac{1}{1-\frac{1}{x+n}} = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(x+n)(x+n-1)}\\ &= \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{x+n-1} - \frac{1}{x+n}\right) = \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

从而得到

$$0 < \mu(x) < \frac{1}{12x}. \tag{15.4.163}$$

定理 15.52. (Stirling)

对任何 $x > 0$ 得到

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}e^{\frac{\theta_x}{12x}} \tag{15.4.164}$$

这里 $\theta_x \in (0,1)$. 特别地

$$n! = \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^{\frac{\theta_n}{12n}}. \tag{15.4.165}$$

♡

从 (15.4.151) 得到 $\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}e^{\mu(x)}$. 根据 (15.4.140) 我们有

$$\left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{x} = 2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{x^2+(2\pi n)^2}.$$

然而

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+(2\pi n)^2} &= \frac{1}{(2\pi n)^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{(2\pi n)^2}}\\ &= \frac{1}{(2\pi n)^2}\left[\sum_{0\leq k\leq m-1}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2\pi n)^{2k}} + (-1)^m\frac{r_n}{(2\pi n)^{2m}}x^{2m}\right],\end{aligned}$$

其中 $r_n := 4n^2\pi^2/(4n^2\pi^2+x^2) \in (0,1)$. 故对每个 $m \in \mathbb{N}$ 有

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{x} &= 2\sum_{1\leq k\leq m}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}x^{2k-2}}{(2\pi n)^{2k}}\\ &\quad + 2(-1)^m\theta_m x^{2m}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2\pi n)^{2m+2}}\end{aligned}$$

其中 $\theta_m \in (0,1)$. 从 (15.3.32) 和 (15.4.147) 出发的到

$$\mu(z) = 2\sum_{1\leq k\leq m}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi n)^{2k}}\int_0^\infty x^{2k-2}e^{-zx}dx$$

$$
\begin{aligned}
&+2(-1)^m\theta_m\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{(2\pi n)^{2m+2}}\int_0^{\infty}x^{2m}e^{-zx}dx\\
=\ &2\sum_{1\le k\le m}\sum_{n\ge 1}\frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi n)^{2k}}\frac{(2k-2)!}{z^{2k-1}}+2(-1)^m\theta_m\sum_{n\ge 1}\frac{1}{(2\pi n)^{2m+2}}\frac{(2m)!}{z^{2m+1}}\\
=\ &2\sum_{1\le k\le m}\frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{(2\pi)^{2k}z^{2k-1}}\zeta(2k)+2(-1)^m\theta_m\frac{(2m)!}{z^{2m+1}}\frac{1}{(2\pi)^{2m+2}}\zeta(2m+2)\\
=\ &\sum_{1\le k\le m}\frac{(-1)^{k-1}B_{2k}}{2k(2k-1)z^{2k-1}}+(-1)^m\theta_m\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)(2m+1)z^{2m+1}}.
\end{aligned}
$$

推论 15.13

给定 $\mathrm{Re}(z)>0$. 对每个 $m\in\mathbb{N}$ 存在 $\theta_m\in(0,1)$ 满足

$$
\mu(z)=\sum_{1\le k\le m}\frac{(-1)^{k-1}B_{2k}}{2k(2k-1)z^{2k-1}}+(-1)^m\theta_m\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)(2m+1)z^{2m+1}}. \tag{15.4.166}
$$

♡

公式 (15.4.166) 的直接推论是

$$
n!\approx\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^{\frac{1}{12n}-\frac{1}{360n^3}}=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}-\frac{1}{360n^3}}. \tag{15.4.167}
$$

练习 15.33. (Cauchy)

$$
2\frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{2n-\frac{1}{2}}}e^{-2n}<B_{2n}<\frac{1}{12}\frac{(2n)^{2n+\frac{1}{12}}}{(2\pi)^{2n-\frac{5}{2}}}e^{-2n+\frac{1}{24n}},\quad \text{任意 } n\in\mathbb{N}_*.
$$

♠

对恒等式

$$
\frac{\frac{1}{2}-u}{u+z}=\frac{z+\frac{1}{2}}{u+z}-1
$$

两边积分得到

$$
\int_0^1\frac{\frac{1}{2}-u}{u+z}du=\left(z+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{z}\right)-1.
$$

一般地, 对每个 $n\ge 0$ 可证明

$$
\int_n^{n+1}\frac{\frac{1}{2}-u+n}{u+z}du=\left(z+n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{z+n}\right)-1.
$$

故

$$
\mu(z)=\sum_{n\ge 0}\int_n^{n+1}\frac{\frac{1}{2}-u+n}{u+z}du=\sum_{n\ge 0}\int_0^1\frac{\frac{1}{2}-t}{u+z+n}du.
$$

定义函数

$$
\Lambda(t):=\frac{1}{2}-t+\lfloor t\rfloor,\quad t\in\mathbb{R}. \tag{15.4.168}
$$

定理 15.53

$$
\mu(z)=\int_0^{\infty}\frac{\Lambda(t)}{t+z}dt,\quad \mathrm{Re}(z)>0. \tag{15.4.169}
$$

♡

练习 15.34. (Binet-Liouville-Bourgoret)

证明

$$\begin{aligned}\mu(x) &= 2\int_0^\infty \frac{\tan^{-1}(t/x)}{e^{2\pi t}-1}dt = \frac{x}{\pi}\int_0^\infty \ln\left(\frac{1}{1-e^{-2\pi t}}\right)\frac{dt}{t^2+x^2} \\ &= \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(2n\pi t)}{t+x}dt.\end{aligned}$$

15.5 * 模形式

模群 (modular group) 定义为

$$\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}) := \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix} : a,b,c,d\in\mathbb{Z},\ ab-bc=1\right\}. \tag{15.5.1}$$

令 Γ 是由如下矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}. \tag{15.5.2}$$

所生成的 $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的子群. 对所有整数 $n\in\mathbb{Z}$ 有

$$\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{bmatrix}^n.$$

下面练习证明了 $\Gamma = \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$; 即模群是由 (15.5.2) 所生成的.

练习 15.35

令 $\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}$ 是 $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ 中的矩阵. 利用恒等式

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b' \\ c & nc+d\end{bmatrix}$$

来证明, 除非 $c=0$, 某些矩阵 $\alpha\gamma, \gamma\in\Gamma$, 具有如下形式

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & -a \\ d & -c\end{bmatrix}$$

继续这个过程直到某些矩阵 $\alpha\gamma, \gamma\in\Gamma$, 的第二列为 $(0,*)$. 事实上第二列是 $(0,\pm1)$, 且因为 $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}^2 = -I$, 第二列可以取 $(0,1)$. 从而证明 $\alpha\gamma\in\Gamma$ 和 $\alpha\in\Gamma$.

模群中的每个元 $\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}$ 可看成 Riemann 球 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上的自同构,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}(\tau) := \frac{a\tau+b}{c\tau+d},\quad \tau\in\widehat{\mathbb{C}}. \tag{15.5.3}$$

根据**练习 15.35** 这些自同构由

$$\tau \mapsto \tau + 1, \quad \tau \mapsto -\frac{1}{\tau} \tag{15.5.4}$$

所生成.

15.5.1 *k 权模形式

上半平面 (upper half-plane) 定义为

$$\mathbb{H} := \{\tau \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(\tau) > 0\}. \tag{15.5.5}$$

Riemann 曲面理论告诉我们只有三类单连通 Riemann 曲面, 即, 复平面 $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, Riemann 球 $\widehat{\mathbb{C}} \cong \mathbb{S}^2$, 和上半平面 $\mathbb{H} \cong \mathbb{B}^2$.

练习 15.36

证明

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(\gamma(\tau)) &= \frac{\mathrm{Im}(\tau)}{|c\tau + d|^2}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}), \\
(\gamma\gamma')(\tau) &= \gamma(\gamma'(\tau)), \quad \gamma, \gamma' \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}), \ \tau \in \mathbb{H}, \\
\frac{d\gamma(\tau)}{d\tau} &= \frac{1}{(c\tau + d)^2}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

因此模群把上半平面映成上半平面.

定义 15.3. (k 权弱模形式)

令 $k \in \mathbb{Z}$ 为整数. 亚纯函数 $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ 称为***k* 权弱模形式 (weakly modular form of weight *k*)** 如果

$$f(\gamma(\tau)) = (c\tau + d)^k f(\tau), \quad \gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}) \text{ 和 } \tau \in \mathbb{H}. \tag{15.5.6}$$

可以证明如果 (15.5.6) 对形如 (15.5.2) 的 γ 成立, 则对任意 $\gamma \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ 也成立. 换句话说, f 是 k 权弱模形式的如果

$$f(\tau + 1) = f(\tau), \quad f\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^k f(\tau). \tag{15.5.7}$$

0 权弱模形式具有 $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$-不变性, $f \circ \gamma = f$ 对所有 $\gamma \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ 都成立.

根据 (15.5.7) 得到每个弱模形式 $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ 是 $\mathbb{Z}$-周期的. 记 $\mathbb{D} = \mathbb{B}^2 := \{q \in \mathbb{C} : |q| < 1\}$ 是单位开复圆盘, 记 $\mathbb{D}' := \mathbb{D} \setminus \{0\}$, 并回顾到 $\mathbb{Z}$-周期全纯映射 $\tau \mapsto e^{2\pi\sqrt{-1}\tau} = q$ 把 $\mathbb{H}$ 映成 $\mathbb{D}'$. 对应于 f, 函数 $g : \mathbb{D}' \to \mathbb{C}$ 其中

$$g(q) := f\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \ln q\right) \tag{15.5.8}$$

是有定义的且 $f(\tau) := g(e^{2\pi\sqrt{-1}\tau})$. 若 f 在上半平面上是全纯的, 则复合函数 g 在去心圆

盘上是全纯的, 因此 g 有如下的 Laurent 级数展开

$$g(q)=\sum_{n\geq 1}a_nq^n,\quad q\in\mathbb{D}'. \tag{15.5.9}$$

根据 $|q|=e^{-2\pi\mathrm{Im}(\tau)}$ 我们可以证明当 $\mathrm{Im}(\tau)\to\infty$ 时 $q\to 0$. 称 f **在 ∞ 处全纯的 (holomorphic at ∞)** 如果 g 可全纯延拓到 $q=0$, 即, Laurent 级数只对 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 求和. 因此 f 具有如下 Fourier 级数展开

$$f(\tau)=\sum_{n\geq 0}a_n(f)q^n,\quad q:=e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}. \tag{15.5.10}$$

定义 15.4. (k 权模形式)

假设 k 是整数. 称 $f:\mathbb{H}\to\mathbb{C}$ 是**k 权模形式** 如果

(1) f 在 $\mathbb{H}$ 上是全纯的,

(2) f 是 k 权弱模形式,

(3) f 在 ∞ 处是全纯的.

k 权模形式的集合记为 $\boldsymbol{\mathcal{M}}_k(\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}))$. ♣

练习 15.37

(a) 证明集合 $\boldsymbol{\mathcal{M}}_k(\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}))$ 是 $\mathbb{C}$ 上的向量空间.

(b) 若 $f\in\boldsymbol{\mathcal{M}}_k(\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}))$ 和 $g\in\boldsymbol{\mathcal{M}}_\ell(\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}))$, 则 $fg\in\boldsymbol{\mathcal{M}}_{k+\ell}(\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}))$. ♠

从而

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})):=\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}\boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})) \tag{15.5.11}$$

是分次环. $\mathbb{H}$ 上的零函数是任意权模形式, 和 $\mathbb{H}$ 上的常值函数是 0 权模形式.

15.5.2 *k 权 Eisenstein 级数和尖点形式

假设 $k\geq 3$ 是偶数. 定义**k 权 Einstein 级数 (Einstein series of weight k)** 为

$$G_k(\tau):=\sum_{(c,d)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}}\frac{1}{(c\tau+d)^k},\quad \tau\in\mathbb{H}. \tag{15.5.12}$$

练习 15.38

证明 G_k 在 $\mathbb{H}$ 上是全纯函数且是 k 权弱模形式. 最后证明当 $\mathrm{Im}(\tau)\to\infty$ 时 G_k 时有界的从而是 k 权模形式. ♠

回顾恒等式

$$\frac{1}{\tau}+\sum_{d\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{\tau-d}+\frac{1}{\tau+d}\right)=\pi\cot(\pi\tau)=\pi\sqrt{-1}-2\pi\sqrt{-1}\sum_{m\geq 0}q^m, \tag{15.5.13}$$

这里 $q=e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$. 对 (15.5.13) 关于 $\tau\in\mathbb{H}$ 求 $k-1$ 导数, $q=e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$, 得到

$$\sum_{d\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(\tau+d)^k}=\frac{(-2\pi\sqrt{-1})^k}{(k-1)!}\sum_{m\geq 1}m^{k-1}q^k,\quad k\geq 2. \tag{15.5.14}$$

对每个 $k \geq 3$,

$$\begin{aligned}\sum_{(c,d)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}}\frac{1}{(c\tau+d)^k} &= \sum_{d\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{1}{d^k}+2\sum_{c\geq 1}\left[\sum_{d\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(c\tau+d)^k}\right]\\ &= 2\zeta(k)+2\frac{(2\pi\sqrt{-1})^k}{(k-1)!}\sum_{c\geq 1}\sum_{m\geq 1}m^{k-1}q^{cm}\end{aligned}$$

所以

$$G_k(\tau)=2\zeta(k)+2\frac{(2\pi\sqrt{-1})^k}{(k-1)!}\sum_{n\geq 1}\sigma_{k-1}(n)q^n,\quad k\geq 3\text{ 和 }k\text{ 偶数} \tag{15.5.15}$$

这里的系数 $\sigma_{k-1}(n)$ 是算术函数

$$\sigma_{k-1}(n):=\sum_{m|n,\ m>0}m^{k-1}. \tag{15.5.16}$$

正规化 Eisenstein 级数 (normalized Eisenstein series) 定义为

$$E_k(\tau):=\frac{G_k(\tau)}{2\zeta(k)}. \tag{15.5.17}$$

利用 (15.3.32) 得到

$$E_k(\tau)=1-\frac{2k}{B_k}\sum_{n\geq 1}\sigma_{k-1}(n)q^n. \tag{15.5.18}$$

练习 15.39

证明 (15.5.13) 中的第二个恒等式.

定义 15.5. (k 权尖点形式)

***k* 权尖点形式 (cusp form of weight *k*)** 是指 k 权模形式且其 Fourier 展开中首项系数 $a_0=0$, 即,

$$f(\tau)=\sum_{n\geq 1}a_nq^n,\quad q:=e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}.$$

k 权尖点形式的集合记为 $\mathcal{S}_k(\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}))$.

当 $\lim_{\mathrm{Im}(\tau)\to\infty}f(\tau)=0$ 时, 模形式必是尖点形式. 从而尖点形式集合 $\mathcal{S}_k(\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}))$ 构成了模形式集合 $\mathcal{M}_k(\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}))$ 的向量子空间, 且分次环

$$\mathcal{S}(\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}))=\bigoplus_{k\in\mathbf{Z}}\mathcal{S}_k(\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}))$$

是 $\mathcal{M}(\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}))$ 的理想.

令

$$g_2(\tau):=60G_4(\tau),\quad g_3(\tau):=140G_6(\tau) \tag{15.5.19}$$

并定义**判别函数 (discriminant function)** 为

$$\Delta:\mathbb{H}\longrightarrow\mathbb{C},\quad \Delta(\tau):=g_2(\tau)^3-27g_3(\tau)^2. \tag{15.5.20}$$

则 Δ 是 12 权弱模形式且在 $\mathbb{H}$ 上是全纯的.

练习 15.40

证明在函数 Δ 的 Fourier 级数展开中 $a_0 = 0$ 和 $a_1 = (2\pi)^{12}$. 故 $\Delta \in \mathcal{S}_{12}(\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}))$.

可以证明 $\Delta(\tau) \neq 0$ 对所有 $\tau \in \mathbb{H}$ 都成立从而 Δ 的唯一零点是 ∞. 因此**模函数 (modular function)**

$$j : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad j(\tau) := 1728 \frac{g_2(\tau)^3}{\Delta(\tau)} \tag{15.5.21}$$

在 $\mathbb{H}$ 上是全纯的.

练习 15.41

证明 j 是 $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$-不变的, 即, $j(\gamma(\tau)) = j(\tau)$ 对所有 $\gamma \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ 和 $\tau \in \mathbb{H}$ 都成立.

练习 15.42

令 $\mu_3 := e^{2\pi\sqrt{-1}/3}$. 证明 $g_2(\mu_3) = 0$, $g_3(\mu_3) \neq 0$, $g_3(\sqrt{-1}) = 0$, 和 $g_2(\sqrt{-1}) \neq 0$, 因此 $j(\mu_3) = 0$ 和 $j(\sqrt{-1}) = 1728$.

我们可以证明

$$g_2(\sqrt{-1}) = 4\varpi_4^4, \quad \varpi_4 := 2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = 2\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})} \tag{15.5.22}$$

and

$$g_3(\mu_3) = \frac{27}{16}\varpi_3^6, \quad \varpi_3 := 2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}} = 2\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(\frac{5}{6})}. \tag{15.5.23}$$

15.6 习题

15.7 参考文献

1. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis I*, Translated from the 1988 German original by Gary Brookfield, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. xiv+426 pp. ISBN: 3-7643-7153-6
2. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis II*, Translated from the 1999 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. xii+400 pp. ISBN: 978-3-7643-7472-3; 3-7643-7472-3
3. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis III*, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. xii+468 pp. ISBN: 978-3-7643-7479-2; 3-7643-7479-2
4. Iwaniec, Henryk; Kowalski, Emmanuel. *Analytic number theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. xii+615 pp. ISBN: 0-8218-3633-1
5. Koblitz, Neal. *Introduction to elliptic curves and modular forms*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics **97**, Springer-Verlag, New York, 1993. x+248 pp. ISBN: 0-387-97966-2

6. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis I*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+574 pp. ISBN: 3-540-40386-8
7. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis II*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xvi+681 pp. ISBN: 3-540-40633-6
8. 布鲁斯 · C. 伯恩特 (Bruce C. Berndt) 主编: **拉玛努金笔记** (第 1, 2, 3, 4 卷), 哈尔滨工业大学出版社, 2019.
9. 布鲁斯 · C. 伯恩特 (Bruce C. Berndt), 乔治 · E. 安德鲁斯 (George E. Andrews) 主编: **拉玛努金遗失笔记** (第 1, 2, 3, 4 卷), 哈尔滨工业大学出版社, 2019.
10. 常庚哲, 史济怀 编: **数学分析教程** (上、下册), 高等教育出版社, 2003.
11. 陈天权 编著: **数学分析讲义** (第一、二、三册), 北京大学出版社, 2009.
12. 邓建平 编: **微积分 I 和 II**, 科学出版社, 2019.
13. Duhham, William 著 (李伯民, 汪军, 张怀勇 译): **微积分的历程** – 从牛顿到勒贝格, 人民邮电出版社, 2013.
14. 吉米多维奇 著 (李荣[illegible], 李植 译): **数学分析习题集** (根据 2010 年俄文版翻译), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.
15. Kline, Morris 著 (张理京, 张炎热, 江泽涵等 译): **古今数学思想** (第一、二、三册), 上海科学技术出版社, 2014.
16. 黎景辉, 赵春来 著: **模曲线导引** (第二版), 北京大学出版社, 2014.
17. 李傅山, 王培合 编著: **数学分析习题课讲义** (1、2、3), 北京大学出版社, 2018.
18. 李逸 编著: **数学分析讲义**, 上海交通大学数学分析课讲义 (未出版), 2016.
19. 林源渠, 方企勤 编: **数学分析解题指南**, 北京大学出版社, 2003.
20. 梅加强 编著: **数学分析**, 高等教育出版社, 2015.
21. 裴礼文 编著: **数学分析中的典型问题与方法** (第二版), 高等教育出版社, 2015.
22. Riemann, Bernhard 著 (李培廉 译): **黎曼全集** (第一、二卷), 高等教育出版社, 2016.
23. 谭琳 著: **Γ 函数札记**, 浙江大学出版社, 1997.
24. 汪林 著: **数学分析中的问题和反例**, 现代数学基础 **56**, 高等教育出版社, 2015.
25. Weir, D. Maurice; Hass, R. Joel; Giordano, R. Frank. *Thomas' calculus*, Eleventh Edition, (影印版, 上、下册), 高等教育出版社, 2016.
26. 徐森林, 薛春华 编著: **数学分析**, 清华出版社, 2005.
27. 杨小远, 孙玉泉, 薛玉梅, 杨卓琴 编著: **工科数学分析教程** (上、下册), 科学出版社, 2011.
28. 张福保, 薛金美, 潮小李 主编: **数学分析讲义**, 科学出版社, 2019.
29. 张筑生 编著: **数学分析新讲** (第一、二、三册), 北京大学出版社, 1990.
30. 周民强 编著: **数学分析习题演练** (第一、二、三册), 科学出版社, 2018.
31. 朱尧辰 编著: **数学分析例选通过范例学技巧**, 哈尔滨工业大学出版社, 2013.

第十六章 Fourier 级数

A more general value of b is easily formed by adding together several terms similar to the preceding, and we have

$$v = ae^{-x}\cos y + be^{-3x}\cos 3y + ce^{-5x}\cos 5y + de^{-7x}\cos 7y + \cdots.$$

It is evident that the function v denoted by $\phi(x,y)$ satisfies the equation $\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}=0$, and the condition $\phi(x,\pm\frac{1}{2}\pi)=0$. A third condition remains to be fulfilled, which is expressed thus, $\phi(0,y)=1$, and it is essential to remark that this result must exist when we give to y any value whatever included between $-\frac{1}{2}\pi$ and $+\frac{1}{2}\pi$.

--- 《The analytical theory of heat》, Joseph Fourier, 1822

16.1 Fourier 级数展开

通常说的“**Fourier 定理**”是指, 当 $f(x)$ 属于某个合适的函数类时且存在某个三角级数

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n\geq 1}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

在开区间 $(-\pi,\pi)$ 内收敛到 $f(x)$, 则

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Hardy (见参考文献) 在其专著中指出, 上述关于 a_n, b_n 的公式的出现要早于Fourier 且根据Burkhardt 的论文这两个公式可追溯到Clairaut (1757). 其实Euler 早就对此很熟悉了, 在 1777 年利用逐项积分给出了一般化的推导.

Fourier, 全名叫Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 年 3 月 21 日–1830 年 5 月 16 日), 今法国勃艮第--弗朗什--孔泰大区约讷省欧赛尔市人, 法国著名数学家和物理学家. 他毕业于法国巴黎高师, 作为科学顾问于 1798 年随拿破仑远征埃及. Fourier 最出名的著作是 1822 年发表的《Théorie analytique de la chaleur》(热的解析理论), 而其英文修订版在 1878 年由Freemann 翻译出版, 法文修订版由Darboux 多次修订后在 1888 年出版.

du Bois-Reymond[1] 和de la Vallée-Poussin[2] 证明了“当 f 是有界的、可积的且三角级数在通常意义下收敛到 $f(x)$ 时”, 则上述 Fourier 定理成立.

[1] Paul David Gustav du Bois-Reymond, 1831 年 12 月 2 日–1889 年 4 月 7 日, 今德国柏林人, 德国数学家. 他的兴趣集中在 Sturm-Liouville 理论、积分方程、变分法和 Fourier 级数. 在 1873 年, 他给构造了一个连续函数其 Fourier 级数不收敛. 他又证明了处处收敛到某个连续函数的三角级数必是该函数的 Fourier 级数.

[2] Charles-Jean de la Vallée-Poussin, 1866 年 8 月 14 日–1962 年 3 月 2 日, 今比利时列文人, 比利时数学家. 1898 年被选举为比利时皇家科学院通讯院士, 1908 年成为院士, 1923 年成为科学部主席. 在 1928 年, 比利时国王授予他男爵称号. 他最有名的工作是独立于Hadamard 在 1896 年证明了素数定理.

本节来给出这个定理的证明.

16.1.1 平方可积函数空间和正交函数系

回顾记号 $R([a,b])$, 即闭区间 $[a,b]$ 上所有 (Riemann) 可积函数构成的集合. 为了研究方便我们引入记号

$$R^2([a,b]) := \left\{f\in R([a,b])|f^2\in R([a,b])\right\}.$$

此时利用 Cauchy 不等式可知**内积 (inner product)**

$$\langle f,g\rangle_{R^2([a,b])} := \int_a^b f(x)g(x)\,dx,\quad f,g\in R^2([a,b]),$$

在 $R^2([a,b])$ 上有定义. 则 $(R^2([a,b]),\langle\cdot,\cdot\rangle_{R^2([a,b])})$ 是向量空间.

定义 16.1. (正交函数系)

(1) $f,g\in R^2([a,b])$ 称为**正交的 (orthogonal)** 如果

$$\langle f,g\rangle_{L^2([a,b])}=0.$$

(2) 称函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}\subset R^2([a,b])$ 是**正交函数系 (orthogonal system)** 如果

$$||f_n||^2_{R^2([a,b])}=0,\quad \langle f_m,f_n\rangle_{R^2([a,b])}=0\ (m\neq n).$$

(3) 正交函数系 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}\subset R^2([a,b])$ 称为**规范正交函数系 (normalized orthogonal system)** 如果进一步要求

$$\langle f_m,f_n\rangle_{R^2([a,b])}=\delta_{mn}.$$

♣

例 16.1

(1) 因为对任意 $m,n\in\mathbb{N}$,

$$\langle\sin mx,\sin nx\rangle_{R^2([-\pi,\pi])}=\langle\cos mx,\cos nx\rangle_{R^2([-\pi,\pi])}=\pi\delta_{mn}$$

和

$$\langle\sin mx,\cos nx\rangle_{R^2([-\pi,\pi])}=0$$

和

$$\langle 1,\sin nx\rangle_{R^2([-\pi,\pi])}=\langle 1,\cos nx\rangle_{R^2([-\pi,\pi])}=2\pi\delta_{n0},$$

故 $\{1,\cos nx,\sin nx\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是正交函数系和 $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是规范正交函数系.

(2) 根据 (1) 对任意 $T>0$

$$\left\{1,\cos\frac{\pi}{T}nx,\sin\frac{\pi}{T}nx\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

是 $[-T,T]$ 上的正交函数系从而

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2T}},\frac{1}{\sqrt{T}}\cos\frac{\pi}{T}nx,\frac{1}{\sqrt{T}}\sin\frac{\pi}{T}nx\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

是 $[-T,T]$ 上的规范正交函数系.

(3) 当 $a\neq b$ 时根据

$$\begin{aligned}\int_0^T \sin ax\sin bx\,dx &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin[(a-b)T]}{a-b}-\frac{\sin[(a+b)T]}{a+b}\right\}\\ &= \cos aT\sin bT\frac{b\tan aT-a\tan bT}{a^2-b^2}\end{aligned}$$

和

$$\int_0^T \sin^2 ax\,dx=\frac{T}{2}-\frac{1}{2}\int_0^T\cos 2ax\,dx=\begin{cases}0, & a=0,\\ \frac{T}{2}-\frac{\sin 2aT}{4a}, & a\neq 0.\end{cases}$$

因此, 若 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 是严格递增数列且满足条件 $\tan a_nT=a_nc$(这里 c 是任意给定的常数), 则 $\{\sin a_nx\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $[0,T]$ 上的正交函数系.

