基本分析

李逸
东南大学丘成桐中心、东南大学数学学院

感谢
东南大学 19 级毓琇理科实验班（按姓氏拼音排序）
崔雪红、刘碧璇、秦靖雯
整理上课笔记

感谢下列同学指出讲义中的错误与不足（按姓氏拼音排序）
陈昕、胡蓉、李嘉淇、李文哲、刘春辰、王晓波、王泽川
田国凯、孙茗欣、魏佳蓓、杨帆、杨欣、易英鹏
张凌枫、张明远、朱康华

2019/12

目 录

第一章　序

心即理也. 天下又有心外之事, 心外之理乎? · · · 若只是温清之节、奉养之宜, 可一日二日讲之而尽, 用得甚学问思辨? 惟于温清时, 也只要此心纯乎天理之极: 奉养时, 也只要此心纯乎天理之极. 此则非有学问思辨之功, 将不免于毫厘千里之谬, 所以虽在圣人, 尤加「精一」之训. 若只是那些仪节求得是当, 便谓至善, 即如今扮戏子, 扮得许多温清奉养的仪节是当, 亦可谓之至善矣? —-《传习录》理学编卷一

§1.1　前言

§1.2　使用说明

由于东南大学理科实验班采用的教材是数学学院张福保、薛金美编写的《数学分析讲义》(或参考张福保、薛金美、潮小李编写的《数学分析讲义》, 科学出版社 2019 年出版), 所以本讲义中传统数学分析部分的标题就按照张/薛书上的标题, 主要是为了方便学生. 有些小标题就按照作者的意愿来标识.

目前本讲义不会正式出版, 因为好的讲义需要时间和具体教学实践来打磨. 我会放在自己主页上供大家免费使用.

§1.3　符号和常用记号说明

数域说明. $\mathbb{N}$ 表示为所有自然数之集合（亦包含 0）, 而 $\mathbb{N}^*$ 表示所有非零自然数之集合. 整数域, 有理数域, 实数域, 复数域分别表示为 $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$. 对给定的数域 $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$, 符号 $\mathbb{F}_+$ 或 $\mathbb{F}_{>0}$ 表示 $\mathbb{F}$ 中大于零的元素构成的集合, 同样地我们可以定义 $\mathbb{F}_{\geq 0}$, $\mathbb{F}_-$ 或 $\mathbb{F}_{<0}$, 和 $\mathbb{F}_{\leq 0}$.

复数域中的元素表示为 $z = x + \mathbf{i}y$, 其中 $\mathbf{i}$ 是虚根 $\sqrt{-1}$.

字体说明. 对流形或抽象的空间我们用拉丁大写字母的 “mathcal 型” 来表示, 比如 $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{X}, \mathcal{Q}$ 等.

人名表示说明. 本讲义中出现的外国人名均采用相应的英文人名来标示, 比如 Sobolev（索伯列夫）. 华人人名均用中文来标示, 并在其后附上英文标示. 比如, 著名数学大师丘成桐教授, 其英文为 Shing-Tung Yau（按照英文惯例, 名在前, 姓在后）. 从而依照这个说明, 应该写成丘成桐（Shing-Tung Yau）. 又比如著名的几何学家李伟光（Peter Li）. 由于港澳台（亦包括 49 年之前的国人和侨居海外的华人）人名的英文发音和汉语拼音发音不甚相似, 所以这

些人名均采用上述之说明, 即中文加英文. 而大陆的学者, 就直接写出对应的中文名字.

其它符号说明. 证明的结尾用符号 □ 来结束.

§1.4 作者声明

本讲义是作者多年来教学与科研的心得和体会, 非常愿意与诸君分享. 在未正式出版之前, 诸位可在本人主页上免费下载.

讲义中不可避免的有纰漏和笔误, 请读者批评斧正, 这样可以让我更加的完善本讲义. 由于这是作者的第一本中文讲义, 如有语句不通顺的地方, 也请读者批评指正.

本人的常用联系邮箱如下:
yilicms@seu.edu.cn
yilicms@gmail.com
yilicms@163.com

最后以王阳明先生的名句, 也是本讲义的宗旨, 来结束这一节的内容:

知行合一.

§1.5 预备知识 I: 集合与映射

本节将中学里的集合和映射做了些适当的加深. 首先回顾下几个常用的记号:

- $\forall$: “任意”
- $\exists$: “存在”
- $!$: 唯一
- $\exists!$: “存在且唯一”
- $A \Rightarrow B$: “A 推出 B”
- $A \Leftrightarrow B$: “A 和 B 等价”
- $A := B$: “A 由 B 定义”

给定一个集合 A, 其**幂集**定义为

$$2^A := \{\text{所有 } A \text{ 的子集}\}.$$

显然根据定义 $2^A \supseteq A$.

§1.5.1 集合的任意并和交

假设 $\mathscr{A}$ 是一个**集族**（即元素是集合的集合）. 我们定义并和交如下:

(1) **并**:

$$\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A := \{x : x \in A \text{ 存在某个 } A \in \mathscr{A}\}.$$

(2) **交**:

$$\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A := \{x : x \in A \text{ 对任意 } A \in \mathscr{A}\}.$$

当 $\mathscr{A} = \emptyset$ 是空集时, 定义 $\cup_{A\in\mathscr{A}} A = \emptyset$.

§1.5.2 集合的 Cartesian 乘积: I

假设 A, B 时两个给定的集合.

(1) **Cartesian 乘积**:

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \text{ 且 } b \in B\}.$$

这里的符号 (a, b) 表示 a 和 b 的有序对，其定义如下.

(2) **有序对**:

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

这里 a 称为有序对的**第一坐标**而 b 称为有序对的**第二坐标**.

§1.5.3 映射

假设 C 和 D 是两个给定的集合.

(1) 一个**赋值法则** R 是指满足条件

$$(c, d) \in R \text{ 和 } (c, d') \in R \quad \Longrightarrow \quad d = d'$$

的 $C \times D$ 的子集.

(2) 假设 R 是一个赋值法则. 定义

$$\begin{aligned} \mathbf{Dom}(R) \ \equiv \ R \text{ 的定义域} \ &:= \ \{c \in C : \exists\, d \in D \text{ 使得 } (c, d) \in R\}, \\ \mathbf{Im}(R) \ \equiv \ R \text{ 的像域} \ &:= \ \{d \in D : \exists\, c \in C \text{ 使得 } (c, d) \in R\}. \end{aligned}$$

一个**映射** f 是指一个二元对 (R, B), 其中 R 是一个赋值法则, B 是一个集合（称为 f 的**值域**）, 满足 $\mathbf{Im}(R) \subseteq B$.

(1) f **的定义域** $\equiv \mathbf{Dom}(f) := \mathbf{Dom}(R)$.

(2) f **的像域** $\equiv \mathbf{Im}(f) := \mathrm{Im}(R)$.

(3) 我们引入记号:

$$f : A \longrightarrow B, \quad a \longmapsto f(a),$$

这里 A 是 f 的定义域, B 是 f 的值域（从而导致 $\mathbf{Im}(f) \subseteq B$）, $f(a)$ 是 B 中满足条件 $(a, f(a)) \in R$ 的唯一元素.

例1.5.1. 假设 $C = D = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $R = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$, $B = R$. 此时 $A = \mathbb{R}$, $\mathbf{Im}(f) = \mathbb{R}_{\geq 0}$.

考虑两个映射 $f : A \to B$ 和 $g : B \to C$.

(1) 对任意给定的 A 的子集 A_0, 定义f **在** A_0 **上的限制**为映射 $f|_{A_0} = f : A_0 \to B$.

(2) **复合**:

$$g \circ f : A \longrightarrow C, \quad a \longmapsto c$$

这里 $f(a) = b$ 和 $g(b) = c$ 对某个 $b \in B$ 成立.

假设 $f : A \to B$ 是一映射.

(1) f 是**单射**如果

$$f(a) = f(a') \quad \Longrightarrow \quad a = a'.$$

(2) f 是**满射**如果

$$\forall\, b \in B\, \exists\, a \in A \text{ 满足 } f(a) = b.$$

(3) f 是**双射**如果 f 既是单的又是满的.

(4) 若 f 是双射, 我们定义它的**逆映射** f^{-1} 如下

$$f^{-1}(b) = a \quad \Longleftrightarrow \quad f(a) = b.$$

引理1.5.2. 假设 $f : A \to B$ 为一映射. 如果存在 f 的**左逆** $g : B \to A$（即 $g(f(a)) = a$ 对所有 $a \in A$ 都成立）和 f 的**右逆** $h : B \to A$（即 $f(h(b)) = b$ 对所有 $b \in B$ 都成立）, 则 $g = h = f^{-1}$.

练习1.5.3. *(1) 证明若 f 有左逆, 则 f 是单射; 若 f 有右逆, 则 f 是双射.*
(2) 给出存在左逆但不存在右逆的映射的例子.
(3) 给定的映射可以有多个左逆或右逆吗?
(4) 证明引理 1.5.2.

假设 $f: A \to B$ 是一个映射, $A_0 \subseteq A$, $B_0 \subseteq B$.

(1) A_0 **在 f 下的像集** $\equiv f(A_0) := \{f(a) : a \in A_0\}$.

(2) B_0 **在 f 下的原像集** $\equiv f^{-1}(B_0) := \{f(a) : a \in A_0\}$. 特别地, 如果 $B = \{b\}$, 则符号 $f^{-1}(b) := f^{-1}(\{b\})$ 一般情形下不再是一个单元素集; 如果 f 本身是双射, 此时符号 $f^{-1}(b)$ 与之前的定义一样.

(3) 下列包含关系显然成立:

$$A_0 \subseteq f^{-1}(f(A_0)), \quad B_0 \supseteq f(f^{-1}(B_0)).$$

我们可以找到例子来说明上述包含关系可以严格取到, 即等号不一定成立（请你试着找下）.

如果在映射定义中 B 是一个数域, 那么我们把映射称为**函数**.

§1.5.4 范畴

范畴 $\mathfrak{C}$ 有如下所构成:

1) $\mathfrak{C}$ 中的**对象**构成类 $\mathbf{Ob}(\mathfrak{C})$,

2) $\forall$ $\mathbf{Ob}(\mathfrak{C})$ 中的二元组 (X, Y), $\exists$ 集合 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)$（称为 X 到 Y 的**态射**）,

3) $\forall$ $\mathbf{Ob}(\mathfrak{C}$ 中的三元组 (X, Y, Z), $\exists$ 映射（称为**复合映射**）

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Z), \quad (f, g) \longmapsto g \circ f.$$

这些因素满足条件

(a) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$,

(b) $\forall X \in \mathbf{Ob}(\mathfrak{C})$ $\exists\, \mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, X)$ 使得

$$f \circ \mathrm{id}_X = f, \quad \mathrm{id}_X \circ g = g$$

对任意 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)$ 和 $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y, X)$ 都成立.

例1.5.4. *下面是一些经典的范畴.*

(1) **Set**: *集合和映射*

(2) **Group**: 群和群同态（抽象代数中）

(3) **Vect**$_{\mathbb{R}}$: 实向量空间和实线性映射（高等代数中）

(4) **Top**: 拓扑空间和连续映射（拓扑学中）

(5) **Calabi-Yau 范畴**: 微分几何/代数几何 $\rightsquigarrow$ 同调镜像对称/SYZ 猜想.

假设 $\mathfrak{C}$ 是范畴.

(1) 通常把态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)$ 记作 $f : X \to Y$.

(2) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)$ 称为**同构**如果存在态射 $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y, X)$ 满足

$$f \circ g = \mathrm{id}_Y \quad \text{和} \quad g \circ f = \mathrm{id}_X.$$

(3) $\mathfrak{C}'$ 称为 $\mathfrak{C}$ 的**子范畴**如果 $\mathfrak{C}'$ 本身是范畴并满足下列条件

- $\mathbf{Ob}(\mathfrak{C}') \subseteq \mathbf{Ob}(\mathfrak{C})$,
- $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}'}(X, Y) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)$ 对任意 $X, Y \in \mathbf{Ob}(\mathfrak{C}')$ 都成立,
- $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}'}(X, X)$ 对每个 $X \in \mathbf{Ob}(\mathfrak{C}')$ 都成立.

称 $\mathfrak{C}'$ 是 $\mathfrak{C}$ 的**子范畴**如果它本身是范畴并且 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}'}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)$ 对任意二元组 (X, Y) 都成立.

(4) **Top** 是 **Set** 的子范畴, 但不是完全子范畴.

(5) $\mathfrak{C}$ 的**对偶范畴** $\mathfrak{C}^\circ$ 定义如下:

$$\mathbf{Ob}(\mathfrak{C}^\circ) := \mathbf{Ob}(\mathfrak{C}), \quad \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^\circ}(X, Y) := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y, X).$$

(6) 令 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)$.

- f 是**单的**如果对任意 $W \in \mathbf{Ob}(\mathfrak{C})$ 和任意 $g, g' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(W, X)$ 满足 $f \circ g = f \circ g'$, 都有 $g = g'$.

$$W \underset{g'}{\overset{g}{\longrightarrow}} X \xrightarrow{f} Y$$

- f 是**满的**如果对任意 $Z \in \mathbf{Ob}(\mathfrak{C})$ 和任意 $h, h' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y, Z)$ 满足 $h \circ f = h' \circ f$, 都有 $h = h'$.

$$X \xrightarrow{f} Y \underset{h'}{\overset{h}{\longrightarrow}} Z$$

- f 是**双的**如果它即是单的又是满的.

(7) $P \in \mathbf{Ob}(\mathfrak{C})$ 是**始的**如果对任何 $Y \in \mathbf{Ob}(\mathfrak{C})$, 集合 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P,Y)$ 只包含一个元素. $Q \in \mathbf{Ob}(\mathfrak{C})$ 是**终的**如果对任何 $X \in \mathbf{Ob}(\mathfrak{C})$, 集合 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Q)$ 只包含一个元素.

练习1.5.5. *(1) 证明两个始的（或终的）对象必同构.*

(2) 证明同构必是双的, 但反之则不一定成立.

范畴之间的**(共变) 函子** $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ 由如下要素构成:

1) 映射 $F : \mathbf{Ob}(\mathfrak{C}) \to \mathbf{Ob}(\mathfrak{C}')$,

2) $\forall$ $\mathbf{Ob}(\mathfrak{C})$ 二元组 (X,Y), $\exists$ 映射 $F : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}'}(F(X),F(X'))$.

这些要素满足条件

a) $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$, 和

b) $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.

反变函子 $G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ 是函子 $G : \mathfrak{C}^\circ \to \mathfrak{C}'$.

例1.5.6. *(1)* **遗忘函子** $F : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$.

(2) **基本群函子** $\pi_1 : \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Group}$, $(X,x) \mapsto \pi_1(X,x)$ *(X 在 x 的基本群).*

(3) 任给 $X \in \mathbf{Ob}(\mathfrak{C})$, *定义*

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,\cdot) : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathbf{Set}, \quad Z \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Z),$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\cdot,X) : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathbf{Set}, \quad Z \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Z,X).$$

则

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,\cdot) \text{ 是共变的而 } \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\cdot,X) \text{ 是反变的.}$$

考察两个函子 $F_1, F_2 : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$. 函子之间的**态射**或**自然变换** $\theta : F_1 \to F_2$ 构成如下:

$$X \in \mathbf{Ob}(\mathfrak{C}) \Longrightarrow \theta(X) \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}'}(F_1(X), F_2(X)).$$

这些要素使得下面的图

$$\begin{array}{ccc} F_1(X) & \xrightarrow{\theta(X)} & F_2(X) \\ {\scriptstyle F_1(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_2(f)} \\ F_1(Y) & \xrightarrow[\theta(Y)]{} & F_2(Y) \end{array} \qquad F_2(f) \circ \theta(X) = \theta(Y) \circ F_1(f),$$

可交换, 即, $F_2(f) \circ \theta(X) = \theta(Y) \circ F_1(f), \forall\, X,Y \in \mathbf{Ob}(\mathfrak{C}), \forall\, f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Y)$.

定义1.5.7. 给定范畴 $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'$, 定义新的范畴 $\mathbf{Func}(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}')$ 如下:

$$\mathbf{Ob}\left(\mathbf{Func}(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}')\right) := \{\text{函子 } F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'\}$$

and

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Func}(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}')}(F_1, F_2) := \{\text{态射 } \theta : F_1 \to F_2\}.$$

定义1.5.8. 假设 $\mathfrak{C}$ 是范畴. $F : \mathfrak{C} \to \mathbf{Set}$ 是**可表函子**若 $\exists\, X \in \mathbf{Ob}(\mathfrak{C})$ 使得 F 在 $\mathbf{Func}(\mathfrak{C}, \mathbf{Set})$ 中和 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, \cdot)$ 同构.

注1.5.9. 如果 $F : \mathfrak{C} \to \mathbf{Set}$ 是可表的, 则 X 在同构意义下是唯一的并把它称为F **的表示**.

定义1.5.10. 函子 $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ 是**完全忠实的** 如果 $\forall\, X, Y \in \mathbf{Ob}(\mathfrak{C})$, 映射 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}'}(F(X), F(Y))$ 是双的.

定理1.5.11. (Yoneda 引理) *(1)* 对任意 $X \in \mathbf{Ob}(\mathfrak{C})$ 和 $F \in \mathbf{Ob}(\mathfrak{C}^\vee)$, 这里 $\mathfrak{C}^\vee := \mathbf{Func}(\mathfrak{C}^\circ, \mathbf{Set})$, 下面同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^\vee}(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X), F) \simeq F(X)$$

在 $\mathbf{Set}$ 里成立, 这里 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}^\vee$ 是函子定义为 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X) := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\cdot, X)$.
(2) $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}$ 是完全忠实函子.

证: (1) 对每个 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^\vee}(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X), F)$, 赋予 $\phi(f) \in F(X)$ 如下:

$$f(X) : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, X) \longrightarrow F(X), \quad \mathrm{id}_X \longmapsto \phi(f) := f(X)(\mathrm{id}_X).$$

反之, 对每个 $s \in F(X)$, 赋予 $\psi(s) \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^\vee}(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X), F)$ 如下:

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y, X) \xrightarrow{\quad F \quad} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(F(X), F(Y)) \xrightarrow{\quad s \quad} F(Y)$$

这里 $\psi(s)(Y) := s \circ F$. 故 ϕ 和 ψ 互为逆同态.
(2) 对任意 $X, Y \in \mathbf{Ob}(\mathfrak{C})$, 下列同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^\vee}(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X), \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\cdot, Y)(X) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)$$

推出 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}$ 是完全忠实的. □

§1.5.5 关系

集合 A 上的**关系**是指 $A \times A$ 的子集 C. 如果 C 是 A 的关系, 则 $(x, y) \in C$ 记作 xCy.

集合 A 上的**等价关系**是指 A 上的关系 C 并满足如下性质:

a) (**自反性**) $\forall\, x \in A \Longrightarrow xCx$,

b) (**对称性**) $xCy \Longrightarrow yCx$,

c) (**传递性**) xCy 和 $yCz \Longrightarrow xCz$.

记号: 用 $\sim$ 来表示等价关系.

(1) $x \in A$ 的**等价类**:
$$[x] := \{y \in A : y \sim x\} \ni x.$$

(2) 两个等价类要么不相交要么完全相等. 因此
$$A = \bigcup \{[x] : x \in A\}.$$

(3) 集合 A 的**剖分**是指 A 的一些互不相交的非空子集构成的集族且这些子集的并是 A.

(4) 给定 A 的一个剖分 $\mathscr{D}$, 则存在 A 上的由该剖分诱导出来的等价关系 $\sim$.

实际上, 定义 A 上的关系 $\sim$ 为 $x \sim y$ 当且仅当 x, y 都属于 $\mathscr{D}$ 中的某个元素. 易证 $\sim$ 是 A 上的等价关系.

A 上的关系 C 称为**序关系**或**简单序**或**线性序**, 如果它满足如下性质:

a) (**相容性**) $\forall\, x, y \in A$ 且 $x \neq y \Longrightarrow$ 要么 xCy 要么 yCx,

b) (**非自反性**) 不存在 $x \in A$ 使得 xCx 成立,

c) (**传递性**) xCy 和 $yCz \Longrightarrow xCz$.

记号: 用 $<$ 表示序关系.

(1) 等价地说:

 a) $x \neq y \Longrightarrow$ 要么 $x < y$ 要么 $y < x$,

 b) $x < y \Longrightarrow x \neq y$,

 c) $x < y$ 和 $y < z \Longrightarrow x < z$.

(2) $x \leq y$ 是指 $x < y$ 或 $x = y$.

(3) 假设 $(X, <)$ 是**有序集**, 即 X 上存在一个序关系 $<$. 对 $a < b$, 定义 X 中的**开区间**为
$$(a, b) := \{x \in X : a < x < b\}.$$
如果 $(a, b) = \varnothing$, 称 a 是 b 的**直接前位点** 而把 b 称为 a 的**直接后位点**.

(4) 考察两个有序集 $(A, <_A)$ 和 $(B, <_B)$. 称 A 和 B 有相同的**序型**如果集合之间存在保序的双射. 也就是说, 存在双射 $f : A \to B$ 满足

$$a_1 <_A a_2 \Longrightarrow f(a_1) <_B f(a_2).$$

比如, $((-1,1), <)$ 和 $(\mathbb{R}, <)$ 有相同的序型 ($x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$); $(\{0\} \cup (1,2), <)$ 和 $([0,2), <)$ 有相同的序型 ($0 \mapsto 0$ and $x \mapsto x-1$ for $1 < x < 2$).

(5) 假设 $(A, <_A)$ 和 $(B, <_B)$ 是两个有序集. 定义 $A \times B$ 上的序关系 $<$ 如下:

$$(a_1, b_1) < (a_2, b_2)$$

若 $a_1 <_A a_2$ 或者若 $a_1 = a_2$ 但 $b_1 <_B b_2$.

假设 $(A, <)$ 是有序集, A_0 是 A 的子集.

(1) b 是 A_0 的**最大数**如果 $b \in A_0$ 且 $x \le b$ 对任何 $x \in A_0$ 都成立. a 是 A_0 的**最小数**如果 $a \in A_0$ 且 $a \le x$ 对任何 $x \in A_0$ 都成立.

(2) A_0 是**有上界的**如果存在 $b \in A$ 使得 $x \le b$ 对任意 $x \in A_0$ 都成立. 称 b 是 A_0 的一个**上界**. 令

$$\sup(A_0) := \ A_0 \text{ 的所有上界中的最小元}$$

为 A_0 的**最小上界** or **上确界**.

A_0 是**有下界的**如果存在 $a \in A$ 使得 $a \le x$ 对任意 $x \in A_0$ 都成立. 称 a 是 A_0 的一个**下界**. 令

$$\inf(A_0) := \ A_0 \text{ 的所有下界中的最大元}$$

为 A_0 的**最大下界** or **下确界**.

(3) 有序集 $(A, <)$ 满足**最小上界性质** (或简记**LUBP**) 如果 A 的任何非空有上界子集 A_0 有最小上界. 类似地, 有序集 $(A, <)$ 满足**最大下界性质** (或简记**GLBP**) 如果 A 的任何非空有下界子集 A_0 有最大下界. 注意到**LUBP** $\Leftrightarrow$ **GLBP**.

集合 $B := (-1,0) \cup (0,1)$ 不可能满足最小下界性质 (请验证!).

集合 A 上的关系 $\prec$ 称为**严格偏序**如果它满徐下面性质:

1) (**非自反性**) $a \prec a$ 不可能成立,

2) (**传递性**) $a \prec b$ 和 $b \prec c \Rightarrow a \prec c$.

平面 $\mathbb{R}^2$ 上存在自然的严格偏序 $\prec$:

$$(x_0, y_0) \prec (x_1, y_1) \quad \Longleftrightarrow \quad y_0 = y_1 \text{ 且 } x_0 < x_1.$$

假设 $(A, \prec)$ 是**严格偏序集**, 即 $\prec$ 是 A 上的一个严格偏序.

(1) 若 $B \subseteq A$, B 的**上界**是 A 中的元素 c 使得对任何 $b \in B$, 要么 $b = c$ 要么 $b \prec c$.

(2) A 的**最大元**是 A 中的元素 m 使得不存在 A 中的元素 a 满足 $m \prec a$.

(3) **Zorn 引理** (1935):

> 假设集合 A 上有一个严格偏序. 如果 A 的任何简单序子集在 A 中都有上界, 则 A 必有最大元.

Zorn 引理的一个简单应用如下: 考察集合 $A = \{a_n\}_{n \geq 1}$ 这里 $a_i \in \mathbb{R}$ 且 $|a_i| \leq M$ 对某个正数 M 成立. 从而 $(A, <)$ 是严格偏序集. 根据 Zorn 引理, A 有最大元.

一般地, 考察函数数列 $f(x, t)$, 这里 $|f(x, t)| \leq M$ 对任意 $x \in [0, 1]$ 和 $t \in \mathbb{R}$ 都成立. 对每个 $x \in [0, 1]$, 定义集合

$$A_x := \{f(x, t)\}_{t \in \mathbb{R}}.$$

则 A_x 有最大元 $f(x)$. 故得到映射

$$f : [0, 1] \longrightarrow A := \bigcup_{x \in [0,1]} A_x, \quad x \longmapsto f(x).$$

一个很自然的问题是研究函数 $f(x)$ 的性质.

§1.5.6 集合的 Cartesian 乘积: II

假设 $\mathscr{A}$ 是非空集族. $\mathscr{A}$ 的**指标映射** 是指从某个集合 J 到 $\mathscr{A}$ 的满射映射 f. 这个集合 J 称为**指标集**.

(1) $(\mathscr{A}, f)$ 称为**集合的指标类**.

(2) 给定 $\alpha \in J$, 把集合 $f(\alpha) \in \mathscr{A}$ 记作 A_α, 并把集合的指标类记作 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$.

(3) 定义

$$\begin{aligned} \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha &:= \{x : \exists\, \alpha \in J \text{ 使得 } x \in A_\alpha\}, \\ \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha &:= \{x : \forall\, \alpha \in J,\ x \in A_\alpha\}. \end{aligned}$$

(4) 若 $J = \{1, \cdots, n\}$, 把 (3) 写成

$$\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha = \bigcup_{1 \le i \le n} A_i, \quad \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha = \bigcap_{1 \le i \le n} A_i.$$

(5) 若 $J = \mathbb{Z}_{\ge 1}$, 把 (3) 写成

$$\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha = \bigcap_{i \ge 1} A_i, \quad \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha = \bigcap_{i \ge 1} A_i.$$

假设 $m \in \mathbb{N}$. 给定集合 X, 定义 X 的**m- 数组** 为函数

$$\boldsymbol{x} : \{1, \cdots, m\} \longrightarrow X$$

对每个 $i\{1, \cdots, m\}$, 记

$$\boldsymbol{x}(i) := x_i,$$

并称为**$\boldsymbol{x}$ 的 i- 坐标**, 和 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_m)$.

(1) 假设 $\{A_1, \cdots, A_m\}$ 是由集合 $\{1, \cdots, m\}$ 作为指标集的集合类. 令

$$X := A_1 \cup \cdots \cup A_m.$$

定义这个指标类的**Cartesian 乘积**, 写作

$$\prod_{1 \le i \le m} A_i,$$

为由 X 的满足 $x_i \in A_i, 1 \le i \le m$, 的所有 m- 数组 $(x_1, \cdots, x_m)$ 构成的集合.

注1.5.12. *(1) $A \times B$ 现在有两种不同的定义:*

$$\begin{aligned} A \times_1 B &:= \{(a,b) : a \in A \text{ 和 } b \in B\}, \\ A \times_2 B &:= \{\boldsymbol{x} : \{1,2\} \to A \cup B \text{ 满足 } \boldsymbol{x}(1) \in A \text{ 和 } \boldsymbol{x}(2) \in B\}. \end{aligned}$$

可以证明这两种定义实际上是等价的. 定义双射映射

$$f : A \times_1 B \longrightarrow A \times_2 B, \quad (a,b) \longmapsto f((a,b))$$

这里 $f((a,b))(1) = a$ 和 $f((a,b))(2) = b$. 由于 f 是双的, $A \times_1 B \cong A \times_2 B$.

(2) 对集合 A, B, C, 有三种互相等价的 Cartesian 乘积

$$A \times (B \times C), \quad (A \times B) \times C, \quad A \times B \times C.$$

特别地, 对每个 $m \ge 1$ 可定义 Cartesian 乘积 A^m.

给定集合 X, 定义 X 的ω- **数组** 为映射

$$\boldsymbol{x}:\mathbb{Z}_{\geq 1}\longrightarrow X,\quad n\longmapsto x_n:=\boldsymbol{x}(n),$$

并记作 $\boldsymbol{x}=(x_n)_{n\geq 1}$. 假设 $\{A_i\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}$ 是指标集为正整数的集合类. 令

$$X:=\bigcup_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}A_i.$$

$\{A_i\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}$ 的**Cartesian 乘积**, 记作

$$\prod_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}A_i,$$

定义为由 X 的满足 $x_i\in A_i$ 的所有 ω- 数组 $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}$ 构成的集合.

