

第二次作业: 带* 选做, 2020年10月23日上课前交

1. 教材习题2.1: A1 中奇数题目.
2. 教材习题2.1: A2 中偶数题目.
3. 教材习题2.1: A4 (这里还需加上一个条件即 $a_n \geq 0$, 大家想想为什么).
4. 教材习题2.1: C6.
5. 教材习题2.1: C7.

*6. 如果对某个正整数 k 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+k} = a$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 成立.

*7. 假设给定数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 并考虑下面两个命题

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$.

这里 a 是实数. 证明

- (a) 命题(1) 必推出命题(2).
- (b) 请举例说明命题(2) 不一定可以推出命题(1).
- (c) 当 a 取什么值时, 命题(2) 和命题(1) 是等价的? 即两个命题可以互推.

*8. 假设 $f: X \rightarrow X$ 是集合 X 上的映射, 定义

$$f^1 := f, \quad f^2 := f \circ f, \quad \dots, \quad f^n := f \circ f^{n-1} \quad (n \geq 2).$$

称序列 $\{f^n\}_{n \geq 1}$ 为由 f 生成的**迭代序列(iterated sequence)**. 给定 $x_0 \in X$, 称数列 $\{f^n(x_0)\}_{n \geq 1}$ 为 x_0 的**轨道(orbit)**. 点 $x \in X$ 称为 f 的**不动点(fixed point)** 如果 $f(x) = x$. 如果存在 $k \in \mathbb{N}^*$ 使得 $f^k(x) = x$ 成立, 则称 a 是 f 的**周期点(periodic point)** 而把满足性质的最小正整数 k 称为 a 的**周期(period)**.

- 如果 $f(x) := x^k, x \in \mathbb{R}$ 和 $k \in \mathbb{N}^*$, 求 f^n .
- 如果 $f(x) = \frac{1}{1+x}, x > 0$, 计算 f^2, f^3, f^4 .
- 如果 $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}, x > 0$, 求 $x_0 = 2$ 的轨道的前 10 项. 是否轨道越来越靠近 $\sqrt{2}$.

- 如果 $f(x) = 1 - |2x - 1|$, $x \in [0, 1]$, 证明 0 和 $2/3$ 是不动点, 而 $2/5$ 和 $4/5$ 是周期为 2 的周期点.
- 如果 $f(x)$ 定义为

$$f(x) := \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1-x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

求一个周期为 3 的周期点并计算函数 $f^2(x)$ 的表达式.