(4) Legendre 多项式

$$P_n(x):=\frac{1}{n!2^n}\left[(x^2-1)^n\right]^{(n)},\quad n\geq 1$$

构成了 $[-1,1]$ 上的正交函数系. 事实上, 因为所有次数 $k<n$ 的 Legendre 多项式都是 $1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$ 的线性组合, 所以只要证明 $\langle P_n(x),x^k\rangle_{R^2([-1,1])}=0$, $0\leq k\leq n-1$. 利用分部积分法得到

$$\int_{-1}^1 x^kP_n(x)\,dx=\frac{1}{n!2^n}\int_{-1}^1(x^k)^{(k+1)}\left[(x^2-1)^n\right]^{(n-k-1)}=0.$$

16.1.2 周期函数的 Fouorier 展开

考虑本章一开始提到的函数项级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\quad x\in[-\pi,\pi]. \tag{16.1.1}$$

这里 a_0,a_n,b_n 都是常数. 回顾到 $e^{\sqrt{-1}x}=\cos x+\sqrt{-1}\sin x$. 因此 (16.1.1) 可写成复级数形式

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}A_ne^{\sqrt{-1}nx} \tag{16.1.2}$$

其中 $A_0=\frac{1}{2}a_0$, $A_n=\frac{1}{2}a_n-\frac{\sqrt{-1}}{2}b_n$, 和 $A_{-n}=\frac{1}{2}a_n+\frac{\sqrt{-1}}{2}b_n$.

如果级数 (16.1.1) 在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛到 $f(x)$, 则 $f\in C([-\pi,\pi])$ 且逐项积分得到

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\,dx, \tag{16.1.3}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\,dx. \tag{16.1.4}$$

从而得到

$$A_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-\sqrt{-1}nx}dx,\quad n\in\mathbb{Z}. \tag{16.1.5}$$

一般地, 对任意 $f\in R([-\pi,\pi])$ 定义其 **Fourier 级数 (Fourier series)** 为 (16.1.1) 其中系数

a_n, b_n 由 (16.1.3) 和 (16.1.4) 所给出, 或者形式上可记成

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}A_n e^{\sqrt{-1}nx},\quad x\in[-\pi,\pi]. \tag{16.1.6}$$

此时

$$S_N(f)(x):=\frac{a_0}{2}+\sum_{1\leq n\leq N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\sum_{-N\leq n\leq N}A_n e^{\sqrt{-1}nx}$$

称为 $f(x)$ 的**部分和 (partial sum)**.

例 16.2

(1) 计算函数

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\leq x<0,\\ 1, & 0\leq x<\pi.\end{cases}$$

的 Fourier 级数. 这里我们按照周期 2π 将函数 $f(x)$ 作延拓, 从而得到 $f(\pi)=f(-\pi)=-1$. 根据 (16.1.3) 和 (16.1.4) 得到

$$\begin{aligned}a_n &= 0,\quad n\geq 0,\\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx = \frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n],\quad n\geq 1.\end{aligned}$$

故得到

$$f(x)\sim\frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin nx=\frac{4}{\pi}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{2k+1}\sin[(2k+1)x].$$

但是右边的函数项级数不一定等于右边的函数, 比如 $f(0)=1$, 但是右边函数项级数此时为 0. 但是我们发现

$$0=\frac{1+(-1)}{2}=\frac{f(0+)+f(0-)}{2}.$$

如果在不连续点作如下修改, 那左边函数值就等于右边的函数项级数值. 在之后的章节中我们会看到这是个普遍的现象.

(2) 计算函数 $f(x)=\frac{x}{2}$ 的在 $[-\pi,\pi)$ 上的 Fourier 级数. 同样我们也作周期为 2π 的延拓使得 $f(\pi)=f(-\pi)=-\pi/2$. 计算得到

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x}{2}\cos nx\,dx = 0,\quad n\geq 0,\\ b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x}{2}\sin nx\,dx = \frac{(-1)^{n-1}}{n},\quad n\geq 1.\end{aligned}$$

因此得到 Fourier 级数为

$$f(x)\sim\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx.$$

(3) 计算函数 $f(x)=x^2$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上的 Fourier 级数. 同样我们也作周期为 2π 的延拓使得 $f(\pi)=f(-\pi)=\pi^2$, 且延拓后的函数时连续的. 计算得到

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nx\,dx = 0,\quad n\geq 1,\\ a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\,dx = \frac{2}{3}\pi^2\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nx\,dx = \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi x^2 d\sin nx = \frac{4}{n^2\pi}\int_0^\pi x\,d\cos nx \\ &= \frac{4}{n^2\pi}\pi(-1)^n - \frac{4}{n^2\pi}\int_0^\pi \cos nx\,dx = \frac{4}{n^2}(-1)^n, \quad n\geq 1. \end{aligned}$$

因此得到 Fourier 级数为

$$f(x)\sim\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}\cos nx.$$

(4) 计算函数 $f(x)=x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数. 此时

$$a_n=0, \quad n\geq 0$$

和

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,dx=\frac{-2}{n\pi}\int_0^\pi x\,d\cos nx=(-1)^{n-1}\frac{2}{n}, \quad n\geq 1.$$

因此得到

$$f(x)\sim\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{2}{n}\sin(nx).$$

16.1.3 正弦级数和余弦级数

上面例子促使我们引入正弦级数和余弦级数. 假设 $f\in R[(0,\pi)]$ 并考察其奇延拓 $f_{\mathbf{odd}}$

$$f_{\mathbf{odd}}(x):=-f(-x), \quad x\in(-\pi,0).$$

此时 $f_{\mathbf{odd}}$ 的系数 “a_n” 都是 0 而系数 “b_n” 为

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f_{\mathbf{odd}}(x)\sin(nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\,dx.$$

因此我们得到函数 $f(x)$ 的 **Fourier 正弦级数 (Fourier sin series)**

$$f(x)\sim\sum_{n\geq 1}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\,dx\right]\sin(nx). \tag{16.1.7}$$

同样我们可以考虑函数 $f(x)$ 的偶延拓 $f_{\mathbf{even}}$

$$f_{\mathbf{even}}(x):=f(-x), \quad x\in(-\pi,0).$$

并得到 **Fourier 余弦级数 (Fourier cos series)**

$$f(x)\sim\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx+\sum_{n\geq 1}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx\right]\cos(nx). \tag{16.1.8}$$

例 16.3

(1) 计算函数 $f(x)=x, 0<x<\pi$, 的正弦级数和余弦级数. 因为

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin(nx)\,dx=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}, \quad n\geq 1,$$

和

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx = 2\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi},$$

所以得到

$$f(x) \sim 2\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

和

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx.$$

(2) 计算函数 $f(x) = x(\pi - x), 0 < x < \pi,$ 的正弦级数和余弦级数. 计算可得

$$f(x) \sim \frac{8}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$$

和

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n\geq 1}\frac{\cos 2nx}{n^2}.$$

(3) 计算函数 $f(x) = x^2, 0 < x < \pi,$ 的正弦级数和余弦级数. 直接计算得到

$$x^2 \sim 2\pi\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}\sin(nx) - \frac{8}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\sin[(2n-1)x]}{(2n-1)^3}$$

和

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

♠

如果**例 16.3** 中的符号 “∼” 改成 “=”，则取 $x = \pi$ 得到 (此时我们定义 $f(\pi) = \pi^2$)

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} \quad\Longrightarrow\quad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

这就形式上给出了 Euler 公式的另一个证明.

16.1.4 任意周期函数的 Fourier 展开

假设函数 $f(x)$ 在 $[-T, T]$ 上可积. 令 $x = Tt/\pi$ 我们得到函数 $\varphi(t) := f(Tt/\pi)$ 且 $t \in [-\pi, \pi]$. 由于

$$\varphi(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\Big[a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)\Big]$$

这里

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos(nt)\,dt, \quad b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin(nt)\,dt,$$

我们得到

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi}{T}x\right)\right] \tag{16.1.9}$$

其中

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right)dx, \quad b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{T}x\right)dx. \tag{16.1.10}$$

例 16.4

(1) 计算函数

$$f(x) = \begin{cases} C, & -T < x < 0, \\ 0, & 0 \le x \le T \end{cases}$$

的 Fourier 级数. 事实上

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)dx = C,$$

和

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{\pi n x}{T}dx = C\int_{-1}^{0}\cos(\pi n t)dt = 0, \quad n \ge 1,$$

和

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\frac{\pi n x}{T}dx = C\int_{-1}^{0}\sin(\pi n t)dt = \frac{C}{n\pi}[-1+(-1)^n], \quad n \ge 1.$$

因此

$$f(x) \sim \frac{C}{2} - \frac{2C}{\pi}\sum_{n\ge1}\frac{1}{2n-1}\sin\left[\frac{(2n-1)\pi}{T}x\right].$$

(2) 计算函数 $f(x) = x\cos x$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, 的 Fourier 级数. 此时 $T = \pi/2$ 和 $a_n = 0$, 从而得到

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x\cos x \cdot \sin(2nx)dx = \frac{(-1)^{n-1}}{\pi}\frac{16n}{(4n^2-1)^2}.$$

故

$$x\cos x \sim \sum_{n\ge1}(-1)^{n-1}\frac{16n}{\pi(4n^2-1)^2}\sin(2nx).$$

16.1.5 任意区间上函数的 Fourier 展开

现在假设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 定义

$$T := \frac{b-a}{2}, \quad \widetilde{f}(x) := f\left(x + \frac{b+a}{2}\right), \quad -T \le x \le T.$$

则得到 $[-T,T]$ 上的可积函数 $\widetilde{f}(x)$. 利用 (16.1.9) 得到

$$\widetilde{f}(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n\ge1}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi}{T}x\right)\right]$$

其中

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\widetilde{f}(x)\cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right)dx = \frac{2}{b-a}\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f\left(x+\frac{b+a}{2}\right)\cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)dx \\ &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(y)\cos\left(\frac{2n\pi y}{b-a} - \frac{b+a}{b-a}n\pi\right)dy, \quad y := x + \frac{b+a}{2} \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\widetilde{f}(x)\sin\left(\frac{n\pi}{T}x\right)dx = \frac{2}{b-a}\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f\left(x+\frac{b+a}{2}\right)\sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)dx \\ &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(y)\sin\left(\frac{2n\pi y}{b-a}-\frac{b+a}{b-a}n\pi\right)dy, \quad y := x+\frac{b+a}{2} \end{aligned}$$

暂时引入记号

$$\alpha_n := \frac{2}{b-a}\int_a^b f(y)\cos\left(\frac{2n\pi y}{b-a}\right)dy, \quad \beta_n := \frac{2}{b-a}\int_a^b f(y)\sin\left(\frac{2n\pi y}{b-a}\right)dy.$$

则得到

$$a_n = \cos\left(\frac{b+a}{b-a}n\pi\right)\alpha_n + \sin\left(\frac{b+a}{b-a}n\pi\right)\beta_n,$$

和

$$b_n = \cos\left(\frac{b+a}{b-a}n\pi\right)\beta_n - \sin\left(\frac{b+a}{b-a}n\pi\right)\alpha_n$$

从而得到

$$f(y) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n\ge1}\left[\alpha_n\cos\left(\frac{2n\pi y}{b-a}\right) + \beta_n\sin\left(\frac{2n\pi y}{b-a}\right)\right].$$

即推出如下 Fourier 级数展开

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n\ge1}\left[a_n\cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) + b_n\sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)\right] \tag{16.1.11}$$

这里

$$a_n := \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)dx, \tag{16.1.12}$$

$$b_n := \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)dx. \tag{16.1.13}$$

特别地, 如果 $f \in R([0, 2\pi])$ 则得到

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n\ge1}[a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)] \tag{16.1.14}$$

这里

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx. \tag{16.1.15}$$

例 16.5

求函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1, \\ 1, & 1 < x < 2, \\ 3-x, & 2 \le x \le 3, \end{cases}$$

的 Fourier 级数.

解: 在 (16.1.11) 中取 $a=0$ 和 $b=3$ 得到

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n\ge1}\left[a_n\cos\frac{2n\pi x}{3} + b_n\sin\frac{2n\pi x}{3}\right]$$

这里

$$a_n=\frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\cos\frac{2n\pi x}{3}dx,\quad b_n=\frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\sin\frac{2n\pi x}{3}dx.$$

从而得到

$$a_0 = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)dx = \frac{2}{3}\cdot 2 = \frac{4}{3},$$

和

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{3}\left[\int_0^1 x\cos\frac{2n\pi x}{3}dx+\int_1^2\cos\frac{2n\pi x}{3}dx+\int_2^3(3-x)\cos\frac{2n\pi x}{3}dx\right]\\
&= \frac{2}{3}\left[\left(\int_1^2+3\int_2^3\right)\cos\frac{2n\pi x}{3}dx+\left(\int_0^1-\int_2^3\right)x\cos\frac{2n\pi x}{3}dx\right]\\
&= \frac{1}{n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{3}\left[\Big|_1^2+3\Big|_2^3\right]+\frac{1}{n\pi}\left[x\sin\frac{2n\pi x}{3}+\frac{3}{2n\pi}\cos\frac{2n\pi x}{3}\right]\left[\Big|_0^1-\Big|_2^3\right]\\
&= \frac{1}{n\pi}\left[\sin\frac{4n\pi}{3}-\sin\frac{2n\pi}{3}-3\sin\frac{4n\pi}{3}\right]+\frac{1}{n\pi}\left[\sin\frac{2n\pi}{3}+\frac{3}{2n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3}\right.\\
&\quad \left.-\frac{3}{2n\pi}-\frac{3}{2n\pi}+2\sin\frac{4n\pi}{3}+\frac{3}{2n\pi}\cos\frac{4n\pi}{3}\right]\\
&= \frac{3}{2n^2\pi^2}\left[\cos\frac{4n\pi}{3}+\cos\frac{2n\pi}{3}-2\right].
\end{aligned}$$

类似地得到

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{3}\left[\left(\int_1^2+3\int_2^3\right)\sin\frac{2n\pi x}{3}dx+\left(\int_0^1-\int_2^3\right)x\sin\frac{2n\pi x}{3}dx\right]\\
&= \frac{-1}{n\pi}\cos\frac{2n\pi x}{3}\left[\Big|_1^2+3\Big|_2^3\right]+\frac{-1}{n\pi}\left[x\cos\frac{2n\pi x}{3}-\frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{3}\right]\left[\Big|_0^1-\Big|_2^3\right]\\
&= \frac{-1}{n\pi}\left[\cos\frac{4n\pi}{3}-\cos\frac{2n\pi}{3}+3-3\cos\frac{4n\pi}{3}\right]\\
&\quad +\frac{-1}{n\pi}\left[\cos\frac{2n\pi}{3}-\frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3}-3+2\cos\frac{4n\pi}{3}-\frac{3}{2n\pi}\sin\frac{4n\pi}{3}\right]\\
&= \frac{3}{2n^2\pi^2}\left[\sin\frac{4n\pi}{3}+\sin\frac{2n\pi}{3}\right] = 0.
\end{aligned}$$

因此最后得到

$$f(x)\sim\frac{2}{3}+\sum_{n\geq 1}\frac{3}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n\cos\frac{n\pi}{3}-1\right]\cos\frac{2n\pi x}{3},\quad 0\leq x\leq 3.$$

♠

16.2 Fourier 级数的收敛判别法

如果函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上时可积的并记 $L:=b-a$, 则 f 的**第 n 个 Fourier 系数 (n-th Fourier coefficient)** 定义为

$$\hat{f}(n):=\frac{1}{L}\int_a^b f(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}nx/L}dx,\quad n\in\mathbb{Z}. \tag{16.2.1}$$

此时 f 的 Fourier 级数可写成 (利用 (16.1.11))

$$f(x) \sim \sum_{n\geq 1} \hat{f}(n) e^{2\pi\sqrt{-1}nx/L}. \tag{16.2.2}$$

比如, 如果 $f \in R([-\pi,\pi])$ 则其第 n 个 Fourier 系数为

$$\hat{f}(n) = A_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-\sqrt{-1}nx}dx, \quad n \in \mathbb{Z},$$

从而 f 的 Fourier 级数为

$$f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n e^{\sqrt{-1}nx}.$$

如果 $f \in R([0,2\pi])$ 则得到

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-\sqrt{-1}nx}dx \quad \text{and} \quad f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{\sqrt{-1}nx}. \tag{16.2.3}$$

若 f 是定义在圆 $\mathbb{S}^1$ 上的函数, 则我们可以把 f 看成是 $\mathbb{R}$ 上的 2π- 周期函数. 此时我们可以把函数 f 限制到任意长度为 2π 的区间上, 例如 $[0,2\pi]$ 或 $[-\pi,\pi]$, 从而计算出其 Fourier 系数. 观察到函数 f 的周期性表明计算得到的积分和起初选择的区间无关. 这就说明了圆上函数 f 的 Fourier 系数是有定义的.

如果 $g \in R([0,1])$ 则

$$\hat{g}(n) = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}nx}dx \quad 和 \quad g(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{g}(n)e^{2\pi\sqrt{-1}nx}. \tag{16.2.4}$$

这样只要 $f \in R([0,2\pi])$, 就有 $g(x) := f(2\pi x) \in R([0,1])$ 从而得到 f 的第 n 个 Fourier 系数等于 g 的第 n 个 Fourier 系数.

所谓的**三角级数 (trigonometric series)** 是指如下的形式和

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi\sqrt{-1}nx/L}$$

这里 $c_n \in \mathbb{C}$. 如果三角级数中只包含有限多个非零项, 即 $c_n = 0$ 对任何充分大的 $|n|$ 都成立, 此时称为**三角多项式 (trigonometric polynomial)**; 这个多项式的**度 (degree)** 定义为满足 $c_n \neq 0$ 的最大 $|n|$.

定义在 $[a,b]$ 上的函数 f 的 Fourier 级数的**第 N 个部分和 (N-th partial sum)** 是三角多项式且定义为

$$S_N(f)(x) := \sum_{-N\leq n\leq N} \hat{f}(n)e^{2\pi\sqrt{-1}nx/L}, \quad L := b-a. \tag{16.2.5}$$

注意到上述和是对称的, 这是因为 n 从 $-N$ 取到 N. 此时一个基本和自然的问题是

问题: *在什么意义下 $S_N(f)$ 收敛到 f, $N \to \infty$?*

我们首先要问 $S_N(f)$ 是否逐点收敛到 f. 即, 是否对每个 x 极限

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(x) = x$$

成立. 显然我们不可能期望这个结果对每个 x 都是对的, 这是因为我们可以改变可积函数在一点的值而不改变其 Fourier 系数. 如果 f 是连续的和周期的, 此时 $S_N(f)(x)$ 是否逐点

收敛到 $f(x)$. 在很长时期内, 人们总是认为加上连续性和周期性, 逐点收敛应该是正确的. 但令人吃惊的是Du Bois-Reymond 在 1873 年证明了存在一个连续函数其 Fourier 级数在某点是发散的. 当 f 是连续可微时, 我们将看到此时 f 的 Fourier 级数一致收敛到 f.

当函数 f 是可积时, 我们将证明此时部分和 $S_N(f)$ 在 L^2 意义下收敛到 f, 即

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|S_N(f)(x)-f(x)|^2\,dx \to 0, \quad N\to+\infty.$$

在 1913 年, Lusin[3] 提出了他著名的猜想: 如果 f 可积, 则除了一个零测度集外, f 的 Fourier 级数逐点收敛到 f. 这个猜想在 1966 年被Carleson[4] 所解决.

例 16.6. (Dirichlet 核)

第 N 个 Dirichlet 核 (N-th Dirichlet kernel) 定义为

$$D_N(x) := \sum_{-N\le n\le N} e^{\sqrt{-1}nx}, \quad -\pi\le x\le\pi. \tag{16.2.6}$$

若令 $\omega := e^{\sqrt{-1}x}$ 则得到

$$D_N(x) = \sum_{0\le n\le N}\omega^n + \sum_{-N\le n\le -1}\omega^n = \frac{1-\omega^{N+1}}{1-\omega} + \frac{\omega^{-N}-1}{1-\omega} = \frac{\omega^{-N}-\omega^{N+1}}{1-\omega}.$$

故

$$D_N(x) = \frac{\sin[(N+\frac{1}{2})x]}{\sin(x/2)}. \tag{16.2.7}$$

♠

例 16.7. (Poisson 核)

Poisson 核 (Poisson kernel) 定义为

$$P_r(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{\sqrt{-1}nx}, \quad -\pi\le x\le\pi, \quad 0\le r<1. \tag{16.2.8}$$

注意到上述函数项级数是绝对和一致收敛的. 若令 $\omega = re^{\sqrt{-1}x}$ 我们得到

$$P_r(x) = \sum_{n\ge 0}\omega^n + \sum_{n\ge 1}\overline{\omega}^n = \frac{1}{1-\omega} + \frac{\overline{\omega}}{1-\overline{\omega}} = \frac{1-|\omega|^2}{|1-\omega|^2}.$$

即

$$P_r(x) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}. \tag{16.2.9}$$

♠

例 16.8. (Fejér 核)

第 N 个 Fejér 核 (N-th Fejér kernel) 定义为

$$F_N(x) := \frac{1}{N}\sum_{0\le n\le N-1} D_n(x), \quad -\pi\le x\le\pi. \tag{16.2.10}$$

---

[3] Nikolai Nikolaevich Lusin, 1883 年 12 月 9 日–1950 年 1 月 28 日, 今俄罗斯西伯利亚地区伊尔库茨克州伊尔库茨克市人, 原苏联数学家. 他的第一个重要结果是在 1912 年构造了一个几乎处处发散的三角级数其系数单调收敛到零, 这就给出了Fatou一个猜想的反例. 几乎同时, 他证明了实分析中的, 现在称之为的, Lusin 定理. 在他 1915 年的博士论文《Integral and trigonometric series》中提出了一系列问题, 其中一个问题在 1966 年被Carleson所解决.

[4] Lennart Carleson, 1928 年 3 月 18 日– , 今瑞典斯特格摩尔人, 瑞典数学家. 1992 年获得 Wolf 奖, 2006 年获得 Abel 奖. 最著名的工作是在 1966 年证明了 Lusin 猜想, 1974 年解决了拟共形映照中的延拓问题, 1991 年和Benedicks 合作证明了 Hénon 映射中存在奇异吸引子.

若令 $\omega = e^{\sqrt{-1}x}$ 我们得到

$$F_N = \frac{1}{N}\sum_{0\le n\le N-1}\frac{\omega^{-n}-\omega^{n+1}}{1-\omega} = \frac{1}{N}\frac{1}{1-\omega}\left[\frac{1-\omega^{-N}}{1-\omega} - \frac{\omega(1-\omega^N)}{1-\omega}\right].$$

即

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}, \quad x \in [\pi, \pi]. \tag{16.2.11}$$

16.2.1 Fourier 级数的唯一性

假设 f 和 g 是定义在圆 $\mathbb{S}^1$ 上的可积函数且有相同的 Fourier 系数 $\hat{f}(n) = \hat{g}(n), n \in \mathbb{Z}$. 从而 $f-g$ 的 Fourier 系数为 0.

定理 16.1

假设 $f \in R(\mathbb{S}^1)$ 且 $\hat{f}(n) = 0$ 对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 都成立. 如果 f 在 x_0 处连续, 则 $f(x_0) = 0$.

证: 假设定理对任意实值函数都成立. 下证对任意复值函数 f 也成立. 此时记

$$f(x) = u(x) + \sqrt{-1}v(x)$$

这里 u 和 v 都是实值函数. 如果定义 $\bar{f}(x) := \overline{f(x)}$, 则

$$u(x) = \frac{f(x)+\bar{f}(x)}{2}, \quad v(x) = \frac{f(x)-\bar{f}(x)}{2\sqrt{-1}},$$

并且由于 $\hat{\bar{f}}(x) = \overline{\hat{f}(-n)}$, 我们得到 u 和 v 的 Fourier 系数都消失, 故在连续点处有 $f=0$.

不失一般性不妨假设 f 是定义在 $[-\pi,\pi]$ 上的实值函数, $x_0 = 0$, 且 $f(0) > 0$. 因为 f 在 0 处连续, 所以我们可以选择 $\delta \in (0, \pi/2]$ 使得 $f(x) > f(0)/2$ 只要 $|x| < \delta$ 成立. 令

$$p(x) := \epsilon + \cos x$$

这里选择 $\epsilon > 0$ 使得不等式 $|p(x)| < 1 - \frac{\epsilon}{2}$ 对任何 $\delta \le |x| \le \pi$ 都成立. 选择 $\eta \in (0,\delta)$ 使得 $p(x) > 1 + \frac{\epsilon}{2}$ 对任何 $|x| < \eta$ 都成立. 引入

$$p_k(x) := [p(x)]^k, \quad B := \max_{|x|\le\pi}|f(x)|.$$

由于 $\hat{f}(n) = 0$ 对任何 $n \in \mathbb{Z}$ 都成立, 故得到

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)p_k(x)\,dx$$

对任意 $k \in \mathbb{N}$ 都成立. 另一方面

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)p_k(x)\,dx &= \int_{|x|<\eta} f(x)p_k(x)\,dx + \int_{\eta\le|x|<\delta} f(x)p_k(x)\,dx \\ &\quad + \int_{|x|\ge\delta} f(x)p_k(x)\,dx \ \ge\ 2\eta\frac{f(0)}{2}\left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)^k + 0 \\ &\quad - \left|\int_{|x|\ge\delta} f(x)p_k(x)\,dx\right| \ \ge\ \eta f(0)\left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)^k - 2\pi B\left(1-\frac{\epsilon}{2}\right)^k.\end{aligned}$$

若令 $k \to \infty$ 就得到矛盾! 因此必有 $f(0) = 0$. □

推论 16.1

如果 $f \in C(\mathbb{S}^1)$ 且 $\hat{f}(n) = 0$ 对任何 $n \in \mathbb{N}$ 都成立, 则 $f \equiv 0$.

推论 16.2

如果 $f \in C(\mathbb{S}^1)$ 且 f 的 Fourier 级数是绝对收敛的, 则 f 的 Fourier 级数一致收敛到 f, 即

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(x) = f(x)$$

关于 x 是一致收敛的.

证: 因为 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|$ 是绝对收敛的, 所以函数

$$g(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(x)e^{\sqrt{-1}nx}$$

在 $\mathbb{S}^1$ 上是连续的. 又因为 g 的 Fourier 系数就是 $\hat{f}(n)$, 所以根据**推论 16.1** 可知在 $\mathbb{S}^1$ 上必有 $f \equiv g$. □

如果可以提高 f 的光滑性, 我们可以把**推论 16.2** 中的假设条件 "f 的 Fourier 级数是绝对收敛" 去掉.

推论 16.3

如果 $f \in C^k(\mathbb{S}^1)$ $(k \geq 2)$, 则 $\hat{f}(n) = O(1/|n|^k)$ 当 $|n| \to \infty$ 时. 特别地, f 的 Fourier 级数是绝对和一致收敛到 f.

证: 不妨假设 $k = 2$ 并对 $n \neq 0$ 利用分部积分法. 计算

$$\begin{aligned}
2\pi\hat{f}(n) &= \int_0^{2\pi} f(x)e^{-\sqrt{-1}nx}dx \\
&= \left[f(x)\frac{-e^{-\sqrt{-1}nx}}{\sqrt{-1}n}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{\sqrt{-1}n}\int_0^{2\pi} f'(x)e^{-\sqrt{-1}nx}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{-1}n}\int_0^{2\pi} f'(x)e^{-\sqrt{-1}nx}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{-1}n}\left[f'(x)\frac{-e^{-\sqrt{-1}nx}}{\sqrt{-1}n}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{(\sqrt{-1}n)^2}\int_0^{2\pi} f''(x)e^{-\sqrt{-1}nx}dx \\
&= \frac{-1}{n^2}\int_0^{2\pi} f''(x)e^{-\sqrt{-1}nx}dx.
\end{aligned}$$

如果 $B := \max_{x\in\mathbb{S}^1} |f(x)|$, 则 $|\hat{f}(n)| \leq C/2\pi n^2$. 即 $\hat{f}(n) = O(1/n^2)$. □

16.2.2 卷积

给定 $\mathbb{R}$ 上以 2π 为周期的可积函数 f, g, 定义它们的**卷积 (convolution)** $f * g$ 为

$$f * g(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)\,dy, \quad x \in [-\pi, \pi]. \tag{16.2.12}$$

根据定义 (16.2.12) 显然有 $f*g=g*f$. 观察到

$$
\begin{aligned}
(f*D_N)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left(\sum_{-N\le n\le N} e^{\sqrt{-1}n(x-y)}\right)dy\\
= \sum_{-N\le n\le N}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{\sqrt{-1}n(x-y)}\right)dy &= \sum_{-N\le n\le N}\hat{f}(n)e^{\sqrt{-1}nx}=S_N(f)(x).
\end{aligned}
$$

从而得到

$$
f*D_N=S_N(f). \tag{16.2.13}
$$

命题 16.1. (卷积基本性质)

假设 f,g,h 都是以 2π 为周期的可积函数. 则

(*i*) $f*(g+h)=f*g+f*h$.