一般地, 令 J 是指标集, X 是集合.

(1) X 的**J- 数组**是指映射

$$\boldsymbol{x}:J\longrightarrow X,\quad \alpha\longmapsto x_\alpha:=\boldsymbol{x}(\alpha),$$

这里 x_α 称为**$\boldsymbol{x}$ 的 α- 坐标**. 记 $\boldsymbol{x}=(x_\alpha)_{\alpha\in J}$.

(2) 引入

$$X^J:=\{X\text{ 的 }J\text{- 数组}\}.$$

(3) 假设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是集合的指标类, $X:=\cup_{\alpha\in J}A_\alpha$. $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 的**Cartesian 乘积**, 记作

$$\prod_{\alpha\in J}A_\alpha,$$

定义为由 X 的满足 $x_\alpha\in A_\alpha$ 的所有 J- 数组 $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ 构成的集合.

当 X_n 都是 $\mathbb{R}$, 得到

$$\mathbb{R}^\omega:=\prod_{n\geq 1}X_n.$$

§1.5.7 有限集、可数集和不可数集

在这小节我们研究集合

$$\{0,1\}^\omega:=\prod_{n\geq 1}X_n$$

这里 $X_n:=\{0,1\}$.

定义1.5.13. *集合 A 称为***有限的***, 如果它要么是空集, 要么存在 A 和某个集合 $\{1,\cdots,n\}$ 之间的双射. 当 $A=\emptyset$ 时, 称 A 是***基数** *0, 否则称 A 是***基数** *n.*

引理1.5.14. *假设 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, A 是非空集合, $a_0 \in A$. 存在 A 和 $\{1, \cdots, n+1\}$ 之间的双射 f 当且仅当存在 $A \setminus \{a_0\}$ 和 $\{1, \cdots, n\}$ 之间的双射 g.*

证: $\Leftarrow$: 定义映射 $f : A \to \{1, \cdots, n+1\}$ 为

$$f(a_0) := n+1, \quad f(x) := g(x)\ (x \neq a_0).$$

$\Rightarrow$: 若 $f(a_0) = n+1$, 则定义 $g := f|_{A\setminus\{a_0\}}$. 现在假设 $f(a_0) = m \in \{1, \cdots, n\}$, 令 $a_1 \in A$ 为满足 $f(a_1) = n+1$ 的元素. 则必有 $a_1 \neq a_0$. 定义映射 $h : A \setminus \{a_0\} \to \{1, \cdots, n\}$ 为 $h(a_1) = m$ 和 $h(x) := f(x)$（$x \neq a_1$）. □

定理1.5.15. *令 A 是集合, 并假设存在双射 $f : A \to \{1, \cdots, n\}$（对某个 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$）. 若 B 是 A 的真子集, 则不存在双射 $g : B \to \{1, \cdots, n\}$, 但是 (只要 $B \neq \emptyset$) 存在双射 $h : B \to \{1, \cdots, m\}$（对某个 $m < n$）.*

证: 不失一般性, 不妨假设 $B \neq \emptyset$. 我们利用数学归纳法证明这个定理. 当 $n = 1$, $A = \{a\}$, $B = \emptyset$. 假设该定理对 n 成立. 令 $f : A \to \{1, \cdots, n+1\}$ 为双射, B 是 A 的非空真子集. 取 $a_0 \in B$ 和 $a_1 \in A \setminus B$. 根据**引理**1.5.14, 存在双射 $g : A \setminus \{a_0\} \to \{1, \cdots, n\}$. 由于 $B \setminus \{a_0\}$ 是 $A \setminus \{a_0\}$ 的真子集, 归纳假设推出不存在双射 $h : B \setminus \{a_0\} \to \{1, \cdots, n\}$, 且要么 $B \setminus \{a_0\} = \emptyset$ 要么存在双射 $k : B \setminus \{a_0\} \to \{1, \cdots, m\}$ (对某个 $m < n$). 再次应用**引理**1.5.14 得到定理对 $n+1$ 也成立. □

推论1.5.16. *(1) 若 A 有限, 则不存在 A 与它真子集之间的双射.*

(2) $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 不是有限集.

(3) 有限集 A 的基数由 A 唯一确定.

(4) 有限集的任何子集都是有限的. 如果 B 是有限集 A 的真子集, 则 B 的基数严格小于 A 的基数.

(5) $B \neq \emptyset \Rightarrow$ 下面断言等价:

(i) B 是有限的,

(ii) 存在满映射从某个 $\{1, \cdots, n\}$ 到 B,

(iii) 存在单映射从 B 到某个 $\{1, \cdots, n\}$.

(6) 有限集的有限并和有限 Cartesian 乘积都是有限的.

证: (1) 假设 B 是 A 的真子集且存在双射 $f : A \to B$. 因为 A 是有限的, 存在双射 $g : A \to \{1, \cdots, n\}$. 从而 $g \circ f^{-1} : B \to \{1, \cdots, n\}$ 是双射, 但这是不可能的!

(2) 定义映射 $f : \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{Z}_{\geq 1} \setminus \{1\}$ 为 $f(n) := n+1$. 因为 $\mathbb{Z}_{\geq 1} \setminus \{1\}$ 是真子集且 f 是双的, 从 (1) 得到 $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 不可能是有限的.

(3) 假设 $f : A \to \{1, \cdots, n\}$ 和 $g : A \to \{1, \cdots, m\}$ 都是双的, 这里 $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. 故 $g \circ f^{-1} : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, m\}$ 是双的从而 $m = n$.

(4) 显然.

(5) $(i) \Rightarrow (ii)$: 显然. $(ii) \Rightarrow (iii)$: 假设 $f : \{1, \cdots, n\} \to B$ 是满的. 定义 $g : B \to \{1, \cdots, n\}$ 为

$$g(b) := \text{the smallest element of } f^{-1}(\{b\}).$$

若 $b \neq b'$, $f^{-1}(\{b\}) \cap f^{-1}(\{b'\}) = \emptyset$, 所以 g 是单的. $(iii) \Rightarrow (i)$: 假设 $g : B \to \{1, \cdots, n\}$ 是单的. 则存在某个 $m \leq n$ 使得 $g : B \to \{1, \cdots, m\}$ 是双的. 从而 B 是有限的.

(6) 假设 A 和 B 都是有限的而且都是非空的. 存在双射 $f : \{1, \cdots, m\} \to A$ 和 $g : \{1, \cdots, n\} \to B$, 对某些 m 和 n. 定义

$$h : \{1, \cdots, m+n\} \longrightarrow A \cup B, \quad i \longmapsto \begin{cases} f(i), & 1 \leq i \leq m, \\ g(i-m), & m+1 \leq i \leq m+n. \end{cases}$$

由于 h 是满的, 根据 (5) 得到 $A \cup B$ 是有限的. 归纳假设可证明有限集的有限并也是有限的.

从下列关系

$$A \times B := \bigcup_{a \in A} \{a\} \times B$$

得到 $A \times B$ 从而有限集的有限 Cartesian 乘积都是有限的. □

不巧的是, 有限集的无限 Cartesian 乘积是很复杂的. 我们需要以下定义.

定义1.5.17. *(1) 集合 A 称为***无限的** *如果他不是有限的. A 称为***无限可数的** *如果存在双射 $f : A \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$.*

*(2) 集合 A 称为***可数的** *如果它要么是有限的要么是无限可数的. A 称为***不可数的***如果它不是可数的.*

有些书上把**定义**1.5.17 中的无限可数的称为可数的, 而把可数的称为**至多可数的**.

定理1.5.18. *$B \neq \emptyset \Longrightarrow$ 下列断言等价:*

(a) B 是可数的,

(b) 存在满映射 $f : \mathbb{Z}_{\geq 1} \to B$,

(c) 存在单映射 $g : B \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

证: $(a) \Rightarrow (b)$: 显然.

$(b) \Rightarrow (c)$: 令 $f : \mathbb{Z}_{\geq 1} \to B$ 是满的. 定义 $g : B \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 为 $g(b) := f^{-1}(\{b\})$ 中的最小元.

$(c) \Rightarrow (a)$: 令 $g : B \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 为单的. 则存在 B 与 $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 的某个子集之间的双射. 因此只要证明 $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 的每个子集都是可数的（见**引理**1.5.19）. □

引理1.5.19. *如果 C 是 $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 的无限子集, 则 C 是无限可数的.*

证: 定义双射 $h : \mathbb{Z}_{\geq 1} \to C$ 如下. 记 $h(1)$ 为 C 中的最小元. 假设 $h(1), \cdots, h(n-1)$ 已经定义, 令

$$h(n) := C \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq n-1} h(i) \text{ 中的最小元.}$$

断言 1: h **是单的**. 若 $m < n$, 则 $h(m) \in h(\{1, \cdots, n-1\})$ 从而 $h(m) \neq h(n)$.

断言 2: h **是满的**. 取 $c \in C$. h 是单映射推出 $h(\mathbb{Z}_{\geq 1})$ 是无限的而且 $h(n) > c$ 对某个 $c \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 成立. 令

$$m := \mathbb{Z}_{\geq 1} \text{ 中满足 } h(m) \geq c \text{ 的最小元.}$$

对每个 $i = 1, \cdots, m-1$, 有 $h(i) < c$ 从而 $c \in C \setminus \cup_{1 \leq i \leq m-1} h(i)$. 根据 $h(m)$ 的定义, 必有 $h(m) \leq c$. 因此 $h(m) = c$. □

推论1.5.20. *(1) 可数集的子集也是可数的.*

(2) $\mathbb{Z}_{\geq 1} \times \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 是无限可数的.

证: (1) 假设 $A \subseteq B$ 且 B 是可数的. 根据**定理** 1.5.18, 存在单映射 $f : B \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$. 故 $f|_A : A \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 也是单的, 从而 A 是可数的.

(2) 因为 $\mathbb{Z}_{\geq 1} \times \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 是无限集, 只要构造单映射 $f : \mathbb{Z}_{\geq 1} \times \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$. 定义

$$f(n, m) := 2^n 3^m.$$

若 $f(n,m) = f(p,q)$, 则 $2^n 3^m = 2^p 3^q$. 若 $n < p$, 则 $3^m = 2^{p-n} 3^q$, 矛盾! 所以 $n = p$ 且 $m = q$. □

定理1.5.21. *(1) 可数集的可数并是可数的.*

(2) 可数集的有限 Cartesian 乘积是可数的.

(3) $\{0,1\}^\omega$ 是不可数的.

(4) 给定集合 A. 则不存在单映射 $f : 2^A \to A$ 和满映射 $g : A \to 2^A$.

(5) $2^{\mathbb{Z}_{\geq 1}}$ 是不可数的.

证: 观察到 (5) 可由 (4) 和**定理** 1.5.18 得到.

(1) 假设 $\{A_n\}_{n \in J}$ 是可数集的指标类, 这里指标集 J 要么是 $\{1, \cdots, N\}$ 要么是 $\mathbb{Z}_{\geq 1}$. 假设每个集合 $A_n \neq \emptyset$. 根据**定理** 1.5.18, 存在满映射 $f_n : \mathbb{Z}_{\geq 1} \to A_n$ 和 $g : \mathbb{Z}_{\geq 1} \to J$. 定义

$$h : \mathbb{Z}_{\geq 1} \times \mathbb{Z}_{\geq 1} \longrightarrow \bigcup_{n \in J} A_n, \quad (k, m) \longmapsto f_{g(k)}(m).$$

则 h 是满映射.

(2) 不失一般性, 只要证明两个可数集 A 和 B 的 Cartesian 乘积是可数的. 就像在 (1) 中一样, 存在满映射 $f:\mathbb{Z}_{\geq 1}\to A$ 和 $g:\mathbb{Z}_{\geq 1}\to B$. 定义 $h:\mathbb{Z}_{\geq 1}\times\mathbb{Z}_{\geq 1}\to A\times B$ 为 $h(m,n):=(f(m),g(n))$.

(3) 令 $X=\{0,1\}$. 对任意给定的映射 $g:\mathbb{Z}_{\geq 1}\to X^{\omega}$, 断言 g 不可能是满的. 记

$$g(n):=(x_{n1},x_{n2},x_{n3},\cdots,x_{nn},\cdots),\quad x_{ij}\in\{0,1\}.$$

定义 $\boldsymbol{y}:=(y_i)_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}$ 为

$$y_n:=\begin{cases}0, & x_{nn}=1,\\ 1 & x_{nn}=0.\end{cases}$$

则 $\boldsymbol{y}\in X^{\omega}$ 但是 $\boldsymbol{y}\notin g(\mathbb{Z}_{\geq 1})$.

(4) 只要证明给定映射 $g:A\to 2^A$, g 不可能是满的 (因为单映射的存在性可以推出满映射的存在性). 定义

$$B:=\{a\in A:a\in A\setminus g(a)\}\in 2^A.$$

假设 $g(a_0)=B$. 故

$$a_0\in B\quad\Longleftrightarrow\quad a_0\in A\setminus g(a_0)\quad\Longleftrightarrow\quad a_0\in A\setminus B.$$

所以 g 不是满的. □

练习1.5.22. *(1) 实数 x 称为***代数的** *如果它满足多项式方程 (该多项式次数为正)*

$$0=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\quad a_i\in\mathbb{Q}.$$

假设每个多项式方程只有有限多个根, 证明代数数集合是可数的.

*(2) 一个实数称为***超越的** *如果它不是代数的. 假设 $\mathbb{R}$ 是不可数的, 证明超越数集合是不可数的 (比如 e,π 都是超越数).*

练习1.5.23. *称两个集合 A 和 B 有***相同基数** *如果 A 和 B 之间存在双射.*

(1) *假设 $B\subseteq A$ 并假设存在双射 $f:A\to B$, 证明 A 和 B 有相同基数. [提示: 定义 $A_1:=A$, $B_1:=B$, 且对任意 $n\geq 2$, $A_n:=f(A_{n-1})$, $B_n:=f(B_{n-1})$. 则 $A_1\supseteq B_1\supseteq A_2\supseteq B_2\supseteq A_3\supseteq\cdots$. 令*

$$h:A\longrightarrow B,\quad x\longmapsto\begin{cases}f(x), & \text{if } x\in A_n\setminus B_n \text{ 对某个 } n,\\ x, & \text{其它情形.}\end{cases}$$

]

(2) (**Schroeder-Berstein 定理**) *如果存在单映射 $A\to B$ 和 $B\to A$, 则 A 和 B 有相同基数.*

§1.6 预备知识 II: 函数

中学时期我们学过六类**初等函数**:

(1) **常值函数**: $y=c$,

(2) **幂函数**: $y=x^a, a\neq 0$,

(3) **指数函数**: $y=a^x, a>0, a\neq 1, x\in\mathbb{R}$,

(4) **对数函数**: $y=\log_a x, a>0, a\neq 1, x>0$,

(5) **三角函数**: $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x$,

(6) **反三角函数**: $\sin^{-1}x, \cos^{-1}x, \tan^{-1}x, \cot^{-1}x, \sec^{-1}x, \csc^{-1}x$.

§1.6.1 几类特殊的函数

我们也知道比如周期函数，有界函数，奇/偶函数，单调函数，反函数等常见的几类特殊函数.

例1.6.1. *(a)* **Dirichlet 函数**

$$D(x):=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

(b) 符号函数

$$\mathrm{sgn}(x):=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

(c) 取整函数

$$\lfloor x\rfloor := n \quad \text{if } n\leq x<n+1,$$

and

$$\langle x\rangle := x-\lfloor x\rfloor.$$

(d) 定义

$$\pi(x):=\#(\text{素数}\ \leq\ x).$$

(e) **Möbius 函数**

$$\mu(n):=\begin{cases}(-1)^r, & n=p_1\cdots p_r \text{ 且 } p_1,\cdots,p_r \text{ 各异},\\ 0, & \text{其它情形}.\end{cases}$$

(f) **Margoldt 函数**

$$\Lambda(n):=\begin{cases}\ln p, & n=p^\alpha,\ \alpha\geq 1,\\ 0, & \text{其他情形}.\end{cases}$$

(g) **双曲函数**:

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

注意到 $y = \sin x$（或 $y = \sinh x$）是常微分方程 $y'' + y = 0$（或 $y'' - y = 0$）的解.

§1.6.2 素数和素数基本定理

Euclid 几千年前已经证明了素数由无穷多个. 令

$$p_1 < p_2 < \cdots < p_n < \cdots$$

为全体素数. 假设素数只有有限多个, 比如 $p_1 < p_2 < \cdots < p_N$. 那么我们考虑一个新的正整数 $a := p_1 \cdots p_N + 1$. 如果这个数 a 是素数, 则我们得到一个比 $p_1, \cdots, p_N$ 都要大的新的素数, 产生矛盾. 因此这个数 a 一定是合数. 根据素数分解定理, 至少有一个素数, 不妨假设为 p_1, 整除 a 从而整除 1, 矛盾！从而素数一定由无穷多个.

接下来有两个很自然的问题.

1. 是否存在一个公式可以表示每个素数? 即, 是否存在素数的一般表达式?答案是, 有的且有许多个！但是没有一个公式是有意思的. 比如, 考察如下给出第 n 个素数的公式

$$p_n = 1 + \sum_{1 \le m \le 2^n} \left\lfloor \left\lfloor \frac{n}{1 + \pi(m)} \right\rfloor^{1/n} \right\rfloor.$$

这里 $\pi(x)$ 表示所有不超过 x 的素数的个数. $n = 2$ 时候, 根据上面这个公式我们得到

$$p_2 = 1 + \left\lfloor \left\lfloor \frac{2}{1 + \pi(1)} \right\rfloor^{1/2} \right\rfloor + \left\lfloor \left\lfloor \frac{2}{1 + \pi(2)} \right\rfloor^{1/2} \right\rfloor + 0 + 0 = 1 + 1 + 1 = 3.$$

但是这种公式没有任意意义, 原因是为了得到第 n 个素数的值, 我们必须预先知道 $\pi(1), \cdots, \pi(2^n)$ 的值.

2. 素数分布的形态. 从上面 Euclid 的证明中我们可以发现

$$p_{k+1} \le p_1 \cdots p_k + 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

根据 $p_1 = 2$, 我们可以证明

$$p_k \le 2^{2^{k-1}}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.6.1}$$

事实上, 由数学归纳法得到

$$p_{k+1} \leq \prod_{1 \leq i \leq k} p_i + 1 \leq \prod_{1 \leq i \leq k} 2^{2^{i-1}} + 1 = 2^{2^k - 1} + 1 = 2^k.$$

推论1.6.2. 对任意 $x \geq 2$, 有

$$\pi(x) > \ln \ln x. \tag{1.6.2}$$

证明: 选择一个自然数 ℓ 使得不等式 $2^{2^{\ell-1}} \leq x < 2^{2^\ell}$ 成立. 根据 (1.6.1) 我们得到 $p_\ell \leq 2^{2^{\ell-1}}$ 从而 $\pi(x) \geq \ell$ 成立. 因为 $2^\ell > \ln x / \ln 2$ 和 $0 < \ln 2 < 1$, 我们得到

$$\pi(x) \geq \ell > \frac{\ln(\ln x / \ln 2)}{\ln 2} > \frac{\ln \ln x}{\ln 2} > \ln \ln x$$

成立. □

根据级数展开（级数理论在 第六章）

$$2 \geq \frac{p}{p-1} = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}, \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} z^n,$$

我们得到如下不等式（积分理论在 第四章）

$$\begin{aligned} 2^{\pi(x)} &\geq \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \prod_{p \leq x} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots\right) \\ &\geq \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \geq \int_1^{\lfloor x \rfloor + 1} \frac{dt}{t} = \ln(\lfloor x \rfloor 1) > \ln x, \end{aligned}$$

从而不等式 $\pi(x) > \ln \ln x / \ln 2 > \ln \ln x$ 对任意 $x \geq 2$ 都成立.

1896 年 Charles-Jeam de la Vallée Poussion（1866 - 1962, 比利时）和 Jacques Hadamard（1865 - 1963, 法国）分别独立证明了**素数定理**

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}. \tag{1.6.3}$$

早在 1762 年, Leonhard Euler（1707 - 1783, 瑞士）认为 $\pi(x)$ 逼近到 $x / \ln x$. 而在之后的 1792 年, 15 岁的 Carl Friedrich Gauss（1777 - 1855, 德国）也做出了同样的断言. 1798 年 Adrien-Marie Legendre（1752 - 1833, 法国）猜测出关于 $\pi(x)$ 的一个好的逼近: 存在两个常数 A 和 B 使得

$$\pi(x) \sim \frac{x}{A \ln x + B} \tag{1.6.4}$$

成立，并且在之后的 1808 年预测 $A = 1$ 和 $B = -1.08366$. Gauss 是第一个写出如下**对数积分**的定义

$$\mathbf{li}(x) := \mathbf{p.v.} \int_0^x \frac{dt}{\ln t} = \lim_{\epsilon \to 0+} \left(\int_0^{1-\epsilon} + \int_{1+\epsilon}^x \right) \frac{dt}{\ln t}, \quad x \geq 2, \tag{1.6.5}$$

这是 $\pi(x)$ 的一个很好的逼近. 上面定义的对数积分也可重新写成

$$\mathbf{li}(x)=\lim_{\epsilon\to 0+}\left(\int_0^{1-\epsilon}+\int_{1+\epsilon}^{2}\right)\frac{dt}{\ln t}+\mathbf{Li}(x), \tag{1.6.6}$$

这里

$$\mathbf{Li}(x):=\int_2^x\frac{dt}{\ln t} \tag{1.6.7}$$

是一个定积分（定积分理论在 第四章）. $s:=2-t$

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0+}\left(\int_0^{1-\epsilon}+\int_{1+\epsilon}^{2}\right)\frac{dt}{\ln t} &= \lim_{\epsilon\to 0+}\left(\int_0^{1-\epsilon}\frac{dt}{\ln t}+\int_0^{1-\epsilon}\frac{ds}{\ln(2-s)}\right)\\ &= \lim_{\epsilon\to 0+}\left(\int_0^{1}\frac{du}{\ln(1-u)}+\int_\epsilon^{1}\frac{du}{\ln(1+u)}\right)\\ &= \int_0^1\left[\frac{1}{ln(1-u)}+\frac{2}{\ln(1+u)}\right]du.\end{aligned}$$

根据

$$\lim_{u\to 0+}u^{1/2}\left[\frac{1}{\ln(1-u)}+\frac{1}{\ln(1+u)}\right]=\lim_{u\to 0+}u^{1/2}=0,$$

我们发现上述积分（反常积分理论在 第四章）是有定义的而且 $\mathbf{li}(x)$ 对每个 $x\geq 2$ 都是有限的. 由分部积分得到

$$\mathbf{Li}(x)=\frac{x}{\ln x}-\frac{2}{\ln 2}+\int_2^x\frac{dt}{\ln^2 t}=\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right). \tag{1.6.8}$$

特别地, 素数定理可以重新陈述为

$$\mathbf{li}(x)\sim\mathbf{Li}(x)\sim\frac{x}{\ln x}\sim\pi(x), \tag{1.6.9}$$

当 $x\to+\infty$ 时. 由于

$$\mathbf{Li}(x)=\frac{x}{\ln x}+\frac{x}{\ln^2 x}-\frac{2}{\ln 2}-\frac{2}{\ln^2 2}-2\int_2^x\frac{dt}{\ln^3 t}=\frac{x}{\ln x}\left[1+\frac{1}{\ln x}+O\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right)\right]$$

我们得到

$$\pi(x)\sim\frac{x}{\ln x}\frac{1}{1-\frac{1}{\ln x}}=\frac{x}{\ln x-1} \tag{1.6.10}$$

当 $x\to+\infty$ 时. Pafnuty Lvovich Chebyshev（1821 - 1894, 俄罗斯）证明了如果函数 $\pi(x)/(x/\ln x)$ 当 $x\to+\infty$ 时存在极限（极限理论在 第二章）, 则极限一定等于 1. 1850 年, Chebyshev 证明了不等式

$$c_1\frac{x}{\ln x}\leq\pi(x)\leq c_2\frac{x}{\ln x} \tag{1.6.11}$$

对任何 $x\geq 10$ 都成立, 这里

$$c_1:=\ln\frac{2^{1/2}3^{1/3}5^{1/5}}{30^{1/30}}\approx 0.921292,\quad c_2:=\frac{6}{5}c_1\approx 1.1055.$$

我们把不等式 (1.6.11) 称为**Chebyshev 不等式**.

定理1.6.3. (Erdös) 对任意 $x \geq 2$, 我们有

$$\frac{3\ln 2}{8}\frac{x}{\ln x} \leq \pi(x) \leq 6\ln 2\frac{x}{\ln x}. \tag{1.6.12}$$

证明: 首先我们来证明如下一个引理.

引理1.6.4. 令 p 是一个素数且令 $e_p(n!)$ 是 $n!$ 中素数分解中 p 出现的次数. 则

$$e_p(n!) = \sum_{k\geq 1}\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor. \tag{1.6.13}$$

首先注意到 (1.6.13) 中是对有限项进行求和. 举个例子来说明这个公式. 取 $p=2$ 和 $n=4$ 得到

$$e_2(4!) = e_2(24) = e_2(2^3\times 3) = 3 = 2+1 = \left\lfloor \frac{4}{2^1}\right\rfloor + \left\lfloor \frac{4}{2^2}\right\rfloor.$$

证明: 假设公式 (1.6.13) 对 n 成立. 对 $n+1$ 根据素数分解定理我们可以写成 $n+1 = p^u m$ 的形式, 其中 $p\nmid m$. 从而得到

$$e_p((n+1)!) = e_p(n!) + u = \sum_{1\leq k\leq u}\left(\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor + 1\right) + \sum_{k>u}\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor.$$

但是因为

$$\left\lfloor \frac{n+1}{p^k}\right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor + 1 \quad 若 \quad 1\leq k\leq u, \quad \left\lfloor \frac{n+1}{p^k}\right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor \quad 若 \quad k>u,$$

我们证明了 (1.6.13) 对 $n+1$ 也是成立. □

继续完成**定理 1.6.3**的证明. 如果 $n>1$, 则

$$\prod_{n<p\leq 2n} p \,\Big|\, \binom{2n}{n}, \quad \binom{2n}{n} \,\Big|\, \prod_{p<2n} p^{r_p} \tag{1.6.14}$$

这个 r_p 是满足不等式 $p^{r_p} \leq 2n < p^{r_p+1}$ 的唯一整数. 对任意 $p>2n$, p 出现在 $\binom{2n}{n}$ 中的指数等于

$$e_p\left(\binom{2n}{n}\right) = e_p((2n)!) - 2e_p(n!) = \sum_{k\geq 1}\left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k}\right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor\right).$$

对任何 $y>0$ 观察到

$$\lfloor 2y\rfloor - 2\lfloor y\rfloor = 1, \quad 若 \quad \frac{k}{2}\leq y < \frac{k+1}{2}$$

其中 $k\geq 0$ 是某个整数. 更进一步, 当 $k>r_p$ 时, $p^k>2n$, 所以 $\lfloor 2n/p^k\rfloor = 0$ 和 $\lfloor n/p^k\rfloor = 0$ 对这样的 k 都成立. 所以

$$e_p\left(\binom{2n}{n}\right) \leq \sum_{1\leq k\leq r_p} 1 = r_p$$

成立从而推出 (1.6.14). (1.6.14) 中第二个整除关系意味着

$$\binom{2n}{n} \le (2n)^{\pi(2n)}.$$

利用二项式展开 $(1+1)^{2n} = \sum_{0\le k\le 2n}\binom{2n}{k}$ 和不等式 $\binom{2n}{n} \ge \binom{2n}{k}$ 对任何 $k = 0,1,\cdots,2n$ 都成立, 我们得到

$$\binom{2n}{n} > \frac{2^{2n}}{2n+1} > 2^n, \quad n \ge 3.$$

(作为数学归纳法的练习, 请验真第二个不等式). 结合上面两个不等式得到

$$2^n < \frac{2^{2n}}{2n+1} < \binom{2n}{n} < (2n)^{\pi(2n)} \Longrightarrow \pi(2n) > \frac{\ln 2}{2}\frac{2n}{\ln(2n)}, \quad n \ge 3.$$

假设 $x \ge 8$, 令 n 是满足不等式 $2n \le x < 2n+2$ 的唯一正整数. 显然 $n \ge 3$. 进一步我们有 $2n > x-2 \ge 3x/4$. 由于函数 $y \mapsto y/\ln y$ 对任意 $y \ge e$ 是递增, 我们得到对 $x \ge 8$

$$\pi(x) \ge \pi(2n) \ge \frac{\ln 2}{2}\frac{2n}{\ln(2n)} \ge \frac{\ln 2}{2}\frac{3x/4}{\ln(3x/4)} = \frac{3\ln 2}{8}\frac{x}{\ln x + \ln\frac{3}{4}} > \frac{3\ln 2}{8}\frac{x}{\ln x}.$$

这个不等式显然对 $x \in [2,8)$ 也成立.

练习1.6.5. *证明不等式 (1.6.14).*

接下来证明: 对任意 $x \ge 2$ 有

$$\pi(x) \le 6\ln 2\frac{x}{\ln x}.$$

根据 (1.6.14) 得到 $\Pi_{n<p\le 2n} p < (1+1)^{2n} = 2^{2n}$ 且

$$2n\ln 2 > \sum_{n<p\le 2n}\ln p \ge \ln n[\pi(2n) - \pi(n)] = \pi(2n)\ln n - \pi(n)\left(\ln\frac{n}{2} + \ln 2\right).$$

利用 $\pi(n) \le n$ 推出

$$\pi(2n)\ln n - \pi(n)\ln\frac{n}{2} < 2n\ln 2 + \pi(n)\ln 2 < (3\ln 2)n.$$

引入函数

$$f(n) := \pi(2n)\ln 2;$$

得到不等式

$$f(n) - f(n/2) < (3\ln 2)n.$$

取 $n = 2^i$ $(2 \le i \le k)$ 得到

$$f(2^i) - f(2^{i-1}) < (3\ln 2)2^i.$$

故

$$\pi(2^{k+1})\ln(2^k) < 3\ln 2\sum_{2\le i\le k}2^i+\pi(4)\ln 2 < 3\ln 2\sum_{1\le i\le k}2^i < (3\ln 2)2^{k+1}$$

从而

$$\pi(2^{k+1}) < (6\ln 2)\frac{2^k}{\ln(2^k)}.$$

给定 $x\ge 2$, 选择正整数 $k\ge 1$ 使得 $2^k\le x<2^{k+1}$ 成立. 若 $x\ge 4$, 则 $k\ge 2$ 和 $2^k\ge 4>e$. 即 $2^k/\ln(2^k)\le x/\ln x$ 只要 $x\ge 4$. 综上所述

$$\pi(x)\le\pi(2^{k+1}) < 6\ln 2\frac{2^k}{\ln(2^k)} < (6\ln 2)\frac{x}{\ln x}. \quad \square$$

Bertrand 假设:

(1) 1845 年Joseph Bertrand 证明了只要 $n\le 6\cdot 10^6$, 区间 $[n,2n]$ 内至少有一个素数.

(2) Bertrand 猜测 (1) 对任意 $n\in\mathbb{Z}_{\ge 1}$ 也成立.

(3) 1850 年Chebyshev 证明了 (2).

定理1.6.6. *对每个 $n\in\mathbb{N}$, 存在素数 p 满足 $n<p\le 2n$.*

证: 下面证明属于Erdös.

步骤 1: 对每个 $n\in\mathbb{N}$,

$$\prod_{p\le n}p<4^n.$$

不失一般性, 不妨假设 $n\ge 3$ 且结论对每个 $k-1,\cdots,n-1$ 都成立. 若 n 是偶数, 则

$$\prod_{p\le n}p=\prod_{p\le n-1}p.$$

因此只要假设 n 是奇数. 记 $n=2m+1$ 并观察到

$$\prod_{m+1<p\le 2m+1}p\,\Bigg|\binom{2m+1}{m+1},\quad \binom{2m+1}{m+1}\le\frac{2^{2m+1}}{2}=4^m.$$

所以

$$\prod_{p\le 2m+1}p=\left(\prod_{p\le m+1}p\right)\left(\prod_{m+1<p\le 2m+1}p\right)\le 4^{m+1}\cdot 4^m=4^{2m+1}.$$

步骤 2: 若 $n\ge 3$, p 是素数且 $\frac{2}{3}n<p\le n$, 则

$$p\nmid\binom{2n}{n}.$$

实际上, $p > \frac{2}{3}n \geq 2$. 因为 $3p > 2n$, p 和 $2p$ 是 p 的 $\leq 2n$ 的唯一两个倍数. 从而 $p^2 \parallel (2n)!$. 由于

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2},$$

推出 $\binom{2n}{n}$ 不可能是 p 的倍数.

步骤 3: 假设 $n \geq 4$ 且结论对某个 n 不成立（从而在区间 $[n, 2n]$ 内不存在任何素数）. 在这一步, 将证明 $n < 512$. 根据**步骤 2**, 整除 $\binom{2n}{n}$ 的每个素数 p 必须 $\leq \frac{2}{3}n$. 令 $p^\alpha \parallel \binom{2n}{n}$. 则

$$\alpha \leq r_p \quad 和 \quad p^{r_p} \leq 2n < p^{r_p+1}.$$

如果 $\alpha \geq 2$, 则 $p^2 \leq p^\alpha \leq 2n$ 和 $p \leq \sqrt{2n}$, 从而

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} &= \prod_{p\mid\binom{2n}{n}} p = \left(\prod_{p\parallel\binom{2n}{n},\ \alpha=1} p^\alpha\right)\left(\prod_{p\parallel\binom{2n}{n},\ \alpha\geq 2} p^\alpha\right) \\ &\leq \prod_{p\leq 2n/3} p \cdot \prod_{p\leq\sqrt{2n}} p^{r_p} \leq 4^{2n/3}\cdot(2n)^{\sqrt{2n}}.\end{aligned}$$

利用 $\binom{2n}{n} \geq 2^{2n}/(2n+1)$ 得到

$$4^{2n/3}(2n)^{\sqrt{2n}} \geq \frac{4^n}{2n+1} \Rightarrow 4^{n/3} \leq (2n)^{\sqrt{2n}+2} \Rightarrow \frac{\ln 2}{3}(2n) < (\sqrt{2n}+2)\ln(2n).$$

引入 $y := \sqrt{2n}$, 推出不等式

$$\frac{\ln 2}{3}y^2 - 2(y+2)\ln y < 0.$$

考察函数 $f(y) := \frac{\ln 2}{3}y^2 - 2(y+2)\ln y$ 这里 $y \geq 0$. 从

$$f'(y) = \frac{2\ln 2}{3}y - 2\ln y - 2\frac{y+2}{y}, \quad f''(y) = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{2}{y} + \frac{4}{y^2} > \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{2}{y},$$

我们看到当 $y > 32$ 时, $f''(y) > 0$. 但是 $f'(32) = \frac{64}{3}\ln 2 - 2\ln(32) - 2.2 > 0$, 得到 $f'(y) > 0$ 对任何 $y \geq 32$ 都成立. 特别地, $f(y) \geq f(32)$ 对任何 $y \geq 32$ 都成立. 由于

$$f(32) = 2^{10}\frac{\ln 2}{3} - 340 \times \ln 2 = \frac{1024 - 1020}{3}\ln 2 = \frac{4}{3}\ln 2 > 0,$$

不等式 $f(y) > 0$ 对任意 $y \geq 32$ 都成立. 这个矛盾推出 $y < 32$ 或 $n < 512$.

对每个 $n = 1, \cdots, 511$, 区间 $[n, 2n]$ 总是包含一个素数. 从而**步骤 3** 中的假设错误. □

孪生素数猜想:

(1) 从**定理** 1.6.6 得到

$$p_{n+1} - p_n \leq p_n. \tag{1.6.15}$$

猜想1.6.7. (Gramer, 1936) *证明*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{(\ln p_n)^2} \leq 1. \tag{1.6.16}$$

sup/inf 极限之后会定义.

(2) Baker-Haman-Pintz (2001) 证明了

$$p_{n+1} - p_n < p_n^{0.525}, \quad n \gg 1. \tag{1.6.17}$$

(4) 若 p 和 $p+2$ 都是素数, 称 $(p, p+2)$ 是**孪生素数对**.

猜想1.6.8. (孪生素数猜想) *存在无穷多个正整数 n 使得 $p_{n+1} - p_n = 2$. 等价地*

$$\liminf_{n\to\infty}(p_{n+1} - p_n) = 2. \tag{1.6.18}$$

(4) Goldston-Pintz-Yildrim (2009-2010) 证明了

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{\ln p_n} = 0, \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{\sqrt{\ln p_n}(\ln\ln p_n)^2} < \infty. \tag{1.6.19}$$

定理1.6.9. (张益唐, 2013)

$$\liminf_{n\to\infty}(p_{n+1} - p_n) \leq 7 \times 10^7. \tag{1.6.20}$$

假设 $b_1 < \cdots < b_k$ 为一列正整数. 对每个素数 p, 引入

$$\nu_{b_1,\cdots,b_l}(p) := \#\left\{b_i \pmod p) : 1 \leq i \leq k\right\}. \tag{1.6.21}$$

当 $k = 2$, $(b_1, b_2) = (0, 2)$, 得到

$$\nu_{0,2}(p) = \#\{0 \pmod p),\ 2 \pmod p)\} = \begin{cases} 1, & p = 2, \\ 2, & p \geq 3. \end{cases} \implies \nu_{0,2}(p) < p.$$

猜想1.6.10. (Dickson, 1904) *若 $\nu_{b_1,\cdots,b_k}(p) < p$ 对所有素数 p 都成立, 则存在无穷多个正整数 n 使得 $n + b_1, \cdots, n + b_k$ 都是素数.*

显然**猜想** 1.6.10 可推出**猜想** 1.6.8.

猜想1.6.11. (Hardy-Littlewood, 1923) *对任意 $x, y \geq 1$, 证明*

$$\pi(x+y) \leq \pi(x) + \pi(y). \tag{1.6.22}$$

Hensley-Richards (1972) 证明了**猜想** 1.6.10 和**猜想** 1.6.11 是不相容的. 人们相信**猜想** 1.6.10 是对的, 而**猜想** 1.6.11 是错误的.

§1.6.3 超越数 π 和 e

接下来我们会证明

$$\begin{aligned} e &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}, \\ \frac{\pi^2}{6} &= \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}, \\ n! &\sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}, \quad n\to\infty. \quad (\textit{Stirling}) \end{aligned} \tag{1.6.23}$$

§1.6.4 度量空间

考察 n 维 Euclidean 空间 $\mathbb{R}^n$, 通常的距离函数 $d_{\mathbb{R}^n}$ 定义为

$$d_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := \left(\sum_{1\leq i\leq n}(x^i-y^i)^2\right)^{1/2}, \quad \boldsymbol{x}=(x^1,\cdots,x^n), \quad \boldsymbol{y}=(y^1,\cdots,y^n).$$

在中学时期我们知道

- $d_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geq 0$ 且 $d_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$,
- $d_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=d_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$,
- $d_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\leq d_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+d_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$.

定义1.6.12. **度量空间**是指二元组 (X,d), 其中 X 是非空集合, d 是 X 上的**度量**. 换句话说, 映射 $d: X\times X\to\overline{\mathbb{R}}:=\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 满足

(1) (**非负性**) $d(x,y)\geq 0$ 且 $d(x,y)=d(y,x)$,

(2) (**对称性**) $d(x,y)=d(y,x)$,

(3) (**三角不等式**) $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$.

称 d 是**有限的** 如果 d 的像集包含在 $\mathbb{R}$ 内.

任意度量空间诱导出某个集合上的有限度量. 实际上, 假设 (X,d) 是度量空间, 取一点 $x\in X$. 定义

$$[x]_d := \{y\in X: d(x,y)\neq\infty\}.$$

则 $y\in[x]_d \Leftrightarrow y\sim_d x$ 是等价关系. 从而 d 是 $[x]_d$ 上的有限度量.

定义1.6.13. 度量空间之间的映射 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 称为**距离保持的**若

$$d_Y(f(x_1),f(x_2))=d_X(x_1,x_2), \quad x_1,x_2\in X. \tag{1.6.24}$$

距离保持的双射称为**等距映射**, 两个度量空间是**等距的**如果它们之间存在一个等距映射.

例1.6.14. *(1) 在任意非空集合 X 上, 可以定义***平凡度量**

$$d_{\mathbb{R}}(x,y) := \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1 & x \neq y. \end{cases} \tag{1.6.25}$$

(2) 令 $X = \mathbb{R}$. 存在两个有用的距离:

$$d(x,y) := |x-y|, \quad d_{\ln}(x,y) := \ln(1+|x-y|). \tag{1.6.26}$$

第二个距离会出现在微分几何和复代数几何中.

*(3) 任给两个距离空间 (X, d_X) 和 (Y, d_Y), 定义 $X \times Y$ 上的***乘积度量***为*

$$d_{X\times Y}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := (d_X(x_1,x_2) + d_Y(y_1,y_2))^{1/2}. \tag{1.6.27}$$

(4) $X = \mathbb{R}^n$:

$$d_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \left(\sum_{1\leq i\leq n} (x^i - y^i)^2 \right)^{1/2}.$$

(5) 给定距离空间 (X,d) 和常数 $\lambda > 0$, 定义

$$d_\lambda(x,y) := \lambda d(x,y). \tag{1.6.28}$$

(6) 若 (X,d) 是度量空间且 $Y \subseteq X$ 是子集, 则 $(Y, d_Y := d|_X)$ 本身也是度量空间.

假设 (X,d) 是度量空间.

(1) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 称为**Cauchy 数列** 如果 $d(x_n, x_m) \to 0$ 当 $n, m \to \infty$. 即, $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $d(x_n, x_m) < \epsilon$ 对任意 $n, m \geq n_0$ 都成立.

(2) 度量空间 (X,d) 是**完备的**如果任意的 Cauchy 数列都有位于 X 内的极限. 显然极限存在必唯一.

(3) $(\mathbb{R} \setminus 0, d_{\mathbb{R}}|_{\mathbb{R}\setminus 0})$ 是不完备的.

(4) 对 $\delta > 0$, 定义 $A \subseteq X$ 的δ**- 领域**为

$$A_\delta := \{x \in X : d(x, A) < \delta\}$$

其中 $d(x,A) := \inf\{d(x,a) : a \in A\}$.

(5) 两个集合 $A, B \subseteq X$ 间的**Hausdorff 距离**定义为

$$d_{\mathbf{H}}^X(A,B) := \inf\{\delta > 0 : A \subseteq B_\delta \text{ 且 } B \subseteq A_\delta\}. \tag{1.6.29}$$

两个度量空间 (X,d_X) 和 (Y,d_Y) 间的**Gromov-Hausdorff 距离**定义为

$$d_{\mathbf{GH}}((X,d_X),(Y,d_Y)) := \inf\left\{ d^Z_{\mathbf{H}}(f(X),g(Y)) : \begin{array}{c} (Z,d_Z) \text{ 度量空间且} \\ f: X \hookrightarrow Z,\ g: Y \hookrightarrow Z \\ \text{等距嵌入} \end{array} \right\}, \tag{1.6.30}$$

这里**等距嵌入**是指 $(X,d_X) \to (f(X),d_Z|_{f(X)})$ 和 $(Y,d_Y) \to (g(Y),d_Z|_{g(Y)})$ 都是等距映射.

一列度量空间 $\{(X_n,d_n)\}_{n\geq 1}$ 在**Gromov-Hausdorff 意义下收敛**到度量空间 (X,d), 记作 $(X_n,d_n) \to_{\mathbf{GH}} (X,d)$, 如果

$$\lim_{n\to\infty} d_{\mathbf{GH}}((x_n,d_n),(X,d)) = 0. \tag{1.6.31}$$

比如, 一列半径趋于 0 的 $\mathbb{R}^3$ 中的圆柱体在 Gromov-Hausdorff 意义下收敛到 $\mathbb{R}^3$ 中的一条直线.

这个概念主要用来研究和处理 "奇异空间", 特别的是在研究 Ricci 流中（Hamilton 最早引入该流来研究**Poincaré 猜想**, 即任何简单闭三维流形同胚于 $\mathbb{S}^3$）. Poincaré 猜想最后被 Perelman 解决, 当然很多数学家补全了详细的证明.

§1.6.5 泛函

考察函数

$$f(x) := x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

易证 f 连续, $\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f(0) = 0$, 且 $f'(0) = 0$.

令 X 表示 $\mathbb{R}$ 上所有函数构成的集合并考虑映射

$$\mathscr{F}: X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto f(0)^2.$$

显然 $\min_{f\in X} \mathscr{F}(f) = \mathscr{F}(0) = 0$.

问题: 如何定义 $\mathscr{F}$ 的 "导数"?

定义1.6.15. *($\mathbb{R}$ 上的)**向量空间** 是集合 X, 里面元素用 $x,y,z,\cdots$ (称为**向量**) 来表示, 上附带加法 $(+)$ 和乘法 $(\cdot)$ 两种运算, 并满足性质*

(1) $x+y \in X, \forall\, x,y \in X,$

(2) $a \in \mathbb{R}, x \in X \Longrightarrow a\cdot x \in X,$

(3) $x,y \in X \Longrightarrow x+y = y+x,$

(4) $x,y,z \in X \Longrightarrow (x+y)+z = x+(y+z),$

(5) $\exists\, 0 \in X$ (**zero vector**) 使得 $x + 0 = x, \forall\, x \in X$,

(6) $\forall x \in X, \exists -x \in X$ 使得 $x + (-x) = 0$,

(7) $\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \forall\, x \in X \Longrightarrow a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x$,

(8) $\forall\, a \in \mathbb{R}, \forall x, y \in X \Longrightarrow a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$,

(9) $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x \in X \Longrightarrow (a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$,

(10) $\forall x \in X, 1 \cdot x = x$.

换句话说, $(X, +, \cdot)$ 是向量空间如果 $(X, +)$ 是 *Abelian* 群且 $(X, +, \cdot)$ 是左 $\mathbb{R}$-模.

例1.6.16. (1) $\mathbb{R}^n$ 是向量空间.

(2) 任给区间 $I \subset \mathbb{R}$, 定义

$$X := \{I \text{ 上的实值函数}\}.$$

令

$$(\phi + \psi)(x) := \phi(x) + \psi(x), \quad (a \cdot \phi)(x) := a \cdot \phi(x).$$

则 $(X, +, \cdot)$ 是向量空间.

(3) 令

$$X' := \{f \in X : f(0) - f(1) = 1\}$$

这里 X 是 (2) 中的向量空间（取 $I = [0, 1]$）. 则 $(X', +, \cdot)$ 不是向量空间 (**提示:** 考虑函数 $f(x) = 1 - x$ 和 $g(x) = 1 - x^2$).

定义1.6.17. X 上的**泛函** $\mathscr{F}$ 是向量空间 X 到 $\mathbb{R}$ 的映射.

例1.6.18. **(泛函的例子)** (1) $\mathscr{F}(\boldsymbol{x}) := (x^2)^2 - (x^1)^2$ *for* $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$.

(2) $X = C[0, \pi/2]$ 定义为 $[0, \pi/2]$ 上连续函数构成的向量空间, 令

$$\mathscr{F}(\phi) := \int_0^{\pi/2} \left[2\phi(x)^3 + 9(\sin x)\phi(x)^2 + 12(\sin^2 x)\phi(x) - \cos x\right] dx.$$

(3) $X = \mathbb{R}^2$, *and*

$$\mathscr{F}(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & \boldsymbol{x} \neq 0, \\ 0, & \boldsymbol{x} = 0. \end{cases}$$

定义1.6.19. 给定泛函 $\mathscr{F} : X \to \mathbb{R}$. $\mathscr{F}$ **在** $x \in D \subseteq X$ **的 Gâteaux 变分**定义为

$$\eth\mathscr{F}(x; h) := \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\mathscr{F}(x + \epsilon h) - \mathscr{F}(x)}{\epsilon}. \tag{1.6.32}$$

例1.6.20. *(1)* $\mathscr{F}(\boldsymbol{x}) := (x^2)^2 - (x^1)^2$ *for* $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2)$,

$$\eth\mathscr{F}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{h}) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{[(x^2+\epsilon h^2)^2 - (x^1+\epsilon h^1)^2] - (x^2)^2 - (x^1)^2}{\epsilon} = 2(x^2h^2 - x^1h^1).$$

(2) 取例 *1.6.18 (2)* 中的 $\mathscr{F}$, 则

$$\eth\mathscr{F}(\phi;\phi) = \int_0^{\pi/2}\left[6\phi(x)^2\psi(x) + 18\sin x\phi(x)\psi(x) + 12\sin^2 x\psi(x)\right]dx.$$

(3) 取例 *1.6.18 (3)* 中的 $\mathscr{F}$, 则

$$\eth\mathscr{F}(\boldsymbol{0};\boldsymbol{h}) = \begin{cases} (h^2)^2/(h^1)^2, & h^1 \neq 0, \\ 0, & h^1 = 0. \end{cases}$$

§1.7 参考文献

1. Munkres, James R. *Topology*, Second edition, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000. xvi+537 pp. ISBN: 0-13-181629-2 MR3728284

2. Zhang, Fubao; Xue, Xingmei; Chao, Xiaoli. *Lectures on Mathematical Analysis* (Chinese), Science Press, 2019.

3. Kashiwara, Masaki; Schapira, Pierre. *Categories and sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer-Verlag, Berlin, 2006. x+497 pp. ISBN: 978-3-504-27949-5; 3-540-27949-0 MR21822076 (2006k:18001)

4. Kashiwara, Masaki; Schapira, Pierre. *Sheaves on manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer-Verlag, Berlin, 1990. x+512 pp. ISBN: 3-540-51861-4 MR1074006 (92a:58132)

5. Iwaniec, Henryk; Kowalski, Emmanuel. *Analytic number theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. xii+615 pp. ISBN: 0-8218-3633-1 MR2061214 (2005h: 11005)

6. 徐森林, 薛春华编著: **数学分析**, 清华出版社, 2005.

7. 张福保, 薛金美, 潮小李 主编: **数学分析讲义**, 科学出版社, 2019.

8. 梅加强 编著: **数学分析**, 高等教育出版社, 2015.

9. 邓建平 编: **微积分 I 和 II**, 科学出版社, 2019.

10. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis I*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+574 pp. ISBN: 3-540-40386-8

11. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis II*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xvi+681 pp. ISBN: 3-540-40633-6

12. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis I*, Translated from the 1988 German original by Gary Brookfield, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. xiv+426 pp. ISBN: 3-7643-7153-6

13. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis II*, Translated from the 1999 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. xii+400 pp. ISBN: 978-3-7643-7472-3; 3-7643-7472-3

14. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis III*, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. xii+468 pp. ISBN: 978-3-7643-7479-2; 3-7643-7479-2

15. 汪林 著: **数学分析中的问题和反例**, 现代数学基础 **56**, 高等教育出版社, 2015.

16. 裴礼文 编著: **数学分析中的典型问题与方法** (第二版), 高等教育出版社, 2015.

17. 朱尧辰 编著: **数学分析例选通过范例学技巧**, 哈尔滨工业大学出版社, 2013.

18. 周民强 编著: **数学分析习题演练** (第一、二、三册), 科学出版社, 2018.

19. 吉米多维奇 著 (李荣涑, 李植 译): **数学分析习题集** (根据 2010 年俄文版翻译), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.

第一部分

单变量理论

第二章　极限理论 I: 数列极限

圣人亦是学知, 众人亦是生知.—《传习录》理学编卷二

§2.1　收敛数列

假设 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 是一个函数. 它的像集是由一些离散的点所构成:

$$f(0),\quad f(1),\quad f(2),\quad f(3),\quad \cdots.$$

方便期间, 我们记作 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 并称为一个**数列**. 一般地, 一个数列就是某个函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 的像集.

§2.1.1　定义

定义2.1.1. *给定一个数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$.*

*(1) $a\in\mathbb{R}$ 称为 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的**极限**, 如果 $\forall\,\epsilon>0$, $\exists\,N\in\mathbb{N}$ 使得*

$$|a_n-a|<\epsilon$$

对任意 $n>N$ 都成立. 此时我们记作 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ 或 $a_n\to a$.

之后我们会证明数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的极限若存在必唯一.

*(2) 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **收敛** 如果存在 $a\in\mathbb{R}$ 使得 $a_n\to a$. 否则的话, 我们称数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **发散**.*

在上述定义中, 我们要注意 “2” 个 $\forall$ 和 “1” 个 $\exists$: ϵ 是任意的正数, 但是一旦找到便是固定的数了. 在证明极限时候, 目标是去寻找 “N” 使得不等式对任意的 $n>N$ 都成立.

在几乎所有求极限中, N 是 ϵ（和 a）的函数, 并随着 ϵ 的变小而变大.

在上述定义中, “2” 个 $<$ 其实可以改为 $\le$, 这个修改不影响定义本身. 另外, $<\epsilon$ 可以改为 $<10\epsilon$, $\le 13\epsilon$ 等, 原因在于 ϵ 本身是任意的.

§2.1.2　例子

这一小节我们来练习 “$\epsilon-N$” 语言.

例2.1.2. *(1)* $|q|<1\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}q^n=0$.

(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$.

(3) $a\ge1\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

(4) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证: (1) 如果 $q=0$, 每个 q^n 均为零. 从而我们可以假设 $0<|q|<1$. 此时

$$|q^n-0|<\epsilon \iff |q|^n<\epsilon \iff n>\frac{\ln\epsilon}{\ln|q|}.$$

那么, $\forall\,\epsilon>0, \exists\,N=\lfloor \ln\epsilon/\ln|q|\rfloor+1$ 使得

$$|q^n-0|<\epsilon \quad \text{只要} \quad n>N.$$

(2) 观察到

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

我们可以取 $N=\lfloor 1/4\epsilon^2\rfloor+1$.

(3) 不失一般性, 假设 $a>1$. 因此 $\sqrt[n]{a}>1$ 且可写成 $\sqrt[n]{a}=1+y_n$. 由于 $y_n>0$ 得到

$$a=(1+y_n)=1+ny_n+\frac{n(n-1)}{2}y_n^2+\cdots+y_n^n>1+ny_n.$$

上述不等式可重新写成

$$|\sqrt[n]{a}-1|=|y_n|<\frac{a-1}{n}\longrightarrow 0.$$

这样我们找到 N 只要 $N>(a-1)/\epsilon$.

(4) 类似 (3), 令 $\sqrt[n]{n}=1+y_n$, 其中 $y_n>0$. 同理得到

$$n=(1+y_n)^n=1+ny_n+\frac{n(n-1)}{2}y_n^2+\cdots+y_n^n>1+\frac{n(n-1)}{2}y_n^2.$$

和 (3) 唯一区别是, 在这里二项式展开中我们取第一项和第三项. 原因是右边已经出现了 n, 如果在二项式展开中我们只取前面两项, 那么很明显 y_n 的绝对值被 $(n-1)/n$ 所控制. 但是 $(n-1)/n$ 不可能趋于零. 最后得到

$$|\sqrt[n]{n}-1|=|y_n|<\sqrt{\frac{2}{n-1}}\longrightarrow 0.$$

这里只要 $N>1+2/\epsilon^2$. □

假设 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 发散. 即对 $\forall\,a\in\mathbb{R}$, 都有 $a_n\nrightarrow a$. 归纳为

$$a_n\nrightarrow a \iff \exists\,\epsilon_0>0, \forall\,N\in\mathbb{N}, \exists\,n_0>N \text{ 使得 } |a_{n_0}-a|\geq\epsilon_0.$$

例2.1.3. *(1) 证明数列 $\{(-1)^{n-1}\}_{n\geq 1}$ 发散.*

(2) 证明数列 $\{\sin n\}_{n\geq 1}$ 发散.

证: *(1) 首先证明 $(-1)^{n-1}\nrightarrow 1$. $\exists\,\epsilon_0=1, \forall\,N\in\mathbb{N}, \exists\,n_0=2N>N$ 满足*

$$|a_{n_0}-a|=|(-1)^{n-1}-1|=|-2|=2>1=\epsilon_0.$$

接下来对任意 $a \neq 1$, 证明 $(-1)^{n-1} \nrightarrow a$. ϵ $\epsilon_0 = |a-1|/2$, $\forall\, N \in \mathbb{N}$, ϵ $n_0 = 2N+1$ 满足 $|a_{n_0} - a| = |1-a| > \epsilon_0$.

(2) 由于 $|\sin n| \leq 1$, 我们只要证明 $\forall\, A \in [-1,1]$, $\sin n \nrightarrow A$. 不失一般性, 假设 $0 \leq A \leq 1$. $\exists\, \epsilon_0 = \sqrt{2}/2$, $\forall\, N \in \mathbb{N}$, $\exists\, n_0 = \lfloor (2N\pi - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{4} \rfloor$ 满足 $\sin n_0 < -\sqrt{2}/2$ 且 $|\sin n_0 - A| \geq \sqrt{2}/2 = \epsilon_0$. □

注2.1.4. *(1) 例 2.1.2 告诉我们*

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0 \quad \not\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n \text{ 存在}.$$

(2) 例 2.1.3 告诉我们

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ 有界} \quad \not\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n \text{ 存在}.$$

例2.1.5. 如果 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

证: $\forall\, \epsilon > 0, \exists\, N_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $|a_n - a| < \epsilon/2$ 对任意 $n > N_0$ 都成立. 注意到

$$\begin{aligned}
\left| \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - a \right| &= \left| \frac{a_1 + \cdots + a_n - na}{n} \right| \\
= & \left| \frac{a_1 + \cdots + a_{N_0} - N_0 a}{n} + \frac{(a_{N_0+1} - a) + \cdots + (a_N - a)}{n} \right| \\
\leq & \frac{|a_1 + \cdots + a_{N_0} - N_0 a|}{n} + \frac{|a_{N_0+1} - a| + \cdots + |a_n - a|}{n} \\
&\leq \frac{n - N_0}{n} \frac{\epsilon}{2} + \frac{|a_1 + \cdots + a_{N_0} - N_0 a|}{n}.
\end{aligned}$$

只要取

$$N > \max\left\{ N_0, \frac{|a_1 + \cdots + a_{N_0} - N_0 a|}{\epsilon/2} \right\}.$$

我们得到

$$\left| \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - a \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \quad \square$$

例2.1.6. 任意实数都是某个有理数列的极限.