(*ii*) $(cf)*g=c(f*g)=f*(cg), c\in\mathbb{C}$.

(*iii*) $(f*g)*h=f*(g*h)$.

(*iv*) $f*g$ 是连续的.

(*v*) $\widehat{f*g}(n)=\hat{f}(n)\hat{g}(n)$.

证: 我们只给出 (iv) 和 (v) 的证明. 首先假设 f,g 都是连续的. 对任何 $n\in\mathbb{Z}$ 有

$$
\begin{aligned}
\widehat{f*g}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f*g)(x)e^{-\sqrt{-1}nx}dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy\right]e^{-\sqrt{-1}nx}dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-\sqrt{-1}ny}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x-y)e^{-\sqrt{-1}n(x-y)}dx\right]dy\\
&= \hat{f}(n)\hat{g}(n).
\end{aligned}
$$

由于 g 是连续周期函数, 因此 g 在 $\mathbb{R}$ 上是一致连续的. 故对任意 $\epsilon>0$ 存在正数 $\delta>0$ 满足 $|g(x)-g(y)|<\epsilon$ 只要 $|x-y|<\delta$. 利用恒等式

$$
(f*g)(x_1)-(f*g)(x_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)[g(x_1-y)-g(x_2-y)]dy,
$$

得到

$$
\begin{aligned}
|(f*g)(x_1)-(f*g)(x_2)| &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(y)||g(x_1-y)-g(x_2-y)|dy\\
&\le \frac{\epsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(y)|dy \le \epsilon\cdot\max_{[-\pi,\pi]}|f|,
\end{aligned}
$$

只要 $|x_1-x_2|<\delta$.

一般地, 当 f,g 仅是可积时, 我们要使用如下引理来证明 (iv).

引理 16.1

假设 f 在圆上可积且满足 $\sup_{[-\pi,\pi]}|f|\le B$. 则存在圆上的连续函数列 $\{f_k(x)\}_{k\ge1}$ 满足

$$
\sup_{[-\pi,\pi]}|f_k|\le B \quad 和 \quad \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f_k(x)|dx\to 0, \quad 当\ k\to+\infty.
$$

证: 假设 f 是实值的. 给定 $\epsilon > 0$ 我们选择区间 $[-\pi, \pi]$ 的一个划分

$$-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = \pi$$

使得 f 的 Darboux 上和与 Darboux 下和的差最多是 ϵ. 令 f^* 是如下定义的阶梯函数

$$f^*(x) := \sup_{y \in [x_{j-1}, x_j]} f(y), \quad \text{如果 } x \in [x_{j-1}, x_j) \text{ 和 } 1 \le j \le N.$$

根据构造得到 $|f^*| \le B$ 和

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f^*(x) - f(x)| dx = \int_{-\pi}^{\pi} [f^*(x) - f(x)] dx < \epsilon.$$

现在我们对 f^* 做些修改使得修改后的函数是连续周期函数. 对充分小的 $\delta > 0$, 当 x 和分割点 $x_0, \cdots, x_N$ 的距离 $\ge \delta$, 我们定义 $\tilde{f}(x) := f^*(x)$. 在每个 x_j 的 δ-邻域内, $j = 1, \cdots, N-1$, 定义 $\tilde{f}(x)$ 是线性函数且满足 $\tilde{f}(x_j \pm \delta) = f^*(x_j \pm \delta)$. 在 $x_0 = -\pi$ 附近, $\tilde{f}$ 是线性的且满足 $\tilde{f}(-\pi) = 0$ 和 $\tilde{f}(-\pi + \delta) = f^*(-\pi + \delta)$. 同样在 $x_N = \pi$ 附近, $\tilde{f}$ 是线性的且满足 $\tilde{f}(\pi) = 0$ 和 $\tilde{f}(\pi - \delta) = f^*(\pi - \delta)$. 因为 $\tilde{f}(-\pi) = \tilde{f}(\pi)$, 我们可以把 $\tilde{f}$ 延拓成 $\mathbb{R}$ 上的连续函数和以 2π 为周期的函数. 另外, $|\tilde{f}| \le B$ 且 $\tilde{f}$ 与 f^* 仅在 N 个长度为 2δ 的区间上不同. 从而得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f^*(x) - \tilde{f}(x)| dx \le 4BN\delta.$$

故

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(x) - f(x)| dx \le \int_{-\pi}^{\pi} |f^*(x) - f(x)| dx + \int_{-\pi}^{\pi} |f^*(x) - \tilde{f}(x)| dx < 2\epsilon$$

只要 $\delta \in (0, \epsilon/4BN)$. 当 $2\epsilon = 1/k$ 时记 $f_k := \tilde{f}$ 如上构造, 则函数列 $\{f_k\}_{k \ge 1}$ 满足引理中的性质. □

应用**引理 16.1** 到 f 和 g, 我们得到 $\mathbb{S}^1$ 上的连续函数列 $\{f_k\}_{k\ge1}$ 和 $\{g_k\}_{k\ge1}$ 满足

$$\sup_{[-\pi,\pi]} |f_k| \le \sup_{[-\pi,\pi]} |f|, \quad \sup_{[-\pi,\pi]} |g_k| \le \sup_{[-\pi,\pi]} |g|$$

和

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_k(x)| dx \to 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - g_k(x)| dx \to 0, \quad k \to +\infty.$$

根据

$$f * g - f_k * g_k = (f - f_k) * g_k + f_k * (g - g_k),$$

和

$$\begin{aligned} |[(f - f_k) * g](x)| &\le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y) - f_k(x-y)||g(y)| dy \\ &\le \frac{1}{2\pi} \sup_{[-\pi,\pi]} |g| \int_{-\pi}^{\pi} |f(y) - f_k(y)| dy \ \to \ 0, \quad k \to +\infty, \end{aligned}$$

我们推出 $(f - f_k) * g \to 0$ 关于 x 是一致收敛的. 类似地, $f_k * (g - g_k) \to 0$ 一致地, 从而 $f_k * g_k$ 一致收敛到 $f * g$. 因为每个 $f_k * g_k$ 都是连续的, 所以 $f * g$ 也是连续的.

对每个固定的 $n \in \mathbb{Z}$, 必有 $\widehat{f_k * g_k}(n) \to \widehat{f * g}(n)$, 这是因为 $f_k * g_k$ 一致收敛到 $f * g$. 另一方面, $\widehat{f_k * g_k}(n) = \hat{f}_k(n)\hat{g}_k(n)$. 为了证明 $\widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$, 我们必须证明

$\hat{f}_k(n) \to \hat{f}(n)$ 和 $\hat{g}_k(n) \to \hat{g}(n)$, $k \to \infty$. 因为

$$|\hat{f}(n) - \hat{f}_k(n)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - f_k(x)]e^{-\sqrt{-1}nx}dx\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x) - f_k(x)|dx,$$

我们得到 $\hat{f}_k(n) \to \hat{f}(n)$, $n \to \infty$. □

练习 16.1

证明**性质 16.1** 中的其它条目.

16.2.3 好核

圆上的核列 $\{K_n(x)\}_{n\ge1}$ 称为**好核列 (family of good kernels)** 如果满足如下性质:

(a) 对所有 $n \ge 1$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(x)\,dx = 1.$$

(b) 存在 $M > 0$ 使得对任意 $n \ge 1$ 都有

$$\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(x)|dx \le M$$

(c) 对每个 $\delta > 0$, 有

$$\int_{\delta\le|x|\le\pi}|K_n(x)|dx \to 0, \quad n \to +\infty.$$

例 16.9

令 $D_N(x)$ 是第 N 个 Dirichlet 核. 则 $\{D_N\}_{N\ge1}$ 不是一个好核列. 对任意 $N \ge 1$ 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(x)\,dx &= \sum_{-N\le k\le N,\ k\ne0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\sqrt{-1}kx}dx + 1\\ &= \sum_{-N\le k\le N,\ k\ne0}\frac{\sin(k\pi)}{k\pi} + 1 \;=\; 1.\end{aligned}$$

令

$$L_N := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_N(x)|dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin[(N+\frac{1}{2})x]}{\sin\frac{x}{2}}\right|dx.$$

对任意 $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, 我们有 $\frac{2}{\pi}x \le \sin x \le x$. 因此

$$\begin{aligned}L_N &\ge \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin[(N+\frac{1}{2})x]|}{|x|}dx \;=\; \frac{2}{\pi}\int_0^{N\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin\theta|}{\theta}d\theta\\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{0\le k\le N-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin\theta|}{\theta}d\theta + \int_{N\pi}^{N\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin\theta|}{\theta}d\theta\\ &\ge \frac{2}{\pi}\sum_{0\le k\le N-1}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin\theta|d\theta\\ &\quad + \frac{2}{\pi(2N+1)}\int_{N\pi}^{N\pi+\frac{\pi}{2}}|\sin\theta|d\theta\\ &= \frac{4}{\pi^2}\sum_{1\le k\le N}\frac{1}{k} + \frac{4}{\pi^2}\frac{\pi}{2N+1}.\end{aligned}$$

因为数列 $\{a_N\}_{N\ge1}$, 其中 $a_N=\sum_{1\le k\le N}\frac{1}{k}-\ln N$, 是单调递减的, 所以

$$\sum_{1\le k\le N}\ge \ln N+\gamma,$$

这里 γ 是 Euler 常数. 作为推论得到

$$L_N\ge\frac{4}{\pi^2}\ln N+\frac{4}{\pi^2}\left(\gamma+\frac{\pi}{2N+1}\right). \tag{16.2.14}$$

故 $\{D_N\}_{N\ge1}$ 不是好核列.

练习 16.2

试着证明 $L_N\le a\ln N+b_N$ 并求出 a 和 b_N.

回顾第 **14.4** 节中的记号和定义. 考虑复级数 $c_0+c_1+c_2+\cdots=\sum_{k\ge0}c_k$. 定义第 n 个部分和 s_n 为

$$s_n:=\sum_{0\le k\le n}c_k$$

并称该级数收敛到 s 如果 $\lim_{n\to\infty}s_n=s$. 数列 $\{s_k\}_{k\ge0}$ 的**第 N 个 Cesàro 平均 (N-th Cesàro mean)** 或级数 $\sum_{k\ge0}c_k$ 的**第 N 个 Cesàro 和 (N-th Cesàro sum)** 定义为

$$\sigma_N:=\frac{1}{N}\sum_{0\le k\le N-1}s_k. \tag{16.2.15}$$

称级数 $\sum_{k\ge0}c_k$ 是 **Cesàro 可求和 (Cesàro summable)** 到 σ 如果 σ_N 收敛到 σ 当 $N\to\infty$ 时.

(i) 级数 $\sum_{k\ge0}(-1)^k$ 是 Cesàro 可求和到 $1/2$.

(ii) 如果级数 $\sum_{k\ge0}s_k$ 收敛到 s, 则其是 Casàro 可求和到同一极限 s.

(iii) **(Tauber 定理)** 如果级数 $\sum_{n\ge0}c_n$ 是 Cesàro 可求和到 σ 且 $c_n=o(1/n)$, 则 $\sum_{n\ge0}c_n$ 收敛到 σ.

练习 16.3

证明上面的 Tauber 定理.

如果 $f\in R(\mathbf{S}^1)$, 则

$$S_N(f)=f*D_N.$$

我们可以定义 Fourier 级数的**第 N 个 Cesàro 平均 (N-th Cesàro mean)**

$$\sigma_N(f):=\frac{S_0(f)+S_1(f)+\cdots+S_{N-1}(f)}{N}=f*F_N, \tag{16.2.16}$$

这里 $F_N(x)$ 是**第 N 个 Fejér 核 (N-th Fejér kernel)**

$$F_N(x)=\frac{D_0(x)+D_1(x)+\cdots+D_{N-1}(x)}{N}=\frac{1}{N}\frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}. \tag{16.2.17}$$

练习 16.4

证明 $\{F_N\}_{N\ge1}$ 是好核列.

复级数 $\sum_{k\ge0}c_k$ 称为 **Abel 可求和的 (Abel summable)** 到 s 如果对每个 $r\in[0,1)$ 幂

级数

$$A(r) := \sum_{k\geq 0} c_k r^k$$

都收敛, 且 $\lim_{r\to 1} A(r) = s$. 把 $A(r)$ 称为级数 $\sum_{k\geq 0} c_k$ 的 **Abel 平均 (Abel means)**.

(i) 级数 $\sum_{k\geq 0}(-1)^k(k+1)$ 是 Abel 可求和到 $1/4$.

(ii) 如果级数是 Cesàro 可求和到 σ 则其也是 Abel 可求和到 σ.

(iii) **(Tauber 定理)** 如果级数 $\sum_{n\geq 0} c_n$ 是 Abel 可求和到 σ 且 $c_n = o(1/n)$, 则 $\sum_{n\geq 0} c_n$ 收敛到 σ.

练习 16.5

证明以上的 Tauber 定理. (**提示:** 对 $A(r) = \sum_{n\geq 0} c_n r^n$ 和 $0 < r < 1$, 我们有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{0\leq n\leq N} c_n - f(x)\right| &= \left|\sum_{1\leq n\leq N} c_n(1-r^n) - \sum_{n\geq N+1} c_n r^n\right| \\ &\leq (1-x)\sum_{1\leq n\leq N}|nc_n| + \frac{1}{N(1-x)}\sup_{n>N}|nc_n|.\end{aligned}$$

令 $\sum_{0\leq n\leq N} c_n = s_N$ 和 $x = 1-1/N$ 得到

$$\left|s_N - A\left(1-\frac{1}{N}\right)\right| \leq \frac{1}{N}\sum_{1\leq n\leq N}|nc_n| + \sup_{n>N}|nc_n|.$$

如果 $nc_n \to 0$ 和 $A(r) \to s$, 就有 $s_N \to s$.)

Tauber 在 1897 年导出了他的“第二定理”, 即给出了 Abel 可求和级数是收敛的充要条件.

定理 16.2. (Tauber, 1897)

Abel 可求和级数 $\sum_{n\geq 0} c_n$ 是收敛的 $\Longleftrightarrow$

$$\frac{1}{n}\sum_{1\leq k\leq n} ka_k = s_n - \frac{1}{n}\sum_{0\leq k\leq n-1} s_k \to 0, \quad n\to+\infty.$$

练习 16.6

本练习来证明如下关系:

$$\text{收敛} \Longrightarrow \text{Cesàro 可求和} \Longrightarrow \text{Abel 可求和}, \tag{16.2.18}$$

但是反之都不对, 比如考察级数 $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$ 和 $\sum_{n\geq 0}(-1)^{n-1}n$.

如果 $f \in R(\mathbb{S}^1)$ 且 $f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n e^{\sqrt{-1}nx}$, 则我们来定义 f 的 **Abel 平均 (Abel means)** 为

$$A_r(f)(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} A_n e^{\sqrt{-1}nx}. \tag{16.2.19}$$

由于 A_n 是一致有界的, 因此对每个 $r \in [0,1)$ 函数项级数 $A_r(f)$ 都是绝对一致收敛的. 注意到

$$A_r(f) = f * P_r \tag{16.2.20}$$

这里 $P_r(x)$ 是 **Poisson 核 (Poisson kernel)** 并根据如下定义

$$P_r(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{\sqrt{-1}nx} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}, \quad r\in[0,1). \tag{16.2.21}$$

练习 16.7

证明 $\{P_r\}_{r\in[0,1)}$ 是好核列. 即证明

(a) 对每个 $r\in[0,1)$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)dx = 1.$$

(b) 存在 $M>0$ 使得对所有 $r\in[0,1)$ 都有

$$\int_{-\pi}^{\pi} |P_r(x)|dx \le M$$

(c) 对每个 $\delta>0$ 有

$$\int_{\delta\le|x|\le\pi} |P_r(x)|dx \to 0, \quad r\to 1.$$

定理 16.3

假设 $\{K_n\}_{n\ge1}$ 是好核列且 $f\in R(\mathbb{S}^1)$. 则

$$\lim_{n\to\infty}(f*K_n)(x) = f(x)$$

只要 f 在 x 处连续. 特别地, 如果 f 是处处连续, 则上述极限是一致收敛的.

证: 根据好核的定义得到

$$\begin{aligned} f*K_n(x)-f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(y)K_n(x-y)-f(x)K_n(y)]dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(y)[f(x-y)-f(x)]dy \end{aligned}$$

对任何 x 都成立. f 在 x 处的连续性推出对任意 $\epsilon>0$ 存在正数 $\delta>0$ 满足 $|f(x-y)-f(x)|<\epsilon$ 只要 $|y|<\delta$. 因此

$$\begin{aligned} |f*K_n(x)-f(x)| &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(y)||f(x-y)-f(x)|dy \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\le|y|\le\pi}|K_n(y)||f(x-y)-f(x)|dy + \frac{1}{2\pi}\int_{|y|<\delta}|K_n(y)||f(x-y)-f(x)|dy \\ &\le \frac{\epsilon}{2\pi}\int_{|y|<\delta}|K_n(y)|dy + \frac{1}{2\pi}\cdot 2\max_{[-\pi,\pi]}|f|\cdot\int_{\delta\le|y|\le\pi}|K_n(y)|dy \\ &\le \frac{\epsilon}{2\pi}M + \frac{1}{\pi}\max_{[-\pi,\pi]}|f|\cdot\int_{\delta\le|y|\le\pi}|K_n(y)|dy. \end{aligned}$$

令 $n\to\infty$ 得到

$$\limsup_{n\to\infty}|f*K_n(x)-f(x)| \le \frac{\epsilon M}{2\pi},$$

即 $f*K_n(x)\to f(x)$ 只要 f 在 x 处连续. $\square$

推论 16.4

(1) 如果 f 在 $\mathbb{S}^1$ 上可积, 则 f 的 Fourier 级数在 f 的每个连续点上是 Cesro 可求和到 f. 更进一步, 如果 f 在 $\mathbb{S}^1$ 上是连续的则 f 的 Fourier 级数是一致 Cesro 可求和到 f.

(2) 如果 f 在 $\mathbb{S}^1$ 上可积, 则 f 的 Fourier 级数在 f 的每个连续点上是 Abel 可求和到 f. 更进一步, 如果 f 在 $\mathbb{S}^1$ 上是连续的则 f 的 Fourier 级数是一致 Abel 可求和到 f. ♡

在**练习 16.3** 和**练习 16.5** 我们假设 $nc_n \to 0$. Hardy 问 Tauber 定理中上述条件可否减弱为数列 $\{nc_n\}_{n\geq 1}$ 是有界的. 根据**练习 16.5** 中的提示, 我们看到数列 $\{nc_n\}_{n\geq 0}$ 的有界性并结合级数 $\sum_{n\geq 0} c_n$ 的 Abel 可求和, 推出数列 $\{s_N\}_{N\geq 0}$ 是有界的.

定理 16.4. (Hardy-Landau, 1910)

如果级数 $\sum_{n\geq 0} c_n$ 是 Cesro 可求的且

- (**Hardy**) 要么 $|nc_n| \leq C$, 或者
- (**Landau**) 要么 $nc_n \geq -C$,

则级数 $\sum_{n\geq 0} c_n$ 收敛. ♡

证: 下面证明是属于Kloosterman (1940). 不妨假设 c_n 是实数并记

$$s_n = c_0 + \cdots + c_n =: c_n^{(-1)}, \quad c_n^{(-2)} := c_0^{(-1)} + \cdots + c_n^{(-1)}.$$

对每个整数 $h > 0$ 和 $n < k \leq n+h$ 得到

$$\begin{aligned} c_{n+h}^{(-2)} &= c_n^{(-2)} + \left[c_{n+1}^{(-1)} + \cdots + c_{n+h}^{(-1)}\right] \\ &= c_n^{(-2)} + hc_n^{(-1)} + [hc_{n+1} + (h-1)c_{n+2} + \cdots + c_{n+h}]; \end{aligned}$$

最后的有限和是不会超过 $\frac{h(h+1)}{2} \max_{n+1\leq k\leq n+h} c_k$. 故我们得到离散 Taylor 公式:

$$c_{n+h}^{(-2)} = c_n^{(-2)} + hc_n^{(-1)} + \frac{h(h+1)}{2} c_\xi^*,$$

这里 c_ξ^* 是介于 $\min_{n<k\leq n+h} c_k$ 和 $\max_{n<k\leq n+h} c_k$ 之间的数.

不妨假设级数 $\sum_{n\geq 0} c_n$ 是 Cesàro 可求和到 0 从而得到 $c_n^{(-2)}/n \to 0$ 当 $n \to \infty$. 不等式 $nc_n \geq -C$ $(C > 0)$ 和 $|c_n^{(-2)}| \leq n\epsilon$ ($\epsilon > 0$ 充分小和 n 充分大), 推出对 $h \approx 2n\sqrt{\epsilon/C}$ 有

$$s_n = \frac{c_{n+h}^{(-2)} - c_n^{(-2)}}{h} - \frac{h(h+1)}{2} c_\xi^* \leq \frac{2n+h}{h}\epsilon + C\frac{h+1}{2n} < 3\sqrt{C\epsilon}.$$

对它方向上的估计我们可取 $h \approx -2n\sqrt{\epsilon/C}$; 当 $h < 0$ 时离散 Taylor 公式需要作些调整. 现在可得出 $s_n \to 0$ 当 $n \to \infty$ 时. □

Hardy 利用**定理 16.4** 得出下面关于 Fourier 级数的结论:

(i) 假设 f 是以 2π 为周期的连续函数且其 Fourier 系数满足 $\hat{f}(n) = O(1/|n|)$ (根据**推论 16.3** 的证明我们得到 $\hat{f}(n) = O(1/|n|)$ 对任何 $f \in C^1(\mathbb{S}^1)$ 都成立). 则 f 的 Fourier 级数逐点收敛到 f.

(ii) 假设 f 是周期函数且在周期上的变差是有界的. 则 Fourier 系数 $\hat{f}(n)$ 满足 $O(1/|n|)$, 因此 f 的 Fourier 级数在每点 x 处收敛到 $\frac{1}{2}[f(x-) + f(x+)]$.

定理 16.5

(1) **(Littlewood, 1911)** 如果级数 $\sum_{n\geq 0} c_n$ 是 Abel 可求和的且

$$|nc_n| \leq C,$$

则 $\sum_{n\geq 0} c_n$ 是收敛的.

(2) **(Hardy-Littlewood, 1914)** 如果级数 $\sum_{n\geq 0} c_n$ 是 Abel 可求和的且

$$nc_n \geq -C,$$

则 $\sum_{n\geq 0} c_n$ 是收敛的. ♡

16.2.4 Riemann 引理

If $f \in C^1(\mathbb{S}^1)$, 根据**推论 16.3** 我们得到 $\hat{f}(n) = O(1/|n|)$. 一般地我们有如下 **Riemann 定理**, 这是 Riemann 论文《Über die Darstellbarkeit einer Function durch einer trigonometrische Reihe》中的基本定理.

定理 16.6. (Riemann, 1854)

假设 ψ 在 $[a, b]$ 上可积的或者在瑕积分意义下是绝对可积的, 则

$$\lim_{p\to\infty} \int_a^b \psi(x) \sin(px)\, dx = \lim_{p\to\infty} \int_a^b \psi(x) \cos(px)\, dx = 0. \tag{16.2.22}$$

♡

证: (1) 首先假设 $\psi \in R([a, b])$. 此时 ψ 必有界. 对任意 $\epsilon > 0$ 总存在关于 $[a, b]$ 的一个划分 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 满足

$$\sum_{1\leq i\leq n} \omega_i \Delta x_i < \frac{\epsilon}{2}, \quad \Delta x_i := x_i - x_{i-1}, \quad \omega_i := M_i - m_i,$$

这里 $m_i := \min_{[x_{i-1}, x_i]} \psi$ 和 $M_i := \max_{[x_{i-1}, x_i]} \psi$. 计算得到

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b \psi(x) \sin(px)\, dx\right| &= \left|\sum_{1\leq i\leq n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Big\{[\psi(x) - m_i] \sin(px) + m_i \sin(px)\Big\}\, dx\right| \\
&\leq \sum_{1\leq i\leq n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\psi(x) - m_i| |\sin(px)| dx + \sum_{1\leq i\leq n} |m_i| \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin(px)\, dx\right| \\
&\leq \sum_{1\leq i\leq n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\psi(x) - m_i| dx + \frac{2}{p} \sum_{1\leq i\leq n} |m_i| \\
&\leq \sum_{1\leq i\leq n} \omega_i \Delta x_i + \frac{2}{p} \sum_{1\leq i\leq n} |m_i| \ \leq \ \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \ = \ \epsilon,
\end{aligned}$$

只要 $p \geq \frac{4}{\epsilon} \sum_{1\leq i\leq n} |m_i|$.

(2) 假设函数 ψ 的唯一瑕点是 b. 根据假设条件得到对任意 $\epsilon > 0$ 存在正数 $\delta > 0$ 使得当 $\eta \in (0, \delta)$ 时有

$$\int_{b-\eta}^b |\psi(x)| dx < \frac{\epsilon}{2}.$$

固定上面的 η, 由于 $\psi(x)\in R([a,b-\eta])$, 利用 (1) 存在正数 $P>0$ 使得

$$\left|\int_a^{b-\eta}\psi(x)\sin px\,dx\right|<\frac{\epsilon}{2}$$

只要 $p>P$. 从而推出

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b\psi(x)\sin px\,dx\right| &\le \left|\int_a^{b-\eta}\psi(x)\sin px\,dx\right|+\int_{b-\eta}^b|\psi(x)\sin px|dx\\ &\le \frac{\epsilon}{2}+\int_{b-\eta}^b|\psi(x)|dx \le \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.\ \square\end{aligned}$$

16.2.5 Fourier 级数的逐点收敛定理

回顾

$$S_n(f)(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{1\le k\le n}\Big[a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\Big],$$

和

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(kx)\,dx,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(kx)\,dx$$

这里 f 是以 2π 为周期的周期函数. 则可计算得到

$$\begin{aligned}S_n(f)(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac12+\sum_{1\le k\le n}\cos n(t-x)\right]dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}}dt \qquad (16.2.23)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}dt.\end{aligned}$$

给定函数 $\sigma(x)$ 我们就得到

$$S_n(f)(x)-\sigma(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-\sigma(x)\right]\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}dt. \qquad (16.2.24)$$

推论 16.5

(1) **(局部性原理; Riemann, 1854)** 如果 f 是以 2π 为周期的可积 (或者在瑕积分意义下是绝对可积) 函数, 则函数列 $\{S_n(f)(x)\}_{n\ge1}$ 的收敛性只依赖于限制函数 $f|_{(x-\delta,x+\delta)}$, 这里 $\delta>0$ 是充分小的数.

(2) 如果 ψ 在 $[0,\delta]$ 上是可积的或者在瑕积分意义下是绝对可积的, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\psi(x)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\psi(t)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{t}dt.$$

(3) **练习 16.2** 可改进为 $L_N=\frac{4}{\pi^2}\ln N+O(1)$ 当 $N\to+\infty$ 时.