证: 任给一个实数 $a \in \mathbb{R}$. 定义 $a_n := \lfloor na \rfloor / n$. 因为

$$na - 1 < \lfloor na \rfloor \leq na,$$

我们得到

$$a - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor na \rfloor}{n} < a$$

或者

$$|a_n - a| = \left| \frac{\lfloor na \rfloor}{n} - a \right| < \frac{1}{n} \longrightarrow 0. \quad \square$$

例2.1.7. $a \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a^n/n! = 0$.

证: 由于 $a \in \mathbb{R}$ 是一个给定的实数, 可以找到 $N_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $|a| \le N_0$ 成立. 观察到下面的不等式

$$\left|\frac{a^n}{n!} - 0\right| = \frac{|a|^n}{n!} = \frac{|a|^{N_0}}{N_0!} \times \frac{|a|}{N_0+1} \times \cdots \times \frac{|a|}{n} \le \frac{|a|^{N_0}}{N_0!} \times \frac{|a|}{n} \quad (n \ge N_0).$$

$\forall\, \epsilon > 0, \exists N > \max\{N_0, |a|^{N_0+1}/N_0!\epsilon\}, \forall\, n > N$, 有 $|a^n/n! - 0| < \epsilon$ 成立. $\square$

例2.1.8. 证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{n^2-3} = 3$.

证: 根据极限定义考虑

$$\left|\frac{3n^2}{n^2-3} - 3\right| = \left|\frac{9}{n^2-3}\right| = \frac{9}{|n^2-3|} = \frac{9}{(n+\sqrt{3})(n-\sqrt{3})} < \frac{9}{n}$$

只要 $n \ge 3$. 因此当 $n > 9/\epsilon$ 时候, 得到 $|3n^2/(n^2-3) - 3| < \epsilon$. $\square$

例2.1.9. $\lim_{n\to\infty} \frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1} = \frac{3}{2}$.

证: 只要注意到

$$\left|\frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1} - \frac{3}{2}\right| = \frac{3}{4\sqrt{n}-2} \le \frac{5}{4\sqrt{n}-2\sqrt{n}} = \frac{5}{2\sqrt{n}} < \frac{3}{\sqrt{n}}. \quad \square$$

例2.1.10. 如果 $a_n := 0.3\cdots3$ (n 个 3) 证明 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.\dot{3} = \frac{1}{3}$.

证: 只要注意到

$$\begin{aligned} |a_n - 0.\dot{3}| &= \left|0.\underbrace{33\cdots33}_{n} - 0.\underbrace{33\cdots33}_{n}33\cdots\right| = \left|0.\underbrace{00\cdots00}_{n}33\cdots\right| \\ &< 0.\underbrace{00\cdots0}_{n-1}1 = \frac{1}{10^n}. \quad \square \end{aligned}$$

§2.2 收敛数列的性质

收敛数列的基本性质有唯一性、有界性、保号性等.

§2.2.1 基本性质

在**定义**2.1.1 中我们留下了一个没有给出证明的断言, 即数列极限存在必唯一. 在这小节我们给出这个断言的证明.

定理2.2.1. *(1)* (**唯一性**) $a_n \to a, a_n \to b \Longrightarrow a = b$.

(2) (**有界性**) $\{a_n\}_{n\ge1}$ 收敛 $\Longrightarrow \{a_n\}_{n\ge1}$ 有界.

(3) (**保序性**) $a_n \to a, b_n \to b, a < b \Longrightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ 使得 $a_n < b_n$ 对任意 $\forall n \ge N$ 都成立.

(4) $a_n \to a$, $b < a < c \Longrightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ 使得 $b < a_n < c$ 对任意 $\forall n > N$ 都成立.

*(5)（**保号性**）$a_n \to a$, $b_n \to b$, $a_n \le b_n$ $(\forall n > N) \Longrightarrow a \le b$.*

(6) $a_n \to a \Longrightarrow |a_n| \to |a|$.

证: (1) 任给 $\epsilon > 0$, $\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ 使得

$$|a_n - a| < \epsilon \quad (\forall n > N_1) \quad 和 \quad |b_n - b| < \epsilon \quad (\forall n > N_2)$$

都成立. 从而

$$|a - b| \le |a_n - b + |a_n - a| < 2\epsilon \quad (\forall n > \max(N_1, N_2)).$$

根据 ϵ 的任意性, 我们必须有 $a = b$ 成立.

(2) 取 $\epsilon = 1$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ 使得 $a - 1 < a_n < a + 1$ 对任何 $\forall n > N_1$ 都成立. 因此 $\forall n \ge 1$,

$$\min\{a_1, \cdots, a_N, a - 1\} \le a_n \le \max\{a_1, \cdots, a_N, a + 1\}.$$

(3) 取 $\epsilon = \frac{b-a}{2} > 0$, $\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ 使得

$$|a_n - a| < \frac{b-a}{2} \quad (n > N_1) \quad 和 \quad |b_n - b| < \frac{b-a}{2} \quad (n > N_2)$$

都成立. 从而

$$a_n < \frac{b-a}{2} + a = \frac{b+a}{2} < b_n \quad (n > \max(N_1, N_2)).$$

(4) 在 (3) 中令 $b_n \equiv b$, 我们可以找到 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $b = b_n < a_n$ $(n > N)$ 成立.

(5) 若 $\lim_{n\to\infty} b_n = b < a = \lim_{n\to\infty} a_n$ 成立, 则根据 (3) 我们得到 $b_n < a_n$ 对所有 $n > N$ 都成立.

(6) $a_n \to a$ 意味着 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ 使得 $|a_n - a| < \epsilon$ 对任意 $n > N$ 都成立. 从而 $||a_n| - |a|| \le |a_n - a| < \epsilon$. $\square$

注2.2.2. *(1) $\{a_n\}_{n\ge1}$ 有界 $\not\Rightarrow$ $\{a_n\}_{n\ge1}$ 收敛.*

(2) $a_n \to a$, $b_n \to b$, $a_n < b_n \not\Rightarrow a < b$. 比如, $a_n = 1/n$, $b_n = 2/n$, 但是 $a = b = 0$.

(3) $\{|a_n|\}_{n\ge1}$ 收敛 $\not\Rightarrow$ $\{a_n\}_{n\ge1}$ 收敛. 比如 $a_n = (-1)^{n-1}$.

定理2.2.3. **（夹逼定理）** *如果不等式 $x_n \le y_n \le z_n$ 对所有 $n \ge N_0$ 都成立, 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$, 则 $\lim_{n\to\infty} y_n = a$.*

证: $\forall \epsilon > 0, \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ 使得

$$|x_n - a| < \epsilon, \quad |z_n - a| < \epsilon$$

成立. 从而

$$a - \epsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \epsilon$$

对任意 $n > \max(N_0, N_1, N_2)$ 都成立. 故 $y_n \to a$. □

例2.2.4. *(1)* $a_1, \cdots, a_k > 0 \Longrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + \cdots + a_k^n} = \max\{a_1, \cdots, a_k\}. \tag{2.2.1}$$

(2) 证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt[n]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} = 1. \tag{2.2.2}$$

(3) 求极限

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

证: *(1)* 不失一般性, 假设 $\max\{a_1, \cdots, a_k\} = a_1$. 则得到

$$a_1 < \sqrt[n]{a_1^n + \cdots + a_k^n} \le \sqrt[n]{k a_1^n} = (\sqrt[n]{k}) a_1 \to a_1.$$

最后一步利用了**例**2.1.2 (3).

(2) 实际上有下列不等式

$$\frac{1 + 1 + \cdots + 1}{n} \le \frac{1 + \sqrt[n]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} \le \frac{\sqrt[n]{n} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n}$$

从而推出 $1 \le (1 + \sqrt[n]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n})/n \le \sqrt[n]{n} \to 1$. 最后一步利用**例**2.1.2 (4).

(3) 回忆下阶乘:

$$\begin{aligned} n! &= 1 \times 2 \times 3 \cdots \times n, \\ (2n)!! &= 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n, \\ (2n-1)!! &= 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1), \\ (2n)! &= (2n)!! \cdot (2n-1)!!. \end{aligned}$$

对每个 $k \in \mathbb{N}$ 有

$$\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1}$$

成立.

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \prod_{1 \le k \le n} \frac{2k-1}{2k} < \prod_{1 \le k \le n} \frac{2k}{2k+1} = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n}{3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}$$

$$= \frac{1}{\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times2n}} \times \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}} \times \frac{1}{2n+1}$$

推出

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

从而极限为 0. □

§2.2.2 收敛数列的代数运算/四则运算

假设给定两个数列 $\{a_n\}_{n\ge1}$ 和 $\{b_n\}_{n\ge1}$, 我们可以很自然地问数列 $a_n \pm b_n$, a_nb_n, a_n/b_n（对充分大的 n 有 $b_n \neq 0$）的收敛性.

定理2.2.5. *假设 $a_n \to a$, $b_n \to b$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 那么有*

$$\alpha a_n \pm \beta b_n \to \alpha a \pm \beta b, \quad a_nb_n \to ab, \quad \frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}\ (b \neq 0). \tag{2.2.3}$$

证: (1) $b_b \to b$ 推出 $-b_n \to -b$. 故只要证明 $\alpha a_n + \beta b_n \to \alpha a + \beta b$ 即可. 但这个极限可有下列不等式给出

$$0 \le |(\alpha a_n + \beta b_n) - (\alpha a + \beta b)| \le |\alpha||a_n - a| + |\beta||b_n - b| \to 0.$$

(2) $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都收敛推出存在两个正数 M_1, M_2 使得 $\Longrightarrow |a_n| \le M_1$ 和 $|b_n| \le M_2$ 成立. 下列计算

$$0 \le |a_nb_n - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \le M_1|b_n - b| + M_2|a_n - a| \to 0$$

得到 $a_nb_n \to ab$.

(3) $b_n \to b \Longrightarrow |b_n| \to |b|$. 根据假设条件 $|b| > 0$, 由**定理**2.2.1 (3) 得到不等式 $|b_n| > |b|/2$ 对充分大的 n 成立. 下列计算

$$0 \le \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{b(a_n - a) - a(b_n - b)}{b_nb}\right|$$

$$\le \frac{|b||a_n - a| + |a||b_n - b|}{|b_n||b|} \le \frac{2}{|b|^2}(|b||a_n - a| + |a||b_n - b|) \to 0$$

得到 $a_n/b_n \to a/b$. □

注2.2.6. *(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ 存在$\not\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在或 $\lim_{n\to\infty} b_n$ 存在. 比如, $a_n = (-1)^{n-1}$, $b_n = (-1)^n$.*

(2) $\lim_{n\to\infty} a_nb_n$ 存在$\not\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在或 $\lim_{n\to\infty} b_n$ 存在. For 比如, $a_n = b_n = (-1)^{n-1}$.

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n$ 存在$\not\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在或 $\lim_{n\to\infty} b_n$ 存在. 比如, $a_n = (-1)^n$, $b_n = n$.

例2.2.7. *(1)* 对所有 $a>0$ 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1. \tag{2.2.4}$$

(2) 对所有 $q>1$ 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_q n}{n}=0. \tag{2.2.5}$$

(3) 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$$

证: *(1)* 例2.1.2 推出 (2.2.4) 对所有 $a\ge 1$ 都成立. 当 $0<a<1$ 时, 有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=\frac{1}{1}=1.$$

(2) 实际上根据 $q>1$ 得到

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1<q^{\epsilon}\quad\Longrightarrow\quad\sqrt[n]{n}<q^{\epsilon}\ \ (\forall n>N).$$

故只要

$$\frac{\log_q n}{n}<\epsilon\ (\forall n>N)\quad\Longrightarrow\quad\frac{\log_q n}{n}\to 0.$$

(3) 令 $a_n=1/\sqrt[n]{n!}$. 因为 $n!=1\times 2\times\cdots\times n$ 得到

$$\begin{aligned}(n!)^2 &= (1\times 2\times\cdots\times n)\times[n\times(n-1)\times\cdots\times 2\times 1]\\ &= [1\times n][2\times(n-1)]\cdots[k\times(n-k+1)]\times\cdots\times[n\times 1].\end{aligned}$$

对任意 $1\le k\le n$ 有不等式 $(k-1)(n-k)\ge 0$ 成立, 从而 $k(n-k+1)\ge n$ 成立. 带入上述恒等式得到

$$(n!)^2\ge n^n\quad\Longrightarrow\quad n!\ge n^{n/2}\quad\Longrightarrow\quad\sqrt[n]{n!}\ge\sqrt{n}.$$

这表明 $a_n\le 1/\sqrt{n}$ 从而推出 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. □

§2.2.3 无穷小和无穷大数列

根据之前内容知道若极限 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ 存在, 则数列 $b_n:=a_n-a$ 的极限也存在且满足 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$. 由此可以引入如下概念.

数列 $\{a_n\}_{n\ge 1}$ 称为**无穷小**, 如果 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ 或者 $a_n\to 0$. 即无穷小数列就是极限为 0 的数列.

(1) $a_n\to a\Longleftrightarrow a_n-a\to 0\Longleftrightarrow a_n=a+\alpha_n$ 且 $\alpha_n\to 0$.

(2) $a_n\to 0\Longleftrightarrow |a_n|\to 0$.

(3) $a_n\to 0, b_n\to 0\Longrightarrow a_n+b_n, a_n-b_n, a_nb_n\to 0$.

(4) $a_n \to 0, b_n \to 0 \not\Rightarrow a_n/b_n \to 0$. 比如,

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{n}, \\ b_n = \frac{1}{n}, \end{cases} \quad \frac{a_n}{b_n} \equiv 1, \quad \begin{cases} a_n = \frac{1}{n}, \\ b_n = \frac{1}{n^2}, \end{cases} \quad \frac{a_n}{b_n} = n, \quad \begin{cases} a_n = \frac{1}{n^2}, \\ b_n = \frac{1}{n}, \end{cases} \quad \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n}.$$

(5) $a_n \to 0, |b_n| \le M \Longrightarrow a_n b_n \to 0$.

在平面上考察以 $(0,1)$ 为圆心 1 为半径的圆 C. 显然 C 和 x 轴交于原点 $(0,0)$. 取点 $P=(0,2)$, 这是 C 和 y 轴的交点. 任取 x 轴上的点 Q, 作直线 PQ 交 C 于 R 点. 随着点 Q 跑遍整个 x 轴, 我们发现点 R 跑遍整个圆 C 除了 P 点. 因此可以想象

$$\mathbb{R} \cup \{\infty\} \quad \Longleftrightarrow \quad C \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{S}^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

这种观点很自然的把 ∞ 点等同于 $(0,2)$ 点.

数列 $\{a_n\}_{n\ge1}$ 称为**无穷大**, 若 $\forall C > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ 使得

$$|a_n| \ge C \quad 对任何 \quad n > N$$

都成立.

记号: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ 或 $a_n \to \infty$.

(1) 定义

$$\begin{array}{c} \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \\ 或\ a_n \to +\infty \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \{a_n\}_{n\ge1}\ 是无穷大数列 \\ 且\ a_n > 0\ (\forall n \ge N_0). \end{array}$$

(2) 定义

$$\begin{array}{c} \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \\ 或\ a_n \to -\infty \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \{a_n\}_{n\ge1}\ 是无穷大数列 \\ 且\ a_n < 0\ (\forall n \ge N_0). \end{array}$$

(3) $a_n \to +\infty$ or $a_n \to -\infty \Longrightarrow a_n \to \infty$. 但是反之不一定对, 比如 $a_n = (-1)^n n$.

(4) $a_n, b_n \to \pm\infty \Longrightarrow a_n + b_n \to \pm\infty$.

(5) $a_n \to \pm\infty, b_n \to \mp\infty \Longrightarrow a_n - b_n \to \pm\infty$.

(6) $a_n \to \infty, |b_n| \ge M > 0 \Longrightarrow a_n b_n \to \infty$.

(7) $a_n, b_n \to \pm\infty \Longrightarrow a_n b_n \to \pm\infty$.

(8) $a_n \to \pm\infty, b_n \to \mp\infty \Longrightarrow a_n b_n \to -\infty$.

(9) $a_n \to 0, a_n \neq 0 \Longrightarrow 1/a_n \to \infty$.

例2.2.8. *(1)* $|q|>1 \Longrightarrow q^n \to \infty$. 实际上,

$$|q^n| = |q|^n \geq |q|^{\frac{\ln C}{\ln |q|}} = C$$

只要 $n \geq N > \ln C/\ln |q|$.

(2) $a_n := \sum_{1\leq k\leq n} 1/(\sqrt{n}+\sqrt{k}) \to +\infty$. 实际上,

$$a_n > \frac{n}{2\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{2} \to +\infty.$$

(3) 令

$$a_n := \frac{x_0 n^k + x_1 n^{k-1} + \cdots + x_{k-1}n + x_k}{y_0 n^\ell + y_1 n^{\ell-1} + \cdots + y_{\ell-1}n + y_\ell}, \quad (k,\ell \in \mathbb{N},\ x_0 y_0 \neq 0).$$

由于

$$a_n = n^{k-\ell}\frac{x_0 + \frac{x_1}{n} + \cdots + \frac{x_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{x_k}{n^k}}{y_0 + \frac{y_1}{n} + \cdots + \frac{y_{\ell-1}}{n^{\ell-1}} + \frac{y_\ell}{n^\ell}},$$

得到

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0, & k<\ell, \\ x_0/y_0, & k=\ell, \\ \infty, & k>\ell. \end{cases}$$

(4) $a_n = \sqrt[n]{n!} \to +\infty$. 观察到

$$(n!)^2 = (1\cdot n)[2\cdot(n-1)]\cdots[k(n-k)]\cdot(n\cdot 1) = \prod_{1\leq k\leq n}[k(n-k+1)] \geq n^2$$

这是因为不等式 $(k-1)(n-k)\geq 0\,(1\leq k\leq n)$ 可推出 $k(n-k+1)\geq n$ 成立.

§2.2.4 Stolz 定理

这个定理主要是来处理 “∞/∞” 型或 “$0/0$” 型极限. 假设数列 $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ 都是无穷小, 那么**定理**2.2.5 中最后一个结论（即数列的商）就不一定成立. 如果数列 $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$ 都是无穷大, 我们可以把商 a_n/b_n 转化成两个无穷小数列的商:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1/b_n}{1/a_n}$$

这里 $1/b_n \to 0$ 和 $1/a_n \to 0$ 是无穷小数列.

因此 “∞/∞” 型或 “$0/0$” 型极限本质上是一回事情. 但是针对这两种情形 Stolz 定理的内容还是有一些细微的差异.

定理2.2.9. (Stolz 定理 I: “∞/∞” 型) 给定两个数列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 和 $\{y_n\}_{n\geq 1}$. 如果

$$y_n < y_{n+1}, \quad y_n \to +\infty, \quad 和 \quad \lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a\ (是实数或\ \pm\infty),$$

那么有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a. \tag{2.2.6}$$

证: 情形 1: $a=0$. $\forall\epsilon>0$, $\exists N_1\in\mathbb{N}$ 使得

$$|x_n-x_{n-1}|<\epsilon(y_n-y_{n-1}),\quad \forall\, n>N_1.$$

特别地, 得到

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{x_{n-1}}{y_n}\right|<\epsilon\left(1-\frac{y_{n-1}}{y_n}\right).$$

上述不等式中, x_n/y_n 是我们希望的, 但是其余项都不是我们希望的. 为了舍去这些额外项, 当 $n>N_1$ 利用三角不等式得到

$$|x_n-x_{N_1}|\le\sum_{N_1+1\le i\le n}|x_i-x_{i-1}|\le\sum_{N_1+1\le i\le n}\epsilon(y_i-y_{i-1})=\epsilon(y_n-y_{N_1});$$

即

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{x_{N_1}}{y_n}\right|\le\epsilon\left(1-\frac{y_{N_1}}{y_n}\right)<\epsilon.$$

但是 $y_n\to+\infty$, $\exists N_2\in\mathbb{N}$ 使得 $|x_{N_1}/y_n|<\epsilon$ 对任意 $n>N_2$ 都成立. 最后把这些带入得到

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right|\le\epsilon+\epsilon=2\epsilon$$

只要 $n>N=\max\{N_1,N_2\}$.

情形 2: $a\neq 0$. 基本想法是构造新的数列把**情形 2**归结到**情形 1**, 从而可应用**情形 1**的结果. 令

$$\widetilde{x}_n:=x_n-ay_n.$$

简单计算得到

$$\frac{\widetilde{x}_n-\widetilde{x}_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\frac{(x_n-ay_n)-(x_{n-1}-ay_{n-1})}{y_n-y_{n-1}}=\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}-a\to 0.$$

根据**情形 1**的结论得到 $\widetilde{x}_n/y_n\to 0$ 或 $x_n/y_0\to a$.

情形 3: $a=+\infty$. $\exists N_1\in\mathbb{N}$ 使得 $x_n-x_{n-1}>y_n-y_{n-1}>0$ ($\forall n>N_1$) 成立. 更进一步

$$x_n-x_{N_1}=\sum_{N_1+i\le i\le n}(x_i-x_{i-1})>\sum_{N_1+1\le i\le n}(y_i-y_{i-1})=y_n-y_{N_1}.$$

让 $n\to+\infty$ 得到 $x_n\to+\infty$. 根据**情形 1**,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=\frac{1}{+\infty}=0.$$

情形 4: $a=-\infty$. 观察到

$$\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}\to-\infty\Longleftrightarrow\frac{(-x_n)-(-x_{n-1})}{y_n-y_{n-1}}\to+\infty.$$

此时可应用**情形 3**的结论得到. □

实际应用中, 如果商 $a_n = x_n/y_n$ 中分母 y_n 单调递增且趋于 $+\infty$, 那么我们马上想到是不是可以应用**定理**2.2.9. 如果真的要应用这个定理, 还需要保证另一个条件

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a$$

是否存在.

定理2.2.10. (Stolz 定理 II: "0/0" 型) 给定两个数列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 和 $\{y_n\}_{n\geq 1}$. 如果

$$x_n \to 0,\quad y_n > y_{n+1},\quad y_n \to 0,\quad \text{和}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} = a\ (\text{是实数或}\ \pm\infty)$$

那么有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} = a. \tag{2.2.7}$$

证: 情形 1: $a \in \mathbb{R}$. $\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ 使得

$$a - \epsilon < \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+}} < a + \epsilon,\quad \forall n > N,$$

成立, 或

$$(a-\epsilon)(y_n - y_{n+1}) < x_n - x_{n+1} < (a+\epsilon)(y_n - y_{n+1}),\quad \forall n > N.$$

特别地,

$$(a-\epsilon)(y_n - y_{n+p}) < x_n - x_{n+p} < (a+\epsilon)(y_n - y_{n+p}),\quad \forall n > N \text{ and } p \geq 1.$$

令 $p \to +\infty$ 得到

$$(a-\epsilon)y_n \leq x_n \leq (a+\epsilon)y_n \Longrightarrow \left|\frac{x_n}{y_n} - a\right| \leq \epsilon.$$

情形 2: $a = +\infty$. 给定 $C > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ 使得 $x_n - x_{n+1} > C(y_n - y_{n+1})$ 成立 $\Longrightarrow x_n - x_{n+p} > C(y_n - y_{n+p})$ 对 $\forall n > N$ 和 $p \geq 1$ 也成立. 让 $p \to +\infty$ 得到 $x_n/y_n \geq C$.

情形 3: $a = -\infty$. 此时证明和**定理**2.2.9 **情形 4** 的证明类同. □

请注意**定理**2.2.10 和**定理**2.2.9 中假设条件的细微差别.

例2.2.11. *(1)* $a_n \to a \Longrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \frac{a}{2}.$$

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 或 $\pm\infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) = a.$

(3) $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\ell \Longrightarrow$ 求 $\lim_{n\to\infty} a_n/n$ 和 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{1\le i\le n} a_i$.

(4) $a_n\le a_{n+1}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n)=a \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=a$.

(5) $a_n=s_n-s_{n-1}$, $\sigma_n=\frac{1}{n+1}(s_0+\cdots+s_n)$, $na_n\to 0$, σ_n 收敛 $\Longrightarrow s_n$ 也收敛且

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\sigma_n.$$

证: (1) 令 $y_n:=a_1+2a_2+\cdots+na_n$ 和 $y_n:=n^2$. 根据**定理**2.2.9,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{n^2-(n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{2n-1}=\frac{a}{2}.$$

(2) 令 $x_n=a_1+\cdots+a_n$ 和 y_n. 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

(3) 令 $x_n:=a_n$ 和 $y_n=n$. 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{n-(n-1)}=\lim_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})=\ell.$$

对第二个极限, 令 $x'_n:=a_1+\cdots+a_n$ 和 $y'_n=n^2$. 从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x'_n}{y'_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x'_n-x'_{n-1}}{y'_n-y'_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2-(n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n-1}=\frac{\ell}{2}.$$

(4) 由 $a_n\le a_{n+1}$ 得到 $\sigma_n:=\frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n)\le na_n/n=a_n$. 另一方面, 对所有 $m>n$,

$$\sigma_m=\frac{1}{m}\left(\sum_{1\le i\le n}a_i+\sum_{n+1\le i\le m}a_i\right)\ge\frac{1}{m}\sum_{1\le i\le n}a_i+\frac{m-n}{m}a_n.$$

根据夹逼定理得到 $a_n\to a$.

(5) 观察到

$$s_n-\sigma_n=\frac{1}{n+1}\sum_{1\le i\le n}ia_i.$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{1\le i\le n}ia_i=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{1\le i\le n}ia_i-\sum_{1\le i\le n-1}ia_i}{(n+1)-n}=\lim_{n\to\infty}na_n=0.\quad\square$$

(6) 根据 (3), 知道 $a_n\to a\Longrightarrow\frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n)\to a$. 但是, 反之不一定成立. 比如数列 $\{(-1)^n\}_{n\ge1}$.

例2.2.12. (1) $k\in\mathbb{Z}_+\Longrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{2}.$$

(2) $\lim_{n\to\infty} n(a_n - a) = b, k \in \mathbb{Z}_+ \Longrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_1 + 2^k a_2 + \cdots + n^k a_n}{n^{k+1}} - \frac{a}{k+1}\right) = \frac{b}{k} + \frac{a}{2}.$$

证: (1) 利用**定理2.2.9** 得到

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(k+1)(1^k + \cdots + n^k) - n^{k+1}}{(k+1)n^k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{[(k+1)(1^k + \cdots + n^k) - n^{k+1}] - [(k+1)(1^k + \cdots + (n-1)^k) - (n-1)^{k+1}]}{(k+1)n^k - (k+1)(n-1)^k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(k+1)n^k - [n^{k+1} - (n-1)^{k+1}]}{(k+1)[n^k - (n-1)^k]} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}k(k+1)n^k + \cdots}{k(k+1)n^k + \cdots} = \frac{1}{2}.$$

(2) 观察到

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_1 + 2^k a_2 + \cdots + n^k a_n}{n^{k+1}} - \frac{a}{k+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(k+1)\sum_{1\le i\le n} i^k a_i - a n^{k+1}}{(k+1)n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{(k+1)n^k a_n - a(n^{k+1} - (n-1)^{k+1})}{(k+1)[n^k - (n-1)^k]}$$

和

$$n^{k+1} - (n-1)^{k+1} = (n-1+1)^{k+1} - (n-1)^{k+1} = (k+1)(n-1)^k + \frac{k(k+1)}{2}(n-1)^{k-1} + \cdots.$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_1 + 2^k a_2 + \cdots + n^k a_n}{n^{k+1}} - \frac{a}{k+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(k+1)a_n n^k - (k+1)a(n-1)^k - \frac{ak(k+1)}{2}(n-1)^{k-1} + \cdots}{(k+1)[k(n-1)^{k-1} + \cdots]}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(k+1)n^k(a_n - a) + (k+1)a[n^k - (n-1)^k] - \frac{k(k+1)a}{2}(n-1)^{k-1} + \cdots}{(k+1)[k(n-1)^k + \cdots]}$$

$$= \frac{b}{k} + a - \frac{a}{2} = \frac{b}{k} + \frac{a}{2}.$$

定理2.2.13. (Toeplitz 定理) 假设 $p_{n0} + p_{n1} + \cdots + p_{nn} = 1$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都成立, 且每个 $p_{ij} \ge 0$. 令

$$y_n := \sum_{0\le i\le n} p_{ni} x_i, \quad n \in \mathbb{N}.$$

那么下列论断等价:

(i) $x_n \to a \Longrightarrow y_n \to a$,

(ii) 对每个 $m\in\mathbb{N}$ 都有 $p_{nm}\to 0$.