证: (1) 对任给 $\delta>0$ 有 $\sin(t/2)>C_\delta$, 这里存在 $C_\delta>0$ 和任意 $\delta\le t\le\pi$. 利用**定理 16.6** 我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\delta}^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}dt=0.$$

所以根据 (16.2.23), $S_n(f)(x)$ 的手里性指依赖于 $f|_{(x-\delta,x+\delta)}$.

(2) 因为 $2\sin\frac{t}{2}\sim t$ 当 $t\to 0$ 时, 我们可以考虑函数

$$g(t)=\begin{cases}\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}, & 0<t\le\delta,\\ 0, & t=0,\end{cases}$$

显然它在 $[0,\delta]$ 上时连续的. 从而根据**定理 16.6** 得证.

(3) 可由 (2) 直接推出. □

作为**推论 16.5** 的直接结果是

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{t}dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

对任意 $t\in[0,\pi]$ 有

$$\frac{1}{2}+\cos t+\cos(2x)+\cdots+\cos(nt)=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

在 $[0,\pi]$ 上积分得到

$$\int_0^\pi\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}dt=\frac{\pi}{2},\quad n\in\mathbb{N}.$$

给定区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 和定义在 D 上的函数 f. 称 $f\in C^{0,\alpha}(D)$ ($C^{0,\alpha}(D)$ 称为 **$\boldsymbol{\alpha}$ 阶 Hölder 空间 (Hölder's space with order $\boldsymbol{\alpha}$)**) 如果存在 $\alpha\in(0,1]$ 和 $L\ge 0$ 使得

$$|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})|\le L|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^\alpha$$

对任何 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in D$ 都成立. 记 $\mathbf{Lip}(D):=C^{0,1}(D)$. 观察到

$$C^1(D)\subsetneq\mathbf{Lip}(D)\subsetneq C(D).\tag{16.2.25}$$

练习 16.8

验证 (16.2.25).

函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 称为**分段单调 (piecewise monotone)** 如果存在划分 $a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b$ 使得 $f|_{(x_{i-1},x_i)}$, $1\le i\le N$, 是单调的.

引理 16.2. (Dirichlet 引理)

假设 ψ 在 $[0,\delta]$ 上是单调的, 则

$$\lim_{p\to\infty}\int_0^\delta\frac{\psi(t)-\psi(0+)}{t}\sin(pt)\,dt=0.$$

证: 不妨假设 ψ 是单调递增的. 对任意 $\epsilon>0$ 存在正数 $\eta\in(0,\delta)$ 使得 $0\le\psi(t)-\psi(0+)<\epsilon$ 对任何 $t\in(0,\eta]$ 都成立. 计算得到

$$\int_0^\delta\frac{\psi(t)-\psi(0+)}{t}\sin(pt)\,dt$$
$$=\int_0^\eta\frac{\psi(t)-\psi(0+)}{t}\sin(pt)\,dt+\int_\eta^\delta\frac{\psi(t)-\psi(0+)}{t}\sin(pt)\,dt$$

$$
\begin{aligned}
&= [\psi(\eta)-\psi(0+)]\int_\xi^\eta \frac{\sin(pt)}{t}dt+\int_\eta^\delta \frac{\psi(t)-\psi(0+)}{t}\sin(pt)\,dt\\
&\le \epsilon\left|\int_{p\xi}^{p\eta}\frac{\sin u}{u}du\right|+\int_\eta^\delta \frac{\psi(t)-\psi(0+)}{t}\sin(pt)\,dt
\end{aligned}
$$

这里存在 $\xi\in[0,\eta]$. By (15.2.11), 存在 $p_1>0$ 使得

$$\left|\int_{p\xi}^{p\eta}\frac{\sin u}{u}du\right|<1$$

对任何 $p\ge p_1$ 都成立. 由于函数 $[\psi(t)-\psi(0+)]/t$ 是可积的, 故从**定理 16.6** 得到

$$\left|\int_\eta^\delta \frac{\psi(t)-\psi(0+)}{t}\sin(pt)\,dt\right|<\epsilon$$

只要 $p\ge p_2$, 这里 p_2 是充分大的数. 故

$$\left|\int_0^\delta \frac{\psi(t)-\psi(0+)}{t}\sin(pt)\,dt\right|<2\epsilon$$

只要 $p\ge\max(p_1,p_2)$. □

假设 $x\in[a,b]$ 是函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 的连续点或第一类间断点. 称 $f\in C^{0,\alpha}(x)$ 如果 $|f(x\pm t)-f(x\pm)|\le Lt^\alpha$ 对所有充分小的 $t>0$ 都成立, 这里 $L>0$ 和 $\alpha\in(0,1]$.

定理 16.7. (Dirichlet-Jordan / Dini-Lipschitz 判别法)

假设函数 f 是以 2π 为周期的可积 (或在瑕积分意义下是绝对可积) 函数. 如果 f 满足

(1) **(Dirichlet-Jordan 判别法)** f 在某个区间 $(x-\delta,x+\delta)$ 上是分段单调, 或

(2) **(Dini-Lipschitz 判别法)** 对某个 $\alpha\in(0,1]$ 有 $f\in C^{0,\alpha}(x)$,

则 f 的 Fourier 级数在每点 x 都收敛到 $[f(x+)+f(x-)]/2$, 即,

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n\ge1}\Big[a_n\sin(nx)+b_n\sin(nx)\Big]=\frac{f(x+)+f(x-)}{2}. \tag{16.2.26}$$

♡

证: (1) 从**引理 16.2** 推出

$$\int_0^\delta \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\sin(pt)\,dt\to0,\quad \int_0^\delta \frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}\sin(pt)\,dt\to0.$$

利用 (16.2.24), **推论 16.5**, 和**定理 16.6**, 得到

$$
\begin{aligned}
&S_n(f)(x)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi[f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)]\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}dt\\
&\sim\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left[\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}+\frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}\right]\sin\frac{2n+1}{2}t\,dt
\end{aligned}
$$

但是这个积分是趋于零的.

(2) 此时我们有 $|f(x\pm t)-f(x\pm0)|/t\le L/t^{1-\alpha}$. 故

$$\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)-f(x+)-f(x-)}{t}\right|\le\frac{2L}{t^{1-\alpha}}.$$

即左边是可积的从而再次根据定理 16.6 得证. □

定理 16.7 最早出现在Dirichlet的论文《Sur la convergence des séries trigonométriques》中 (1829).

例 16.10

函数 $f(x)=x^2,-\pi\le x\le\pi$, 的 Fourier 余弦级数为

$$f_{\text{even}}(x)\sim\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n\ge1}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

利用定理 16.7 得到

$$\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}. \tag{16.2.27}$$

♠

例 16.11

函数 $f(x)=x,-\pi\le x\le\pi$, 的 Fourier 正弦级数为

$$f_{\text{odd}}(x)\sim\sum_{n\ge1}(-1)^{n-1}\frac{2}{n}\sin(nx).$$

利用定理 16.7 得到

$$\sum_{n\ge1}(-1)^{n-1}\frac{2}{n}\sin(nx)=\begin{cases}x, & -\pi<x<\pi,\\ 0, & x=\pm\pi.\end{cases}$$

♠

例 16.12

利用定理 16.7 得到函数 $f(x)=\cos(ax),-\pi\le x\le\pi$, 的 Fourier 级数为

$$\frac{\pi}{2}\frac{\cos(ax)}{\sin(a\pi)}=\frac{1}{2a}+\sum_{n\ge1}(-1)^n\frac{a\cos(nx)}{a^2-n^2} \tag{16.2.28}$$

这里 $\alpha\notin\mathbf{Z}$.

♠

作为应用我们给出例 15.8 (2) 的一个初等证明, 这个证明是属于N. I. Lobatshewski. 在 (16.2.28) 中取 $x=0$ 得到

$$\frac{1}{\sin(a\pi)}=\frac{1}{a\pi}+2\sum_{n\ge1}\frac{(-1)^n a\pi}{(a\pi)^2-(n\pi)^2}$$

接下来令 $=a\pi$ 得到

$$\frac{1}{\sin t}=\frac{1}{t}+\sum_{n\ge1}(-1)^n\left(\frac{1}{t-n\pi}+\frac{1}{t+n\pi}\right). \tag{16.2.29}$$

重新改写

$$I:=\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\sum_{k\ge0}\int_{k\pi/2}^{(k+1)\pi/2}\frac{\sin x}{x}dx.$$

由于

$$
\begin{aligned}
\int_{2m\pi/2}^{(2m+1)\pi/2}\frac{\sin x}{x}dx &= (-1)^m\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{m\pi+t}dt,\\
\int_{(2m+1)\pi/2}^{2m\pi/2}\frac{\sin x}{x}dx &= (-1)^{m-1}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{m\pi-t}dt,
\end{aligned}
$$

因此得到

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/2}\sin t\left[\frac{1}{t}+\sum_{m\geq 1}(-1)^m\left(\frac{1}{t-m\pi}+\frac{1}{t+m\pi}\right)\right]dt\\
&= \int_0^{\pi/2}\sin t\cdot\frac{1}{\sin t}dt = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

16.2.6 Fourier 级数的一致收敛性

本小节内容主要取自周颂平的专著, 见参考文献. 考虑非负数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$.

(1) 称 $\{a_n\}_{n\geq 1}\in$ **MS (monotone sequences)** 如果它是递减的.

(2) **(Shah, 1962)** 称 $\{a_n\}_{n\geq 1}\in$ **QMS (quasi-monotone sequences)** 如果存在某个 $\alpha\geq 0$ 使得数列 $\{a_n/n^\alpha\}_{n\geq 1}\in$ **MS**.

(3) 称 $\{a_n\}_{n\geq 1}\in$ **AMS (almost monotone sequences)** 如果 $a_k\leq Ma_n$ 对任何 $k\geq n$ 都成立.

(4) 称 $\{a_n\}_{n\geq 1}\in$ **RQMS (regularly-varying quasi-monotone sequences)** 如果对某个正则变化数列 $\{R(n)\}_{n\in\mathbf{N}}$, 成立 $\{a_n/R(n)\}_{n\geq 1}\in$ **MS**. 这里正则变化数列 $\{R(n)\}_{n\geq 1}$ 是指数列 $\{R(n)\}_{n\geq 1}$ 是正的, 单调递增的且满足 $\lim_{n\to\infty}\frac{R(\lfloor\lambda n\rfloor)}{R(n)}<\infty$ 对某个 $\lambda>1$ 成立.

(5) 称 $\{a_n\}_{n\geq 1}\in$ **BVS (bounded variation sequences)** 如果 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ 且

$$\sum_{n\geq 1}|\Delta a_n|<\infty,$$

这里 $\Delta a_n:=a_n-a_{n+1}$.

(6) **(Leindler, 2001)** 称 $\{a_n\}_{n\geq 1}\in$ **RBVS (rest bounded variation sequences)** 如果 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ 且

$$\sum_{k\geq n}|\Delta a_k|\leq Ma_n$$

对任何 $n\geq 1$ 都成立, 这里 M 是非负常数.

(7) **(乐– 周, 2005)** 称 $\{a_n\}_{n\geq 1}\in$ **GBVS (group bounded variation sequences)** 如果

$$\sum_{n\leq k\leq 2n}|\Delta a_k|\leq Ma_n$$

对任何 $n\geq 1$ 都成立, 这里 M 是非负常数.

(8) **(虞– 周, 2007)** 称 $\{a_n\}_{n\geq 1}\in$ **NBVS (non-onesided bounded variation sequences)** 如果

$$\sum_{n\leq k\leq 2n}|\Delta a_k|\leq M(a_n+a_{2n})$$

对任何 $n \geq 1$ 都成立, 这里 M 是非负常数.

(9) **(周, 2010)** 称 $\{a_n\}_{n\geq 1} \in$ **MVBVS (mean value bounded variation sequences)** 如果

$$\sum_{n\leq k\leq 2n} |\Delta a_k| \leq \frac{M}{n} \sum_{\lfloor n/\lambda\rfloor \leq k \leq \lfloor \lambda n\rfloor} a_k$$

对任何 $n \geq 1$ 都成立, 这里 M 是非负常数和 $\lambda \geq 2$.

练习 16.9

数列 $\{a_n\}_{n\geq 1} \in$ **QMS** $\Longleftrightarrow$ 存在 $\alpha > 0$ 使得 $a_{n+1} \leq a_n(1+\alpha/n)$ 对充分大 n 都成立.

练习 16.10

假设 $\{R(n)\}_{n\geq 1}$ 是正的递增数列. 证明 $\limsup_{n\to\infty} \frac{R(\lfloor \lambda n\rfloor)}{R(n)} < \infty$ 对某个 $\lambda > 1$ 成立 $\Longleftrightarrow \limsup_{m\to\infty} \frac{R(2n)}{R(n)} < \infty$.

定理 16.8. (Chaundy-Jolliffe, 1916)

若 $\{a_n\}_{n\geq 1} \in$ **MS** 则 $\sum_{n\geq 1} a_n \sin nx$ 一致收敛当且仅当 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

证: 令 $S_n(x) := \sum_{1\leq k\leq n} a_k \sin(kx)$ 并记 $||f|| := \max_{\mathbb{R}} |f|$. 则

$$||S_{2n} - S_{n-1}|| \geq \sum_{n\leq k\leq 2n} a_k \sin\left(k\frac{\pi}{4n}\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n\leq k\leq 2n} a_k \geq \frac{n+1}{\sqrt{2}} a_{2n}.$$

如果函数项级数 $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n \sin nx$ 是一致收敛的, 则 $\lim_{n\to\infty} 2na_{2n} = 0$. 类似地我们有 $\lim_{n\to\infty}(2n+1)a_{2n+1} = 0$. 即 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

反之我们假设 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. 为证一致收敛性, 我们只要验证函数列 $\{S_n(x)\}_{n\geq 1}$ 对每个 $x \in \mathbb{R}$ 是 Cauchy 的. 根据周期性, 我们不妨假设 $x \in (0,\pi)$. 对任意 $\epsilon > 0$, 存在整数 n_0 使得 $na_n < \epsilon$ 对任意 $n > n_0$ 都成立. 对任意 $x \in (0,\pi)$ 取 $N := \lfloor 1/x\rfloor$ 和 $n > n_0$. 则

$$\sum_{k\geq n} a_k \sin(kx) = \sum_{n\leq k\leq N-1} a_k \sin(kx) + \sum_{k\geq N} a_k \sin(kx) =: I_1 + I_2.$$

这里我们不妨假设 $N > n$. 利用不等式 $|\sin x| \leq |x|$ 得到

$$\left|\sum_{n\leq k\leq N-1} a_k \sin(kx)\right| \leq \sum_{n\leq k\leq N-1} a_k |\sin(kx)| \leq \max_{n\leq k\leq N-1} ka_k \leq \epsilon.$$

另一方面有

$$|I_2| \leq 4\pi N\epsilon.$$

事实上根据 Abel 变换推出

$$\sum_{k\geq N} a_k \sin(kx) = -a_N \widetilde{D}_N - 1(x) + \sum_{k\geq N} \Delta a_k \widetilde{D}_k(x),$$

这里

$$\widetilde{D}_n(x) := \sum_{1\leq k\leq n} \sin(kx) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

注意到 $|\widetilde{D}_n(x)| \leq \pi/x$ 对任意 $x \in (0,\pi)$ 都成立. 故

$$\left|\sum_{k\geq N} a_k \sin(kx)\right| \leq \frac{\pi}{x}\left(a_N + \sum_{k\geq N}|\Delta a_k|\right) \leq 2\pi N\left(a_N + \sum_{k\geq N}|\Delta a_k|\right).$$

因为 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(na_n \cdot \frac{1}{n}) = 0$, 所以

$$\left|\sum_{k\geq K} a_k \sin(kx)\right| \leq 4\pi N \sum_{k\geq N}|\Delta a_k| = 4\pi N a_N < 4\pi\epsilon.$$

从而 $|\sum_{k\geq n} a_k \sin(kx)| \leq (1+4\pi)\epsilon$ 和 $\lim_{n\to\infty} ||\sum_{k\geq n} a_k \sin(kx)|| = 0$. □

定理 16.9. (Shah, 1962; Nurcombe, 1992)

如果 $\{a_n\}_{n\geq 1} \in \mathbf{QMS}$ 则 $\sum_{n\geq 1} a_n \sin nx$ 一致收敛当且仅当 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. ♡

上述定理可推广到其它单调数列集.

定理 16.10. (谢- 周, 1994)

对复数列 $\{c_n\}_{n\geq 1} \in \mathbf{RQMS}$ 记

$$f(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\sqrt{-1}nx}.$$

若 $c_n + c_{-n} \in K(\theta_0)$ 对某个 $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2})$ 成立, 则 f 是连续的且

$$\lim_{n\to\infty} ||f - S_n|| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} nc_n = 0 \text{ 和 } \sum_{n\geq 1}|c_n + c_{-n}| < \infty.$$

这里 $K(\theta_0) := \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| \leq \theta_0\}$. ♡

推论 16.6

如果 $\{a_n\}_{n\geq 1} \in \mathbf{RQMS}$ 则 $\sum_{n\geq 1} a_n \sin nx$ 一致收敛当且仅当 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. ♡

定理 16.11. (Leindler, 2001)

如果数列 $\{a_n\}_{n\geq 1} \in \mathbf{RBVS}$ 则 $\sum_{n\geq 1} a_n \sin nx$ 一致收敛当且仅当 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. ♡

定理 16.12. (乐- 周; 2005; Tikhonov, 2007)

对复数列 $\{c_n\}_{n\geq 1} \in \mathbf{GBVS}$ 记

$$f(x) := \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{\sqrt{-1}nx}.$$

若 $c_n + c_{-n} \in K(\theta_0)$ 对某个 $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2})$ 成立, 则 f 是连续的且

$$\lim_{n\to\infty} ||f - S_n|| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} nc_n = 0 \text{ 和 } \sum_{n\geq 1}|c_n + c_{-n}| < \infty.$$

♡

定理 16.13. (虞- 周; 2007)

对复数列 $\{c_n\}_{n\geq 1} \in \mathbf{NBVS}$ 记

$$f(x) := \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{\sqrt{-1}nx}.$$

若 $c_n + c_{-n} \in K(\theta_0)$ 对某个 $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2})$ 成立, 则 f 是连续的且

$$\lim_{n\to\infty} ||f - S_n|| = 0 \iff \lim_{n\to\infty} nc_n = 0 \text{ 和 } \sum_{n\geq 1} |c_n + c_{-n}| < \infty.$$

♡

定理 16.14. (周, 2010)

对复数列 $\{c_n\}_{n\geq 1} \in \mathbf{MVBVS}$ 记

$$f(x) := \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{\sqrt{-1}nx}.$$

若 $c_n + c_{-n} \in K(\theta_0)$ 对某个 $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2})$ 成立, 则 f 是连续的且

$$\lim_{n\to\infty} ||f - S_n|| = 0 \iff \lim_{n\to\infty} nc_n = 0 \text{ 和 } \sum_{n\geq 1} |c_n + c_{-n}| < \infty.$$

♡

16.2.7 几个反例

I. 我们给出Du Bois-Reymond 在 1873 年的结论, 即存在连续周期函数其 Fourier 级数在某点是发散的. 这说明**定理 16.7** (2) 中的 **Dini-Lipschitz 判别法**的条件 “$f \in C^{0,\alpha}(x)$” 不能减弱为 “f 在 x 附近连续”.

考察锯齿函数 $f(x)$, 它关于 x 是奇函数且在 $0 < x < \pi$ 上为 $\sqrt{-1}(\pi - x)$. 则

$$f(x) \sim \sum_{n\neq 0} \frac{e^{\sqrt{-1}nx}}{n} = \sum_{n\leq -1} \frac{e^{\sqrt{-1}nx}}{n} + \sum_{n\geq 1} \frac{e^{\sqrt{-1}nx}}{n}. \tag{16.2.30}$$

我们可以证明函数项级数

$$\sum_{n\geq -1} \frac{e^{\sqrt{-1}nx}}{n}$$

不是任何 Riemann 可积函数的 Fourier 级数. 事实上若假设它是可积函数 $\tilde{f}$ 的 Fourier 级数, 则 $\tilde{f}$ 是有界的. 利用 Abel 平均得到

$$|A_r(\tilde{f})(0)| = \sum_{n\geq 1} \frac{r^n}{n},$$

且当 $r \to 1$ 时趋于无穷. 这就给出了矛盾, 因为

$$|A_r(\tilde{f})(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(x)| P_r(x) d1x \leq \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |\tilde{f}(x)|$$

其中 $P_r(x)$ 是 Poisson 核.

对每个 $N \in \mathbb{N}$ 定义如下两个 $[-\pi, \pi]$ 上的函数,

$$f_N(x) := \sum_{1\leq |n|\leq N} \frac{e^{\sqrt{-1}nx}}{n}, \quad \tilde{f}_N(x) := \sum_{-N\leq n\leq -1} \frac{e^{\sqrt{-1}nx}}{n}. \tag{16.2.31}$$

由于

$$\sum_{1\le n\le N}\frac{1}{n}\ge\sum_{1\le n\le N-1}\int_n^{n+1}\frac{dx}{x}=\int_1^N\frac{dx}{x}=\ln N,$$

因此

$$|\tilde{f}_N(0)|=\left|\sum_{-N\le n\le -1}\frac{1}{n}\right|=\sum_{1\le n\le N}\frac{1}{n}\ge\ln N.$$

引理 16.3

假设级数 $\sum_{n\ge 1}c_n$ 的 Abel 平均 $A_r=\sum_{n\in\mathbf{N}}c_nr^n$ 当 $r\to 1-$ 时是有界的. 如果 $c_n=O(1/n)$, 则部分和 $S_N:=\sum_{1\le n\le N}c_n$ 是有界的. ♡

证: 令 $r:=1-N^{-1}$ 并选择 M 使得 $n|c_n|\le M$ 和 $|A_r|\le M$ 成立. 根据

$$S_N-A_r=\sum_{1\le n\le N}(1-r^n)c_n-\sum_{n\ge N+1}c_nr^n,$$

我们得到

$$\begin{aligned}|S_N-A_r| &\le \sum_{1\le n\le N}|c_n|(1-r^n)+\sum_{n\ge N+1}|c_n|r^n\\ &\le M\sum_{1\le n\le N}(1-r)+\frac{M}{N}\sum_{n\ge N+1}r^n\\ &\le MN(1-r)+\frac{M}{N}\frac{1}{1-r} = 2M.\end{aligned}$$

故得到 $|S_N|\le 3M$. □

利用 (16.2.30) 函数项级数 $\sum_{n\ne 0}e^{\sqrt{-1}nx}/n$ 是锯齿函数 f 的 Fourier 级数. 因此

$$c_n=\frac{e^{\sqrt{-1}nx}}{n}+\frac{e^{-\sqrt{-1}nx}}{-n}=O\left(\frac{1}{|n|}\right).$$

因为 $A_r(f)=f*P_r$ 且 f 是有界的, 所以当 $r\to 1-$ 时 A_r 时有界的; 根据**引理 16.3** 部分和 $S_N(f)=f_N$ 关于 N 和 x 是一致有界的.

定义

$$P_N(x):=e^{2N\sqrt{-1}x}f_N(x),\quad \widetilde{P}_N(x):=e^{2N\sqrt{-1}x}\tilde{f}_N(x). \tag{16.2.32}$$

则得到

$$S_M(P_N)=\begin{cases}P_N, & M\ge 3N,\\ \tilde{P}_N, & M=2N,\\ 0, & M<N.\end{cases}$$

选择 $N_k:=3^{2^k}$ 和 $\alpha_k:=1/k^2$. 则

$$N_{k+1}>3N_k,\quad \alpha_k\ln N_k\to\infty.$$

最后我们来定义

$$g(x) := \sum_{k\geq 1} \alpha_k P_{N_k}(x). \tag{16.2.33}$$

根据 P_N 的一致有界性, 上述函数项级数一致收敛到某个连续周期函数. 但是

$$|S_{2N_m}(f)(0)| \geq c\alpha_m \ln N_m + O(1) \to \infty, \quad m \to +\infty.$$

从而我们得到一个连续周期函数其 Fourier 级数在 0 处发散.

II. 回顾**共轭 Dirichlet 核** $\widetilde{D}_N$ 的定义

$$\widetilde{D}_N(x) := \sum_{|n|\leq N} \mathrm{sign}(x) e^{\sqrt{-1}nx} = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2N+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}. \tag{16.2.34}$$

类似于**例 16.9** 我们可以证明

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\widetilde{D}_N(x)\right| dx \leq c \ln N \tag{16.2.35}$$

对某个 $c > 0$ 成立. 如果 f 是 (Riemann) 可积的, 则

$$f * \widetilde{D}_N = O(\ln N).$$

作为推论得到

(i) 函数项级数

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{\ln n}$$

对每个 x 都是收敛的, 但不是任何 (Riemann) 可积函数的 Fourier 级数.

(ii) 给定 $\alpha \in (0,1)$ 函数项级数

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$$

对每个 x 都是收敛的, 但不是任何 (Riemann) 可积函数的 Fourier 级数.

如果上面两种情形都成立则得到

$$\sum_{1\leq n\leq N} \frac{1}{\ln n} = O(\ln N), \quad \sum_{1\leq n\leq N} \frac{1}{n^\alpha} = O(\ln N)\ (0 < \alpha < 1). \tag{16.2.36}$$

练习 16.11

验证 (16.2.35), 并证明 (16.2.36) 不可能成立.