证: $(i)\Longrightarrow(2)$: 取 $x_n=\delta_{nm}$ 得到 $x_n\to 0$ 和 $y_n=p_{nm}$ $(n\ge m)$. 故

$$\lim_{n\to\infty}p_{nm}=\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}x_n=0.$$

$(ii)\Longleftarrow(i)$: 假设 $x_n\to a$. 则 $\exists M>0$ 使得 $|x_n-a|\le M$ 对所有 $n\in\mathbb{Z}_+$ 都成立. $\forall\epsilon>0$, $\exists N^*\in\mathbb{N}$ 使得 $|x_n-a|<\epsilon/2$ 对所有 $n>N^*$ 都成立. 但是根据极限 $\lim_{n\to\infty}p_{ni}=0$, 我们得到 $\exists N_i>N^*$ 使得如下不等式

$$0\le p_{ni}\le\frac{\epsilon}{2N^*M},\quad\forall\, n>N_i$$

成立. 令 $N:=\max_{0\le i\le N^*}N_i$. 得到

$$\begin{aligned}|y_n-a| &= \left|\sum_{0\le i\le n}p_{ni}x_i-\sum_{0\le i\le n}p_{ni}a\right|\\ &\le \sum_{0\le i\le N^*}p_{ni}|x_i-a|+\sum_{N^*+1\le i\le n}p_{ni}|x_i-a|\\ &< MN^*\frac{\epsilon}{2N^*M}+\frac{\epsilon}{2}\sum_{N^*+1\le i\le n}p_{ni} \;<\; \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} \;=\; \epsilon.\ \square\end{aligned}$$

例2.2.14. (1) $b_n>0$, $b_0+b_1+\cdots+b_n\to\infty$, $a_n/b_n\to s\Longrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0+a_1+\cdots+a_n}{b_0+b_1+\cdots+b_n}=s.$$

(2) $p_k>0$, $\frac{p_n}{p_0+p_1+\cdots+p_n}\to 0$, $s_n\to s\Longrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{0\le i\le n}s_ip_{n-i}}{\sum_{0\le i\le n}p_i}=s.$$

(3) $p_k,q_k>0$, $\frac{p_n}{p_0+\cdots+p_n}\to 0$, $\frac{q_n}{q_0+\cdots+q_n}\to 0\Longrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{\sum_{0\le i\le n}r_i}=0.$$

这里 $r_n:=\sum_{0\le i\le n}p_iq_{n-i}$.

证: (1) 令 $x_n:=a_n/b_n$, $p_{nm}:=b_m/\sum_{0\le i\le n}b_i$, 和 $y_n:=\sum_{0\le i\le n}p_{ni}x_i$. 则

$$\lim_{n\to\infty}p_{nm}=0,\quad\sum_{0\le i\le n}p_{ni}=1,\quad p_{nm}\ge 0.$$

根据**定理**2.2.13, 得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{0\le i\le n}a_i}{\sum_{0\le i\le n}b_i}=\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}x_n=s.$$

(2) 令 $p_{nm}:=p_{n-m}/\sum_{0\le i\le n}p_i$, 这里 $0\le m\le n$ 且 $n=1,2,\cdots$, 和

$$x_n:=s_n,\quad y_n:=\sum_{0\le i\le n}p_{ni}x_i=\frac{\sum_{0\le i\le n}s_ip_{n-i}}{\sum_{0\le i\le n}p_i}.$$

(3) 令

$$P_n := \sum_{0\le i\le n} p_i,\quad Q_n := \sum_{0\le i\le n} q_n,\quad R_n := \sum_{0\le i\le n} r_i,$$

和

$$p_{nm} := \frac{p_{n-m}Q_m}{\sum_{0\le i\le n} p_i Q_{n-i}},\quad x_n := \frac{q_n}{Q_n},\quad y_n := \sum_{0\le i\le n} p_{ni}x_i.\ \square$$

例2.2.15. (1) 证明

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n+2}{\sqrt{6}}\right)^n. \tag{2.2.8}$$

(2) 证明

$$n < \left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n. \tag{2.2.9}$$

证: (1) 在**例**2.2.8 (4) 中我们已经证明了不等式

$$(n!)^2 = \prod_{1\le k\le n} [k(n-k+1)] \ge n^n$$

从而

$$n! > n^{n/2} = (\sqrt{n})^n.$$

不等式 (2.2.8) 给出了 $n!$ 的一个比 $(\sqrt{n})^n$ 更好的下界估计. 利用数学归纳法, 假设 $k! > (k/3)^k$ 成立. 由于

$$(k+1)! = (k+1)k! > (k+1)\left(\frac{k}{3}\right)^k,$$

为了归纳证明 $(k+1)! > ((k+1)/3)^{k+1}$ 只要证明

$$(k+1)\left(\frac{k}{3}\right)^k > \left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1}$$

或

$$3k^k > (k+1)^k \Longleftrightarrow \left(1+\frac{1}{k}\right)^k < 3.$$

但是根据二项式展开得到

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k &= 1+1+\sum_{2\le i\le k}\frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)}{i!}\frac{1}{k^i}\\ &< 2+\sum_{2\le i\le k}\frac{1}{i!} < 2+\sum_{2\le i\le k}\frac{1}{i(i-1)} < 3.\end{aligned}$$

利用数学归纳法证明上界, 假设 $k! < ((k+2)/\sqrt{6})^k$ 成立. 根据 $(k+1)! = (k+1)k! < (k+1)((k+2)/\sqrt{6})^k$, 只要证明

$$(k+1)\left(\frac{k+2}{\sqrt{6}}\right)^k < \left(\frac{k+3}{\sqrt{6}}\right)^{k+1}.$$

实际上,

$$\left(\frac{k+3}{\sqrt{6}}\right)^{k+1} = \left(\frac{k+2}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{k+1} > \left(\frac{k+2}{\sqrt{6}}\right)^{k+1} + (k+1)\left(\frac{k+2}{\sqrt{6}}\right)^{k}\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$+\frac{(k+1)k}{2}\left(\frac{k+2}{\sqrt{6}}\right)^{k-1}\frac{1}{(\sqrt{6})^2}+\frac{(k+1)k(k-1)}{6}\left(\frac{k+2}{\sqrt{6}}\right)^{k-2}\frac{1}{(\sqrt{6})^3}$$

$$= \left(\frac{k+2}{\sqrt{6}}\right)^{k}\left[\frac{k+2}{\sqrt{6}}+\frac{k+1}{\sqrt{6}}+\frac{k(k+1)}{2\sqrt{6}(k+2)}+\frac{(k+1)k(k-1)}{6\sqrt{6}(k+2)^2}\right]$$

$$= \left(\frac{k+2}{\sqrt{6}}\right)^{k}\frac{16k^3+75k^2+125k+72}{6\sqrt{6}(k+2)^2}.$$

现在断言

$$\frac{16k^3+75k^2+125k+72}{6\sqrt{6}(k+2)^2} > k+1 \Leftrightarrow 16k^3+75k^2+125k+72 > 6\sqrt{6}(k^3+5k^2+8k+4)$$

对任何 k 都成立. 但是这个不等式可以有下列观察得到: $16>6\sqrt{6}, 75>30\sqrt{6}$, $125>48\sqrt{6}$, 和 $72>24\sqrt{6}$.

(2) 这个可以有二项式展开得到:

$$\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 1+n\cdot\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2+\cdots > \frac{n(n-1)}{2}\frac{4}{n} = 2(n-1).$$

当 $n\geq 2$, 得到 $2(n-1)\geq n$. □

目前为止求极限的方法可归纳为如下几点:

(1) 用 "$\epsilon - N$" 语言（不过要是先知道或判断极限）

(2) 用夹逼定理

(3) 用 Stolz 定理

(4) 单调有界数列必有极限（之后我们会证明这个结论）告诉我们什么样的数列会有极限

(4) Cauchy 准则给出数列是否收敛的充分必要条件（之后我们会证明这个结论）

例2.2.16. 令 $x_1=a$, $x_2=b$, 和 $x_n=(x_{n-1}+x_{n-2})/2$. 求 $\lim_{n\to\infty}x_n$.

证: 观察到

$$x_{n+1}-x_n = \frac{x_n+x_{n-1}}{2}-x_n = \frac{x_{n-1}-x_n}{2} = \cdots = \frac{x_2-x_1}{(-2)^{n-1}} = \frac{b-a}{(-2)^{n-1}}$$

和

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sum_{1\le m\le n}(x_{m+1}-x_m)+x_1 = (b-a)\sum_{1\le m\le n}\frac{1}{(-2)^{m-1}}+a \\ &= (b-a)\frac{1-(-1/2)^{n-1}}{1-(-1/2)}+a \to \frac{2}{3}(b-a)+a = \frac{2b+a}{3}. \quad \square \end{aligned}$$

例2.2.17. *(1)* 假设 $\lambda\in\mathbb{R}$ 且 $|\lambda|<1$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a \iff \lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-\lambda a_n)=(1-\lambda)a.$$

(2) 证明

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a \iff \lim_{n\to\infty}(4a_{n+2}-4a_{n+1}+a_n)=a.$$

证: *(1)* "$\Rightarrow$" 显然成立. 现在假设 $a_{n+1}-\lambda a_n\to(1-\lambda)a$. 令

$$x_n:=a_{n+1}-\lambda a_n.$$

故

$$\frac{a_{n+1}}{\lambda^{n+1}}=\frac{a_n}{\lambda^n}+\frac{x_n}{\lambda^{n+1}}$$

从而

$$a_n=\lambda^n\left(a_0+\sum_{1\le k\le n}\frac{x_{k-1}}{\lambda^k}\right),\quad n\in\mathbb{Z}_+$$

成立. 如果 $0<\lambda<1$, 得到 $\lambda^n\to0$ 从而利用**定理**2.2.9 得到

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}a_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{a_0+\sum_{1\le k\le n}\frac{x_{k-1}}{\lambda^k}}{(\frac{1}{\lambda})^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x_n}{\lambda^{n+1}}}{(\frac{1}{\lambda})^{n+1}-(\frac{1}{\lambda})^n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{1-\lambda} = \frac{(1-\lambda)a}{1-\lambda} = a. \end{aligned}$$

若 $\lambda=0$, 结论是明显的. 如果 $-1<\lambda<0$, 考察偶数项

$$a_{2n}=\lambda^{2n}\left(a_0+\sum_{1\le k\le 2n}\frac{x_{k-1}}{\lambda^k}\right).$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\frac{1}{1-\lambda^2}\lim_{n\to\infty}(x_{2n+1}+\lambda x_{2n})=a.$$

类似地

$$-a_{2n+1}=(-\lambda)^{2n+1}\left(a_0+\sum_{1\le k\le 2n+1}\frac{x_{k-1}}{\lambda^k}\right)$$

和

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}=-\frac{1}{\lambda^2-1}\lim_{n\to\infty}(x_{2n+2}+\lambda x_{2n+1})=a.$$

根据**定理**2.3.9, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

(2) 假设 $4a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n \to a$. 观察到

$$4a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n = 4\left(a_{n+2} - a_{n+1} + \frac{1}{4}a_n\right)$$

$$= 4\left[\left(a_{n+2} - \frac{1}{2}a_{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n\right)\right] := 4\left(y_{n+1} - \frac{1}{2}y_n\right).$$

因此得到

$$y_{n+1} - \frac{1}{2}y_n \to \frac{1}{4}a = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\frac{a}{2}.$$

根据 (1), 推出

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{a}{2} \quad or \quad a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n \to \left(1 - \frac{1}{2}\right)a.$$

再次利用 (1) 得到 $a_n \to a$. □

例2.2.18. 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^m}{a^n}$$

这里 $a > 1$, $m \in \mathbb{Z}_+$.

解: 如果 $m = 1$ 则利用**定理**2.2.9 得到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-(n-1)}{a^n - a^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^{n-1}(a-1)} = 0.$$

对一般的 m 利用收敛数列的四则运算法则有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^m}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^m - (n-1)^m}{a^n - a^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{m(n-1)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2!}(n-1)^{m-2} + \cdots}{a^{n-1}(a-1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a-1} \sum_{1\le k\le m} \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} \frac{(n-1)^{m-k}}{a^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{a-1} \sum_{1\le k\le m} \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{(a-1)k!} \lim_{n\to\infty} \frac{n^{m-k}}{a^n}.$$

根据归纳假设, 这个极限等于 0. □

实际上利用 Heine 定理和函数极限的性质, 得到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^m}{a^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^m}{a^x} = \frac{m}{\ln a} \lim_{x\to\infty} \frac{x^{m-1}}{a^x} = \cdots = \frac{m!}{(\ln a)^m} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{a^x} = 0.$$

例2.2.19. 定义

$$a_{n+1} := \sin a_n, \quad n \in \mathbb{N} \text{ 和 } 0 < a_0 < \pi.$$

证明

$$a_n \text{ 递增且 } \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

更进一步

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{3/n}} = 1.$$

证: $a_1 = \sin a_0 \in (0, \pi)$. 一般情形下可证明 $0 < a_n < \pi$. 因为 $\sin x < x$ 对任意 $x \in (0, \pi)$ 成立, 得到 $a_{n+1} < a_n$. 根据**定理**2.3.1, 极限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在, 比如说是 $\alpha \in [0, \pi)$. 故 $\alpha = \sin\alpha$ 从而 $\alpha = 0$.

根据**定理**2.2.9,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{na_n^2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a_n^2}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2}}{(n+1)-n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sin^2 a_n} - \frac{1}{a_n^2} \right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

这里我们利用了一个未加证明的结果:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{3}}{x^4} = \frac{1}{3}$$

和 $\sin^2 x \sim (x - \frac{x^3}{6} + o(x^4))^2 \sim x^2 - \frac{x^4}{3} + \cdots$. 这些会在下一章给出证明. □

§2.3 数列收敛的判别法则

最重要的是判别法则是 Cauchy 法则, 因为它给出了数列是否收敛的充分必要条件.

§2.3.1 单调数列

数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 称为 (**单调**) **递增** (或**递减**) 如果 $a_n \leq a_{n+1}$ (或 $a_n \geq a_{n+1}$) 对任意 $n = 1, 2, \cdots$ 都成立. 因为数列极限是研究 n 充分大时的性质, 所以在研究单调数列的极限时, 可以把 "对任意 $n = 1, 2, \cdots$ 都成立" 换成只要 "对充分大的 n 都成立".

单调递增或单调递减的数列统称**单调数列**.

定理2.3.1. 假设数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 单调. 下列断言等价

$$\{a_n\}_{n\geq 1} \text{ 收敛} \iff \{a_n\}_{n\geq 1} \text{ 有界}. \tag{2.3.1}$$

证: $\Longrightarrow$: 显然.

$\Longleftarrow$: 不失一般性, 不妨假设 $a_n \le a_{n+1}$. 令 $E := \{a_n : n = 1, 2, \cdots\}$. 如果 $\{a_n\}_{n\ge 1}$ 有界, 根据 Zorn 引理上确界 $a := \sup E$ 存在且 $a_n \le a$.

$\forall\, \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ 使得 $a - \epsilon < a_N \le a$ 成立, 否则的话, $a - \epsilon$ 将是 E 的一个上界. 由于 a_n 递增, 得到 $a - \epsilon < a_n \le a$ 对所有 $n > N$ 都成立. □

例2.3.2. *(1)* $a_1 := \sqrt{2}, a_{n+1} := \sqrt{2 + a_n}\ (n \ge 1) \Longrightarrow$ 求 $\lim_{n\to\infty} a_n$.

(2) $a_1 > 0, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})\ (n \ge 1) \Longrightarrow$ 求 $\lim_{n\to\infty} a_n$.

证: *(1)* 观察到

- 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 则 "$a = \sqrt{2 + a}$" $\Longrightarrow (a - 2)(a + 1) = 0 \Longrightarrow a = 2$.
- $a_2 = \sqrt{2 + a_1} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > a_1$, $a_2 < \sqrt{2 + 2} = 2$; $a_3 = \sqrt{2 + a_2} > \sqrt{2a_2} > a_2$.

一般地我们断言

$$\sqrt{2} \le a_n < 2 \quad \text{和} \quad a_{n+1} > a_n.$$

实际上, $\sqrt{2} \le a_n < 2 \Longrightarrow a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + 2} = 2$, 而 $a_{n+1} > a_n \Longrightarrow a_{n+2} = \sqrt{2 + a_{n+1}} > \sqrt{2a_{n+1}} > a_{n+1}$. 因此 $\{a_n\}_{n\ge 1}$ 单调递增且有界 $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

(2) $\forall n \ge 1$, 有 $a_n > 0$ 并且

$$a_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) - 1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_n} - \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)^2 \ge 0.$$

另一方面,

$$a_{n+1} \le \frac{1}{2}(a_n + a_n) = a_n.$$

从而 $a_n \ge a_{n+1} \ge \cdots \ge 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a$ 存在且 $a \ge 1$. 解方程 $a = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$ 并注意到 a 的有界性, 得到 $a = 1$. □

例2.3.3. $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}\ (n \ge 1) \Longrightarrow$ 求 $\lim_{n\to\infty} a_n$.

证: 观察到

$$a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{2}{3}, \quad a_4 = \frac{3}{5}, \quad a_5 = \frac{5}{8}, \quad \cdots.$$

断言 $\{a_{2n}\}_{n\ge 1}$ 递增但 $\{a_{2n-1}\}_{n\ge 1}$ 递减, 且 $\frac{1}{2} \le a_n \le 1$. 事实上明显的不等式 $\frac{1}{2} \le a_n \le 1 \Longrightarrow a_{n+1} \ge \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ 和 $a_{n+1} \le \frac{1}{1+0} = 1$. 更进一步

$$a_{2n+2} = \frac{1}{1 + a_{2n+1}} \ge \frac{1}{1 + a_{2n-1}} = a_{2n}, \quad a_{2n+1} = \frac{1}{1 + a_{2n}} \le \frac{1}{1 + a_{2n-2}} = a_{2n-1}.$$

令 $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = A$ 和 $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = B \Longrightarrow B = 1/(1 + A)$ 且 $A = 1/(1 + B)$ $\Longrightarrow A = B = (\sqrt{5} - 1)/2$. 即 $a_n \to (\sqrt{5} - 1)/2$. □

§2.3.2 三个重要的常数 π、e、和 γ

在高中时候, 知道常数 $\pi = 3.1415926\cdots$ 和 $e = 2.7182818284590\cdots$.

A. 常数 π. 下面的结论最早有 Euler 非严格化得到.

定理2.3.4. (Euler, 1734) *常数 π 可以有下面数列得到:*

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} := \lim_{N\to\infty}\sum_{1\leq n\leq N}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{2.3.2}$$

证: (1) 第一个证明是John Scholes 给出.

断言 1: $\forall\, m \in \mathbb{N}$,

$$\cot^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \cdots + \cot^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right) = \frac{2m(2m-1)}{6}.$$

考察恒等式

$$\cos(nx) + \mathbf{i}\sin(nx) = e^{\mathbf{i}nx} = (e^{\mathbf{i}x})^n = (\cos x + \mathbf{i}\sin x)^n.$$

比较两边虚数部分得到

$$\sin(nx) = \binom{n}{1}\sin x\cos^{n-1}x - \binom{n}{3}\sin^3 x\cos^{n-3}x \pm \cdots.$$

令 $n := 2m+1$ 和 $x = \frac{r\pi}{2m+1}$ $(1 \leq r \leq m) \Longrightarrow$

$$0 = \sin(nx) = \binom{n}{1}\sin x\cos^{n-1}x - \binom{n}{3}\sin^3 x\cos^{n-3}x \pm \cdots.$$

两边同除以 $\sin^n x$ $(0 < x < \frac{\pi}{2})$ 得到

$$\begin{aligned} 0 &= \binom{n}{1}\cot^{n-1}x - \binom{n}{3}\cot^{n-3}x \pm \cdots \\ &= \binom{2m+1}{1}\cot^{2m}x - \binom{2m+1}{3}\cot^{2m-2}x \pm \cdots. \end{aligned}$$

定义多项式如下

$$P(t) := \binom{2m+1}{1}t^m - \binom{2m+1}{3}t^{m-1} \pm \cdots + (-1)^m\binom{2m+1}{2m+1}.$$

此多项式有 m 个不同的根

$$a_r := \cot^2\left(\frac{r\pi}{2m+1}\right), \quad 1 \leq r \leq m.$$

所以

$$P(t) = \binom{2m+1}{1}\prod_{1\leq r\leq m}\left[t - \cot^2\left(\frac{r\pi}{2m+1}\right)\right].$$

特别地

$$\sum_{1\le r\le m} a_r = \frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}} = \frac{2m(2m-1)}{6}.$$

断言 2: $\forall\, m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$,

$$\sum_{1\le r\le m} \csc^2\left(\frac{r\pi}{2m+1}\right) = \frac{2m(2m+2)}{6}.$$

事实上

$$\begin{aligned}\sum_{1\le r\le m} \csc^2\left(\frac{r\pi}{2m+1}\right) &= \sum_{1\le r\le m} \frac{1}{\sin^2(\frac{r\pi}{2m+1})}\\ &= \sum_{1\le r\le m}\left[1+\cot^2\left(\frac{r\pi}{2m+1}\right)\right] = m + \frac{2m(2m-1)}{6}.\end{aligned}$$

在区间 $(0, \pi/2)$ 内, 下列不等式成立:

$$0 < \sin y < y < \tan y, \quad 0 < \cot y < \frac{1}{y} < \csc y, \quad 0 < \cot^2 y < \frac{1}{y^2} < \csc^2 y.$$

作为推论得到

$$\frac{2m(2m-1)}{6} < \sum_{1\le r\le m}\left(\frac{2m+1}{r\pi}\right)^2 < \frac{2m(2m+2)}{6}.$$

等价地

$$\frac{\pi^2}{6}\frac{2m}{2m+1}\frac{2m-1}{2m+1} < \sum_{1\le r\le m}\frac{1}{r^2} < \frac{\pi^2}{6}\frac{2m}{2m+1}\frac{2m+2}{2m+1}.$$

最后令 $m \to \infty$ 推出 $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \pi^2/6$.

(2) 第二个证明由Beukers-Calabi-Kolk给出. 注意到

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n)^2}.$$

故

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \Longleftrightarrow \sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

引入二重积分

$$J := \iint_{[0,1]\times[0,1]}\frac{dxdy}{1-x^2-y^2} = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

做变量替换

$$u = \cos^{-1}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}}, \quad v := \cos^{-1}\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2y^2}},$$

从而 $x = \sin u / \cos v$, $y = \sin v / \cos u$, 且

$$J = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2-u} dudv = \frac{\pi^2}{8}. \quad \square$$

常数 π 还有其它有趣的表达形式:

$$\begin{aligned}
\pi &= 4 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{1+2n}, \\
\pi &= 16 \arctan \frac{1}{5} - 4 \arctan \frac{1}{239}, \\
\pi &= 24 \arctan \frac{1}{8} + 8 \arctan \frac{1}{57} + 4 \arctan \frac{1}{239}.
\end{aligned}$$

B. 常数 e. 定义三个数列如下

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad e_n := 1 + \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k!} = \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{1}{k!}.$$

断言 1: 对每个 n,

$$a_n < a_{n+1}, \quad b_n > b_{n+1}.$$

证: 对每个 n,

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{k!} \frac{1}{n^k} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\
&< 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \\
&\quad + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = a_{n+1}.
\end{aligned}$$

对 b_n,

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} = \left(\frac{1+\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \frac{1}{1+\frac{1}{n}} > \left(1 + \frac{n}{n^2-1}\right) \frac{1}{1+\frac{1}{n}} > \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1.$$

断言 2: 极限

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n := e \tag{2.3.3}$$

存在.

证: 由于

$$a_n < 1 + 1 + \sum_{2 \leq k \leq n} \frac{1}{k!} \leq 2 + \sum_{2 \leq k \leq n} \frac{1}{k(k-1)} = 3 - \frac{1}{n} < 3,$$

根据**定理**2.3.1 和**断言 1** 知道极限 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ 和 $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ 都存在. 因为 $b_n = (1+\frac{1}{n})a_n$, 利用收敛数列的四则运算得到 $B = 1\times A = A$. □

断言 3: $\forall\, n \in \mathbb{Z}_+$,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < e < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{2.3.4}$$

断言 4: 极限

$$\lim_{n\to\infty} e_n = e \tag{2.3.5}$$

存在. : 观察到 $e_n < e_{n+1}$ 和

$$\begin{aligned} a_n &= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\ &> 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right). \end{aligned}$$

令 $n\to\infty$ 得到

$$e \geq 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!} = e_k.$$

另一方面, $a_n < e_n$. 所以 $\lim_{n\to\infty} e_n = e$. □

例2.3.5. *(1)* $\forall n \geq 1 \Longrightarrow$

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}. \tag{2.3.6}$$

(2) 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}. \tag{2.3.7}$$

证: *(1)* $\forall\, k \geq 1$,

$$\left(\frac{k+1}{k}\right)^k < e < \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1}.$$

所以

$$\frac{(n+1)^n}{n!} = \prod_{1\leq k\leq n}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k < e^n < \prod_{1\leq k\leq n}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}.$$

(2) 根据 *(1)* 得到

$$\frac{n+1}{e} < \sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{e}\sqrt[n]{n+1}$$

且

$$\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{e} < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < \frac{n+1}{n}\cdot\sqrt[n]{n+1}\cdot\frac{1}{e}.$$

令 $n\to\infty$ 推出 (2.3.7). □

根据 (2.3.7) 得到

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \sim \frac{1}{e} \quad \Longrightarrow \quad n! \sim n^n e^{-n}$$

当 n 很大时成立.

C. 常数 γ. 给定 $p > 0$ 并令

$$S_n := \sum_{1\le k\le n} \frac{1}{k^p}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

则 $S_n < S_{n+1}$, 且

$$\begin{aligned} S_n &\le S_{2^n-1} \\ &= 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right)}_{<2^{-(p-1)}} + \underbrace{\left(\frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{7^p}\right)}_{<4^{-(p-1)}=2^{-2(p-1)}} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{(n-1)p}} + \cdots + \frac{1}{(2^n-1)^p}\right)}_{<2^{-(n-1)(p-1)}} \\ &< \frac{1}{1-\frac{1}{2^{p-1}}} = \frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1}. \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} S_n \text{ 对任意 } p > 1 \text{ 都存在.}$$

当 $p = 1$, 根据**定理**2.2.9 得到

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\ln n - \ln(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\ln(1+\frac{1}{n-1})} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\ln(1+\frac{1}{n})} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(1+\frac{1}{n-1})} = 1, \end{aligned}$$

这是因为（利用 (2.3.4)）

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

作为推论得到

$$S_n \ge 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \to +\infty, \quad \text{if } 0 < p \le 1.$$

特别地

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \ln n \quad \text{as } n \to \infty.$$

定义数列

$$a_n := \sum_{1\le k\le n} \frac{1}{k} - \ln n. \tag{2.3.8}$$

从而

$$a_n > a_{n+1} > 0, \quad \lim_{n\to\infty} a_n \text{ 存在.}$$

事实上

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n > \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n} - \ln n = \ln\frac{n+1}{n} > 0$$

和

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0.$$

定义2.3.6. **Euler 常数** γ *定义为*

$$\gamma := \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{1\le k\le n}\frac{1}{k} - \ln n\right). \tag{2.3.9}$$

猜想2.3.7. *γ 是无理数, 即, $\gamma \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.*

一个更进一步的猜想是说 γ 是超越数. a 是**超越数**如果对任意整系数多项式 $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 都不可能有 $P(a) = 0$ 成立. 超越数的存在最早是由 Liouville 在 1844 年证明的, 他所给的数是

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n, \quad a_n := \frac{1}{10!} + \frac{1}{10^2!} + \cdots + \frac{1}{10^n!}.$$

不是超越数的数称为**代数数**.

定理2.3.8. *(1)* **(Liouville, 1840)** *e 是无理数.*

(2) π 是无理数.

证: (1) 回顾

$$e = \sum_{k\ge 0}\frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty}\sum_{0\le k\le n}\frac{1}{k!}.$$

假设 $e = a/b$ 是有理数, 其中 $a, b > 0$. 则

$$n!be = n!a, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

另一方面,

$$\begin{aligned}
bn!e &= bn!\left[\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) + \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots\right)\right] \\
&= bn!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \\
&\quad + b\underbrace{\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots\right)}_{\frac{1}{n+1} < ? < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots = \frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

当 n 充分大时, 右边第二项不再是整数. 这个矛盾说明 e 不是有理数.

(2) 这里几乎最简单的证明是属于Niven (1946) 的. 假设 $\pi = a/b$ 是有理数. 引入多项式

$$f(x) := \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}, \quad F(x) := f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x).$$

但是简单计算表明

$$\mathbb{Z} \ni F(\pi) + F(0) = \int_0^\pi f(x) \sin x \, dx$$

这里被积函数满足 $0 < f(x)\sin x < \frac{\pi^n a^n}{n!} \ll 1$ (当 $n \gg 1$). □

1873 年法国数学家 Hermite 证明了 e 是超越数. 1882 年德国数学家 Lindeman 证明了 π 也是超越数. 著名的 Hilbert 23 个问题（Hilbert 在 1900 年的国际数学家大会上提出）中的第 7 题就是问: **如果 a 是不等于 0 和 1 的代数数, b 是无理代数数, 则 a^b 是超越数**. 这个猜想现已被 Gelfond (1929) 和 Schneider/Siegel (1935) 分别独立证明. 作为直接推论得到 $2^{\sqrt{2}}$, $2^{\sqrt{-2}}$, $\mathbf{i}^{\sqrt{2}}$, e^π $(= (-1)^{-\mathbf{i}})$ 都是超越数.

§2.3.3 子列

假设 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个数列, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是严格递增函数. 数列 $\{a_{\varphi(k)}\}_{k\geq 1}$ 称为 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的**子列** 并记作 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$.

定理2.3.9. *(1) 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 则对任意子列 $\{a_{n_k}\}_{k\geq 1}$ 都有*

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a.$$

(2) $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 收敛 $\Longrightarrow$ 每个子列收敛.

(3) $\exists$ $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 的发散子列 $\Longrightarrow$ $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 发散.

(4) $\exists$ 两个极限不等的收敛数列 $\Longrightarrow$ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 发散.

(5) $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\{a_{2n-1}\}_{n\geq 1}$ 和 $\{a_{2n}\}_{n\geq 1}$ 都收敛且有相同的极限.

证: (1) - (4) 可以根据定义可得. 对 (5), 假设 $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = a$. $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ 使得

$$|b_n - a| < \epsilon, \quad |c_n - a| < \epsilon, \quad b_n := a_{2n}, \; c_n := a_{2n-1}.$$

对 a_n, 若 $n = 2k$, 则 $|a_n - a| < \epsilon$ $(n > 2N)$; 若 $n = 2k-1$, 则 $|a_n - a| < \epsilon$ $(n > 2N-1)$. □

例2.3.10. **(Fibonacci 数列)** 令

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \; (n \geq 2) \quad \Longrightarrow \quad \text{求} \; \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

引入

$$b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

则

$$b_n = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{b_{n-1}}.$$

在**例**2.3.3 已经证明了

$$b_{2n-1} < b_{2n+1}, \quad b_{2n} > b_{2n+2}, \quad 1 \le b_n \le 2.$$

故

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \quad \lim_{n\to\infty}(b_n - 1) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_{n-1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618.$$

a_n 的显示表达式为

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

这个可以推到如下. 假设可以写成

$$a_n - \alpha a_{n-1} = \beta(a_{n-1} - \alpha a_{n-2}).$$

从而必须有

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = -1$$

所以 $(\alpha, \beta) = ((1+\sqrt{5})/2, (1-\sqrt{5})/2)$ 或 $((1-\sqrt{5})/2, (1+\sqrt{5})/2)$. 根据

$$\begin{aligned} a_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2}a_{n-1} &= \frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(a_{n-1} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}a_{n-2}\right), \\ a_n - \frac{1-\sqrt{5}}{2}a_{n-1} &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(a_{n-1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}a_{n-2}\right) \end{aligned}$$

最后得到

$$\begin{aligned} a_n - \frac{1-\sqrt{5}}{2}a_{n-1} &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(a_2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}a_1\right), \\ a_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2}a_{n-1} &= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(a_2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}a_1\right). \end{aligned}$$

消去 a_{n-1} 得到 a_n 的表达式.

定理2.3.11. (Bolzano-Weierstrass 定理) 每个有界数列都有一个收敛的子列.

证: 假设数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 有界, 即, $a_n \in [a,b]$ 对某个闭区间 $[a,b]$ 和所有 $n\geq 1$ 成立. 区间对分得到 $[a,\frac{a+b}{2}]$ 和 $[\frac{a+b}{2},b]$ 至少有一个包含无穷多个 a_n, 不妨记为 $[a_1,b_1]$. 取一点 $x_{n_1}\in[a_1,b_1]$. 这个对分过程继续下去, 得到一列闭区间

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_k,b_k]\supset\cdots$$

满足

$$b_k-a_k=\frac{b-a}{2^k}\to 0 \quad 和 \quad \exists x_{n_k}\in[a_k,b_k].$$

但是 a_n 增减而 b_n 递减, 根据单调有界数列必有极限得到 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ 和 $\lim_{n\to\infty}b_n=b$ 都存在. 除此之外

$$0\leq b-a\leq b_n-a_n\to 0.$$

因而

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=c$$

且 $c\in[a_k,b_k]$ 对每个 k 都成立. 根据 $|x_{n_k}-1|\leq b_k-a_k$ 得到 $\lim_{n\to\infty}x_{n_k}=c$.
□

定理2.3.12. *数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 无界 $\Longrightarrow \exists$ 子列 $\{a_{n_k}\}_{k\geq 1}$ 使得 $\{a_{n_k}\}_{k\geq 1}$ 无界.*

证: $\exists\, n_1$ 满足 $|a_{n_1}|>1$. 从而 $\exists n_2>n_1$ 满足 $|a_{n_2}|>2$. 因此 $\exists$ 子列 $\{n_k\}_{k\geq 1}$ 使得 $|a_{n_k}|\geq k$ 成立. □

§2.3.4 Cauchy 数列

数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 称为**Cauchy 数列**如果 $\forall\epsilon>0, \exists\, N\in\mathbb{N}$ 使得 $|a_n-a_m|<\epsilon$ 对任何 $n,m\geq N$ 都成立.

例2.3.13. *(1) $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 不是 Cauchy, 这里 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.*

(2) $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 是 Cauchy, 这里 $a_n=1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

证: *(1) $\forall\, n\geq 1$,*

$$a_{2n}-a_n=\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\geq\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}.$$

(2) $\forall n\geq 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}>\frac{1}{2}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}.$$

故 $\forall\, m>n$,

$$a_m-a_n=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}+\cdots+\frac{1}{m\sqrt{m}}<\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{2}{\sqrt{m}}<\frac{2}{\sqrt{n}}.\quad\square$$

注2.3.14. *Cauchy 数列必有界.*

证: $\exists\, N \in \mathbb{N}$ 使得 $|a_m - a_n| < 1$ 对任意 $m, n \geq N$ 都成立. □

定理2.3.15. (Cauchy 判别法则) 数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 是 *Cauchy* 数列.

证: $\Longrightarrow$: 假设极限 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 存在. 则 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ 满足

$$|a_n - a| < \epsilon, \quad \forall\, n > N.$$

故

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < 2\epsilon$$

对任何 $n, m > N$ 都成立.

$\Longleftarrow$: $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ 满足 $|a_n - a_{N_0+1}| < 1, \forall n > N_0$. 特别地, $|a_n| \leq M$. 根据**定理**2.3.11, $\exists$ 子列 $\{a_{n_k}\}_{k\geq 1}$ 使得 $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. 更进一步

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \epsilon + |a_{n_k} - a|$$

只要 $n, n_k > N$. □

注2.3.16. 上述定理对一般的度量空间不一定成立. 比如,

$$x_0 = 2, \quad x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \in \mathbb{Q}.$$

则 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 是 $\mathbb{Q}$ 中的Cauchy 数列, 但是 $x_n \to \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

注2.3.17. 之前已经定义过, 度量空间是完备的如果 $\forall$ Cauchy 数列都是收敛的. 因此 $\mathbb{R}$ 是完备的, 但是 $\mathbb{Q}$ 不完备.

注2.3.18. Riemannian 流形的"完备性"可以用每个测地线是否可以无限延长来刻画.

例2.3.19. 假设数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ 满足条件 $a_n > 0$, $\sqrt{a_1} \geq \sqrt{a_0} + 1$, 且

$$\left|a_{n+1} - \frac{a_n^2}{a_{n-1}}\right| \leq 1, \quad \forall\, n \geq 1.$$

证明极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \theta \geq 1$$

存在而且数列 $\{a_n/\theta^n\}_{n\geq 1}$ 收敛.

证: 这是一个抽象的数列, 我们可以考虑利用Cauchy 收敛法则证明. 首先注意到

$$\left|a_2 - \frac{a_1^2}{a_0}\right| \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{a_2}{a_1} - \frac{a_1}{a_0}\right| \leq \frac{1}{a_1}$$

根据不等式

$$\frac{a_1}{a_0} \geq \frac{(1+\sqrt{a_0})^2}{a_0} = 1 + \frac{2}{\sqrt{a_0}} + \frac{1}{a_0} > 1 + \frac{1}{\sqrt{a_0}}$$

得到

$$\frac{a_2}{a_1} \geq \frac{a_1}{a_0} - \frac{1}{a_1} \geq \left(1 + \frac{2}{\sqrt{a_0}} + \frac{1}{a_0}\right) - \frac{1}{a_0} > 1 + \frac{1}{\sqrt{a_0}}.$$

对 $n = 3$ 类似地可以从

$$\left|\frac{a_3}{a_2} - \frac{a_2}{a_1}\right| \leq \frac{1}{a_2} \quad 和 \quad \left|\frac{a_3}{a_2} - \frac{a_1}{a_0}\right| \leq \left|\frac{a_3}{a_2} - \frac{a_2}{a_1}\right| + \left|\frac{a_2}{a_1} - \frac{a_1}{a_0}\right|$$

得到

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_3}{a_2} - \frac{a_1}{a_0}\right| &\leq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} < \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{a_0}}}\left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1}\right) \\ &< \frac{1}{a_0}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{a_0}}} + \frac{1}{(1+\frac{1}{\sqrt{a_0}})^2}\right] < \frac{1}{a_0}\frac{(1+\frac{1}{\sqrt{a_0}})^{-1}}{1-(1+\frac{1}{\sqrt{a_0}})^{-1}} \\ &= \frac{1}{a_0}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{a_0}}} = \frac{1}{\sqrt{a_0}}.\end{aligned}$$

特别地, 得到不等式

$$\frac{a_3}{a_2} > \frac{a_1}{a_0} - \frac{1}{\sqrt{a_0}} > \frac{(1+\sqrt{a_0})^2}{a_0} - \frac{1}{\sqrt{a_0}} > 1 + \frac{1}{\sqrt{a_0}}.$$

一般地, 从上述不等式我们断言

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 + \frac{1}{\sqrt{a_0}} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

实际上, 假设上述断言对任何 $n \leq m$ 都成立, 且令 $\alpha = 1 + \frac{1}{\sqrt{a_0}} > 1$. 从而得到

$$a_k > \alpha a_{k-1} > \cdots > \alpha^k a_0, \quad \forall\, 1 \leq k \leq m+1.$$

对 $n = m+1$, 得到

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} - \frac{a_1}{a_0}\right| &\leq \sum_{1\leq k\leq m+1}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k} - \frac{a_k}{a_{k-1}}\right| \leq \sum_{1\leq k\leq m+1}\frac{1}{a_k} \\ &\leq \frac{1}{a_0}\sum_{1\leq k\leq m+1}\frac{1}{\alpha^k} < \frac{1}{a_0(\alpha-1)} < \frac{1}{\sqrt{a_0}}.\end{aligned}$$

从而

$$\frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} > \frac{a_1}{a_0} - \frac{1}{\sqrt{a_0}} > 1 + \frac{1}{\sqrt{a_0}}.$$

为了应用Cauchy 判别准则, 对任意 $p > q$ 得到

$$\left|\frac{a_{p+1}}{a_p} - \frac{a_{q+1}}{a_q}\right| \leq \sum_{q+1\leq k\leq p}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k} - \frac{a_k}{a_{k-1}}\right| \leq \sum_{q+1\leq k\leq p}\frac{1}{a_k}$$

$$\leq \frac{1}{a_q} \sum_{1\leq k\leq p-q} \frac{1}{\alpha^k} < \frac{\sqrt{a_0}}{a_q}.$$

当 $n \to \infty$ 时, 由上述断言得到

$$a_n > \left(1 + \frac{1}{\sqrt{a_0}}\right)^n a_0 \to +\infty$$

从而发现数列 $\{a_{n+1}/a_n\}_{n\geq 1}$ 收敛到某个实数 $\theta > 1$.

令 $p \to \infty$ 在下列不等式

$$\left|\frac{a_{p+1}}{a_p} - \frac{a_{q+1}}{a_q}\right| < \frac{\sqrt{a_0}}{a_q}$$

推出

$$\left|\frac{a_{q+1}}{a_q} - \theta\right| \leq \frac{\sqrt{a_0}}{a_q}.$$

从而对任意 $p > q$ 我们得到

$$\left|\frac{a_p}{\theta^p} - \frac{a_q}{\theta^q}\right| \leq \sum_{1\leq k\leq p-q} \left|\frac{a_{q+k}}{\theta^{q+k}} - \frac{a_{q+k-1}}{\theta^{q+k-1}}\right| \leq \sum_{1\leq k\leq p-q} \frac{\sqrt{a_0}}{\theta^{q+k}} = \frac{\sqrt{a_0}}{\theta^q} \sum_{1\leq k\leq p-q} \frac{1}{\theta^k}$$

$$\leq \frac{\sqrt{a_0}}{\theta^q} \frac{\theta^{-1}}{1-\theta^{-1}} = \frac{\sqrt{a_0}}{\theta^q} \frac{1}{\theta - 1} \to 0$$

当 $q \to \infty$. 因此数列 $\{a_n/\theta^n\}_{n\geq 1}$ 是Cauchy 数列从而收敛. □

例2.3.20. 定义数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ 如下:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 3$$

和

$$\begin{vmatrix} 1 & a_n & a_{n-1} \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-3} \end{vmatrix} = 1, \quad \forall\, n \geq 3.$$

求 a_n 的通项并证明极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ 存在.

证: 对行列式做初等变换: 首先第一行减去第二行, 然后第二行减去第三行. 从而得到

$$1 = \begin{vmatrix} 1 & a_n & a_{n-1} \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_n - a_{n-1} & a_{n-1} - a_{n-2} \\ 1 & a_{n-1} - a_{n-2} & a_{n-2} - a_{n-3} \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$= (a_n - a_{n-1})(a_{n-2} - a_{n-3}) - (a_{n-1} - a_{n-2})^2, \quad \forall\, n \geq 3.$$

利用这个递推计算得到

$$a_3 = 5, \quad a_4 = 10, \quad a_5 = 23, \quad \cdots.$$

回到例2.3.10, 考虑Fibonacci 数列 $\{F_n\}_{n\geq 1}$:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (\forall\, n \geq 3), \quad F_1 = F_2 = 1.$$

F_n 的显示表达式如下

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n), \quad \alpha := \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta := \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

利用这个通项公式马上可以得到下面的恒等式（请验证!）:

$$F_{n+1}^2 = F_nF_{n+2} + (-1)^n \quad (\forall\, n \geq 1).$$

为了避免繁琐的计算, 我们利用数学归纳法来证明上述这个断言. 假设 $F_{n+1}^2 = F_nF_{n+2} + (-1)^n$. 因此

$$\begin{aligned}
F_{n+2}^2 &= (F_n + F_{n+1})^2 = F_{n+1}^2 + F_n^2 + 2F_nF_{n+1} = F_{n+1}^2 + F_n(F_n + F_{n+1}) + F_nF_{n+1} \\
&= F_{n+1}^2 + F_nF_{n+2} + F_nF_{n+1} + F_{n+1}F_{n+2} - F_{n+1}F_{n+2} \\
&= F_{n+1}(F_{n+1} + F_{n+2}) - (F_{n+1} - F_n)F_{n+2} + F_nF_{n+1} \\
&= F_{n+1}F_{n+3} - F_{n-1}F_{n+2} + F_nF_{n+1} \quad = \quad F_{n+1}F_{n+3} - F_{n-1}(F_n + F_{n+1}) + F_nF_{n+1} \\
&= F_{n+1}F_{n+3} - F_{n-1}F_{n+1} + F_n(F_{n+1} - F_{n-1}) \quad = \quad F_{n+1}F_{n+3} - [F_n^2 - (-1)^{n-1}] + F_n^2 \\
&= F_{n+1}F_{n+3} + (-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

特别地得到

$$F_{2n-3}F_{2n-5} = 1 + F_{2n-4}^2, \quad \forall\, n \geq 3.$$

当 $n = 3$ 时, 计算可得

$$\begin{array}{ccccccccc}
F_{2n-3} & = & F_3 & = & 2 & = & a_3 - a_2 & = & a_n - a_{n-1}, \\
F_{2n-4} & = & F_2 & = & 1 & = & a_2 - a_1 & = & a_{n-1} - a_{n-2}, \\
F_{2n-5} & = & F_1 & = & 1 & = & a_1 - a_0 & = & a_{n-2} - a_{n-3}.
\end{array}$$

现在三个初值一样而且递推方程结构一样, 因此

$$a_n - a_{n-1} = F_{2n-3}, \quad \forall\, n \geq 2.$$

最后我们推出

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 + \sum_{2\leq k\leq n} F_{2k-3} = a_1 + F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-3} \\
&= a_1 + F_2 + (F_4 - F_2) + (F_6 - F_4) + \cdots + (F_{2n-2} - F_{2n-4}) \\
&= a_1 + F_{2n-2} = 2 + F_{2n-2}.
\end{aligned}$$

从而得到

$$
\begin{aligned}
a_n &= 2+\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-2}\right]\\
&= 2+\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right], \quad \forall\, n\geq 1.
\end{aligned}
$$

根据 $a_n=2+F_{2n-2}$ 得到

$$
\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{2+F_{2n-2}}{2+F_{2n}} = \frac{F_{2n-2}}{F_{2n}}\frac{\frac{2}{F_{2n-2}}+1}{\frac{2}{F_{2n}}+1}\\
&= \frac{\alpha^{2n-2}[1-(\beta/\alpha)^{2n-2}]}{\alpha^{2n}[1-(\beta/\alpha)^{2n}]}\frac{\frac{2}{F_{2n-2}}+1}{\frac{2}{F_{2n}}+1}.
\end{aligned}
$$

因为 $\beta/\alpha=\frac{\sqrt{5}-3}{4}\in(-1,1)$, 得到 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{\alpha^2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. □

例2.3.21. 定义数列 $\{x_n\}_{n\geq 0}$ 如下

$$
x_0=1,\quad x_n=x_{n-1}+\frac{1}{x_{n-1}} \quad (\forall\, n\geq 1).
$$

证明数列 $\{x_n\}_{n\geq 0}$ 发散但是 $\lim_{n\to\infty}x_n/\sqrt{2n}=1$.

证: 假设 $\lim_{n\to\infty}x_n=x$. 由于 x_n 递增且 $x_n>0$, 得到 $x=x+\frac{1}{x}$. 但是这个方程无解从而数列 $\{x_n\}_{n\geq 0}$ 发散.

因为

$$
x_n^2=\left(x_{n-1}+\frac{1}{x_{n-1}}\right)^2=x_{n-1}^2+\frac{1}{x_{n-1}^2}+2>x_{n-1}^2+2
$$

得到

$$
x_n^2>x_{n-1}^2+2>x_{n-2}^2+4>\cdots>x_0^2+2n>2n.
$$

故我们可以引入

$$
y_n:=x_n^2-2n>0,\quad \forall\, n\geq 1.
$$

简单计算得到

$$
y_{n+1}=x_{n+1}^2-2(n+1)=\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2-2(n+1)=y_n+\frac{1}{y_n+2n}.
$$

从而

$$
y_n<y_{n+1}<y_n+\frac{1}{2n},\quad \forall\, n\geq 1.
$$

递推得到

$$
y_n<\frac{1}{2(n-1)}+y_{n-1}<\frac{1}{2(n-1)}+\frac{1}{2(n-2)}+y_{n-2}<\cdots<y_1+\frac{1}{2}\sum_{1\leq k\leq n-1}\frac{1}{k}.
$$

我们已经证明了数列 $\{a_n := \sum_{1\le k\le n}\frac{1}{k} - \ln n\}_{n\ge1}$ 递减, 故

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1} < \ln(n-1)+1.$$

因此

$$0 < y_n < 2+\frac{\ln(n-1)+1}{2} = \frac{\ln(n-1)}{2}+\frac{5}{2}, \quad \forall\, n\ge 2.$$

作为直接推论得到

$$1 < \frac{x_n}{\sqrt{2n}} < \sqrt{1+\frac{5}{4n}+\frac{\ln(n-1)}{4n}}.$$

利用夹逼定理推出 $x_n/\sqrt{2n}\to 1$. □

例2.3.22. 假设数列 $\{a_n\}_{n\ge0}$ 满足条件: $a_0=0$, $0<a_n<a_{n+1}$, $a_n\to+\infty$ 且 $\sum_{n\ge1}\frac{1}{a_n}=+\infty$. 再假设 $s_0,\cdots,s_n$ 是下列线性方程组的解

$$\sum_{0\le j\le n}\frac{s_j}{a_i+a_j+1} = \frac{1}{m+a_i+1}, \quad 0\le i\le n.$$

这里 $m\in\mathbb{N}$. 定义

$$I_n := \frac{1}{2m+1} - \sum_{0\le i\le n}\frac{s_i}{m+a_i+1}.$$

求极限 $\lim_{n\to\infty} I_n$.

证: 考虑 $(n+1)\times(n+1)$ 矩阵 A 和 $n+1$ 维向量 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^{n+1}$ 如下:

$$A=\left(\frac{1}{a_i+a_j+1}\right)_{0\le i,j\le n}, \quad \boldsymbol{a}=\left(\frac{1}{m+a_0+1},\cdots,\frac{1}{m+a_n+1}\right)\in\mathbb{R}^{n+1}.$$

此时上述线性方程组可以写成

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{0}^T \\ \boldsymbol{a} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{s}^T \\ I_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{a}^T \\ \frac{1}{2m+1}\end{bmatrix}$$

这里 $\boldsymbol{s}=(s_0,\cdots,s_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$. 从而得到

$$I_n = \frac{\det B}{\det A},$$

这里

$$B=\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{a}^T \\ a & \frac{1}{2m+1}\end{bmatrix}$$

为了计算 A 和 B 的行列式, 我们利用Cauchy **行列式**:

$$D_n := \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n}\end{vmatrix} \quad (a_i,\ b_i\in\mathbb{C},\ a_i+b_j\neq 0).$$

则

$$D_n = \prod_{1\le i<j\le n}[(a_i-a_j)(b_i-b_j)]\Big/\prod_{1\le i,j\le n}(a_i+b_j).$$

为了利用数学归纳法证明, 前 $n-1$ 行减去第 n 行得到

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} \frac{a_n-a_1}{(a_1+b_1)(a_n+b_1)} & \frac{a_n-a_1}{(a_1+b_2)(a_n+b_2)} & \cdots & \frac{a_n-a_1}{(a_1+b_n)(a_n+b_n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_n-a_{n-1}}{(a_{n-1}+b_1)(a_n+b_n)} & \frac{a_n-a_{n-1}}{(a_{n-1}+b_2)(a_n+b_2)} & \cdots & \frac{a_n-a_{n-1}}{(a_{n-1}+b_n)(a_n+b_n)} \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} \\ &= \frac{\prod_{1\le i\le n-1}(a_n-a_i)}{\prod_{1\le i\le n}(a_n+b_i)}\cdot\Delta_n, \end{aligned}$$

这里

$$\Delta_n := \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

前 $n-1$ 列减去第 n 列得到

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \begin{vmatrix} \frac{b_n-b_1}{(a_1+b_1)(a_1+b_n)} & \frac{b_n-b_2}{(a_1+b_2)(a_1+b_n)} & \cdots & \frac{b_n-b_{n-1}}{(a_1+b_{n-1})(a_1+b_n)} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{b_n-b_1}{(a_2+b_1)(a_2+b_n)} & \frac{b_n-b_2}{(a_2+b_2)(a_2+b_n)} & \cdots & \frac{b_n-b_{n-1}}{(a_2+b_{n-1})(a_2+b_n)} & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \frac{b_n-b_1}{(a_{n-1}+b_1)(a_{n-1}+b_n)} & \frac{b_n-b_2}{(a_{n-1}+b_2)(a_{n-1}+b_n)} & \cdots & \frac{b_n-b_{n-1}}{(a_{n-1}+b_{n-1})(a_{n-1}+b_n)} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{\prod_{0\le i\le n-1}(b_n-b_i)}{\prod_{1\le j\le n-1}(a_j+b_n)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 1 \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{n-1}} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{\prod_{0\le i\le n-1}(b_n-b_i)}{\prod_{1\le j\le n-1}(a_j+b_n)}\cdot D_{n-1}. \end{aligned}$$

结合这两个等式推出

$$D_n = \frac{\prod_{1\le i\le n-1}(a_n-a_i)(b_n-b_i)}{\prod_{1\le i\le n}(a_n+b_i)\prod_{1\le j\le n-1}(a_j+b_n)}\cdot D_{n-1}.$$

递归得到 D_n 的显示表达式. 特别地得到

$$\det A = \frac{\prod_{0\le i,j\le n}(a_i-a_j)^2}{\prod_{0\le i,j\le n}(a_i+a_j+1)},\quad I_n = \frac{1}{2m+1}\prod_{0\le k\le n}\left(\frac{a_k-m}{m+a_k+1}\right)^2.$$

故
$$\ln[(2m+1)I_n]=\sum_{0\le k\le n}2\ln\left|\frac{a_k-m}{m+a_k+1}\right|.$$
但是
$$\ln\frac{|a_k-m|}{m+a_k+1}=\ln\left(1-\frac{2m+1}{m+a_k+1}\right)\le-\frac{2m+1}{m+a_k+1}\le-\frac{m}{a_k},$$
当 $a_k>m\ (\forall\, l\ge k^*)$. 对 k 求和得到
$$\sum_{0\le k\le n}2\ln\left|\frac{a_k-m}{m+a_k+1}\right|\le\sum_{0\le k\le k^*}2\ln\left|\frac{a_k-m}{m+a_k+1}\right|-m\sum_{k^*\le k\le n}\frac{1}{a_k}\to-\infty$$
从而 $(2m+1)I_n\to e^{-\infty}=0$. □

§2.3.5 Ramanujan 恒等式

印度传奇数学家Ramanujan 在 1912 年发现了如下恒等式
$$3=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+\cdots}}}}},\tag{2.3.10}$$
但是却未给出详细证明. 本小节我们试着给出上述恒等式的证明（当然这个证明取自参考文献1 的附录）.

首先我们给出一个 “显然的” 证明:
$$\begin{aligned}3&=\sqrt{9}=\sqrt{1+8}=\sqrt{1+2\times4}\\&=\sqrt{1+2\sqrt{16}}=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\times5}}\\&=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{25}}}=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\times6}}}\\&=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{36}}}}=\cdots.\end{aligned}$$
实际上Herschfeld (1935) 指出上述证明不完整, 原因是未证明定义的数列是否收敛. 令
$$a_1=1,\quad a_2=\sqrt{1+2},\quad a_3=\sqrt{1+2\sqrt{1+3}}$$
且
$$a_n=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots+(n-2)\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}}}}.$$
定义另一个数列如下
$$b_1=a_n$$
$$b_2=\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots+(n-2)\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}}}}$$

$$b_3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots+(n-2)\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}}}$$

$$\cdots$$

$$b_{n-2}=\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}$$

$$b_{n-1}=\sqrt{1+n}.$$

从而对任意 $1\le k\le n-2$ 得到

$$\begin{aligned} b_k^2-(k+2)^2 &= [1+(k+1)b_{k+1}]-(k+2)^2 = (k+1)[b_{k+1}-(k+3)] \\ &= (k+1)\frac{b_{k+1}^2-(k+3)^2}{b_{k+1}+k+3}. \end{aligned}$$

由此推出

$$\begin{aligned} a_n-3 &= \frac{b_1^2-3^2}{b_1+3} = 2\frac{b_2^2-4^2}{(b_1+3)(b_2+4)} = \cdots \\ &= (n-1)!\frac{b_{n-1}^2-(n+1)^2}{(b_1+3)(b_2+4)\cdots(b_{n-1}+n+1)} \\ &= \frac{-(n+1)!}{(b_1+3)(b_1+5)\cdots(b_{n-1}|+n+1)}. \end{aligned}$$

最后得到

$$|a_n-3|\le\frac{(n+1)!}{4\times5\times\cdots\times(n+2)}=\frac{6}{n+2}\to0.$$

下面我们到 Ramanujian 恒等式做推广.

例2.3.23. 定义数列 $\{x_n\}_{n\ge1}$ 如下

$$x_n:=\sqrt{a_1+b_1\sqrt{a_2+b_2\sqrt{Pa_3+\cdots+b_{n-1}\sqrt{a_n}}}},\quad n\ge1.$$

这里 $a_n,b_n>0$. 证明

(1) (*T. Vijayaraghavan*)

$$\{x_n\}_{n\ge1}\text{ 收敛 }\iff\frac{\ln a_n}{2^n}+\sum_{1\le k\le n-1}\frac{\ln b_k}{2^k}<C\ (\forall\, n\ge1).$$

(2) 如果存在数列 $\{\theta_n\}_{n\ge1}$ $(\theta_n>0)$ 满足

$$\theta_n^2=a_n+b_n\theta_{n+1}\ (\forall\, n\ge1),\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\sqrt{a_n}/\theta_n)}{2^n}=0,$$

则 $\lim_{n\to\infty}x_n=\theta_1$.