16.2.8 Gibbs 现象

考虑如下函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - x, & 0 < x \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & x = 0, \\ -\frac{1}{2} - x, & -\frac{1}{2} < x < 0, \end{cases}$$

并作周期为 $T=1$ 的周期化延拓. 显然函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}$ 上有跳跃间断点. 因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以 Fourier 系数为 (利用 (16.2.1))

$$\begin{aligned}
\hat{f}(n) &= \int_{-1/2}^{1/2} f(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}nx}dx \\
&= -2\sqrt{-1}\int_0^{1/2}\left(\frac{1}{2}-x\right)\sin(2\pi nx)dx \\
&= \begin{cases} -\frac{\sqrt{-1}}{2n\pi}, & n\neq 0, \\ 0, & n=0. \end{cases}
\end{aligned}$$

因此 Fourier 级数的部分和为

$$\begin{aligned}
S_N(f)(x) &= (f*D_N)(x) = \sum_{|n|\le N}\hat{f}(n)e^{2\pi\sqrt{-1}nx} \\
&= -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum_{|n|\le N,\, n\neq 0}\frac{e^{2\pi\sqrt{-1}nx}}{n} = \sum_{|n|\le N,\, n\neq 0}\frac{e^{2\pi\sqrt{-1}nx}}{2\pi\sqrt{-1}n},
\end{aligned}$$

其中

$$D_N(x) := \sum_{|n|\le N} e^{2\pi\sqrt{-1}nx} = \frac{\sin[(2N+1)\pi x]}{\sin(\pi x)}.$$

因为

$$(f*D_N)'(x) = \sum_{|n|\le N,\, n\neq 0} e^{2\pi\sqrt{-1}nx} = D_N(x)-1,$$

所以得到

$$\begin{aligned}
S_N(f)(x) &= (f*D_N)(x) = \int_0^x [D_N(t)-1]dt \\
&= -x+\int_0^x \frac{\sin[(2N+1)\pi t]}{\sin(\pi t)}dt \\
&= -x+\int_0^x \sin[(2N+1)\pi t]\left[\frac{1}{\sin(\pi t)}-\frac{1}{\pi t}+\frac{1}{\pi t}\right]dt \\
&= -x+\int_0^x \frac{\sin[(2N+1)\pi t]}{\pi t}dt+\int_0^x \sin[(2N+1)\pi t]\left[\frac{1}{\sin(\pi t)}-\frac{1}{\pi t}\right]dt.
\end{aligned}$$

先考虑函数

$$h(t) := \frac{1}{\sin(\pi t)}-\frac{1}{\pi t}.$$

在证明**推论 16.5** (2) 中我们已知道 $h(t)$ 在 $t=0$ 处连续且 $h(0)=0$. 根据渐近展开

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin t} &= \frac{1}{t-\frac{t^3}{3!}+\cdots} = \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{t^2}{6}-\cdots\right)} \\
&= \frac{1}{t}\left[1+\left(\frac{t^2}{6}-\cdots\right)+\left(\frac{t^2}{6}-\cdots\right)^2+\cdots\right] = \frac{1}{t}+\frac{t}{6}+o(1),
\end{aligned}$$

得到

$$h'(0) = \lim_{t\to 0+}\frac{h(t)-h(0)}{t-0} = \pi\lim\nolimits_{t\to 0+}\frac{1}{t}\left(\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{6}$$

从而推出函数 $h(t)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上是可导的且 $h'(0)=\pi/6$. 进一步计算表明 $h\in C^1([0,\frac{1}{2}])$, h,h' 非负的且在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上递增, 和 $h'\le\frac{4}{\pi}$. 分部积分得到

$$\begin{aligned}\int_0^x h(t)\sin[(2N+1)\pi t]\,dt &= \int_0^x h(t)\,d\left[-\frac{\cos[(2N+1)\pi t]}{(2N+1)\pi}\right]\\ &= -\frac{\cos[(2N+1)\pi x]}{(2N+1)\pi}h(x)+\int_0^x h'(t)\frac{\cos[(2N+1)\pi t]}{(2N+1)\pi}dt\end{aligned}$$

导致

$$\left|\int_0^x h(t)\sin[(2N+1)\pi t]\,dt\right|\le\left[\frac{h(1/2)}{\pi}+\frac{h'(1/2)}{2\pi}\right]\frac{1}{2N+1}\le\frac{1/\pi}{2N+1}.$$

故

$$\begin{aligned}S_N(f)(x) &= -x+\frac{1}{\pi}\int_0^x\frac{\sin[(2N+)\pi t]}{t}dt+O\left(\frac{1}{2N+1}\right)\\ &= -x+\frac{1}{\pi}\int_0^{(2N+1)\pi x}\frac{\sin t}{t}dt+O\left(\frac{1}{2N+1}\right)\\ &= -x+\frac{\mathbf{Si}((2N+1)\pi x)}{\pi}+O\left(\frac{1}{2N+1}\right).\end{aligned}\tag{16.2.37}$$

从这里看到了 sine 积分函数 (14.4.38) 的出现.

因此对任意 $x\in(0,1/2]$, 得到

$$\lim_{N\to+\infty}S_N(f)(x)=-x+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}-x=f(x).$$

同样对任意 $t\in[-1/2,0)$ 得到

$$\lim_{N\to+\infty}S_N(f)(x)=-x-\frac{1}{2}=f(x).$$

因为显然有

$$\lim_{N\to+\infty}S_N(f)(0)=0=f(0),$$

所以

$$\lim_{N\to+\infty}S_N(f)(x)=f(x),\quad -\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}.$$

但函数列 $\{S_N(f)(x)\}_{N\ge1}$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上不一致收敛到 $f(x)$. 对任意 $t\in(0,\frac{1}{2}]$ 考虑差

$$S_N(f)(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int^{(2N+1)\pi t}0\frac{\sin t}{t}dt-\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{2N+1}\right).$$

由于 $O(1/(2N+1))\le1/\pi(2N+1)$, 故

$$S_N(f)(x)-f(x)\le\frac{\mathbf{Si}((2N+1)\pi x)}{\pi}-\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\frac{1}{2N+1};$$

根据 (14.4.43) 可知

$$S_N(f)(x)-f(x)\le\frac{\mathbf{Si}(\pi)}{\pi}-\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\frac{1}{2N+1}\le 0.08949\cdots+\frac{1/\pi}{2N+1}.$$

从而得到

$$\lim_{N\to+\infty}\sup_{(0,1/2]}|S_N(f)(x)-f(x)|\le\frac{\mathbf{Si}(\pi)}{\pi}-\frac{1}{2}=0.08949\cdots\approx 9\%$$

而且

$$\lim_{N\to+\infty}\left[S_N(f)\left(\frac{1}{2N+1}\right)-f\left(\frac{1}{2N+1}\right)\right]=\frac{\mathbf{Si}(\pi)}{\pi}-\frac{1}{2}.$$

最后得到

$$\lim_{N\to+\infty}\sup_{(0,1/2]}|S_N(f)(x)-f(x)|=\frac{\mathbf{Si}(\pi)}{\pi}-\frac{1}{2}=0.08949\cdots\approx 9\%. \tag{16.2.38}$$

出现 9% 的现象就是著名的 "**Gibbs 现象**". 即函数的 Fourier 级数在跳跃点 $x=0$ 有上冲 (overshoot) 或者下冲 (undershoot) 大概 9%.

我们把量

$$\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}dt=\mathbf{Si}(\pi)=1.851937051982\cdots=\frac{\pi}{2}+\pi\times(0.089489872236\cdots)$$

称为 **Wilbraham–Gibbs 常数**.

Gibbs 现象最早是Wilbraham[5] 在 1848 年发现的[6], 之后被Gibbs[7] 在 1899 年又重新发现了[8]. Bôcher[9] 在 1906 年对此现象给出了详细的数学证明[10] 并称之为 "Gibbs 现象".

关于 Gibbs 现象的详细历史可参考[11]:

HeWitt, Edwin; Hewitt, Robert E. *The Gibbs-Wilbraham phenomenon: an episode in Fourier analysis*, Arch. Hist. Exact Sci., **21**(1979/80), no. 2, 129-160.

16.3 直线上的 Fourier 变换

回顾到对任何 $f\in C(\mathbb{S}^1)$ 有

$$f(x)\sim\sum_{n\in\mathbb{Z}}A_n e^{\sqrt{-1}nx},$$

这里

$$A_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-\sqrt{-1}nx}dx.$$

[5]Henry Wilbraham, 1825 年 7 月 25 日–1883 年 2 月 13 日, 今英格兰柴郡人, 英国数学家. 因发现和解释了 Gibbs 现象而著称.

[6]Wilbraham, Henry. *On a certain periodic function*, The Cambridge and Dublin Mathematical Journal, **3**(1848), 198-201.

[7]Josiah Willard Gibbs, 1839 年 2 月 11 日–1903 年 4 月 28 日, 今美国康涅狄克州纽黑文市人, 美国科学家. 他和James Clerk Maxwell、Ludwig Boltzmann 一起创立了统计力学来解释热力学定律. 在 1863 年 Yale 大学授予Gibbs 美国第一个工程学博士学位.

[8]Gibbs, Josiah Willard. *Fourier's Series*, Nature **59**(1522), 200; **59**(1539), 606.

[9]Maxime Bôcher, 1867 年 8 月 28 日–1918 年 9 月 12 日, 今美国马萨诸塞州波士顿人, 美国数学家. 一生发表了超过 100 多篇关于微分方程、级数和代数的论文. 1888 年以第一等荣誉本科毕业于 Harvard 大学, 1891 年在Felix Klein 指导下以博士论文《Über die Reihenentwicklunfen der Potentialtheorie》毕业于 Göttingen 大学. 1904 您成为 Harvard 大学正教授, 1908 年–1910 年是美国数学会主席. 在 1923 年, 美国数学会为纪念Bôcher 设立了Bôcher 纪念奖, 初期奖金是 1450 美元, 目前是 5000 美元. 历届获奖者是George David Birkhoff, Eric Temple Bell, Solomon Lefschetz, EJames W. Alexander II, Marston Morse, Norbert Wiener, John von Neumann, Jesse Douglas, Albert Schaeffer和Donald Spencer, Norman Levinson, Louis Nirenberg, Paul Cohen, Isadore Singer, Donald Ornstein, Alberto Calderón, Luis Caffarelli, Richard Melrose, Richard Schoen, Leon Simon, Demetrios Christodoulou, Sergiu Klainerman, Thomas Wolff, Daniel Tătaru, Terence Tao, Fanghua Lin, Frank Merle, Alberto Bressan, Charles Fefferman, Carlos Kenig, Assaf Naor, Gunther Uhlmann, Simon Brendle, András Vasy, Camillos De Lellis, Lawrence Guth, Laure Saint-Raymond.

[10]Bôcher, Maxime. *Introduction to the theory of Fourier's series*, Ann. of Math., (2nd Ser.) **7**(1906), no. 3, 81-152.

[11]https://web.archive.org/web/20160304104811/http://ocw.nctu.edu.tw/course/fourier/supplement/hewitt-hewitt1979.pdf

做变量替换 $y=x/2\pi$ 得到

$$A_n=\int_0^1 f(y)e^{-2\pi\sqrt{-1}ny}dy,\quad f(y)\sim\sum_{n\in\mathbb{Z}}A_n e^{2\pi\sqrt{-1}ny}.$$

现在考虑定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的可积函数 $f(x)$. 对任意 $T>0$ 定义函数

$$f_T(x):=f(x),\quad x\in(-T,T)$$

并以 $2T$ 为周期作周期化延拓. 从而得到相应的 Fourier 级数展开

$$\begin{aligned}
f_T(x) &\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n\ge1}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{T}x+b_n\sin\frac{n\pi}{T}x\right)\\
&\sim \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(t)\,dt+\frac{1}{T}\sum_{n\ge1}\int_{-T}^{T}f(t)\\
&\quad\times\left[\cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right)\cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right)+\sin\left(\frac{n\pi}{T}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{T}x\right)\right]dt\\
&= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(t)\,dt+\sum_{n\ge1}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(t)\cos\left[\frac{n\pi}{T}(x-t)\right]dt.
\end{aligned}$$

如果进一步假设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积并令 $T\to+\infty$, 则得到

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \lim_{T\to+\infty}\sum_{n\ge1}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(t)\cos\left[\frac{n\pi}{T}(x-t)\right]dt\\
&\sim \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos[\omega(x-t)]dt\right]d\omega.
\end{aligned}$$

受此启发和为了研究方便, 我们引入如下概念. 如果 f 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数, 我们引入 (在 Cauchy 主值积分意义下)

$$f^{\wedge}(\xi)\equiv\hat{f}(\xi):=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi}dx$$

和

$$f(x)\sim\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{2\pi\sqrt{-1}x\xi}d\xi=:\check{f}(x)\equiv f^{\vee}(x),$$

如果第二个 $\sim$ 取等号这就是著名的 Fourier 反演公式.

对定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 f, 定义其 Cauchy 主值积分为

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx:=\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}f(x)\,dx=\mathbf{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx.$$

注意极限不一定存在, 比如考虑函数 $f(x)=1/(1+|x|)$.

16.3.1 适度递减函数

定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 f 称为**适度递减的 (moderate decrease)** 如果 f 是连续的且存在常数 $A>0$ 使得

$$|f(x)|\le\frac{A}{1+x^2},\quad x\in\mathbb{R}$$

成立. 记 $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的所有适度递减函数的集合. 在函数通常加法下和 (复) 标量数乘下, $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{C}$ 上的向量空间. 如果 $f\in\mathcal{M}(\mathbb{R})$ 则

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx &= \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}|f(x)|dx \le 2\lim_{N\to\infty}\int_0^N\frac{A}{1+x^2}dx\\ &= 2\lim_{N\to\infty}\left[\int_0^1\frac{A}{1+x^2}dx+\int_1^N\frac{A}{1+x^2}dx\right] \le 2\lim_{N\to\infty}\left(A+\int_1^N\frac{A}{x^2}dx\right) = 4A.\end{aligned}$$

因此 (Cauchy 主值) 积分 $\int_{\mathbb{R}}f(x)dx$ 存在.

命题 16.2. (适度递减函数的基本性质)

如上定义的关于适度递减函数的积分满足如下性质:

(i) **(被积函数线性)** 如果 $f,g\in\mathcal{M}(\mathbb{R})$ 且 $a,b\in\mathbb{C}$, 则

$$\int_{\mathbb{R}}[af(x)+bg(x)]dx=a\int_{\mathbb{R}}(x)\,dx+b\int_{\mathbb{R}}(x)\,dx.$$

(ii) **(平移不变性)** 对每个 $a\in\mathbb{R}$ 有

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x-a)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx.$$

(iii) **(尺度变换)** 如果 $\delta>0$ 则

$$\delta\int_{-\infty}^{\infty}f(\delta x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx.$$

(iv) **(连续性)** 如果 $f\in\mathcal{M}(\mathbb{R})$ 则

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-a)-f(x)|dx\to 0,\quad a\to 0.$$

♡

证: (i) – (iii) 是显然的. 现在证明 (iv). 选择 $|a|\le 1$. 对任意 $\epsilon>0$ 存在整数 $N\in\mathbb{N}$ 满足

$$\int_{|x|\ge N}|f(x)|dx<\frac{\epsilon}{4},\quad \int_{|x|\ge N}|f(x-a)|dx\le\frac{\epsilon}{4}.$$

由于 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 因此 f 在闭区间 $[-N-1,N+1]$ 上一致连续. 存在 $\delta>0$ 使得

$$\sup_{|x|\le N}|f(x-a)-f(x)|\le\frac{\epsilon}{4N}$$

成立, 只要 $|a|<\delta$. 故

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-a)-f(x)|dx &\le \int_{-N}^{N}|f(x-a)-f(x)|dx\\ &+\int_{|x|\ge N}|f(x-a)|dx+\int_{|x\ge N}|f(x)|dx \le \frac{\epsilon}{4N}\cdot 2N+\frac{\epsilon}{4}+\frac{\epsilon}{4} = \epsilon\end{aligned}$$

对 $|a|\le\delta\le 1$ 成立. □

16.3.2 Fourier 变换

如果 $f\in\mathcal{M}(\mathbb{R})$ 我们定义其 **Fourier 变换 (Fourier transform)** 为

$$f^{\wedge}(\xi)\equiv\hat{f}(\xi):=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi}dx,\quad \xi\in\mathbb{R}. \tag{16.3.1}$$

显然此时积分存在. 更进一步有

(i) $\hat{f}$ 是有界的且连续的.

(ii) $\hat{f}(\xi) \to 0$ 当 $|\xi| \to \infty$ 时. 事实上

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x) - f\left(x - \frac{1}{2\xi}\right)\right| e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi}dx \to 0$$

根据**性质 16.2**, 当 $|\xi| \to \infty$ 时.

但是 Fourier 变换不保持函数的适度递减性, 即存在适度递减函数 f 其 Fourier 变换 $\hat{f}$ 不是适度递减的.

练习 16.12

考虑函数 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 f, 当 $|x| \geq 1$ 时 $f(x) = 0$, $f(0) = 0$, 且在 0 附近的小邻域内等于 $1/\ln(1/|x|)$. 证明 $\hat{f}$ 不是适度递减的.

$\mathbb{R}$ 上的 **Schwartz 空间 (Schwartz space)** $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 是由满足下面条件的光滑函数 f 所构成, 这里的条件是说各阶导数 $f^{(\ell)}$ 都是**迅速递减的 (rapidly decreasing)** 即

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^k |f^{(\ell)}(x)| < \infty, \quad k, \ell \geq 0.$$

注意到 $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{M}(\mathbb{R})$.

练习 16.13

证明 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{C}$ 上的向量空间. 进一步如果 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 则

$$f'(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad xf(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

因此 Schwarz 空间关于求导和多项式数乘运算是封闭的.

例 16.13. (Gaussian 函数)

Gaussian 函数 $f(x) = e^{-ax^2}$, 这里 $a > 0$, 属于 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

例 16.14. (隆起函数)

对 $a < b$ 定义的**隆起函数 (bump function)**

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ e^{-1/(x-a)}e^{-1/(b-x)}, & a < x < b, \\ 0, & x \geq b, \end{cases}$$

属于 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

练习 16.14. (不属于 Schwartz 空间的例子)

证明 $e^{-|x|} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

虽然 $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{M}(\mathbb{R})$ 但是我们仍旧可以定义 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 的 Fourier 变换

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi}dx.$$

之后我们使用记号 $f(x) \mapsto \hat{f}(\xi)$ 来表示 $\hat{f}$ 是 f 的 Fourier 变换.

命题 16.3

如果 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 则

(i) $f(x+a) \to \hat{f}(\xi)e^{2\pi\sqrt{-1}a\xi}$, 任意 $a \in \mathbb{R}$.

(ii) $f(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}xa} \to \hat{f}(\xi+x)$, 任意 $a \in \mathbb{R}$.

(iii) $f(\delta x) \to \delta^{-1}\hat{f}(\delta^{-1}\xi)$, 任意 $\delta > 0$.

(iv) $f'(x) \to 2\pi\sqrt{-1}\xi\hat{f}(\xi)$.

(v) $-2\pi\sqrt{-1}xf(x) \to \frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi)$.

证: 我们只给出 (v) 的证明. 令 $F(x) = -2\pi\sqrt{-1}xf(x)$ 则得到

$$\hat{F}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} -2\pi\sqrt{-1}xf(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi}dx.$$

计算可知

$$\frac{\hat{f}(\xi+a)-\hat{f}(\xi)}{a} - \hat{F}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi}\left(\frac{e^{-2\pi\sqrt{-1}xa}-1}{a} + 2\pi\sqrt{-1}x\right)dx.$$

因为 $f(x), xf(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 所以存在整数 N 满足

$$\int_{|x|\geq N} |f(x)|dx, \quad \int_{|x|\geq N} |xf(x)|dx \leq \epsilon.$$

进一步对 $|x| \leq N$ 存在 a_0 使得当 $|a| < a_0$ 时推出

$$\left|\frac{e^{-2\pi\sqrt{-1}xa}-1}{a} + 2\pi\sqrt{-1}x\right| \leq \frac{\epsilon}{N}.$$

因此只要 $|a| < a_0$ 就有

$$\left|\frac{\hat{f}(\xi+a)-\hat{f}(\xi)}{a} - \hat{F}(\xi)\right|$$

$$\leq \int_{-N}^{N}\left|f(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi}\left(\frac{e^{-2\pi\sqrt{-1}xa}-1}{a} + 2\pi\sqrt{-1}x\right)\right|dx + C\epsilon \leq C'\epsilon.$$

这里 C, C' 都是常数. □

定理 16.15

如果 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 则 $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

证: 因为 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 所以得到 $C_{k,\ell}(f) := \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^k|f^{(\ell)}(x)| < \infty$. 特别地, $|\hat{f}(\xi)| \leq C < \infty$. 从

$$(1+|x|^2)|f(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)| + \sup_{x\in\mathbb{R}}|x|^2|f(x)| = C_{0,0}(f) + C_{2,0}(f) < \infty$$

我们可以找到常数 $C > 0$ 满足

$$|f(x)| \leq \frac{C}{1+|x|^2}$$

从而

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx \leq 2C\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} < \infty.$$

一般地, 对每对 (k,ℓ) 函数 $\xi^k\hat{f}^{(\ell)}(\xi)$ 是有界的, 这是因为它是

$$\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^k}\left(\frac{d}{dx}\right)^k[(-2\pi\sqrt{-1}x)^\ell f(x)]$$

的 Fourier 变换. □

回顾反常积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi x^2}dx=1.$$

定理 16.16

(1) 如果 $f(x)=e^{-\pi x^2}$ 则 $\hat{f}(\xi)=f(\xi)$.

(2) 如果 $\delta>0$ 和

$$K_\delta(x):=\frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{-\frac{\pi x^2}{\delta}}$$

则 $\widehat{K_\delta}(\xi)=e^{-\pi\delta\xi^2}$.

(3) 当 $\delta\to0+$ 时 $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ 是好核列. 即

$$\int_{-\infty}^{\infty}K_\delta(x)\,dx=1,\quad\int_{-\infty}^{\infty}|K_\delta(x)|dx\le M,$$

且对任意 $\eta>0$, 有

$$\lim_{\delta\to0}\int_{|x|>\eta}|K_\delta(x)|dx=0.$$

证: (1) 定义

$$F(\xi):=\hat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi x^2}e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi}dx.$$

则 $F(0)=1$ 和

$$\begin{aligned}F'(\xi)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\left(-2\pi\sqrt{-1}x\right)e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi}dx\\&=\sqrt{-1}\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi}dx=\sqrt{-1}(2\pi\sqrt{-1}\xi)\hat{f}(\xi)=-2\pi\xi F(\xi).\end{aligned}$$

令

$$G(\xi):=F(\xi)e^{\pi\xi^2}.$$

我们得到 $G'(\xi)=0$ 和 $G(0)=1$ 从而推出 $G(\xi)\equiv1$.

(2) 若记 $f(x)=e^{-\pi x^2}$ 则得到

$$\begin{aligned}\widehat{K_\delta}(\xi)&=\int_{-\infty}^{\infty}K_\delta(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\delta}}f\left(\frac{x}{\sqrt{\delta}}\right)e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi}dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(\frac{x}{\sqrt{\delta}}\right)e^{-2\pi\sqrt{-1}\frac{x}{\sqrt{\delta}}(\sqrt{\delta}\xi)}d\left(\frac{x}{\sqrt{\delta}}\right)=\hat{f}(\sqrt{\delta}\xi)=e^{-\pi\delta\xi^2}.\end{aligned}$$

最后一个结论是显然的. □

对 $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 定义它们的**卷积 (convolution)** 为

$$(f*g)(x):=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)g(t)\,dt. \tag{16.3.2}$$

定理 16.17

当 $\delta \to 0$ 时 $(f * K_\delta)(x) \to f(x)$ 关于 x 是一致收敛的.

证: 对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $R > 0$ 满足 $|f(x)| < \epsilon/4$ 只要 $|x| \geq R$, 这是因为 $|f(x)| \leq C/|x|$ 对某个 $C > 0$ 成立. f 的连续性推出 f 在闭区间 $[-R, R]$ 上是一致连续的. 故可以找到 $\eta > 0$ 使得 $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2$ 对 $|x - y| < \eta$ 和 $x, y \in [-R, R]$ 都满足. 如果 $x \in [-R, R]$, $|y| > R$ 且 $|x - y| < \delta$, 则得到

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(R)| + |f(y) - f(R)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} < \epsilon.$$

如果 $|x|, |y| > R$ 且 $|x - y| < \eta$, 则 $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2$. 因此, f 在 $\mathbb{R}$ 上是一致连续的. 计算可得

$$\begin{aligned} |(f * K_\delta)(x) - f(x)| &\leq \left(\int_{|t|\geq\eta} + \int_{|t|<\eta}\right) K_\delta(t)|f(x-t) - f(x)|dt \\ &< \epsilon + 2\max_{\mathbb{R}}|f| \cdot \int_{|t|\geq\eta} K_\delta(t)\,dt \ < \ 2\epsilon \end{aligned}$$

只要 δ 充分小, 这是因为**定理 16.16**. □

对任意 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 考虑

$$F(x, y) := f(x)g(y)e^{-2\pi\sqrt{-1}xy}.$$

因为 $|f(x)| \leq C_f/(1 + |x|^2)$ 和 $|g(y)| \leq C_g/(1 + |y|^2)$, 所以

$$|F(x, y)| \leq \frac{C_f C_g}{(1 + |x|^2)(1 + |y|^2)}.$$

故如下两个函数

$$F_1(x) := \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y)\,dy, \quad F_2(y) := \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y)\,dx$$

都是连续的和适度递减的. 根据**定理 15.8** 得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(y)\,dy.$$

即

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{g}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)g(y)\,dy, \quad f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{16.3.3}$$

定理 16.18. (Fourier 反演公式)

如果 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 则

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{2\pi\sqrt{-1}\xi x}d\xi. \tag{16.3.4}$$

证: 令 $G_\delta(x) := e^{-\pi\delta x^2}$ 这里 $\delta > 0$. 根据**性质 16.3** 和**定理 16.16** 得到

$$\widehat{G_\delta}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}\hat{f}\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\xi\right) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}f\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\xi\right) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{-\frac{\pi\xi^2}{\delta}} = K_\delta(x)$$

其中 $f(x) = e^{-\pi x^2}$. 利用 (16.3.3) 得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)K_\delta(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)G_\delta(\xi)\,d\xi.$$

令 $\delta \to 0$ 得到

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\,d\xi.$$

一般地, 定义 $F(y) := f(y+x)$. 上面论证推出

$$f(x) = F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(\xi)\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{2\pi\sqrt{-1}x\xi}d\xi.$$

这样就证明了 (16.3.4). □

定义如下两个映射

$$\mathscr{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad f \longmapsto \mathscr{F}(f) \tag{16.3.5}$$

和

$$\mathscr{F}^*: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad g \longmapsto \mathscr{F}^*(g), \tag{16.3.6}$$

其中

$$\mathscr{F}(f)(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi}dx = \hat{f}(\xi), \tag{16.3.7}$$

$$\mathscr{F}^*(g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{2\pi\sqrt{-1}x\xi}d\xi = \check{g}(x). \tag{16.3.8}$$

根据**定理 16.18** 我们得到

$$\mathscr{F} \circ \mathscr{F}^* = \mathbf{1} = \mathscr{F}^* \circ \mathscr{F} \quad 在\ \mathcal{S}(\mathbb{R})\ 上. \tag{16.3.9}$$

这就表明 Fourier 变换 $\mathscr{F}$ 在 Schwartz 空间上是双射的.

命题 16.4

如果 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 则

$$f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad f * g = g * f, \quad \widehat{(f * g)}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi). \tag{16.3.10}$$

♡

证: (1) 首先回顾

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,dy.$$

故

$$|x|^k|(f*g)(x)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|\left(|x|^k|g(x-y)|\right)dy.$$

其次我们断言

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^k|g(x-y)| = \sup_{z\in\mathbb{R}} |z+y|^k|g(z)| \le A_k\,(1+|y|)^k$$

这里 A_k 是仅依赖于 g 和 k 的常数. 事实上若 $|y| \le |z|$ 则

$$|z+y|^k|g(z)| \le 2^k|z|^k|g(z)| \le 2^kC_{k,0}(g);$$

若 $|y| \ge |z|$ 则

$$|z+y|^k|g(z)| \le 2^k|y|6k|g(z)| \le 2^kC_{0,0}(g)|y|^k.$$

无论哪种情形我们都得到所需要的结论. 从而

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^k |(f*g)(x)| \le A_k \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| (1+|y|)^k \, dy < \infty$$

因为 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. 利用恒等式

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\ell} (f*g)(x) = \left(f * g^{(\ell)}\right)(x), \quad \ell \in \mathbb{N},$$

(这可以对 ℓ 作归纳得到), 推出 $f*g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(2) 这是显然的.

(3) 为此引入二元函数

$$F(x,y) := f(y)g(x-y)e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi}$$

这是由于

$$\widehat{(f*g)}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,dy\right] e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi} dx.$$

同样考虑两个函数

$$F_1(x) := (f*g)(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi}, \quad F_2(y) := f(y)e^{-2\pi\sqrt{-1}y\xi}\hat{g}(\xi).$$

根据**定理 15.8** 得到

$$\widehat{(f*g)}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x)\,dx = \iint_{\mathbf{R}^2} F(x,y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(y)\,dy = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

即 $\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}$. □

Schwartz 空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上可引入 **Hermitian 内积 (Hermitian inner product)**

$$(f,g) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx, \quad ||f|| := \sqrt{(f,f)}. \tag{16.3.11}$$

定理 16.19. (Plancherel)

如果 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 则 $||\hat{f}|| = ||f||$.