(3) (Ramanujan) 对 $\forall a \geq 1$ 有

$$a+1=\sqrt{1+a\sqrt{1+(a+1)\sqrt{1+(a+2)\sqrt{1+\cdots}}}}.$$

证: (1) 首先观察到

$$\begin{aligned} x_n &= \sqrt{a_1+b_1\sqrt{a_2+b_2\sqrt{a_3+\cdots+b_{n-2}\sqrt{a_{n-1}+b_{n-1}\sqrt{a_n}}}}} \\ &= \sqrt{a_1+\sqrt{a_2b_1^2+b_1^2b_2\sqrt{a_3+\cdots+b_{n-2}\sqrt{a_{n-1}+b_{n-1}\sqrt{a_n}}}}}. \end{aligned}$$

接下去把系数 $b_1^2b_2$ 收缩到下个根号里面, 继续这个过程, 最后得到

$$x_n=\sqrt{c_1+\sqrt{c_2+\sqrt{c_3+\cdots+\sqrt{c_{n-1}+\sqrt{c_n}}}}}\quad (\geq x_{n-1})$$

这里

$$c_1=a_1,\quad c_2=a_2b_1^2,\quad c_3=a_3b_1^{2^2}b_2^2,\quad \cdots,\quad c_n=a_nb_1^{2^{n-1}}b_2^{2^{n-2}}\cdots b_{n-1}^2.$$

假设 $\lim_{n\to\infty}x_n=c$. 因为 x_n 递增得到 $x_n\leq c$ 从而 $(c_n)^{1/2^n}\leq c$ 或者

$$\left(a_n\prod_{1\leq k\leq n-1}b_k^{2^{n-k}}\right)^{\frac{1}{2^n}}\leq c.$$

两边取对数推出

$$\frac{\ln a_n}{2^n}+\sum_{1\leq k\leq n-1}\frac{\ln b_k}{2^k}\leq C:=\ln c.$$

反之假设 $\frac{\ln a_n}{2^n}+\sum_{1\leq k\leq n-1}\frac{\ln b_k}{2^k}\leq C$ 对任意 $n\geq 1$ 都成立. 得到 $c_n\leq c^{2n}$, 这里 $c=e^C$. 从而

$$x_n\leq\sqrt{c^2+\sqrt{c^{2^2}+\cdots+\sqrt{c^{2^{n-1}}+\sqrt{c^{2^n}}}}}.$$

注意到

$$\sqrt{c^{2^{n-1}}+\sqrt{c^{2^n}}}=\sqrt{c^{2^{n-1}}+c^{2^{n-1}}\sqrt{1}}=c^{2^{n-2}}\sqrt{1+\sqrt{1}}.$$

最后推出

$$\begin{aligned} x_n &\leq \sqrt{c^2+\sqrt{c^{2^2}+\cdots+c^{2^{n-2}}+\sqrt{c^{2^{n-1}}+\sqrt{c^{2^n}}}}} \\ &\leq \sqrt{c^2+\sqrt{c^{2^2}+\cdots+c^{2^{n-2}}+c^{2^{n-2}}\sqrt{1+\sqrt{1}}}} \\ &\leq \cdots \leq cy_n \end{aligned}$$

这里

$$y_n := \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}.$$

但是 $y_{n+1} > y_n \geq 1$ 且

$$y_n = \sqrt{1+y_{n-1}} \leq \sqrt{2y_{n-1}} < \sqrt{2y_n},$$

得到 $1 \leq y_n < 2$ 从而 $x_n \leq 2c$. 根据单调有界原理推出极限 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在.

(2) 因为

$$\theta_n^2 \geq a_n, \quad a_{n-1} + b_{n-1}\theta_n = \theta_{n-1}^2$$

得到

$$\begin{aligned} c_n &\leq \sqrt{a_1+b_1\sqrt{a_2+b_2\sqrt{a_3+\cdots+b_{n-2}\sqrt{a_{n-1}+b_{n-1}\theta_n}}}} \\ &\leq \sqrt{a_1+b_1\sqrt{a_2+b_2\sqrt{a_3+\cdots+b_{n-2}\theta_{n-1}}}} \\ &\leq \cdots \leq \sqrt{a_1+b_1\theta} = \theta_1. \end{aligned}$$

另一方面利用不等式

$$\sqrt{\alpha+\gamma\beta} \leq \sqrt{\gamma}\sqrt{\alpha+\beta}, \quad \forall\, \alpha, \beta \geq 0, \ \forall\, \gamma \geq 1$$

和

$$\frac{\theta_n}{\sqrt{a_n}} \geq 1, \quad \forall\, n \geq 1,$$

得到

$$\begin{aligned} \sqrt{a_{n-1}+b_{n-1}\theta_n} &= \sqrt{a_{n-1}+b_{n-1}\sqrt{a_n}\frac{\theta_n}{\sqrt{a_n}}} \\ \leq \sqrt{\frac{\theta_n}{\sqrt{a_n}}}\sqrt{a_{n-1}+b_{n-1}\sqrt{a_n}} &\leq \sqrt{\frac{\theta_n}{\sqrt{a_n}}}\sqrt{a_{n-1}+b_{b-1}\theta_n}. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \sqrt{a_{n-2}+b_{n-2}\sqrt{a_{n-1}+b_{n-1}\theta_n}} &\leq \sqrt{a_{n-2}+b_{n-2}\sqrt{\frac{\theta_n}{\sqrt{a_n}}}\sqrt{a_{n-1}+b_{n-1}\theta_n}} \\ &\leq \left(\frac{\theta_n}{\sqrt{a_n}}\right)^{\frac{1}{2^2}}\sqrt{a_{n-2}+b_{n-2}\sqrt{a_{n-1}+b_{n-1}\theta_n}}. \end{aligned}$$

继续下去得到

$$\theta_1 \leq \left(\frac{\theta_n}{\sqrt{a_n}}\right)^{\frac{1}{2^n}} x_n \quad \text{或} \quad \theta_1\left(\frac{\sqrt{a_n}}{\theta_n}\right)^{\frac{1}{2^n}} \leq x_n \leq \theta_1.$$

条件 $\ln(\sqrt{a_n}/\theta_n)/2^n \to 0$ 推出 $(\sqrt{a_n}/\theta_n)^{1/2^n} \to 1$ 和 $x_n \to \theta_1$.

(3) 取 $a_n \equiv 1$, $b_n := a+n-1$, 和 $\theta_n = a+n$. □

§2.3.6 Cantor 集

考虑闭区间 $[0,1]$. 我们在这一小节定义一个不可数的闭集但是"长度"为零.

第一步: 把 $[0,1]$ 三等分并去掉中间的开区间 $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$, 令

$$G_1=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\quad P_1=\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right].$$

第二步: 把 P_1 中的每个区间再三等分并去掉中间的部分 $(\frac{1}{9},\frac{2}{9})$ 和 $(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$, 令

$$G_2=\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)\cup\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right),\quad P_2=[0,1]\setminus G_2=\left[0,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},1\right].$$

继续这个过程得到两个数列 $\{G_n\}_{n\geq1}$ 和 $\{P_n\}_{n\geq1}$. 定义

$$G:=\bigcup_{n\geq1}G_n,\quad P:=[0,1]\setminus G=\bigcap_{n\geq1}P_n,$$

这里 G_n 是 2^{n-1} 个长度都为 3^{-n} 的不相交的开区间的并. 易证

$$P\cap G=\emptyset,\quad P\cup G=[0,1],\quad |G_n|=\frac{2^{n-1}}{3^n}.$$

从而

$$|G|=\sum_{n\geq1}\frac{2^{n-1}}{3^n}=\frac{1}{2}\sum_{n\geq1}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{1}{2}\frac{2/3}{1-2/3}=1.$$

称集合 P 为**Cantor 集**. 注意到 P 不可数, 闭的, $|P|=0$ 但是 $P\neq\emptyset$.

这个和通常的"直观"发生矛盾. 原因是用欧式空间的度量来测量 P 不合适. 之后我们会引入**Hausdorff 维数** $\dim_{\mathcal{H}}$（欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的 Haudorff 维数就是 n）来描述 Cantor 集并可以证明 $\dim_{\mathcal{H}}(P)=\ln 2/\ln 3\in(0,1)$. 这样的集合研究属于分形（fractal）范畴. 一个经典的例子是英国海岸线是永远测不准的!

§2.4 参考文献

1. 布鲁斯 ·C. 伯恩特（Bruce C. Berndt）主编: **拉玛努金笔记**（第 2 卷）, 哈尔滨工业大学出版社, 2019.

2. Par J. Liouville. *Sur L'irrationalité du nombre e* $=2.718\cdots$, Journal de Mathématiques, (1840), 192 - 192.

3. Martin Aigner, Gunter M. Ziegler 著（冯荣权, 宋春伟, 宗传明 译）: **Proofs from the book（数学天书中的证明）**（第四版）, 高等教育出版社, 2012.

4. Niven, Ivan. *A simple proof that π is irrational*, Bull. Amer. Math. Soc., **53**(1947), 509.

5. 徐森林, 薛春华编著: **数学分析**, 清华出版社, 2005.

6. 张福保, 薛金美, 潮小李 主编: **数学分析讲义**, 科学出版社, 2019.

7. 梅加强 编著: **数学分析**, 高等教育出版社, 2015.

8. 邓建平 编: **微积分 I 和 II**, 科学出版社, 2019.

9. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis I*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+574 pp. ISBN: 3-540-40386-8

10. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis II*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xvi+681 pp. ISBN: 3-540-40633-6

11. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis I*, Translated from the 1988 German original by Gary Brookfield, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. xiv+426 pp. ISBN: 3-7643-7153-6

12. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis II*, Translated from the 1999 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. xii+400 pp. ISBN: 978-3-7643-7472-3; 3-7643-7472-3

13. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis III*, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. xii+468 pp. ISBN: 978-3-7643-7479-2; 3-7643-7479-2

14. 汪林 著: **数学分析中的问题和反例**, 现代数学基础 **56**, 高等教育出版社, 2015.

15. 裴礼文 编著: **数学分析中的典型问题与方法** (第二版), 高等教育出版社, 2015.

16. 朱尧辰 编著: **数学分析例选通过范例学技巧**, 哈尔滨工业大学出版社, 2013.

17. 周民强 编著: **数学分析习题演练** (第一、二、三册), 科学出版社, 2018.

18. 吉米多维奇 著 (李荣涑, 李植 译): **数学分析习题集** (根据 2010 年俄文版翻译), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.

第三章　极限理论 II: 函数极限

念数学, 不能潦草; 笔尖划啊划; 用信任立下誓言我来熬. —《缘分一道桥》改编

§3.1　函数极限

从下面的例子出发: 试着找到函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ 使得 $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ 对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$ 都成立.

从 $f(1) = f(1+0) = f(1)f(0)$ 得到 $f(0) = 1$, 类似地得到 $f(2) = f(1+1) = [f(1)]^2$. 对任意自然数 $n \in \mathbb{N}$ 得到 $f(n) = [f(1)]^n$. 如果 $-n \in \mathbb{N}$, 得到

$$f(n) = \frac{f(0)}{f(-n)} = \frac{1}{f(-n)} = \frac{1}{[f(1)]^{-n}} = [f(1)]^n.$$

从而对任意整数 n 都有

$$f(n) = [f(1)]^n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

如果 $n \in \mathbb{Z}_+$, 得到

$$f(1) = f\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n}\right) = \left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n \implies f\left(\frac{1}{n}\right) = [f(1)]^{\frac{1}{n}}.$$

类似的对 $n \in \mathbb{Z}_-$, 得到 $f(1/n) = [f(1)]^{1/n}$. 从而对任意非零整数 n 都有

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = [f(1)]^{\frac{1}{n}}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

对有理数 $p/q \in \mathbb{Q}$, 其中 $p > 0$, 得到

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\underbrace{\frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q}}_{p}\right) = \left[f\left(\frac{1}{q}\right)\right]^p = [f(1)]^{\frac{p}{q}}.$$

同样地理由对有理数 $p/q \in \mathbb{Q}$, 其中 $p < 0$, 得到相同的结论. 总之对任意有理数 x 得到

$$f(x) = [f(1)]^x, \quad x \in \mathbb{Q}.$$

现在给定一个实数 $x \in \mathbb{R}$, 已证存在有理数 $a_n \in \mathbb{Q}$ 满足 $\lim_{n\to\infty} a_n = x$. 这样综合上述结果得到

$$\begin{array}{ccc} f(a_n) = [f(1)]^{a_n} & \xrightarrow{n\to\infty} & [f(1)]^x \\ {\scriptstyle ?}\big\downarrow{\scriptstyle n\to\infty} & & \\ f(x) & & \end{array}$$

如果 "?" 成立则推出

$$f(x) = [f(1)]^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

换句话说, 我们其实证明了

$$\begin{aligned} ?\ \text{成立} \quad &\Longleftrightarrow \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad f\ \text{和}\ \lim\ \text{可交换} \\ &\Longleftrightarrow \quad f\ \text{连续} \end{aligned}$$

§3.1.1 定义

在给出函数连续定义之前, 我们首先来定义函数在一点的极限.

例3.1.1. *(1) 给定函数 $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$, 定义*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, M > a,\ \forall\, x > M \\ |f(x) - A| < \epsilon \end{pmatrix} \tag{3.1.1}$$

(2) 给定函数 $f : (-\infty, b) \to \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$, 定义

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, M < b,\ \forall\, x < M \\ |f(x) - A| < \epsilon \end{pmatrix} \tag{3.1.2}$$

(3) 给定函数 $f : [-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$, 定义

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, M > 0,\ \forall\, |x| > M \\ |f(x) - A| < \epsilon \end{pmatrix} \tag{3.1.3}$$

定理3.1.2. *根据定义马上得到*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = A = \lim_{x\to-\infty} f(x). \tag{3.1.4}$$

例3.1.3. *求下列函数极限*

$$(1)\ \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1+e^x}, \qquad (2)\ \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}.$$

解: 因为

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 0$$

得到函数 $e^x/(1+e^x)$ 当 $x \to \infty$ 时极限不存在. 由于 $|\sin x/x| \le 1/|x|$ 得到 $\lim_{x\to\infty} \sin x/x = 0$. □

接下来定义函数在一点的极限.

定义3.1.4. *考虑**去心邻域** $U^\circ(a,\rho) := (a-\rho, a+\rho)\setminus\{a\} = (a-\rho,a)\cup(a,a+\rho)$. 给定函数 $f : U^\circ(a,\rho)\to\mathbb{R}$, $A\in\mathbb{R}$, 定义*

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \iff \begin{pmatrix} \forall\,\epsilon>0,\ \exists\,\delta>0\ (\delta\le\rho) \\ |f(x)-A|<\epsilon \\ \text{只要 } 0<|x-a|<\delta \end{pmatrix} \tag{3.1.5}$$

在上述定义中, 不需要规定函数 f 在 a 点有定义. 如果 f 在 a 点有定义且取 $A = f(a)$, 这就是函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 连续的定义.

定义3.1.5. **（单侧极限）***(1) 给定函数 $f : (a-\rho, a)\to\mathbb{R}$ (其中 $\rho>0$), $A\in\mathbb{R}$, 定义**左极限***

$$f(a-) := \lim_{x\to a-} f(x) = A \iff \begin{pmatrix} \forall\,\epsilon>0,\ \exists\,\delta>0,\ \forall\ -\delta<x-a<0 \\ |f(x)-A|<\epsilon \end{pmatrix} \tag{3.1.6}$$

*(2) 给定函数 $f : (a, a+\rho)\to\mathbb{R}$ (其中 $\rho>0$), $A\in\mathbb{R}$, 定义**右极限***

$$f(a+) := \lim_{x\to a+} f(x) = A \iff \begin{pmatrix} \forall\,\epsilon>0,\ \exists\,\delta>0,\ \forall\,0<x-a<\delta \\ |f(x)-A|<\epsilon \end{pmatrix} \tag{3.1.7}$$

定理3.1.6. *根据定义得到*

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \iff f(a+) = A = f(a-). \tag{3.1.8}$$

例3.1.7. *下列函数在 0 点极限不存在:*

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ 1, & x>0. \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \frac{1}{x}, & x>0. \end{cases}$$

对一个函数 $f(0-) = -1$ 和 $f(0+) = 1$. 而对第二个函数 $f(0-) = 0$ 但是 $f(0+)$ 不存在.

§3.1.2 函数极限的性质

在这一小节主要考虑函数在 $x\to a$ 时的性质, 对其它情形的极限可类似地证明.

定理3.1.8. *(1) (**唯一性**) 若函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处有极限则极限必唯一.*

*(2) (**局部有界性**) 若函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处有极限则 $f(x)$ 在 a 的某个去心邻域内必有界.*

(3) **(局部保序性)** 假设 $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$ 且 $A > B$. 则存在 a 的某个去心邻域 $U^\circ(a,\rho)$ 使得 $f(x) > g(x)$ 对任意 $x \in U^\circ(a,\rho)$ 都成立.

(4) 若 $\lim_{x\to a} f(x) = A$, 则 $\lim_{x\to\infty} |f(x)| = |A|$.

(5) **(夹逼定理)** 若在某个去心邻域 $U^\circ(a,\rho)$ 内成立 $g(x) \le f(x) \le h(x)$, 且 $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = A$, 则 $\lim_{x\to a} f(x) = A$.

(6) **(四则运算)** 假设 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$, 且 α, β 为给定常数. 则得到

- $\lim_{x\to x_0}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha A + \beta B$.
- $\lim_{x\to x_0}[f(x)g(x)] = AB$.
- 若 $B \neq 0$, 则 $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = A/B$.

(7) **(复合函数极限)** 假设 $\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0$, $\lim_{u\to u_0} f(u) = A$, 且在 x_0 的某个去心邻域内 $g(x) \neq u_0$, 则复合函数 $f\circ g$ 在 x_0 处有极限且

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = A. \tag{3.1.9}$$

证: 只给出最后一个性质的证明. 给定 $\epsilon > 0$, 根据 $\lim_{u\to u_0} f(u) = A$ 的定义可以找到 $\eta > 0$ 只要 $0 < |u - u_0| < \eta$ 时有 $|f(u) - A| < \epsilon$. 对这个找到的 $\eta > 0$ 存在 $\delta > 0$ 只要 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $0 < |g(x) - u_0| < \eta$. 从而当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f[g(x)] - A| < \epsilon$. □

在结论 (3.1.9) 中我们已经假设 $g(x) \neq u_0$ 在 x_0 的某个去心邻域内成立. 如果把这个条件去掉则结论 (3.1.9) 不一定成立. 事实上参考文献 [1] 中已经指出: 若 $\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0$, $\lim_{u\to u_0} f(u) = A$, 则或者 $\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = A$, 或者 $\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = f(u_0)$, 或者 $\lim_{x\to x_0} f[g(x)]$ 不存在.

例3.1.9. 求解

$$(1)\ \lim_{x\to 0} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor = 1, \qquad (2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{a^x} = 0\ (a > 1,\ k \in \mathbb{N})$$

解: *(1)* $\frac{1}{x} - 1 < \lfloor\frac{1}{x}\rfloor \le \frac{1}{x}$ 得到 $1 - x < x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor \le 1$. *(2)* $0 < x^k/a^x \le (\lfloor x\rfloor + 1)^k/a^{\lfloor x\rfloor+1}a$. 利用 $\lim_{n\to\infty} n^k/a^n = 0$ 推出原来函数的极限为 0.

§3.1.3 两个重要的极限

在例3.1.3 (2) 中我们已经研究了函数 $\sin x/x$ 当 $x\to\infty$ 时候的极限. 接下来很自然地想知道这个函数当 $x \to 0$ 时地极限.

性质3.1.10. 下面极限成立

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \tag{3.1.10}$$

证: 显然有初等不等式 $\sin x < x < \tan x$ 当 $0 < x < \pi/2$ 成立. 类似地得到

$$|\sin x| < |x| < \tan x|, \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}.$$

所以 $\cos x < \sin x/x < 1$ 当 $0 < |x| < \pi/2$. 要利用函数极限的夹逼定理, 只有说明 $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$. 根据倍角公式得到

$$|\cos x - 1| = 2\sin^2\frac{x}{2} < \frac{x^2}{2}$$

从而得到 $\cos x \to 1$ 当 $x \to 0$. □

注3.1.11. 对函数 $\sin x/x$ 已经证明了

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0.$$

考虑函数 $\sin x/x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的积分, 即

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx.$$

利用含参变量积分或者复变函数可以证明上述积分等于 $\pi/2$.

性质3.1.12. 下面极限成立

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{3.1.11}$$

证: 对任意 $x \geq 1$ 有不等式

$$\left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor+1}\right)^{\lfloor x\rfloor} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\right)^{\lfloor x\rfloor+1}.$$

最左边项可以写成

$$\left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor+1}\right)^{\lfloor x\rfloor+1} \Big/ \left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor+1}\right)$$

而最右边项可以写成

$$\left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\right)^{\lfloor x\rfloor}\left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\right).$$

利用数列极限 $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e$ 推出 $\lim_{x\to+\infty}(1+1/x)^x = e$ 成立. 当 $x \to -\infty$ 时, 令 $y = -x \to +\infty$ 得到

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y = \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\frac{y}{y-1} \to e.$$

利用**定理**3.1.6 (关于 $x\to\infty$ 的版本) 得到 $\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x = e$. □

注3.1.13. *公式 (3.1.11) 有下列变形:*

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e,\qquad \lim_{y\to\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{y}=\frac{1}{e}. \tag{3.1.12}$$

公式 (3.1.10) 有下面一个应用: 证明

$$\lim_{n\to\infty}[n\sin(2\pi n!e)]=2\pi.$$

回顾极限

$$e=\lim_{n\to\infty}\sum_{0\le k\le n}\frac{1}{k!}=\sum_{k\ge 0}\frac{1}{k!}.$$

从而得到

$$n!e=n!\sum_{0\le k\le n}\frac{1}{k!}n!\sum_{k\ge n+1}\frac{1}{k!}.$$

右边第一项属于 $\mathbb{Z}$ 而把第二项记作 $\epsilon_n\to 0$. 计算可得

$$\frac{1}{n+1}<\epsilon_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots=\frac{1}{n}$$

故

$$n\sin(2\pi n!e)=n\sin(2\pi\epsilon_n)=\frac{\sin(2\pi\epsilon_n)}{2\pi\epsilon_n}\frac{2\pi\epsilon_n}{\frac{1}{n}}\to 1\times 2\pi=2\pi.\quad\square$$

§3.1.4 Heine 定理

这个定理在数列极限和函数极限之间建立了一座桥梁.

定理3.1.14. (Heine) *给定函数 $f:U^\circ(a,\rho)\to\mathbb{R}$, $A\in\mathbb{R}$.*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}f(x)=A \quad&\Longleftrightarrow\quad \forall\,\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset U^\circ(a,\rho)\text{ 满足 }a_n\to a,\text{ 有 }\lim_{n\to\infty}f(a_n)=A,\\ &\Longleftrightarrow\quad \forall\,\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset U^\circ(a,\rho)\text{ 满足 }a_n\to a,\text{ 有 }\{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}\text{ 收敛.}\end{aligned}$$

证: (1) $\Longleftarrow$: 假设 $\lim_{x\to a}f(x)\ne A$, 则 $\exists\,\epsilon_0>0, \forall\,\delta>0, \exists\,x\in U^\circ(a,\delta)$ 使得 $|f(x)-A|\ge\epsilon_0$. 分别取 $\delta_1=\rho$, $\delta_2=\rho/2,\cdots,\delta_n=\rho/n,\cdots$, 得到点列 $\{x_n\}_{n\ge 1}$ 满足 $x_n\in U^\circ(a,\rho/n)$ 和 $|f(x_n)-A|\ge\epsilon_0$. 此时 $x_n\to a$, 但是 $f(x_n)\nrightarrow A$.

$\Longrightarrow$: 显然.

(2) $\Longrightarrow$: 显然.

$\Longleftarrow$: 只要证明任何收敛数列 $\{f(a_n)\}_{n\ge 1}$ 都有相同的极限. 假设存在数列 $\{a_n\}_{n\ge 1}$ 和 $\{b_n\}_{n\ge 1}$ 满足 $a_n\to a$, $b_n\to a$, $f(a_n)\to A$, $f(b_n)\to B$, 但 $A\ne B$. 定义新的数列 $\{x_n\}_{n\ge 1}$ 如下:

$$x_1:=a_1,\ x_2:=b_1,\ x_3:=a_2,\ x_4:=b_2,\ \cdots,\ x_{2n-1}:=a_n,\ x_{2n}:=b_n,\ \cdots.$$

此时 $x_n\to a$ 但数列 $\{f(x_n)\}_{n\ge 1}$ 发散. 矛盾表明必有 $A=B$. $\square$

例3.1.15. *(1)* 证明函数 $\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处无极限. 对数列 $x_n = 1/n\pi$ 和 $y_n = 1/(2n\pi+\pi/2)$ 有

$$\sin\frac{1}{x_n}=0,\quad \sin\frac{1}{y_n}=1.$$

故 $\sin 1/x$ 在 $x=0$ 处极限不存在.

(2) 证明Dirichlet 函数在任何点 $x\in\mathbb{R}$ 的极限都不存在. Dirichlet 函数定义为

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}.\end{cases}$$

对任意 $a\in\mathbb{R}$, $\exists\, a_n\in\mathbb{Q}$ 满足 $a_n\to a$. 另一方面 $\exists\, b_n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 满足 $b_n\to a$. 所以 $D(a_n=1\neq 0=D(b_n)$.

(3) 拓扑学家的 *sine* 曲线定义为 $X:=\{(x,\sin(1/x)):x\in(0,1]\}$. 定义映射

$$f:(0,1]\longrightarrow X\subset\mathbb{R}^2,\quad f(x):=\left(x,\sin\frac{1}{x}\right).$$

从而可以证明 X 是连通的, $\overline{X}$ 是连通的但不是道路连通的.

定理3.1.16. 函数的**Cauchy** 收敛准则成立:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)\ \text{存在}\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{pmatrix}\forall\,\epsilon>0,\ \exists\, M>0,\ \forall\,|x|,|y|>M\\ |f(x)-f(y)|<\epsilon\end{pmatrix},$$

$$\lim_{x\to a} f(x)\ \text{存在}\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{pmatrix}\forall\,\epsilon>0,\ \exists\,\delta>0,\ \forall\, 0<|x-a|,|y-a|<\delta\\ |f(x)-f(y)|<\epsilon\end{pmatrix}.$$

证: $\Longrightarrow$: 显然. $\Longleftarrow$: 利用数列的 Cauchy 收敛准则得到对任意 $a_n\to\infty$, 数列 $\{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛. 根据 Heine 定理得到极限 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ 存在. □

§3.1.5 Bohr-Mollerup-Artin 定理

称函数 $F:(a,b)\to\infty$ $(-\infty\leq a<b\leq+\infty)$ 是**凸的**如果不等式

$$F(\lambda x+\mu y)\leq\lambda F(x)+\mu F(y)\tag{3.1.13}$$

对任意 $x,y\in(a,b)$, 任意 $0\leq\lambda,\mu\leq 1$ 满足 $\lambda+\mu=1$, 都成立.

如果函数 F 本身是 2 阶可导, 则 F 是凸的当且仅当 $F''>0$. 比如下列函数

$$-\ln x\ (0<x<+\infty),\quad |x|\ (x\in(-\infty,+\infty)),\quad e^x\ (x\in(-\infty,+\infty))$$

都是凸函数.

定理3.1.17. (Bohr - Mollerup - Artin) 假设函数 $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ 满足条件:

$$(i)\ f(x+1)=xf(x),\quad (ii)\ \ln f(x) \text{ 是凸的},\quad (iii)\ f(1)=1.$$

证明函数 f 由下列极限给出

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

证: (1) 首先假设 $n\in\mathbb{N}$ 且 $n\geq 2$ $x\in(0,1]$. 从条件 (i) 和 (iii) 得到

$$f(n)=(n-1)!.$$

令

$$F(x):=\ln f(x).$$

根据条件 (ii) 和分解 $n+x=x(n+1)+(1-x)n$ 得到

$$F(n+x)\leq xF(n+1)+(1-x)F(n).$$

所以

$$\frac{F(n+x)-F(n)}{x}\leq F(n+1)-F(n).$$

另一方面, 利用分解 $n=\frac{x}{1+x}(n-1)+\frac{1}{1+x}(nx)$ 得到

$$F(n)\leq\frac{x}{1+x}F(n-1)+\frac{1}{1+x}F(n+x).$$

所以

$$(1+x)F(n)\leq xF(n-1)+F(n+x)\quad\Longrightarrow\quad F(n)-F(n-1)\leq\frac{F(n+x)-F(n)}{x}.$$

最后推出

$$\ln(n-1)\leq\frac{\ln[f(x+n)]-\ln[(n-1)!]}{x}\leq\ln n$$

即

$$\ln\left[(n-1)^x(n-1)!\right]\leq\ln[f(x+n)]\leq\ln\left[n^x(n-1)!\right]$$

或

$$(n-1)P^x(n-1)!\leq f(x+n)=(x+n-1)\cdots(x+1)f(x)\leq n^x(n-1)!.$$

由此得到 $f(x)$ 的估计

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}\leq f(x)\leq\frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}.$$

等价地,

$$\frac{n}{n+x}f(x)\leq\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\leq f(x),\quad\forall\, n\geq 1.$$

因此结论对任意 $x \in (0,1]$ 成立.