证: 定义 $g(x) := \overline{f(-x)}$ 和 $h(x) := (f*g)(x)$. 则得到

$$\begin{aligned} \hat{g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(-x)}e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi}dx \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(-x)e^{2\pi\sqrt{-1}x\xi}dx} = \overline{\hat{f}(\xi)}. \end{aligned}$$

更进一步

$$\begin{aligned} \hat{h}(\xi) &= \widehat{(f*g)}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) = |\hat{f}(\xi)|^2, \\ h(0) &= (f*g)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(-y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2 dy. \end{aligned}$$

从而得到

$$||f||^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2 dy = h(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\xi)\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = ||\hat{f}||^2$$

这是因为 $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. □

16.3.3 直线上的热核

考虑 $\mathbb{R}$ 上的**热方程 (heat equation)**

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t),\quad u(x,0)=f(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{16.3.12}$$

定义**热核 (heat kernel)** 如下

$$H_t(x)=H(x,t):=K_{4\pi t}(x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-x^2/t^2},\quad x\in\mathbb{R},\ t>0. \tag{16.3.13}$$

从而得到其 Fourier 变换

$$\widehat{H_t}(x)=e^{-4\pi^2 t\xi^2}. \tag{16.3.14}$$

对 (16.3.12) 作 Fourier 变换推出

$$\partial_t\hat{u}(\xi,t)=-4\pi^2\xi^2\hat{u}(\xi,t),\ \hat{u}(\xi,t)=A(\xi)e^{-4\pi^2\xi^2 t},\ \hat{u}(\xi,0)=\hat{f}(\xi),\ A(\xi)=\hat{f}(\xi).$$

定理 16.20

给定 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 令

$$u(x,t):=(f*H_t)(x),\quad t>0$$

这里 H_t 是热核. 则

(i) 函数 u 是 C^2 的当 $x\in\mathbb{R}$ 和 $t>0$, 且 u 满足热方程.

(ii) 当 $t\to 0$ 时 $u(x,t)\to f(x)$ 关于 x 是一致收敛的. 因此若记 $u(x,0)=f(x)$, 则 u 在上半平面的闭包 $\overline{\mathbb{R}^2_+}=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2: x\in\mathbb{R},\ t\geq 0\}$ 上是连续的.

(iii) 当 $t\to 0$ 时有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|u(x,t)-f(x)|^2dx\to 0.$$

(iv) $u(\cdot,t)$ 关于 t 是一致属于 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, 即对任何 $T>0$

$$\sup_{x\in\mathbb{R},\ t\in(0,T)}|x|^k\left|\frac{\partial^\ell}{\partial x^\ell}u(x,t)\right|<\infty \tag{16.3.15}$$

对每个 $k,\ell\geq 0$ 都成立.

♡

证: (i) 因为 $u=f*H_r$, 对 x 变量取 Fourier 变换得到

$$\hat{u}(\xi,t)=\hat{f}(\xi)e^{-4\pi^2\xi t}$$

从而根据 Fourier 反演公式得到

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{u}(\xi,t)e^{2\pi\sqrt{-1}\xi x}d\xi=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{-4\pi^2\xi t}e^{2\pi\sqrt{-1}\xi x}d\xi.$$

在积分号下求导推出 (i). 实际上我们可以证明 u 是光滑的.

(ii) 这可从 $u=f*H_t=f*K_{4\pi t}\rightrightarrows f, t\to 0$, 得到.

(iii) 根据定理 **16.19** 我们有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|u(x,t)-f(x)|^2dx &= \int_{-\infty}^{\infty}|\hat{u}(\xi,t)-\hat{f}(\xi)|^2d\xi\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(\xi)|^2\left|e^{-4\pi^2 t\xi^2}-1\right|^2d\xi.\end{aligned}$$

因为 $|e^{-4\pi^2 t\xi^2}-1|^2 \le 4$ 和 $\hat{f}\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 所以对任意 $\epsilon>0$ 存在 $N\in\mathbb{N}$ 满足

$$\int_{|\xi|\ge N}|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \frac{\epsilon}{8}.$$

由于 $\hat{f}$ 是有界的, 我们可以找到 $\delta>0$ 使得

$$\sup_{|\xi|\le N}|\hat{f}(\xi)|^2\left|e^{-4\pi^2 t\xi^2}-1\right|^2 < \frac{\epsilon}{4N}$$

对任何 $|t|<\delta$ 都成立. 这样就得到

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|u(x,t)-f(x)|^2dx &\le \int_{|\xi|\le N}|\hat{f}(\xi)|^2\left|e^{-4\pi^2t\xi^2}-1\right|^2 d\xi \\ &\quad + \int_{|\xi|\ge N}|\hat{f}(\xi)|^2\left|e^{-4\pi^2t\xi^2}-1\right|^2 d\xi \le \frac{\epsilon}{4N}2N+\frac{\epsilon}{8}4 = \epsilon\end{aligned}$$

只要 $|t|<\delta$.

(iv) 该结论可从

$$\begin{aligned}|u(x,t)| &\le \int_{|y|\le\frac{|x|}{2}}|f(x-y)|H_t(y)\,dy+\int_{|y|\ge\frac{|x|}{2}}|f(x-y)|H_t(y)\,dy \\ &\le \frac{C_N}{(1+|x|)^N}+\frac{C}{\sqrt{t}}e^{-\frac{cx^2}{t}}\end{aligned}$$

推出. 因为 f 是快速递减的, 所以得到 $|f(x-y)|\le C_N/(1+|x|)^N$ 只要 $|y|\le|x|/2$. 如果 $|y|\ge|x|/2$ 则 $H_t(y)\le Ct^{-1/2}e^{-cx^2/t}$, 此时我们也得到上述不等式. 我们已经证明了 $u(x,t)$ 对 $0<t<T$ 是一致快速递减的. 同样的论证可应用到高阶导数上去. □

定理 16.21

假设 $u(x,t)$ 满足如下条件:

(i) u 在上半平面的闭包上是连续的,

(ii) 当 $t>0$ 时 u 满足热方程,

(iii) u 满足边界条件 $u(x,0)=0$,

(iv) $u(\cdot,t)\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 关于 t 是一致的 (见 (16.3.15)).

则得到 $u\equiv 0$.

♡

证: 考虑函数 u 的能量积分

$$E(t):=\int_{-\infty}^{\infty}|u(x,t)|^2dx\ge 0.$$

因为 $\partial_t u=\partial_x^2 u$ 我们得到

$$\begin{aligned}E'(t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\partial_t u(x,t)\overline{u(x,t)}+u(x,t)\overline{\partial_t u(x,t)}\right]dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\partial_x^2 u(x,t)\overline{u(x,t)}+u(x,t)\overline{\partial_x^2 u(x,t)}\right]dx \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty}\left[\partial_x u(x,t)\overline{\partial_x u(x,t)}+\partial_x u(x,t)\overline{\partial_x u(x,t)}\right]dx \\ &= -2\int_{-\infty}^{\infty}|\partial_x u(x,t)|^2dx \le 0,\end{aligned}$$

这里我们利用了 u 和其 x-导数当 $|x|\to+\infty$ 时是快速递减的. 因为 $E(0)=0$, 所以 $E(t)\equiv 0$ 从而 $u\equiv 0$. □

16.3.4 Poisson 求和公式

给定 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 定义

$$F_1(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n). \tag{16.3.16}$$

由于 $|f(x)| \le A/|x|^2$, F_1 在 $\mathbb{R}$ 中的任何紧开子集上都是绝对一致收敛的. 因此 $F \in C(\mathbb{R})$. 注意到 $F_1(x+1) = F_1(x)$. 称函数 F_1 是 f 的**周期化 (periodization)**.

另一个连续周期函数

$$F_2(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi\sqrt{-1}nx} \tag{16.3.17}$$

来自恒等式

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi\sqrt{-1}\xi x} d\xi.$$

练习 16.15

验证 F_1 和 F_2 都是连续周期函数.

定理 16.22. (Poisson 求和公式)

如果 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 则

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi\sqrt{-1}nx} \tag{16.3.18}$$

对任何 $x \in \mathbb{R}$ 都成立. 特别地

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n). \tag{16.3.19}$$

证: 计算得到

$$\begin{aligned}
\widehat{F_1}(m) &= \int_0^1 F_1(x) e^{-2\pi\sqrt{-1}mx} dx = \int_0^1 \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)\right) e^{-2\pi\sqrt{-1}mx} dx \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+n) e^{-2\pi\sqrt{-1}mx} dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(y) e^{-2\pi\sqrt{-1}my} dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi\sqrt{-1}my} dy = \hat{f}(m).
\end{aligned}$$

即 $\widehat{F_1}(m) = \widehat{F_2}(m)$. 根据**推论 16.1** 得到 $F_1 \equiv F_2$. $\square$

练习 16.16

证明 (16.3.18) 当 f 和 f' 都是适度递减函数时也成立.

例 16.15

考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

则

$$\hat{f}(\xi) = \left(\frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}\right)^2$$

和

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin \pi\alpha}\right)^2 \tag{16.3.20}$$

对 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ 都成立.

练习 16.17

证明

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n+\alpha} = \frac{\pi}{\tan \pi\alpha} \tag{16.3.21}$$

只要 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. (**提示:** 公式 (16.3.21) 的左边级数表示什么意思? 在 $\alpha = \frac{1}{2}$ 处计算.)

练习 16.18

本练习利用 Poisson 公式来给出 (14.3.15) 和 (15.3.32) 的证明. 应用**定理 16.22** 到 $f(x) = \frac{t}{\pi(x^2+t^2)}$ 和 $\hat{f}(\xi) = e^{-2\pi t|\xi|}$, 这里 $t > 0$, 得到

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{t}{t^2+n^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi t|n|}.$$

证明

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{t}{t^2+n^2} = \frac{1}{\pi t} + \frac{2}{\pi}\sum_{m\in\mathbb{N}} (-1)^{m+1}\zeta(2m)t^{2m-1}$$

和

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi t|n|} = \frac{2}{1-e^{-2\pi t}} - 1.$$

利用恒等式

$$\frac{z}{e^z-1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{B_{2m}}{(2m)!}z^{2m},$$

这里 B_k 是 Bernoulli 数, 来推导出

$$2\zeta(2m) = (-1)^{m+1}\frac{(2\pi)^{m+1}}{(2m)!}B_{2m}.$$

16.3.5 Theta 和 zeta 函数

我们已经定义了 **(Jacobi) theta 函数** $\vartheta(s)$ (参见 (15.3.31))

$$\vartheta(s) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s}, \quad s > 0. \tag{16.3.22}$$

定理 16.23

当 $s>0$ 时我们有

$$s^{-1/2}\vartheta(1/s)=\vartheta(s). \tag{16.3.23}$$

证: 定义 $f(x):=e^{-\pi sx^2}$. 则 $\hat{f}(\xi)=s^{-1/2}e^{-\pi\xi^2/s}$. 根据定理 **16.22** 有

$$\vartheta(s)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(n)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)=s^{-1/2}\theta(1/s)$$

从而推出 (16.3.23). □

练习 16.19

验证 (15.3.30).

16.3.6 圆周上的热核

定义函数 $\Theta(z|\tau)$ 为

$$\Theta(z|\tau):=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{\sqrt{-1}\pi n^2\tau}e^{2\pi\sqrt{-1}nz} \tag{16.3.24}$$

这里 $\mathrm{Im}(\tau)>0$ 和 $z\in\mathbb{C}$. 注意到 $\Theta(0|\sqrt{-1}s)=\vartheta(s)$. 满足边界条件 $u(x,0)=f(x)$ 的方程

$$\partial_t u(x,t)=\partial_x^2 u(x,t)$$

的解, 其中 f 是周期为 1 的周期函数, 是

$$u(x,t)=\left(f*H_t^{\mathbb{S}^1}\right)(x)$$

这里 $H_t^{\mathbb{S}^1}(x)$ 是圆上的热核, 即,

$$H_t^{\mathbb{S}^1}(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-4\pi^2n^2t}e^{2\pi\sqrt{-1}nx}=\Theta(x|4\pi\sqrt{-1}t). \tag{16.3.25}$$

回顾 $\mathbb{R}$ 上的热核

$$H_t(x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}},\quad \widehat{H_t}(\xi)=e^{-4\pi^2\xi^2t}.$$

根据定理 **16.22** 得到

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}H_t(x+n)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{H_t}(n)e^{2\pi\sqrt{-1}nx}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-4\pi^2n^2t}e^{2\pi\sqrt{-1}nx}.$$

定理 16.24

圆上的热核是数轴上的热核的周期化:

$$H_t^{\mathbb{S}^1}(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}H_t(x+n). \tag{16.3.26}$$

$\{H_t^{\mathbb{S}^1}(x)\}_{t>0}, |x|\le 1/2$, 是好核列.

证: 显然 $\int_{|x|\le 1/2}H_t^{\mathbb{S}^1}(x)dx=1$ 和 $H_t^{\mathbb{S}^1}\ge 0$. 当 $|x|\le 1/2$ 时我们断言

$$H_t^{\mathbb{S}^1}(x)=H_t(x)+E_t(x)$$

这里误差项满足 $|E_t(x)| \le c_1 e^{-c_2/r}$, 其中 $c_1, c_2 > 0$ 和 $0 < t \le 1$. 事实上,

$$E_t(x) := \sum_{|n|\ge 1} H_t(x+n) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{|n|\ge 1} e^{-(x+n)^2/4t} \le Ct^{-1/2} \sum_{n\ge 1} e^{-cn^2/t}$$

这是因为 $|x| \le 1/2$. 注意到 $n^2/t \ge n^2$ 和 $n^2/t \ge 1/t$ 只要 $0 < t \le 1$, 故 $e^{-cn^2/t} \le e^{-cn^2/2} e^{-c/2t}$. 因此

$$|E_t(x)| \le Ct^{-1/2} e^{-c/2t} \sum_{n\ge 1} e^{-cn^2/2} \le c_1 e^{-c_2/t}.$$

因为当 $t \to 0$ 时 $\int_{|x|\le 1/2} |E_t(x)| dx \to 0$, 所以

$$\int_{|\eta<|x|\le 1/2} |H_t^{\mathbb{S}^1}(x)| dx \to 0, \quad t \to 0$$

这是由于 H_t 也满足此性质. □

16.3.7 Heisenberg 不确定原理

在量子力学中, **Heisenberg 不确定原理 (Heisenberg's uncertainty principle)** 是说

$$(\text{位置的不确定性}) \times (\text{动量的不确定性}) \ge \frac{\hbar}{16\pi^2} > 0$$

这里 $\hbar$ 是 Planck 常数.

定理 16.25. (Heisenberg 不确定原理)

假设函数 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 满足条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 1.$$

则

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx\right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right) \ge \frac{1}{16\pi^2}, \tag{16.3.27}$$

且等号取到当且仅当 $f(x) = Ae^{-Bx^2}$, 这里 $B > 0$ 和 $A^2 = \sqrt{2B/\pi}$. 事实上我们有

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} (x-x_0)^2 |f(x)|^2 dx\right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} (\xi-\xi_0)^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right] \ge \frac{1}{16\pi^2}. \tag{16.3.28}$$

♡

证: 第二个不等式 (16.3.28) 可从第一个不等式 (16.3.27) 推出只要把 $f(x)$ 换成 $e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi_0} f(x+x_0)$ 即可. 现在我们来证明 (16.3.27). 计算得到

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \left(x \frac{d}{dx} |f(x)|^2\right) dx \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \left[x f'(x) \overline{f(x)} + x \overline{f'(x)} f(x)\right] dx \le 2 \int_{-\infty}^{\infty} |x||f(x)||f'(x)| dx \\
&\le 2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 dx\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

由于 $\widehat{f'}(\xi) = 2\pi\sqrt{-1}\xi \hat{f}(\xi)$, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f'}(\xi)|^2 d\xi = 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

从而得到 (16.3.27). □

Heisenberg 不确定原理可以用 **Hermite 算子 (Hermite operator)** 来描述:

$$\mathbf{L} := -\frac{d^2}{dx^2} + x^2. \tag{16.3.29}$$

这里对 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 定义

$$\mathbf{L}(f)(x) := -f''(x) + x^2 f(x). \tag{16.3.30}$$

考虑 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上的内积

$$(f, g) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx, \quad f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

在**定理 16.25** 中我们已经证明了

$$(\mathbf{L}f, f) \ge (f, f), \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{16.3.31}$$

如上不等式我们常记作 $\mathbf{L} \ge \mathbf{I}$. 考虑 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上的**湮灭算子 (annihilation operator)** 和**产生算子 (creation operator)**

$$\mathbf{A} := \frac{d}{dx} + x, \quad \mathbf{A}^* := -\frac{d}{dx} + x. \tag{16.3.32}$$

练习 16.20

对所有 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 证明

$$(\mathbf{A}f, g) = (f, \mathbf{A}^* g), \quad (\mathbf{A}f, \mathbf{A}f) = (\mathbf{A}^*\mathbf{A}f, f) \ge 0, \quad \mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{L} - \mathbf{I}.$$

♠

对每个 $t \in \mathbb{R}$ 定义

$$\mathbf{A}_t := \frac{d}{dx} + tx, \quad \mathbf{A}^* := -\frac{d}{dx} + tx. \tag{16.3.33}$$

我们可以把 $(\mathbf{A}_t^*\mathbf{A}_t f, f)$ 看成是 t 的多项式.

练习 16.21

利用不等式 $(\mathbf{A}_t^*\mathbf{A}_t f, f) \ge 0$ 来给出 Heisenberg 不确定原理的另一个证明.

♠

Hermite 函数 (Hermite functions) $h_k(x)$ 定义为

$$\sum_{k \ge 0} h_k(x) \frac{t^k}{k!} = e^{-\frac{x^2}{2} + 2tx - t^2}. \tag{16.3.34}$$

练习 16.22

证明

$$h_k(x) = (-1)^k e^{x^2/2} \left(\frac{d}{dx}\right)^k e^{-x^2}. \tag{16.3.35}$$

♠

对任何 $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ 我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-y^2} e^{2xy}\,dy = 0 \text{ 对任意 } x \in \mathbb{R} \Longrightarrow f \equiv 0.$$

实际上我们可以考虑 $f * e^{-x^2}$.

称 $\{h_k(x)\}_{k \ge 0}$ 是**完备的 (complete)** 如果 $(f, h_k) = 0$ 对所有 $k \ge 0$ 和 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 都成立.

练习 16.23

验证在 (16.3.35) 中定义的 $\{h_k(x)\}_{k\geq 0}$ 是完备的.

定义

$$h_k^*(x) := h_k\left(\sqrt{2\pi}x\right). \tag{16.3.36}$$

练习 16.24

证明 $\widehat{h_k^*}(\xi) = (-\sqrt{-1})^k h_k^*(\xi)$. 从而每个 h_k^* 是 Fourier 变换的特征函数. 证明 $\mathbf{L}h_k = (2k+1)h_k$. 特别地, h_k 关于 Schwartz 空间上的 L^2-内积是正交的. 最后证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h_k(x)|^2 dx = \pi^{1/2} 2^k k!.$$

16.4 Fourier 级数的性质

假设 f 是以 2π 为周期的周期函数. 则

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) =: S(f)(x).$$

根据**定理 16.6** 得到

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} b_n, \quad f \in R([-\pi,\pi]). \tag{16.4.1}$$

16.4.1 Fourier 级数的分析性质

我们首先利用**定理 16.27** 来证明如下关于 Fourier 级数的三个基本性质.

定理 16.26. (Fourier 级数分析性质)

(A) **(Fourier 级数的逐项积分定理)** 假设 $f \in R([-\pi,\pi])$ 则

$$\int_c^x f(t)\,dt = \int_c^x \frac{a_0}{2}dt + \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_c^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\,dt \tag{16.4.2}$$

对任何 $c, x \in [-\pi,\pi]$ 都成立.

(B) **(Fourier 级数的逐项微分定理)** 如果 $f'' \in R([-\pi,\pi])$ 则

$$f'(x) = \sum_{n\in\mathbf{N}} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx) \tag{16.4.3}$$

对任何 $x \in [-\pi,\pi]$ 都成立.

(C) **(Fourier 级数的一致收敛定理)** 如果 $f' \in R([-\pi,\pi])$ 则 $S(f)(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛到 $f(x)$.

证: (C) 因为

$$f'(x) \sim \sum_{n\geq 1} (nb_n \cos nx - na_n \sin nx),$$

所以得到

$$\sum_{1\leq n\leq N} (|a_n| + |b_n|) = \sum_{1\leq n\leq N} \frac{|nb_n| + |na_n|}{n}$$

$$\leq \left[\sum_{1\leq n\leq N}\left((nb_n)^2+(na_n)^2\right)\right]^{1/2}\left(\sum_{1\leq n\leq N}\frac{2}{n^2}\right)^{1/2} \leq \frac{\pi}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2dx\right]^2.$$

因此 $S(f)(x)$ 绝对一致收敛到 $f(x)$.

(*B*) 因为 $f''\in R([-\pi,\pi])$, 我们应用 (*C*) 到 f'.

(*A*) 考虑函数

$$g(x):=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & t=0 \text{ 或者 } t=x,\\ \pi, & 0<t<x,\\ 0, & x<t<2\pi.\end{cases}$$

则得到

$$g(x)\sim\frac{x}{2}+\sum_{n\geq 1}\left(\frac{\sin nx}{x}\cos nt+\frac{1-\cos nx}{x}\sin nt\right).$$

利用 (16.4.7) 得到

$$\frac{1}{\pi}\int_0^x \pi f(t)dt=\frac{a_0x}{2}+\sum_{n\geq 1}\left(\frac{a_n}{n}\sin nx+\frac{b_n}{n}(1-\cos nx)\right)$$

对任何 $0\leq x\leq 2\pi$ 都成立. 从而证明了 (16.4.2) 对 $c=0$ 成立. 对一般 c 作平移即得. □

16.4.2 Fourier 级数的平方逼近性质

我们将利用 Parseval 等式 (16.4.4) 来证明下面的 Weierstrass 逼近定理.

定理 16.27

(*D*) **(Weierstrass)** 如果 f 是以 2π 为周期的连续周期函数, 则存在三角多项式列 $\{T_n\}_{n\geq 1}$, 其中

$$T_n(x)=\frac{\alpha_0^n}{2}+\sum_{1\leq k\leq n}(\alpha_k^n\cos kx+\beta_k^n\sin kx),$$

使得对任意 $\epsilon>0$ 存在整数 $N\in\mathbb{N}$ 满足

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-T_n(x)|\leq\epsilon$$

只要 $n\geq N$.

(*E*) **(Parseval, 1799)** 如果 $f\in R([-\pi,\pi])$, 则

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n\geq 1}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx. \tag{16.4.4}$$

♡

证: (*D*) 回顾

$$S_n(f)(x):=\frac{a_0}{2}+\sum_{1\leq k\leq n}(a_n\cos kx+b_k\sin kx)=(f*D_n)(x),$$

这里

$$D_n(x):=\sum_{|k|\leq n}e^{\sqrt{-1}kx}.$$

Fejér 核是指

$$\sigma_n(f) := \frac{1}{n}\sum_{0\le i\le n-1} S_i(f) = f * F_n, \quad F_n(x) = \frac{1}{N}\frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}.$$

对任意 $x\in[-\pi,\pi]$ 我们有

$$\begin{aligned} |f(x)-\sigma_n(f)(x)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)F_n(y)dy - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)F_n(x-y)dy\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(y)|f(x)-f(x-y)|dy. \end{aligned}$$

因为 $f\in C([-\pi,\pi])$ 且是周期函数, 所以 f 在 $\mathbb{R}$ 上是一致连续的. 对任意 $\epsilon>0$ 存在 $\delta>0$ 满足 $|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon/3$ 只要 $|x_1-x_2|<\delta$. 计算得到

$$\begin{aligned} |f(x)-\sigma_n(f)(x)| &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} F_n(y)|f(x)-f(x-y)|dy \\ + \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} F_n(y)|f(x)-f(x-y)|dy &+ \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} F_n(y)|f(x)-f(x-y)|dy \\ &:= I_1+I_2+I_3. \end{aligned}$$

对 I_1 有

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} F_n(y)|f(x)-f(x-y)|dy \\ \le \frac{1}{\pi}\sup_{[-\pi,\pi]}|f|\cdot\int_{-\pi}^{-\delta}\frac{\sin^2(Ny/2)}{N\sin^2(y/2)}dy &\le \frac{1}{\pi}\sup_{[-\pi,\pi]}|f|\cdot\int_{-\pi}^{-\delta}\frac{dy}{N\sin^2(\delta/2)} \\ = \frac{1}{\pi}\sup_{[-\pi,\pi]}|f|\cdot\frac{\pi-\delta}{\sin^2(\delta/2)}\cdot\frac{1}{N} &\le \frac{\sup_{[\pi,\pi]}|f|}{\sin^2(\delta/1)}\cdot\frac{1}{N} \end{aligned}$$

从而意味着存在整数 $N_1\in\mathbb{N}$ 满足

$$I_1<\frac{\epsilon}{3}, \quad n>N_1.$$

同样我们可以找到 $N_2\in\mathbb{N}$ 满足

$$I_3<\frac{\epsilon}{3}, \quad n>N_2.$$

对 I_2 有

$$I_2\le\frac{\epsilon}{6\pi}\int_{-\delta}^{\delta}F_n(y)dy\le\frac{\epsilon}{6\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_n(y)dy\le\frac{\epsilon}{3}.$$

这样对任意 $\epsilon>0$ 存在 $n>N:=\max\{N_1,N_2\}$ 满足 $|f(x)-\sigma_n(f)(x)|<\epsilon$ 只要 $x\in[-\pi,\pi]$.

(E) 回顾 $f\in R^2([a,b])$ 如果 $f,|f|^2\in R([a,b])$. 在 $R^2([a,b])$ 中函数列 $\{f_n\}_{n\ge1}\to f$ 如果 $f_n,f\in R^2([a,b])$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b|f_n(x)-f(x)|^2dx=0.$$

下面事实是显然的:

(i) $f\in R^2([a,b])\Rightarrow|f|\in R([a,b])$. 事实上,

$$\int_a^b|f(x)|dx\le\frac{1}{2}\left(\int_a^b|f(x)|^2dx+b-a\right).$$

(ii) $f, g \in R^2([a,b]) \Rightarrow |fg| \in R([a,b])$ 且 $f+g \in R^2([a,b])$. 事实上我们有

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

和

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^2 dx\right)^{1/2} \le \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

现在来证明 (16.4.4). 根据**引理 16.5** 可知对任意 $\epsilon > 0$ 存在整数 $N \in \mathbb{N}$ 满足

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(f)(x)|^2 dx < \epsilon$$

只要 $n \ge N$. 因为

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(f)(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{1\le k\le n}(a_k^2 + b_k^2)\right],$$

所以, 只要 $n \ge N$,

$$0 \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{1\le k\le n}(a_k^2 + b_k^2)\right] < \epsilon. \quad \square$$

引理 16.4. (最佳逼近)

假设 $f \in R([-\pi,\pi])$. 对任意三角多项式

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{1\le k\le n}(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

我们有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(f)(x)|^2 dx \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_n(x)|^2 dx. \tag{16.4.5}$$

证: 由于 $f - T_n \in R([-\pi,\pi])$, 我们定义

$$\Delta_n := \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_n(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

计算得到

$$\begin{aligned}
\Delta_n^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-R_n(x)|^2dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx - 2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)T_n(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi}T_n^2(x)\,dx\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left[\frac{\alpha_2}{2}+\sum_{1\le k\le n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right]dx \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{1\le k\le n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right]^2 dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx - \frac{\alpha_0 a_0}{2} - \sum_{1\le k\le n}(\alpha_k a_k+\beta_k b_k) + \frac{\alpha_0^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{1\le k\le n}(\alpha_k^2+\beta_k^2) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx + \frac{1}{2}\left[\frac{(\alpha_0-a_0)^2}{2}+\sum_{1\le k\le n}(\alpha_k-a_k)^2+(\beta_k-b_k)^2\right] \\
&\quad - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{1\le k\le n}(a_k^2+b_k^2)\,.
\end{aligned}$$

另一方面

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(f)(x)|^2dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{1\le k\le n}(a_k^2+b_k^2)\,.$$

因此

$$\begin{aligned}
&\Delta_n^2 - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(f)(x)|^2dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{(\alpha_0-a_0)^2}{2}+\sum_{1\le k\le n}(\alpha_k-a_k)^2+(\beta_k-b_k)^2\right] \ \ge\ 0.
\end{aligned}$$

故得到 (16.4.5). □

引理 16.5

如果 $f\in R([-\pi,\pi])$, 则在 $R^2([-\pi,\pi])$ 上有 $S_n(f)\to f$. 即,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(f)(x)|^2dx = 0. \tag{16.4.6}$$

♡

证: 对任意 $m<n$ 我们有

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(f)(x)|^2dx \le \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_m(f)(x)|^2dx$$

这是由于**引理 16.4**. 因此数列

$$\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(f)(x)|^2dx\right\}_{n\ge 1}$$

是单调递减的. 根据连续函数的 Weierstrass 定理我们可以找到函数 $g\in C([-\pi,\pi])$ 满足 $g(-\pi)=g(\pi)$ 使得

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|^2dx < \frac{\epsilon}{4}$$

对给定的 $\epsilon > 0$ 成立. 根据 (D), 存在三角多项式

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{1\le k\le n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

使得

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |g(x) - T_n(x)| < \sqrt{\frac{\epsilon}{8\pi}}$$

成立. 故

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_n(x)|^2 dx \le 2\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 + 2\int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - T_n(x)|^2 dx < \epsilon.$$

再次利用**引理 16.4** 推出

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(f)(x)|^2 dx \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_n(x)|^2 dx < \epsilon.$$

故得到 (16.4.6). □

注 16.1

我们可以找到三角级数 $T(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n\ge1}(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$ 使得对任何可积周期函数 $f(x)$ 有 $S(f)(x) \ne T(x)$. 事实上, 考虑三角级数

$$T(x) := \sum_{n\ge1} \frac{\cos(nx)}{\sqrt{n}}.$$

如果 $T(x) = S(f)(x)$, 则 (16.4.4) 推出

$$\infty = \sum_{n\ge1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx < \infty$$

产生矛盾! ♣

公式 (16.4.4) 可显然作推广. 如果 $f, g \in R([-\pi,\pi])$, 则

$$\frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n\ge1}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx, \tag{16.4.7}$$

这里

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n\ge1}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

和

$$g(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n\ge1}(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx).$$

练习 16.25

验证 (16.4.7). ♠

例 16.16

考虑级数 $f(x) = \frac{x^2}{2} - \pi x, 0 \le x \le 2\pi$. 因为

$$\frac{\pi - x}{2} \sim \sum_{n\ge1} \frac{\sin nx}{n}$$

所以

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\pi - t}{2}dt = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\int_0^x \frac{\sin nt}{n}dt = \frac{1}{2}\left[-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} + \sum_{n\geq 1}\frac{cosnx}{n^2}\right].$$

故

$$\frac{x^2}{2} - \pi x = -\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n\geq 1}\frac{2\cos nx}{n^2}, \quad x \in [0, 2\pi]. \tag{16.4.8}$$

16.5 等周不等式

等周不等式[12], 直到今天, 几何学家都还在讨论与这个有关的命题:

由给定长度的简单闭曲线所围成的图形中, 圆的面积最大.

传说这是 Carthage 的开国女皇Dido 提出的问题. 古代希腊数学家没有对这个命题给出严格的证明, 因为曲线这样的观念要到微积分出现后才比较容易处理. 所以这个重要的命题直到十九世纪才得到完满的解答, 但是十八世纪时Euler 和Lagrange 在发展变分法时, 就讨论过这个问题.

到目前为止, 这个不等式至少有几十个不同的证明[13], 其中以瑞士数学家Jakob Steiner 在 1838 年用的对称化方法[14]最为出色。一般人认为第一个给出等周不等式严格证明的是德国数学家Karl Weierstrass, 他的方法是变分法[15].

在适当处理后, 我们发现使等周不等式成立的常数和几何图形处在的空间, 息息相关. 等周不等式可以看作如下的不等式 (16.5.3):

$$A \leq CL^2,$$

其中 A 是闭曲线围着的面积, 而 L 是闭曲线的长度, $C = 1/4\pi$,

再次回顾曲线的基本概念. 参数曲线 γ 定义为映射 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$. γ 的像集称为**曲线**并记为 Γ. 曲线是**简单的**如果自身不相交, 称为是**闭的**如果两个端点重合. 我们可以把 γ 延拓成周期为 $b - a$ 的 $\mathbb{R}$ 上的周期函数, 从而可以把 γ 看成是圆上的函数. 更进一步 γ 的参数诱导出 Γ 上的定向: 参数 s 从 a 到 b.

假设: 我们总是假设 γ 是 C^1 的, 且其导数 $\dot\gamma$ 满足 $\dot\gamma(s) \neq 0$.

任何 C^1 双射 $s : [c, d] \to [a, b]$ 给出了 Γ 的另一个参数化

$$\eta(t) := \gamma(s(t)).$$

[12]部分内容参考了丘成桐《几何二讲》的讲座, 2021.

[13]Osserman, R. *The isoperimetric inequality*, Bull. AMS., **84**(1978), 1182–1238.

[14]Steiner, J. *Einfacher Beweis der isoperimetrischen Hauptsätze*, J. reine angew Math., **18** (1838), 281–296; and Gesammelte Werke Vol. **2**, pp.77–91, Reimer, Berlin, 1882.

[15]Weierstrass, K. *Vorl. ueber Variationsrechnung*, Mathematische Werke, Vol. **7**, Mayer and Müller, Leipzig, 1927.

注意到条件“γ 是闭的和简单的”和所选择的参数化无关. 称上述两个参数化 γ 和 η 是**等价的**如果 $\dot{s}(t) > 0$ 对所有 $t \in [c, d]$ 都成立; 这意味着 η 和 γ 诱导出曲线 Γ 上相同的定向. 如果 $\dot{s}(t) < 0$ 则此时 η 转变定向.

16.5.1 弧长和面积

假设 γ 的参数方程为 $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ 则曲线 Γ 的长度定义为

$$L(\gamma) := \int_a^b |\dot{\gamma}(s)| ds = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2} ds. \tag{16.5.1}$$

γ 的长度不依赖于所选的参数化. 事实上如果 $\gamma(s(t)) = \eta(t)$, 这里 $s : [c, d] \to [a, b]$ 是某个 C^1 双射, 则

$$\int_a^b |\dot{\gamma}(s)| ds = \int_c^d |\dot{\gamma}(s(t))||\dot{s}(t)| dt = \int_c^d |\dot{\eta}(t)| dt.$$

称 γ 是**弧长参数化 (parametrization by arc-length)** 如果 $|\dot{\gamma}(s)| = 1$ 对所有 s 都成立. 这也就是说 $\gamma(s)$ 以常速度行进从而 Γ 的长度为 $b - a$. 因此, 在差一个可能的平移变换外, 弧长的参数化区间记作 $[0, \ell]$, 这里 $\ell := L(\gamma)$.

练习 16.26

令 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ 是闭曲线 Γ 的参数化.

(i) 证明 γ 是弧长参数化 $\iff$ 从 $\gamma(a)$ 到 $\gamma(s)$ 的曲线长度为 $s - a$, 即,

$$\int_a^s |\dot{\gamma}(t)| dt = s - a.$$

(ii) 证明任何曲线 Γ 都有弧长参数化.

(iii) 如果 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, 则曲线长度等于

$$\frac{1}{2} \int_a^b [x(s)\dot{y}(s) - y(s)\dot{x}(s)] ds = \int_a^b x(s)\dot{y}(s) ds = -\int_a^b y(s)\dot{x}(s) ds.$$

(iv) 定义 γ 的**反向参数化 (reverse parametrization)** 为 $\gamma^- : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ 其中 $\gamma^-(t) := \gamma(b + a - t)$. γ^- 的像是 Γ, 但是 $\gamma^-(t)$ 和 $\gamma(t)$ 沿着相反的方向行进. 即 γ^- 把曲线的方向“反向”. 证明

$$\int_\gamma (x dy + y dx) = -\int_{\gamma^-} (x dy - y dx).$$

16.5.2 等周不等式

假设 Γ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的 Jordan 曲线并令 D 是由此曲线所围成的区域. 根据 Green 公式 (13.9.2) 区域 D 的面积为

$$A = \frac{1}{2} \left| \int_\Gamma (x dy - y dx) \right|. \tag{16.5.2}$$

定理 16.28. (等周不等式)

假设 Γ 是 $\mathbb{R}^2$ 中长为 L 的 Jordan 曲线并令 A 是由此曲线所围成的区域的面积. 则

$$A \le \frac{L^2}{4\pi} \tag{16.5.3}$$

且等号取到当且仅当 Γ 是圆.

证: 不失一般性我们不妨假设 $L := 2\pi$. 令

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(s) := (x(s), y(s))$$

是曲线 Γ 的弧长参数化, 即,

$$\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2 = 1$$

对所有 $s \in [0, 2\pi]$ 都成立. 这意味着

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2\right] ds = 1. \tag{16.5.4}$$

因为曲线是闭的, 所以函数 $x(s)$ 和 $y(s)$ 都是以 2π 为周期的, 故

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^2 \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) = 1, \tag{16.5.5}$$

根据 (16.5.4) 和 (16.4.4), 这里

$$x(s) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{\sqrt{-1}ns}, \quad y(s) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n e^{\sqrt{-1}ns}.$$

因为 $x(s)$ 和 $y(s)$ 都是实值的, 所以我们得到 $a_n = \overline{a_{-n}}$ 和 $b_n = \overline{b_{-n}}$. 因此根据 (16.4.7), 得到

$$A = \frac{1}{2}\left|\int_0^{2\pi} [x(s)\dot{y}(s) - y(s)\dot{x}(s)]\, ds\right| = \pi\left|\sum_{n\in\mathbb{N}} n\left(a_n\overline{b_n} - b_n\overline{a_n}\right)\right|.$$

从不等式

$$\left|a_n\overline{b_n} - b_n\overline{a_n}\right| \le 2|a_n||b_n| \le |a_n|^2 + |b_n|^2, \tag{16.5.6}$$

和 (16.5.5) 我们得到

$$A \le \pi\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^2\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) \le \pi.$$

当 $A = \pi$ 时得到

$$x(s) = a_{-1}e^{-\sqrt{-1}s} + a_0 + a_1 e^{\sqrt{-1}s}, \quad y(s) = b_{-1}e^{-\sqrt{-1}s} + b_0 + b_1 e^{\sqrt{-1}s}$$

这是因为 $|n| < |n|^2$ 仅当 $|n| \ge 2$ 时成立. 我们知道 $x(s)$ 和 $y(s)$ 都是实值的, 因此 $a_{-1} = \overline{a_1}$ 和 $b_{-1} = \overline{b_1}$. 恒等式 (16.5.5) 推出 $2(|a_1|^2 + |b_1|^2) = 1$, 但是在 (16.5.6) 中我们取等式从而必有 $|a_1| = |b_1| = 1/2$. 记 $a_1 = \frac{1}{2}e^{\sqrt{-1}\alpha}$ 和 $b_1 = \frac{1}{2}e^{\sqrt{-1}\beta}$. $1 = 2|a_1\overline{b_1} - \overline{a_1}b_1|$ 这个事实蕴含了 $|\sin(\alpha-\beta)| = 1$, 所以 $\alpha - \beta = k\pi/2$ 其中 k 是整数. 由此我们得到

$$x(s) = a_0 + \cos(\alpha + s), \quad y(s) = b_0 \pm \sin(\alpha + s)$$

这里 $y(s)$ 中的正负号依赖于整数的 k 的奇偶性. 但是无论如何我们证明了 Γ 是一圆. □

练习 16.27

本练习构造 $[0,1]$ 上的 (Riemann) 可积函数使得它的不连续点集是稠密的. 从而在 $[0,1]$ 上得到了一个几乎处处不连续的可积函数.

(a) 取 $f(x)=0$ 当 $x<0$ 时, 和 $f(x)=1$ 当 $x\geq 0$ 时. 选择 $[0,1]$ 内的可数稠密数列 $\{r_n\}_{n\geq 1}$(比如取 $[0,1]$ 内的有理数点). 则证明函数

$$F(x):=\sum_{n\geq 1}\frac{f(x-r_n)}{n^2}$$

是可积的且仅在 r_n 处是不连续的.

(b) 接下来考虑函数

$$F(x):=\sum_{n\geq 1}\frac{g(x-r_n)}{3^n},$$

这里 $g(x)=\sin(1/x)$ 当 $x\neq 0$ 时和 $g(0)=0$. 证明 F 时可积的, 在每个 $x=r_n$ 处时不连续的, 且在 $[0,1]$ 中的任意子区间内是不单调的.

(c) Riemann 最初是研究函数

$$F(x):=\sum_{n\geq 1}\frac{(nx)}{n^2},$$

这里 $(x)=x$ 当 $x\in(-1/2,1/2]$ 时并把它按照周期函数延拓到整个 $\mathbb{R}$ 上来, 即, $(x+1)=(x)$. 可以证明 F 在 $x=m/2n$, 这里 $m,n\in\mathbb{Z}$ 且满足 m 是奇数和 $n\neq 0$, 处是不连续的.

16.6 大筛法简介及在孪生素数猜想中的应用

本节主要内容来源于Tenenbaum 的专著 (见参考文献). 回顾下著名的孪生素数猜想, **问题 1.2**. 为了更好的来理解这个猜想, Hardy 和Littlewood 在 1922 年提出了如下的猜想

$$\mathbf{TP}(x)\sim 2\prod_{2<p\in\mathbb{P}}\left[1-\frac{1}{(p-1)^2}\right]\frac{x}{\ln^2 x},\quad x\to+\infty, \tag{16.6.1}$$

这里 $\mathbb{P}$ 表示全体的素数, 和

$$\mathbf{TP}(x):=|\mathbb{TP}\cap[1,x]|,\quad \mathbb{TP}:=\{p\in\mathbb{P}|p+2\in\mathbb{P}\}.$$

常数

$$\prod_{2<p\in\mathbb{P}}\left[1-\frac{1}{(p-1)^2}\right]\approx 0.66016181584686957392781211001 4\cdots$$

称为 **Hardy-Littlewood 孪生素数常数**.

Brun[16] 利用他自己创造的 **Brun 组合筛法** (1917 - 1924) 证明了

$$\mathbf{TP}(x)\ll x\left(\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right)^2, \tag{16.6.2}$$

[16] Viggo Burn, 1885 年 10 月 13 日 - 1978 年 8 月 15 日, 挪威数学家, 奥斯陆大学毕业, 挪威皇家科学与文学院院士, 主要研究方向是数论.

这里Vinogradov[17] 记号 $f \ll g$ 表示为 $|f| \le C|g|$, 其中 C 是某个正常数.

16.6.1 大筛法的解析形式

大筛法是Linnik[18] 在 1941 年引入的. Davenport[19] 和Halberstam[20] 最早将解析形式从大筛法中剥离出来 (1966).

假设 $\{a_n\}_{n\ge0}$ 是复数列. 对给定的整数 $M \ge -1$ 和 $N \ge 1$ 定义三角多项式

$$\mathcal{S}(\alpha; M, N, \{a_n\}_{n\ge0}) \equiv \mathcal{S}(\alpha) := \sum_{M<n\le M+N} a_n e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha n}. \tag{16.6.3}$$

大筛法的解析形式是指如下形式的不等式

$$\sum_{1\le i\le R} |\mathcal{S}(\alpha_i)|^2 \le \Delta(N,\delta) \sum_{M<n\le M+N} |a_n|^2, \tag{16.6.4}$$

对满足条件

$$\min_{1\le i<j\le R} ||\alpha_j - \alpha_i|| > \delta > 0,$$

的任意 R-元实数组 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_R\}$ 都成立, 这里 $||u||$ 表示实数 u 到整数集 $\mathbb{Z}$ 的距离.

定理 16.29. (Montgomery-Vaughan, 1978; Selberg)

在大筛法不等式 (16.6.4) 中可以取

$$\Delta(N,\delta) = N + \frac{1}{\delta} - 1. \tag{16.6.5}$$

♡

Montgomery 和Vaughan 证明了可以取 $\Delta(N,\delta) = N + 1/\delta$. 但是下面例子表明 (16.6.5) 是最佳的, 即存在 α_i, N, δ 使得 (16.6.5) 成立.

例 16.17

对任意 $R \in \mathbb{Z}_{\ge1}$, 定义 $\alpha_i := i/R, 1 \le i \le R$. 则得到 $\delta = 1/R$. 当 $N \equiv 1 (\mathrm{mod}\ R)$ 和 $M = -1$ 考虑复数列

$$a_n := \begin{cases} 1, & R|n, \\ 0, & R\nmid n. \end{cases}$$

---

[17] Ivan Matveevich Vinogradov, 1891 年 9 月 14 日 - 1983 年 3 月 20 日, 前苏联数学家, 圣彼得堡大学毕业, 苏联科学院院士, 主要研究领域是解析数论. 是现代解析数论的创始人之一, 一直担任 Steklov 数学所所长直到去世 (1941 年- 1946 年是由Sergei Sobolov 担任). 最重要的工作是在 1937 年证明了每个充分大的奇数都可表为三个素数之和, 即证明了充分大时的奇数 Goldbach 猜想或 Goldbach 弱猜想. 2012 年Terence Tao 证明了每个奇数都可表为最多五个素数之和. 2013 年Harald Helfgott 改进了大弧和小弧估计从而最终证明了奇数 Goldbach 猜想, 即每个奇数都可表为三个素数之和.

[18] Yuri Vladimirovich Linnik, 1915 年 1 月 8 日 - 1972 年 6 月 30 日, 前苏联数学家, 圣彼得堡大学毕业, 苏联科学院院士, 主要研究邻域是数论、概率论和数学统计.

[19] Harold Davenport, 1907 年 10 月 30 日 - 1969 年 6 月 9 日, 英国数学家, 剑桥大学毕业, 英国皇家学会会员. 主要研究领域是数论.

[20] Heini Halberstam, 1926 年 9 月 11 日 - 2014 年 1 月 25 日, 英国和智利数学家, 伦敦大学学院毕业, 美国数学会会员, 主要研究领域是解析数论和组合数论.

计算得到

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i\le R}|\mathcal{S}(\alpha_i)|^2 &= \sum_{1\le i\le R}\left|\sum_{0\le n\le N-1,\ n\equiv 0(\mathrm{mod}\ R)} e^{2\pi\sqrt{-1}(in/R)}\right|^2\\ &= \sum_{1\le i\le R}\left|\sum_{0\le n\le N-1,\ n\equiv 0(\mathrm{mod}\ R)} 1\right|^2 = R\left(\frac{N-1}{R}+1\right)^2\\ &= (N-1+R)\left(1+\frac{N-1}{R}\right) = (N+\delta^{-1}-1)\sum_{0\le n\le N-1}|a_n|^2.\end{aligned}$$

引理 16.6

假设 (c_{nr}) 是 $N\times R$ 复矩阵. 则下面关于正实数 D 的三个断言等价:

(1) 对任何 $x_n\in\mathbb{C}$ 有

$$\sum_{1\le r\le R}\left|\sum_{1\le n\le N}c_{nr}x_n\right|^2\le D\sum_{1\le n\le N}|x_n|^2;$$

(2) 对任何 $x_n, y_r\in\mathbb{C}$ 有

$$\left|\sum_{1\le n\le N,\ 1\le r\le R}c_{nr}y_rx_n\right|^2\le D\sum_{1\le n\le N}|x_n|^2\sum_{1\le r\le R}|y_r|^2;$$

(3) 对任何 $y_r\in\mathbb{C}$ 有

$$\sum_{1\le n\le N}\left|\sum_{1\le r\le R}c_{nr}y_r\right|^2\le D\sum_{1\le r\le R}|y_r|^2.$$

证: (1) $\Longleftrightarrow$ (2). 假设 (1) 成立, 则得到

$$\begin{aligned}\left|\sum_{1\le n\le N,\ 1\le r\le R}c_{nr}y_rx_n\right|^2 &= \left|\sum_{1\le r\le R}y_r\cdot\sum_{1\le n\le N}c_{nr}x_n\right|^2\\ \le \sum_{1\le r\le R}|y_r|^2\sum_{1\le r\le R}\left|\sum_{1\le n\le N}c_{nr}x_n\right|^2 &\le D\sum_{1\le r\le R}|y_r|^2\sum_{1\le n\le N}|x_n|^2.\end{aligned}$$

反之假设 (2) 成立. 定义

$$L_r:=\sum_{1\le n\le N}c_{nr}x_n,\quad y_r:=\overline{L_r}.$$

从而得到

$$\left(\sum_{1\le r\le R}|L_r|^2\right)\le D\sum_{1\le n\le N}|x_n|^2\cdot\sum_{1\le r\le R}|L_r|^2.$$

类似可证 (3) $\Longleftrightarrow$ (2). □

引理 16.7

假设 $\{\alpha_r\}_{1\le r\le R}$ 是固定的一组实数. 对任意满足条件

$$b_n > 0, \quad M < n \le M+N$$

的非负实数列 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 和任意正数 B, 下面两个断言等价:

(1) 对任意 $a_n \in \mathbb{C}$ 有

$$\sum_{1\le r\le R} |\mathcal{S}(\alpha_r)|^2 \le B \sum_{M<n\le M+N} \frac{|a_n|^2}{b_n}.$$

(2) 对任意 $y_r \in \mathbb{C}$ 有

$$\sum_{M<n\le M+N} b_n \left| \sum_{1\le r\le R} y_r e^{2\pi\sqrt{-1}n\alpha_r} \right|^2 \le B \sum_{1\le r\le R} |y_r|^2.$$

证: (1) 等价于

$$\sum_{1\le r\le R} \left| \sum_{M<n\le M+N} a_n \sqrt{b_n} e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha_r n} \right|^2 \le B \sum_{1\le n\le N} |a_n|^2, \quad \forall\, a_n \in \mathbb{C}.$$

在**引理 16.7** 中取 $c_{nr} = \sqrt{b_n} e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha_r n}$ 得证. □

推论 16.7

假设

$$B(\alpha) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n e^{2\pi\sqrt{-1}n\alpha}$$

是一收敛的 Fourier 级数, 其中 b_n 是非负实数且满足 $b_n > 0$, $M < n \le M+N$. 则对每个正数 B, 只要满足

$$\sum_{1\le r,s\le R} y_r \overline{y_s} B(\alpha_r - \alpha_s) \le B \sum_{1\le r\le R} |y_r|^2, \quad \forall\, y_r \in \mathbb{C},$$

就有不等式

$$\sum_{1\le r\le R} |\mathcal{S}(\alpha_r)|^2 \le B \sum_{M<n\le M+N} \frac{|a_n|^2}{b_n}, \quad \forall\, a_n \in \mathbb{C},$$

成立.

证: 把假设条件展开得到

$$\begin{aligned} B \sum_{1\le r\le R} |y_r|^2 &\ge \sum_{1\le r,s\le R} y_r \overline{y_s} \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n e^{2\pi\sqrt{-1}n(\alpha_r-\alpha_s)} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n \sum_{1\le r,s\le R} y_r \overline{y_s} e^{2\pi\sqrt{-1}n\alpha_r} e^{-2\pi\sqrt{-1}n\alpha_s} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n \left| \sum_{1\le r\le R} y_r e^{2\pi\sqrt{-1}n\alpha_r} \right|^2. \end{aligned}$$

此时结论立即从**引理 16.7** 得到. □

假设 Fourier 级数 $B(\alpha) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n e^{2\pi\sqrt{-1}n\alpha}$ 满足如下条件

(a) $b_n \geq 0\ (n \in \mathbb{Z})$ 和 $b_n \geq 1\ (M < n \leq M+N)$,

(b) $B(\alpha) = 0\ (||\alpha|| \geq \delta)$,

这里 δ 出现在 (16.6.4) 中. 为了方便期间我们不妨再假设

(c) $\delta \in (0, 1/2)$.

此时根据**推论 16.7** 得到只要满足条件

$$\sum_{1\leq r,s\leq R} y_r\overline{y_s}B(\alpha_r-\alpha_s) \leq B\sum_{1\leq r\leq R}|y_r|^2, \quad \forall\, y_r \in \mathbb{C}$$

就有不等式

$$\sum_{1\leq r\leq R}|\mathcal{S}(\alpha_r)|^2 \leq \sum_{M<n\leq M+N}\frac{B}{b_n}|a_n|^2, \quad \forall\, a_n \in \mathbb{C}$$

成立. 但是根据条件 (b) 可知

$$\min_{1\leq r,s\leq R}||\alpha_r-\alpha_s|| \geq \delta > 0 \quad \Longrightarrow \quad B(\alpha_r-\alpha_s)=0;$$

因此得到 (16.6.4) 这是因为 $\Delta(N,\delta) = B(0)$ (即若所有的 α_r 都相等就得到 $B = B(0)$).

下面的工作就是具体构造满足上述条件 (a), (b) 和 (c) 的 Fourier 级数 $B(\alpha) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n e^{2\pi\sqrt{-1}n\alpha}$. 假设 $b \in L^1(\mathbb{R})$ (Lebesgue 绝对可积, Lebesgue 积分的定义在之后的章节中给出, 暂且可当作是 Riemann 绝对可积) 的 Fourier 变换

$$\widehat{b}(\theta) := \int_{-\infty}^{+\infty} b(t)e^{-2\pi\sqrt{-1}\theta t}dt$$

的紧撑集包含在 $[-\delta, \delta]$ 内. 根据 Poisson 求和公式, **定理 16.22**, 得到

$$B(\alpha) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n e^{2\pi\sqrt{-1}n\alpha} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{b}(k-\alpha), \quad b_n := b(n). \tag{16.6.6}$$

事实上, 虽然 Poisson 求和公式对 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 成立, 但是对我们选择的 $b \in L^1(\mathbb{R})$ 也是成立的. 具体证明如下, 主要是用到了 Fourier 变换的紧撑集包含在某个闭区间内. 虽然 Fourier 变换可以定义在 $L^1(\mathbb{R})$ 上, 但此时 Fourier 反演公式 (16.3.4) 不一定成立. 如果 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 且 $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ 则 (16.3.4) 也成立 (具体证明在之后的章节中给出, 或参考Grafakos 的专著 (第 117 页)). 因为 $\widehat{b}$ 的紧撑集落在 $[-\delta, \delta]$ 内, 所以 $\widehat{b} \in L^1(\mathbb{R})$ 从而得到

$$b(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{b}(\theta)e^{2\pi\sqrt{-1}\theta t}d\theta = \int_{-\delta}^{\delta}\widehat{b}(\theta)e^{2\pi\sqrt{-1}\theta t}d\theta. \tag{16.6.7}$$

故对 $N \geq 1$ 和 $|\alpha| \leq 1/2$ 得到, 此时 $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{b}(k-\alpha) = \widehat{b}(-\alpha)$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{|n|\leq N} b(n)e^{2\pi\sqrt{-1}n\alpha} - \int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} b(t)e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha t}dt \\
= &\sum_{|n|\leq N}\int_{-\delta}^{\delta}\widehat{b}(\theta)e^{2\pi\sqrt{-1}(\theta+\alpha)n}d\theta - \int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}}\left[\int_{-\delta}^{\delta}\widehat{b}(\theta)e^{2\pi\sqrt{-1}(\theta+\alpha)t}d\theta\right]dt \\
= &\int_{-\delta+\alpha}^{\delta+\alpha}\widehat{b}(\theta-\alpha)\left[\sum_{|n|\leq N}e^{2\pi\sqrt{-1}\theta n} - \int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}}e^{2\pi\sqrt{-1}\theta t}dt\right]d\theta.
\end{aligned}$$

利用 (16.2.7) 得到

$$\sum_{|n|\le N} b(n)e^{2\pi\sqrt{-1}n\alpha} - \int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} b(t)e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha t}dt = \int_{-\delta+\alpha}^{\delta+\alpha} \lambda_\alpha(\theta)\sin[(2N+1)\pi\theta]d\theta, \quad (16.6.8)$$

这里

$$\lambda_\alpha(\theta) := \widehat{b}(\theta-\alpha)\left[\frac{1}{\sin(\pi\theta)} - \frac{1}{\pi\theta}\right].$$

因为 $\lambda_\alpha \in L^1([-\delta+\alpha, \delta+\alpha])$, 所以从**定理 16.6** 得到 (16.6.8) 右边当 $N\to+\infty$ 时趋于 0. 故

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} b(n)e^{2\pi\sqrt{-1}n\alpha} = \int_{-\infty}^{+\infty} b(t)e^{2\pi\sqrt{-1}t}dt = \widehat{b}(-\alpha) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{b}(k-\alpha).$$

根据周期性对其它 α 上述等式亦成立.

从 (16.6.6) 马上得到条件 (b) 成立. 接下来要去寻找可积函数 $b\in L^1(\mathbb{R})$ 使得

$$B(0) = \widehat{b}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} b(t)\,dt \quad (16.6.9)$$

足够小且满足限制条件

$$b(t)\ge 0\ (t\in\mathbb{R}), \quad b(t)\ge 1\ (M+1\le t\le M+N), \quad \widehat{b}(\theta)=0\ (|\theta|\ge\delta). \quad (16.6.10)$$

最简单的 $b(t)$ 是 Fejér 型核,

$$b(t) := C\sum_{\delta(M+1)\le n\le\delta(M+N)}\left[\frac{\sin[\pi(n-2\delta t)/2]}{\pi(n-2\delta t)/2}\right]^2.$$

计算得到

$$\begin{aligned}
\widehat{b}(\theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} b(t)e^{-2\pi\sqrt{-1}\theta t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi\sqrt{-1}\theta t}\left\{C\sum_{\delta(M+1)\le n\le\delta(M+N)}\left[\frac{\sin\frac{\pi(n-2\delta t)}{2}}{\frac{\pi(n-2\delta t)}{2}}\right]^2\right\}dt \\
&= C\sum_{\delta(M+1)\le n\le\delta(M+N)}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\sin\frac{\pi(n-2\delta t)}{2}}{\frac{\pi(n-2\delta t)}{2}}\right]^2 e^{-2\pi\sqrt{-1}\theta t}dt \\
&= \frac{C}{\pi\delta}\sum_{\delta(M+1)\le n\le\delta(M+N)}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 e^{\pi\sqrt{-1}(-n\theta\delta^{-1})}e^{2\theta\delta^{-1}y\sqrt{-1}}dy \\
&= \frac{C}{\pi\delta}\sum_{\delta(M+1)\le n\le\delta(M+N)} e^{\pi\sqrt{-1}(-n\theta\delta^{-1})}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2\cos(2\theta\delta^{-1}y)\,dy
\end{aligned}$$

这里 $y:=\pi(n-2\delta t)/2$. 为了求最后一个含参变量积分, 引入 $A:=2\theta/\delta$ 并考虑

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2\cos(Ay)\,dy = 2\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2\cos(Ay)\,dy.$$

分部积分得到

$$
\begin{aligned}
I &= 2y\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 \cos(Ay)\Big|_0^{+\infty} - 2\int_0^{+\infty} y\Big[-A\sin(Ay)\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 \\
&\quad + 2\cos(Ay)\cdot\frac{\sin y}{y}\cdot\frac{y\cos y-\sin y}{y^2}\Big]dy \\
&= 2A\int_0^{+\infty}\frac{\sin(Ay)\sin^2 y}{y}dy - 2\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2y)\cos(Ay)}{y}dy + 2I
\end{aligned}
$$

从而得到

$$
I = 2\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2y)\cos(Ay)}{y}dy - 2A\int_0^{+\infty}\frac{\sin(Ay)\sin^2 y}{y}dy.
$$

利用三角函数积化和差公式

$$
\sin(Ay)\sin y = \frac{\cos[(A-1)y]-\cos[(A+1)y]}{2}
$$

得到

$$
\begin{aligned}
I &= 2\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2y)\cos(Ay)}{y}dy - A\int_0^{+\infty}\frac{\sin y\cos[(A-1)y]}{y}dy \\
&\quad + A\int_0^{+\infty}\frac{\sin y\cos[(A+1)y]}{y}dy.
\end{aligned}
$$

利用 (15.2.11) 和三角函数积化和差公式

$$
\sin(ay)\cos(by) = \frac{\sin[(a+b)y]+\sin[(a-b)y]}{2}
$$

得到

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{\sin(ay)\cos(by)}{y}dy &= \int_0^{+\infty}\frac{\sin[(a+b)y]+\sin[(a-b)y]}{2y}dy \\
&= \frac{\pi}{4}\left[\mathrm{sgn}(a+b)+\mathrm{sgn}(a-b)\right].
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{\pi}{2}\left[\mathrm{sgn}(2+A)+\mathrm{sgn}(2-A)\right] - \frac{\pi}{4}A\left[\mathrm{sgn}(2+A)-2\mathrm{sgn}(A)-\mathrm{sgn}(2-A)\right] \\
&= \left\{\begin{array}{cc}
0, & A<-2, \\
0, & A=-2, \\
\pi+\frac{\pi}{2}A, & -2<A<0, \\
\pi, & A=0, \\
\pi-\frac{\pi}{2}A, & 0<A<2, \\
0, & A=2, \\
0, & A>2
\end{array}\right\} = \pi\left(1-|A/2|\right)^+.
\end{aligned}
$$

最后得到

$$
\begin{aligned}
\widehat{b}(\theta) &= \frac{C}{\pi\delta}\sum_{\delta(M+1)\le n\le\delta(M+N)} e^{\pi\sqrt{-1}(-n\theta\delta^{-1})}\pi\left(1-|A/2|\right)^+ \\
&= \frac{C}{\delta}\left(1-|\theta\delta^{-1}|\right)^+ \sum_{\delta(M+1)\le n\le\delta(M+N)} e^{\pi\sqrt{-1}(-n\theta\delta^{-1})}.
\end{aligned}
$$

这样就得到粗略但实用的上界估计

$$\widehat{b}(0) \leq \frac{C}{\delta} \sum_{\delta(M+1) \leq n \leq \delta(M+N)} \leq \frac{C}{\delta}(\delta N - \delta + 1) = C\left(N - 1 + \frac{1}{\delta}\right).$$

Selberg 利用如下引理选择了一个较好的 $b(t)$.

引理 16.8

令

$$F(z) := \left[\frac{\sin(\pi z)}{\pi}\right]^2 \left[\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(z-n)^2} - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(z+n)^2} + \frac{2}{z}\right].$$

则 F 是 z 的整函数满足

$$F(z) = O\left(e^{2\pi|\mathrm{Im}(z)|}\right), \quad F(x) \geq \mathrm{sgn}(x)\ (x \in \mathbb{R}), \quad F(0) = 1,$$

和

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [F(x) - \mathrm{sgn}(x)] dx = 1. \tag{16.6.11}$$

♡

证: F 是满足

$$F(z) = O(\exp(2\pi|\mathrm{Im}(z)|))$$

的整函数是显然的, 这是因为如果 $z = x + \sqrt{-1}y$ 且 $|y| \geq 1$ 则得到 $|z \pm n|^2 \geq 1 + (|x| - n)^2$ 对任何 $n \geq 0$ 都成立. 回顾 (16.3.20)

$$\left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right]^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x-n)^2} = 1, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

但是注意到上述公式对 $x \in \mathbb{Z}$ 也成立, 原因是 $[\sin(\pi x)/\pi]^2$ 把可能的极点都吃掉了. 根据复变函数知识 (在之后的章节中会证明) 上述公式对 $z \in \mathbb{C}$ 也成立, 即

$$\left[\frac{\sin(\pi z)}{\pi}\right]^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = 1, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{16.6.12}$$

对任意 $x > 0$ 有

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(x+n)^2} \leq \sum_{n \geq 1} \int_{x+n-1}^{x+n} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{x} = \sum_{n \geq 0} \int_{x+n}^{x+n+1} \frac{du}{u^2} \leq \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(x+n)^2}.$$

此时得到

$$\begin{aligned} F(x) &= \left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right]^2 \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x-n)^2} - 2\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(x+n)^2} + \frac{2}{x}\right] \\ &= 1 + 2\left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right]^2 \left[\frac{1}{x} - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(x+n)^2}\right] \geq 1, \quad x > 0. \end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned} F(x) &= \left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right]^2 \left[-\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x-n)^2} + 2\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(-x+n)^2} - \frac{2}{-x}\right] \\ &= -1 + 2\left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right]^2 \left[\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(-x+n)^2} - \frac{2}{-x}\right] \geq -1, \quad x < 0. \end{aligned}$$

当 $x=0$ 时得到

$$F(0)=\lim_{z\to 0}\left[\frac{\sin(\pi z)}{\pi}\right]^2\left(\frac{1}{z^2}+\frac{2}{z}\right)=\lim_{z\to 0}\left[\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}\right]^2=1\geq 0=\mathrm{sgn}(0).$$

最后来证明 (16.6.11). 根据定义有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x)-\mathrm{sgn}(x)]dx &= \int_0^{+\infty}[f(x)-1]dx+\int_{-\infty}^0[F(x)+1]dx\\ = \int_0^{+\infty}[F(x)-1+F(-x)+1]dx &= \int_0^{+\infty}[F(x)+F(-x)]dx\\ = 2\int_0^{+\infty}\left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right]^2dx &= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 1.\ \square\end{aligned}$$

证明定理 16.29. 定义函数

$$b(t):=\frac{F(\delta(t-M-1))+F(\delta(M+N-t))}{2}.$$

计算可得

$$b(t)\geq\begin{cases}\frac{-1+1}{2}=0, & t<M+1,\\ \frac{1+F(\delta(N-1))}{2}\geq 1, & t=M+1,\\ \frac{1+1}{2}=1, & M+1<t<M+N,\\ \frac{F(\delta(N-1))+1}{2}\geq 1, & t=M+N,\\ \frac{1-1}{2}=0, & t>M+N.\end{cases}$$

即满足 (16.6.10) 中的前面两条. 下证也满足 (16.6.10) 中的第三条从而根据 (16.6.11) 得到

$$\begin{aligned}B(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty}b(t)\,dt\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}[b_1(t)+b_2(t)+b_3(t)]dt\\ &= \frac{1}{2}\delta^{-1}+\frac{1}{2}\delta^{-1}+\int_{M+1}^{M+N}dt = \frac{1}{\delta}+N-1,\end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned}b(t) &= \frac{1}{2}[F(\delta(t-M-1))-\mathrm{sgn}(\delta(t-M-1))]\\ &\quad+\frac{1}{2}[F(\delta(M+N-t))-\mathrm{sgn}(\delta(M+N-t))]\\ &\quad+\frac{1}{2}[\mathrm{sgn}(\delta(t-M-1))+\mathrm{sgn}(\delta(M+N-t))]\\ &=: b_1(t)+b_2(t)+b_3(t)\end{aligned}$$

且最后一项满足

$$b_3(t)=\begin{cases}0, & t<M+1,\\ \frac{\mathrm{sgn}(\delta(N-1))}{2}, & t=M+1,\\ 1 & M+1<t<M+N,\\ \frac{\mathrm{sgn}(\delta(N-1))}{2}, & t=M+N,\\ 0, & t>M+N.\end{cases}$$

由于

$$b(z) = O(\exp(2\pi\delta|\mathrm{Im}(z)|))$$

和 $b \in L^1(\mathbb{R})$, 所以 b 在 $\mathbb{R}$ 上有界从而得到 $b \in L^2(\mathbb{R})$. 从 **Paley-Wiener 定理**[21]得到 $\widehat{b}(\theta) = 0$ 只要 $|\theta| \geq \delta$. □

16.6.2 大筛法的算术形式

假设 $\{a_n\}_{M+1\leq n\leq M+N}$ 是复数列并令

$$\mathcal{S}(\alpha) := \sum_{M<n\leq M+N} a_n e^{2\pi\sqrt{-1}n\alpha}.$$

在定理 16.29 中取 (这里 Q 是固定的自然数)

$$\alpha_r = \frac{a}{q}, \quad (a,q)=1, \quad 1 \leq a \leq q, \quad q \leq Q.$$

当 $r \neq s$ 得到

$$||\alpha_r - \alpha_s|| = \left|\left|\frac{a}{q} - \frac{a'}{q'}\right|\right| = \left|\left|\frac{aq' - a'q}{qq'}\right|\right| \geq \frac{1}{Q^2}$$

从而有

$$\sum_{q\leq Q} \sum_{1\leq a\leq q,\ (a,q)=1} |\mathcal{S}(a/q)|^2 \leq (N - 1 + Q^2) \sum_{M<n\leq M+N} |a_n|^2. \tag{16.6.13}$$

对每个素数 $p \in \mathbb{P}$ 定义

$$w(p) := |\{h | 0 \leq h < p,\ n \equiv h\ (\mathrm{mod}\ p) \implies a_n = 0\}|. \tag{16.6.14}$$

不妨假设 $w(p) < p$ 对所有 $p \in \mathbb{P}$ 都成立, 否则对某个 $p_0 \in \mathbb{P}$ 有 $w(p_0) = p_0$ 从而推出 $a_n \equiv 0$. 记 Möbius 函数为

$$\mu(n) := \begin{cases} (-1)^{\omega(n)}, & n \text{ 不含平方因子}, \\ 0, & \text{其余情形} \end{cases}$$

其中 $\omega(n) := \sum_{p|n} 1$. 令

$$g(q) := \mu(q)^2 \prod_{p|q,\ p\in\mathbb{P}} \frac{w(p)}{p - w(p)}. \tag{16.6.15}$$

定理 16.30

在上述记号和假设下, 对所有 $q \geq 1$ 有估计

$$\left|\sum_{M<n\leq M+N} a_n\right|^2 g(q) \leq \sum_{1\leq a\leq q,\ (a,q)=1} |\mathcal{S}(a/q)|^2. \tag{16.6.16}$$

♡

---

[21]该定理是说, 假设 F 是关于 z 的整函数且 $a > 0$, 则下面两个断言等价:

(i) $F|_{\mathbb{R}} \in L^2(\mathbb{R})$ 且 $|F(z)| = O(e^{2\pi a|z|})$,

(ii) 存在函数 $\widetilde{f} \in L^2(\mathbb{R})$ 满足,

$$\widetilde{f}(\xi) = 0\ (|\xi| > a), \quad F(z) = \int_{-a}^{a} \widetilde{f}(\xi) e^{2\pi\sqrt{-1}\xi z} d\xi.$$

证明可参考Katznelson 的专著.

证: 显然 (16.6.16) 等价于

$$|\mathcal{S}(0)|^2 g(q) \le \sum_{1\le a\le q,\ (a,q)=1} |\mathcal{S}(a/q)|^2.$$

因为变换 $a_n \mapsto a_n \exp(2\pi\sqrt{-1}n\beta)$ 并不改变 $w(p)$ 的定义, 所以 (16.6.16) 等价于

$$|\mathcal{S}(\beta)|^2 g(q) \le \sum_{1\le a\le q,\ (a,q)=1} |\mathcal{S}(a/q+\beta)|^2, \quad \beta\in\mathbb{R}. \tag{16.6.17}$$

假设 (16.6.17) 对互素的 q 和 q' 都成立. 则

$$\begin{aligned}\sum_{1\le c\le qq',\ (c,qq')=1} |\mathcal{S}(c/qq')|^2 &= \sum_{1\le a\le q,\ (a,q)=1}\ \sum_{1\le a'\le q',\ (a',q')=1} |\mathcal{S}(a/q+a'/q')|^2 \\ &\ge \sum_{1\le a\le q,\ (a,q)=1} |\mathcal{S}(q/a)|^2 g(q') \ \ge\ |\mathcal{S}(0)|^2 g(q)g(q').\end{aligned}$$

因为 g 是乘性函数, 所以 (16.6.16) 或 (16.6.17) 对 qq' 亦成立. 但是当 q 不含平方因子时 $g(q)=0$, 我们只要验证 (16.6.16) 对 $q\in\mathbb{P}$ 成立.

当 p 是素数时得到

$$\begin{aligned}|\mathcal{S}(0)|^2 + \sum_{1\le a\le p-1}|\mathcal{S}(a/p)|^2 &= \sum_{0\le a,a'\le p-1} \mathcal{S}(a/p)\overline{\mathcal{S}(a'/p)}\delta_{aa'} \\ &= \sum_{0\le a,a'\le p-1} \mathcal{S}(a/p)\overline{\mathcal{S}(a'/p)}\frac{1}{p}\sum_{0\le h\le p-1} e^{2\pi\sqrt{-1}(a'-a)h/p} \\ &= \frac{1}{p}\sum_{0\le h\le p-1}\left|\sum_{0\le a\le p-1} e^{2\pi\sqrt{-1}(-ah/p)}\mathcal{S}(a/p)\right|^2 \\ &= \frac{1}{p}\sum_{0\le h\le p-1}\left|\sum_{M<n\le M+N} a_n \sum_{0\le a\le p-1} e^{2\pi\sqrt{-1}(a(n-h)/p)}\right|^2 = p\sum_{0\le h\le p-1}|\mathcal{S}(p,h)|^2,\end{aligned}$$

这里

$$\mathcal{S}(p,h) := \sum_{M<n\le M+N,\ n\equiv h\ (\mathrm{mod}\ p)} a_n.$$

根据 $w(p)$ 定义和 Cauchy-Schwarz 不等式推出

$$|\mathcal{S}(0)|^2 = \left|\sum_{0\le h\le p-1}\mathcal{S}(p,h)\right|^2 \le [p-w(p)]\sum_{0\le h\le p-1}|\mathcal{S}(p,h)|^2$$

从而得到

$$\sum_{1\le a\le p-1}|\mathcal{S}(a/p)|^2 \ \ge\ \left[\frac{p}{p-w(p)}-1\right]|\mathcal{S}(0)|^2 \ =\ g(p)|\mathcal{S}(0)|^2.$$

这就证明 (16.6.16) 当 $q=p\in\mathbb{P}$ 成立. □

推论 16.8. (算术大筛法)

在上述记号和假设下, 我们有

$$\left|\sum_{M<n\le M+N} a_n\right|^2 \le \frac{N-1+Q^2}{L}\sum_{M<n\le M+N}|a_n|^2, \quad L := \sum_{q\le Q} g(q). \tag{16.6.18}$$

♡

证: 结合 (16.6.13) 和 (16.6.16) 得到. □

之前已证了 $\mathcal{S}(0) = \sum_{0\le h\le p-1} \mathcal{S}(p,h)$ 故

$$\sum_{0\le h\le p-1}\left[\mathcal{S}(p,h) - \frac{1}{p}\mathcal{S}(0)\right] = 0$$

和

$$p\sum_{0\le h\le p-1}\left|\mathcal{S}(p,h) - \frac{1}{p}\mathcal{S}(0)\right|^2 = p\sum_{0\le h\le p-1}|\mathcal{S}(p,h)|^2 - |\mathcal{S}(0)|^2 = \sum_{1\le a\le p-1}|\mathcal{S}(a/p)|^2.$$

结合 (16.6.13) 得到

定理 16.31. (弱型大筛法不等式)

在上述记号和假设下, 我们有

$$\sum_{p\le Q,\ p\in\mathbb{P}}\ \sum_{0\le h\le p-1}\left|\mathcal{S}(p,h) - \frac{1}{p}\mathcal{S}(0)\right|^2 \le (N-1+Q^2)\sum_{M<n\le M+N}|a_n|^2. \quad (16.6.19)$$

♡

注意到上述不等式只对 p 是素数时成立.

16.6.3 大筛法的应用

大筛法的一个应用是有效地改进了 Burn 估计 (16.6.2) 且给出几乎最优的上界估计.

定理 16.32

我们有

$$\mathbf{TP}(x) \le \left\{16\prod_{2<p\in\mathbb{P}}\left[1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right] + o(1)\right\}\frac{x}{\ln^2 x},\quad x\to+\infty. \quad (16.6.20)$$

♡

证: 为了方便期间令

$$C := 2\prod_{2<p\in\mathbb{P}}\left[1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right].$$

在 (16.6.18) 中取

$$N := \lfloor x\rfloor,\quad Q := x^{1/2-\epsilon},\quad M := 0,\quad a_n := \begin{cases} 1, & Q < n(n+2)\text{ 的最小素因子}, \\ 0, & \text{其余情形}. \end{cases}$$

简单计算得到

$$\mathbf{TP}(x) - \mathbf{TP}(\sqrt{x}) \le [1+o(1)]\frac{x}{L}$$

这里用到了 $a_p = 1$ 如果 $p > x^{1/2-\epsilon}$. 注意到

$$w(2) = 1,\quad w(p) = 2\ (p\ge 3)$$

我们得到 $g(q) = [(2^\omega * h)(q)]/q$ 这里 h 是乘性函数且满足

$$h(2) = 0,\quad h(2^\nu) = 2(-1)^{\nu-1}\ (\nu\ge 2)$$

和

$$h(p) = \frac{4}{p-2}, \quad h(p^\nu) = 2(-1)^{\nu-1}\left(\frac{p+2}{p-2}\right) \ (\nu \geq 2).$$

易证级数 $\sum_{d\geq 1} h(d)/d^\sigma$ 当 $\sigma > 1/2$ 时绝对收敛, 从而推出

$$\sum_{q\leq y} g(q) = \sum_{md\leq y} \frac{h(d)}{d}\frac{2^{\omega(m)}}{m} \sim \frac{3}{\pi^2}(\ln y)^2 \sum_{d\geq 1}\frac{h(d)}{d}, \quad y \to +\infty$$

这里用到了估计

$$\sum_{m\leq y} 2^{\omega(m)} = \sum_{m\leq y}(1*\mu^2)(m) \sim \frac{6}{\pi^2} y \ln y.$$

最后得到 $\mathbf{TP}(x) \leq [2C + o(1)]x(\ln\sqrt{x})^{-2}$ 其中

$$\begin{aligned} C &= \frac{\pi^2}{6}\left[\sum_{d\geq 1}\frac{h(d)}{d}\right]^{-1} \\ &= \prod_{p\in\mathbb{P}}(1-p^{-2})^{-1}\frac{3}{2}\prod_{p\geq 3}\left[1+\frac{4}{p(p-2)} - \frac{2(p+2)}{p^2(p-2)(1+p^{-1})}\right]^{-1} \\ &= 2\prod_{p\geq 3}\left[1-\frac{1}{(p-1)^2}\right]. \quad \Box \end{aligned}$$

16.7 习题

16.8 参考文献

1. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis I*, Translated from the 1988 German original by Gary Brookfield, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. xiv+426 pp. ISBN: 3-7643-7153-6
2. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis II*, Translated from the 1999 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. xii+400 pp. ISBN: 978-3-7643-7472-3; 3-7643-7472-3
3. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis III*, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. xii+468 pp. ISBN: 978-3-7643-7479-2; 3-7643-7479-2
4. Fourier, Joseph. *The analytical theory of heat*, translated, with notes, by Alexander Freeman, HEP World's Classics, Higher Education Press, 2016.
5. Grafakos, Loukas. *Classical Fourier analysis*, Third edition, Graduate Texts in Mathematics, **249**, Springer, New York, 2014. xviii+638 pp. ISBN: 978-1-4939-1193-6; 978-1-4939-1194-3
6. Hardy, G. H. *Divergent series*, Oxford, at the Clarendon Press, 1949. xvi+396 pp.
7. HeWitt, Edwin; Hewitt, Robert E. *The Gibbs-Wilbraham phenomenon: an episode in Fourier analysis*, Arch. Hist. Exact Sci., **21**(1979/80), no. 2, 129-160.
8. Iwaniec, Henryk; Kowalski, Emmanuel. *Analytic number theory*, American Mathematical

Society Colloquium Publications, 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. xii+615 pp. ISBN: 0-8218-3633-1

9. Katznelson, Yitzhak. *An introduction to harmonic analysis*, Third edition, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 2004. xviii+314 pp. ISBN: 0-521-83829-0; 0-521-54359-2
10. Tenenbaum, Gérald. *Introduction to analytic and probabilistic number theory*, Translated from the second French edition (1995) by C. B. Thomas, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **46**, Cambridge University Press, Cambridge, 1995. xvi+448 pp. ISBN: 0-521-41261-7
11. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis I*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+574 pp. ISBN: 3-540-40386-8
12. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis II*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xvi+681 pp. ISBN: 3-540-40633-6
13. 布鲁斯 · C. 伯恩特 (Bruce C. Berndt) 主编: **拉玛努金笔记** (第 1, 2, 3, 4 卷), 哈尔滨工业大学出版社, 2019.
14. 布鲁斯 · C. 伯恩特 (Bruce C. Berndt), 乔治 · E. 安德鲁斯 (George E. Andrews) 主编: **拉玛努金遗失笔记** (第 1, 2, 3, 4 卷), 哈尔滨工业大学出版社, 2019.
15. 常庚哲, 史济怀 编: **数学分析教程** (上、下册), 高等教育出版社, 2003.
16. 陈天权 编著: **数学分析讲义** (第一、二、三册), 北京大学出版社, 2009.
17. 邓建平 编: **微积分 I 和 II**, 科学出版社, 2019.
18. Duhham, William 著 (李伯民, 汪军, 张怀勇 译): **微积分的历程** – 从牛顿到勒贝格, 人民邮电出版社, 2013.
19. 吉米多维奇 著 (李荣F, 李植 译): **数学分析习题集** (根据 2010 年俄文版翻译), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.
20. Kline, Morris 著 (张理京, 张炎热, 江泽涵等 译): **古今数学思想** (第一、二、三册), 上海科学技术出版社, 2014.
21. 李傅山, 王培合 编著: **数学分析习题课讲义** (1、2、3), 北京大学出版社, 2018.
22. 李逸 编著: **数学分析讲义**, 上海交通大学数学分析课讲义 (未出版), 2016.
23. 林源渠, 方企勤 编: **数学分析解题指南**, 北京大学出版社, 2003.
24. 梅加强 编著: **数学分析**, 高等教育出版社, 2015.
25. 裴礼文 编著: **数学分析中的典型问题与方法** (第二版), 高等教育出版社, 2015.
26. Riemann, Bernhard 著 (李培廉 译): **黎曼全集** (第一、二卷), 高等教育出版社, 2016.
27. 汪林 著: **数学分析中的问题和反例**, 现代数学基础 **56**, 高等教育出版社, 2015.
28. Weir, D. Maurice; Hass, R. Joel; Giordano, R. Frank. *Thomas' calculus*, Eleventh Edition, (影印版, 上、下册), 高等教育出版社, 2016.
29. 徐森林, 薛春华 编著: **数学分析**, 清华出版社, 2005.

30. 杨小远, 孙玉泉, 薛玉梅, 杨卓琴 编著: **工科数学分析教程** (上、下册), 科学出版社, 2011.
31. 张福保, 薛金美, 潮小李 主编: **数学分析讲义**, 科学出版社, 2019.
32. 张筑生 编著: **数学分析新讲** (第一、二、三册), 北京大学出版社, 1990.
33. 周民强 编著: **数学分析习题演练** (第一、二、三册), 科学出版社, 2018.
34. 周颂平 著: **三角级数研究中的单调性条件: 发展和应用**, 科学出版社, 2012.
35. 朱尧辰 编著: **数学分析例选通过范例学技巧**, 哈尔滨工业大学出版社, 2013.