(2) 对一般的 $x > 0$ $k \in \mathbb{N}$ $k < x \le k+1$ $0 < x-k \le 1$.

$$\begin{aligned}
f(x-k) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{x-k} n!}{(x-k)(x-k+1)\cdots(x-k+n)}, \\
f(x) &= f(x-1+1) = (x-1)f(x-1) = \cdots \\
&= (x-k)(x-k+1)\cdots(x-1)f(x-k) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{n^k x(x+1)\cdots(x-k+n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \cdot \frac{(x-k+n+1)\cdots(x+n)}{n^k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}. \quad \square
\end{aligned}$$

§3.2 函数的阶估计

数列中无穷小和无穷大的概念可以平行推广到函数情形.

§3.2.1 无穷小

定义3.2.1. 称函数 $f(x)$ 为(当 $x \to a$ 时的)**无穷小**, 记作 $f(x) = o(1)$ (当 $x \to a$ 时), 如果 $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

在上述定义中, 如果把极限过程 $x \to a$ 换成 $x \to a+$, $x \to a-$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$, $x \to \infty$, 我们就得到相应的无穷小之概念.

注3.2.2. *(1) 不失一般性, 之后的讨论都围绕极限过程 $x \to a$ 展开. 其它极限过程可类似地讨论.*

(2) $\lim_{x\to a} f(x) = A \Longleftrightarrow f(x) - A = o(1)$ 当 $x \to a$ 时.

(3) $f(x) = o(1)$ $x \to a \Longleftrightarrow |f(x)| = o(1)$ 当 $x \to a$ 时.

(4) $f(x) = o(1), g(x) = o(1)$ 当 $x \to a$ 时 $\Longrightarrow \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha f(x) + \beta g(x) = o(1)$ 当 $x \to a$ 时.

(5) $f(x) = o(1)$ 当 $x \to a$ 时, 且 $g(x)$ 在 $(a-\delta, a+\delta)$ $(\exists\, \delta > 0)$ 内有界 $\Longrightarrow f(x)g(x) = o(1)$ 当 $x \to a$ 时.

例3.2.3. *(1) $x \to 0$:*

$$\sin x = o(1), \quad \tan x = o(1), \quad a^x - 1 = o(1)\ (a > 0).$$

$x \to 0+$:

$$x^\alpha = o(1)\ (\alpha > 0), \quad 1 - \cos x = o(1).$$

$x \to +\infty$:

$$\frac{1}{x^{\alpha}} = o(1)\ (\alpha > 0), \quad a^x = o(1)\ (0 < a < 1).$$

$x \to \infty$:

$$\frac{1}{x^n} = o(1)\ (n \in \mathbb{Z}_+), \quad \frac{1}{x^{1/3}} = o(1).$$

$x \to -\infty$:

$$a^x = o(1)\ (a > 1).$$

(2) $x \to 0$:

$$xe^x + 3\ln(1+x) = e^{\sin x}\cos x - 1 = o(1).$$

$x \to \infty$:

$$\frac{x+\sin x}{x^2+5x-2} = \frac{3x}{e^x+\ln x} = \sqrt{1+x} - \sqrt{x} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{\sin x}{x} = o(1).$$

(3) 求常数 A 和 B 满足

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+5} + Ax + B\right) = 1.$$

解: 根据条件可令

$$\sqrt{x^2+2x+5} + Ax + B = 1 + \alpha(x), \quad \alpha(x) = o(1)\ (\text{当 } x \to +\infty).$$

则

$$A = \frac{1+\alpha-B-\sqrt{x^2+2x+5}}{x} = -\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}} + \frac{1-B}{x} + \frac{\alpha}{x}.$$

令 $x \to +\infty$ 得到 $A = -1$ 从而

$$B = 1 + \alpha + x - \sqrt{x^2+2x+5}.$$

两边再让 $x \to +\infty$ 推出

$$B = 1 + \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x-5}{\sqrt{x^2+2x+5}+x} = 1 - \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{5}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}} = 0.$$

最后得到 $A = -1$ 和 $B = 0$. □

定义3.2.4. 假设函数 $u(x), v(x)$ 满足条件 $u(x) = v(x) = o(1)$, 当 $x \to a$ 时.

(1) 定义

$$u(x) = o(v(x)) \text{ 当 } x \to a \text{ 时} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)} = 0.$$

(2) 定义

$$u(x)=O(v(x)) \text{ 当 } x\to a \text{ 时} \iff \left|\frac{u(x)}{v(x)}\right|\le M\ (\exists M>0) \text{ 在 } \mathring{U}(a,\delta) \text{ 内}.$$

(3) 定义

$$\begin{aligned} u(x)\approx v(x) \text{ 当 } x\to a \text{ 时} &\iff u(x)=O(v(x)) \text{ 且 } v(x)=O(u(x)) \\ &\qquad \text{当 } x\to a \text{ 时} \\ &\iff 0<m\le\left|\frac{u(x)}{v(x)}\right|\le M \\ &\qquad (\exists\, 0<m<M) \text{ 在 } \mathring{U}(a,\delta) \text{ 内} \end{aligned}$$

(4) 定义

$$u(x)\sim v(x) \text{ 当 } x\to a \text{ 时} \iff \lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)}=1.$$

性质3.2.5. (1) $u(x)=v(x)=o(1)$ 当 $x\to a$ 时, 且 $\lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)}$ 存在 $\Longrightarrow$ $u(x)=O(v(x))$ 当 $x\to a$ 时.

(2) $u(x)=v(x)=o(1)$ 当 $x\to a$ 时, 且 $\lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)}=c\neq 0 \Longrightarrow u(x)\approx v(x)$ 当 $x\to a$ 时.

证: 显然成立. □.

定义3.2.6. (1) 称函数 $u(x)$ 为 k **阶无穷小** (当 $x\to a$ 时), 如果

$$u(x)\approx(x-a)^k\ (k>0).$$

(2) 称 $c(x-a)^k$ 为 $u(x)$ **的主部** (当 $x\to a$ 时), 如果 $c\neq 0$ 且

$$u(x)\sim c(x-a)^k,\quad x\to a.$$

在证明**性质**时, 其实我们已经证明了

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}=1. \tag{3.2.1}$$

事实上,

$$\frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x^2}=\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2\to 1^2=1$$

当 $x\to 0$ 时.

例3.2.7. (1) $x\to 0$:

$$\sin x\approx(x-0)^1,\quad 1-\cos x\approx(x-0)^2,\quad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}(x-0)^2.$$

(2) $x \to 0+$:

$$\ln x = o(1), \quad x^\alpha (\ln x)^k = o(1)\ (\alpha > 0,\ k \in \mathbb{Z}_+).$$

(3) $x \to 0$:

$$\sin x \sim x \sim \tan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha}\ (\alpha > 0).$$

证: 先证 $x \sim \ln(1+x)$:

$$\lim_{x\to 0} \ln \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} = \lim_{x\to 0} \ln \left[1 + \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{e}\right] = \ln(1+0) = 0.$$

再证 $e^x - 1 \sim x$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = 1.$$

最后证 $[(1+x)^\alpha - 1]/x \sim \alpha$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha\ln(1+x)} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha\ln(1+x)} - 1}{\alpha\ln(1+x)} \cdot \frac{\alpha\ln(1+x)}{x} = \alpha. \quad \square$$

性质3.2.8. 假设极限过程都为 $x \to a$.

(1) $u(x) = O(v(x))$ $v(x) = O(w(x)) \Longrightarrow u(x) = O(w(x))$.

(2) $u(x) = O(v(x))$ $v(x) = o(w(x)) \Longrightarrow u(x) = o(w(x))$.

(3) $O(u(x)) + O(v(x)) = O(u(x) + v(x))$.

(4) $O(u(x))O(v(x)) = O(u(x)v(x))$, 特别地 $O(u^k(x)) = O(u(x))^k$.

(5) $o(1)O(u(x)) = o(u(x))$.

(6) $O(1)o(u(x)) = o(u(x))$.

(7) $O(u(x)) + o(u(x)) = O(u(x))$.

(8) $o(u(x)) + o(v(x)) = o(|u(x)| + |v(x)|)$.

(9) $o(u(x))o(v(x)) = o(u(x)v(x))$, 特别地 $o(u^k(x)) = o(u(x))^k$.

(10) $u(x) \sim v(x)$ $v(x) \sim w(x) \Longrightarrow u(x) \sim w(x)$.

(11) $u(x) \sim v(x), w(x) = o(u(x)) \Longrightarrow u(x) \sim v(x) \pm w(x)$.

证: 请诸位作为练习自证. □

§3.2.2 无穷大

若 $u(x)$ 为无穷小, 则把 $f(x) = 1/u(x)$ 称为无穷大. 下面我们只对极限过程 $x \to a$ 时展开讨论. 对其余极限情形 $x \to a+$, $x \to a-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to \infty$, 请诸生自行写出定义.

定义3.2.9. 假设函数 $f(x)$ 定义在 $\mathring{U}(a,\rho)$ 内, 其中 $\rho>0$. 定义

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty \iff \left(\begin{array}{c}\forall\, C>0,\ \exists\,\delta>0,\ \forall\, x\in \mathring{U}(a,\delta)\ \text{有}\\ f(x)\geq C.\end{array}\right),$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty \iff \left(\begin{array}{c}\forall\, C>0,\ \exists\,\delta>0,\ \forall\, x\in \mathring{U}(a,\delta)\ \text{有}\\ f(x)\leq -C.\end{array}\right),$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \iff \left(\begin{array}{c}\forall\, C>0,\ \exists\,\delta>0,\ \forall\, x\in \mathring{U}(a,\delta)\ \text{有}\\ |f(x)|\geq C.\end{array}\right).$$

类似于**定义**3.2.4, 我们可引入如下记号:

(1) 若 $u(x)\to\infty$, $v(x)\to\infty$, 定义

$$u(x)=o(v(x)) \iff \lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)}=0.$$

(2) 若 $u(x)\to\infty$, $v(x)\to\infty$, 定义

$$u(x)=O(v(x)) \iff \left|\frac{u(x)}{v(x)}\right|\leq M \text{ 在 } \mathring{U}(a,\delta) \text{ 内}.$$

(3) 若 $u(x)\to\infty$, $v(x)\to\infty$, 定义

$$u(x)\approx v(x) \iff u(x)=O(v(x)) \text{ 且 } v(x)=O(u(x)).$$

(4) 若 $u(x)\to\infty$, $v(x)\to\infty$, 定义

$$u(x)\sim v(x) \iff \lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)}=1.$$

性质3.2.10. **性质**3.2.8 对无穷大也成立.

§3.2.3 等价替换

我们知道当 $x\to a$ 时, $\tan x\sim\sin x\sim x$ 从而导致 $\tan x-\sin x\to 0$. 因此

$$\lim_{x\to 0}(\tan x-\sin x)=0.$$

例3.2.11. 求

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}.$$

证: 如果直接把等价关系 $\sin x\sim\tan x\sim x$ 带入就会得到极限为 ∞. 但是实际上

$$\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{\sin x}{\cos x}\frac{1-\cos x}{x^3}=\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

*一个很自然的问题是为何不能直接把等价的量带入然后再求极限? 原因在于在***例***3.2.11 中分母是 x^3 从而导致我们要算出分子 $\tan x - \sin x$ 更加准确的估计, 即要算出高阶无穷小. 事实上利用以后会学到的Taylor 展开我们可以得到*

$$\sin x \sim x - \frac{1}{3!}x^3, \quad \tan x \sim x + \frac{1}{3}x^3, \quad \tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3, \quad x \to 0.$$

利用上述估计立刻得到极限就是 $1/2$.□

定理3.2.12. *假设 $v(x) \sim w(x)$, 当 $x \to a$ 时, 是等价无穷小或等价无穷大. 则*

$$\lim_{x\to a} u(x)v(x) = A \iff \lim_{x\to a} u(x)w(x) = A,$$
$$\lim_{x\to a} \frac{u(x)}{v(x)} = A \iff \lim_{x\to a} \frac{u(x)}{w(x)} = A.$$

证: 利用 $u(x)w(x) = u(x)v(x) \cdot \frac{w(x)}{v(x)}$ $\frac{u(x)}{w(x)} = \frac{u(x)}{v(x)} \cdot \frac{v(x)}{w(x)}$ 马上得证. □

上述定理告诉我们在乘除运算中, 等价的两个无穷小或无穷大可以互相替换而不影响最后结果. 但是对加减运算则情况很复杂, 原因在于你要找到一个方法使之变成乘除运算从而可以利用**定理**3.2.12.

例3.2.13. *(1) 求*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{\ln(1+2x)}.$$

解: *因为 $\ln(1+2x) \sim 2x$ 当 $x \to 0$ 时成立, 所以得到*

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{\ln(1+2x)} \sim \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{2x} = \frac{(\sqrt{1+x} - 1) - (\sqrt[3]{1+x} - 1)}{2x}.$$

根据平方差公式得到

$$\frac{(1+x)^{1/2} - 1}{x} = \frac{(1+x) - 1}{x[(1+x)^{1/2} + 1]} = \frac{1}{(1+x)^{1/2} + 1} \sim \frac{1}{2}$$

当 $x \to 0$ 时. 同样利用立方差公式得到

$$\frac{(1+x)^{1/3} - 1}{x} = \frac{1}{(1+x)^{2/3} + (1+x)^{1/3} + 1} \sim \frac{1}{3}$$

当 $x \to 0$ 时. 因此

$$(1+x)^{1/2} - 1 \sim \frac{1}{2}x, \quad (1+x)^{1/3} - 1 \sim \frac{1}{3}x, \quad x \to 0.$$

最终极限等于 $(1/2 - 1/3)/2 = 1/12$. □

(2) 求

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2}.$$

解: 仿照 (1) 得到

$$\sqrt{1+2x}-1\sim\frac{1}{2}\times 2x=x,\quad x\to 0.$$

但是 $(\sqrt{1+2x}-1)/x^2\to\infty$. 故考虑分解

$$\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}=\left[\sqrt{1+2x}-(1+x)\right]-\left[\sqrt[3]{1+3x}-(1+x)\right].$$

分别利用平方差公式和立方差公式得到

$$\begin{aligned}\lim x\to 0\frac{\sqrt{1+2x}-(1+x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x^2[\sqrt{1+2x}+(1+x)]}\\ &= -\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x+\sqrt{1+2x}} = -\frac{1}{2},\\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-(1+x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1+3x)-(1+x)^3}{x^2[(1+3x)^{2/3}+(1+3x)^{1/3}(1+x)+(1+x)^2]}\\ &= \frac{-3}{3} = -1.\end{aligned}$$

最后得到极限等于 $-1/2+1=1/2$. □

(3) 实际上对任何 $\alpha>0$ 有

$$(1+x)^\alpha-\left[\sum_{0\le i\le k-1}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{i!}x^i\right]\sim\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k \tag{3.2.2}$$

当 $x\to 0$ 时. 由此我们得到如下断言:

断言: 假设 $u(x)-\sum_{0\le i\le k-1}a_ix^i\sim a_kx^k$ 和 $v(x)-\sum_{0\le i\le k-1}a_ix^i\sim b_kx^k$ 当 $x\to 0$ 时成立, 其中 $a_0,b_0,\cdots,a_k,b_k$ 都是常数且 $a_k\ne b_k$. 则

$$u(x)-v(x)\sim(a_k-b_k)x^k,\quad x\to 0.$$

证: 根据假设条件得到

$$\begin{aligned}\frac{u(x)-v(x)}{(a_k-b_k)x^k} &= \frac{[u(x)-\sum_{0\le i\le k-1}a_ix^i]-[v(x)-\sum_{0\le i\le k-1}b_ix^i]}{(a_k-b_k)x^k}\\ = \frac{u(x)-\sum_{0\le i\le k-1}a_ix^i}{a_kx^k}\cdot\frac{a_k}{a_k-b_k} &- \frac{v(x)-\sum_{0\le i\le k-1}b_ix^i}{b_kx^k}\cdot\frac{b_k}{a_k-b_k}\\ &\sim \frac{a_k}{a_k-b_k}-\frac{b_k}{a_k-b_k} = 1.\end{aligned}$$

即 $u(x)-v(x)\sim(a_k-b_k)x^k$. □

比如

$$\begin{aligned}(1+x)^{1/2}-\left[1+\frac{1}{2}x\right] &\sim \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}x^2=-\frac{1}{8}x^2,\\ (1+x)^{1/3}-\left[1+\frac{1}{3}x\right] &\sim \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2}x^2 = -\frac{1}{9}x^2\end{aligned}$$

故

$$(1+x)^{1/2}-(12+x)^{1/3}\sim\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)x=\frac{1}{6}x.$$

又比如

$$\begin{aligned}(1+2x)^{1/2}-\left[1+\frac{1}{2}(2x)\right] &\sim \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}(2x)^2 = -\frac{1}{2}x^2,\\ (1+3x)^{1/3}-\left[1+\frac{1}{3}(3x)\right] &\sim \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2}(3x)^2=-x^2.\end{aligned}$$

故得到

$$(1+2x)^{1/3}-(1+3x)^{1/3}\sim\left(-\frac{1}{2}+1\right)x^2=\frac{1}{2}x^2.$$

(4) 求极限 $\lim_{x\to+\infty}\arccos(\sqrt{x^2+x}-x)$.

解: 令 $u:=\sqrt{x^2+x}-x$. 由于

$$\lim_{x\to+\infty}u=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+\sqrt{x^2+x}}=\frac{1}{2}$$

得到

$$\lim_{x\to+\infty}\arccos(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim_{u\to\frac{1}{2}}\arccos u=\frac{\pi}{3}.\quad\Box$$

(5) 证明

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim x^{1/2},\quad x\to+\infty.$$

证: 令 $u:=(x+x^{1/2})/x^2$ 推出

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x^{1/2}}=\lim_{x\to+\infty}\left[1+\left(\frac{x+x^{1/2}}{x^2}\right)^{1/2}\right]^{1/2}$$

$$=\lim_{u\to0}(1+u^{1/2})^{1/2}=1.\quad\Box$$

(6) 求下列函数当 $x\to0$ 时的主部

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \pi-3\arccos\left(x+\frac{1}{2}\right),\quad x\to0.$$

解: 对一个函数有

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\frac{\pi}{3}=2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{x}{2}\sim\sin\frac{x}{2}\sim\frac{x}{2}$$

所以函数 $\sin(x+\pi/3)-\sqrt{3}2$ 当 $x\to0$ 时的主部是 $x/2$. 对第二个函数利用 $\sin(3\theta)=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ 有

$$\pi-3\arccos\left(x+\frac{1}{2}\right)\sim\sin\left[\pi-3\arccos\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=\sin\left[3\arccos\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= 3\sqrt{1-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} - 4\left(\sqrt{1-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\right)^3$$

$$= \sqrt{1-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\left\{3-4\left[1-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right]\right\}$$

$$\sim \frac{\sqrt{3}}{2}(4x+4x^2) \sim 2\sqrt{3}x, \quad x \to 0.$$

所以函数 $\pi - 3\arccos(x+1/2)$ 当 $x \to 0$ 时的主部是 $2\sqrt{3}x$. □

例3.2.14. 假设函数 $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ 满足条件

$$f(2x) = f(x) \quad 且 \quad f(x) = o(1), \quad x \to +\infty.$$

证明 $f \equiv 0$.

证: 任取 $x_0 \in (0,+\infty)$ 得到

$$f(x_0) = f(2x_0) = f(2^2x_0) = \cdots = f(2^nx_0), \quad \forall\, n.$$

根据 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ 和Heine 定理, **定理**3.1.14 ($x \to +\infty$ 的版本), 得到

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(2^nx_0) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

即对 $\forall\, x_0 > 0$ 有 $f(x_0) = 0$. □

例3.2.15. 假设函数 $f(x)$ 满足条件 $f(x) = o(1)$ 且 $f(2x) - f(x) = O(x)$, 当 $x \to 0$ 时. 则 $f(x) = O(x)$, 当 $x \to 0$ 时.

证: 根据条件 $f(2x) - f(x) = O(x)$ 得到 $|f(2x) - f(x)| \le M|x|$, $\exists\, M > 0$, $\forall\, x \in \mathring{U}(0,\delta)$, $\exists\, \delta$. 从而得到

$$\left|f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)\right| \le \frac{M|x|}{2}, \quad \left|f\left(\frac{x}{2}\right) - f\left(\frac{x}{2^2}\right)\right| \le \frac{M|x|}{2^2}$$

$$\cdots, \quad \left|f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| \le \frac{M|x|}{2^n}.$$

把这些不等式加起来并利用基本不等式 $|x-y| \le |x| + |y|$ 得到

$$\left|f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| \le M|x| \sum_{1\le k\le n} \frac{1}{2^k} \le M|x|.$$

利用假设条件 $f(x) = o(1)$ 并令 $n \to \infty$ 推出 $|f(x)| \le M|x|$. 即 $f(x) = O(x)$, 当 $x \to 0$ 时. □

§3.3 函数的连续和间断

假设函数 $f(x)$ 定义在去心邻域 $\mathring{U}(a,r)$ 内. 称 f 当 $x\to a$ 时的极限为 A, 如果 $\forall\,\epsilon>0,\exists\,\delta\in(0,r],\forall\,x\in\mathring{U}(a,\delta)$, 有 $|f(x)-A|<\epsilon$. 如果函数 $f(x)$ 定义在邻域 $U(a,r)$ 内且 $A=f(a)$, 我们就得到函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续的定义.

§3.3.1 连续函数

我们那上述的讨论写成如下的定义.

定义3.3.1. *假设函数 $f(x)$ 定义在邻域 $U(a,r)$ 内. 称函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处***连续***如果*

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a),$$

即 $\forall\,\epsilon>0,\exists\,\delta\in(0,r],\forall\,x\in U(a,\delta)$, 有

$$|f(x)-f(a)|<\epsilon.$$

*此时 a 称为函数 $f(x)$ 的***连续点***.*

称函数 $f(x)$ 在**开区间** (a,b) **内连续**如果函数 $f(x)$ 在任意 $x\in(a,b)$ 处连续.

假设函数 $f(x)$ 定义在区间 $[a,a+r)$ 内. 称函数 $f(x)$ 在a **处右连续**如果

$$f(a+)=\lim_{x\to a+}f(x)=f(a).$$

假设函数 $f(x)$ 定义在区间 $(a-r,,a]$ 内. 称函数 $f(x)$ 在a **处左连续**如果

$$f(a-)=\lim_{x\to a-}f(x)=f(a).$$

称函数 $f(x)$ 在**闭区间** $[a,b]$ **内连续** 如果 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续, 在 a 处右连续, 且在 a 处左连续.

类似地可以定义函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 或 $[a,b)$ 内连续的概念.

例3.3.2. *(1) 函数 $\sin x,\cos x,a^x$ $(a>0)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.*

(2) 函数 $f(x)$ 在 a 处连续 $\Longleftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 在 a 处即时左连续又是右连续.

(3) 函数 $f(x)$ 连续 $\Longrightarrow$ 函数 $|f(x)|$ 连续. 但是反之不一定成立, 比如考察函数

$$f(x):=\begin{cases}\frac{1}{2}x+1, & x\in[0,2],\\ \frac{1}{2}x-1, & x\in[-2,0).\end{cases}$$

(4) $f(a)=\lim_{x\to a}f(x)\Longleftrightarrow\forall\,x_n\to a$ 都有 $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(a)$ 成立.

例3.3.3. *(1)*
$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$
在 0 处连续.

(2)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$
在 0 处不连续.

例3.3.4. 考察函数
$$f(x) = \begin{cases} a_n + \sin(\pi x), & 2n \leq x \leq 2n+1, \\ b_n + \cos(\pi x), & 2n-1 < x < 2n, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z},$$
求 a_n 和 b_n 使得函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

解: 因为函数 $f(x)$ 在 $2n$ 处连续, 所以 $f(2n-) = f(2n) = f(2n+)$ 从而
$$b_n + 1 = a_n.$$
同样根据函数 $f(x)$ 在 $2n-1$ 处连续得到
$$a_{n-1} = b_n - 1.$$
故推出 $a_n = a_0 + 2n$ 且 $b_n = a_0 + 2n - 1$. □

例3.3.5. *(1)* 定义 $(0,1)$ 上的Riemann 函数为
$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in (0,1) \text{ 且为无理数}, \\ \frac{1}{q}, & x = p/q \in (0,1) \cap \mathbb{Q} \text{ 且 } (p,q) = 1. \end{cases}$$
证明函数 $f(x)$ 在任意 $x \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$ 处不连续, 但是在任意 $x \in (0,1) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ 处连续.

证: 令取 $x = p/q \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$. $\exists\, \epsilon_0 \in (0, 1/q)$, $\forall\, \delta > 0$, $\exists\, (0,1)$ 的无理数 x 满足 $|x - x_0| < \delta$ 但是
$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x_0)| = \frac{1}{q} > \epsilon_0.$$

现在假设 $x_0 \in (0,1) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists$ 有限多个 $q \in \mathbb{N}$ 满足 $1/q \geq \epsilon$. 从而 $\exists$ 有限多个 $p/q \in (0,1)$ 满足 $1/q \geq \epsilon$. $\exists\, \delta > 0$ 使得不等式 $|\frac{p}{q} - x_0| \geq \delta$ 对有限多个满足条件 $1/q \geq \epsilon$ 的 $p/q \in (0,1)$ 都成立. 从而 $\forall\, x \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$ 只要 $|x - x_0| < \delta$ 都有 $1/q < \epsilon$, 这里 $x = p/q$; 此时得到
$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x)| = \frac{1}{q} > \epsilon.$$

当 $|x-x_0|<\delta$ 且 $x\in(0,1)\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ 时, 显然有 $|f(x)-f(x_0)|=|f(x)|=0<\epsilon$. □

(2) 定义函数 $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ 如下

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in(0,1)\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}),\\ \frac{nx}{n+1}, & x=\frac{m}{n}\in(0,1)\cap\mathbb{Q},\ (m,n)=1. \end{cases}$$

证明 $f(x)$ 在任意 $x\in(0,1)\cap\mathbb{Q}$ 处不连续, 但是在任意 $x\in(0,1)\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ 处连续.

证: 令 $x_0=m/n\in(0,1)\cap\mathbb{Q}$. 则 $f(x_0)=nx_0/(n+1)=m/(n+1)$. 取

$$x_k=\frac{km+1}{kn}\longrightarrow\frac{m}{n}=x_0$$

得到

$$\lim_{k\to\infty}f(x_k)=\lim_{k\to\infty}\frac{kn\frac{km+1}{kn}}{kn+1}=\frac{m}{n}\neq f(x_0).$$

所以函数 $f(x)$ 在 x_0 处不连续.

如果 $x_0\in(0,1)\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$, 就和(1) 中证明一样 $\exists\delta_0>0$ 使得对 $\forall\, x\in(0,1)\cap\mathbb{Q}$ 且 $|x-x_0|<\delta_0$ 都有 $1/n<\epsilon$, 这里 $x=m/n$. 取 $\delta:=\min(\epsilon,\delta_0)>0$. $\forall\, x\in(0,1)\cap\mathbb{Q}$ 且 $|x-x_0|<\delta$ 有 $1/n<\epsilon$, 这里 $x=m/n$. 进一步

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)| &= \left|\frac{x}{1+\frac{1}{n}}-x_0\right|=\frac{|x-x_0-\frac{m}{n}|}{1+\frac{1}{n}}\le\frac{|x-x_0|}{1+\frac{1}{n}}+\frac{\frac{x_0}{n}}{1+\frac{1}{n}}\\ &<|x-x_0|+\frac{x_0}{n}<\delta+\epsilon x_0<\epsilon(1+x_0).\end{aligned}$$

当 $x\in(0,1)\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ 时, 有 $|f(x)-f(x_0)|=|x-x_0|<\delta<\epsilon$. 故函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续. □

例3.3.6. 定义函数

$$f(x):=\lim_{m\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty}(\cos^n(\pi m!x))\right],\quad x\in\mathbb{R}.$$

证明

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

因此 $f(x)$ 就是Dirichlet 函数, 而且 $f(x)$ 处处不连续.

证: 简便起见对给定 m,n 记

$$f_{m,n}(x):=\cos^n(\pi m!x).$$

如果 $x=p/q\in\mathbb{Q}$, 则 $\forall\, m>q$, 都有 $f_{m,n}(x)=1$ 从而 $f(x)=1$. 如果 $x\notin Q$, 由于 $|\cos(\pi m!x)|<1$ 得到 $\lim_{n\to\infty}f_{m,n}(x)=0$ 故 $f(x)=0$. 函数 $f(x)$ 处处不连续是显然的. □

注3.3.7. 连续函数满足四则运算法则, 比如两个连续函数的相加和相减都是连续的.

(1) f 在 x_0 处连续, g 在 x_0 处不连续 $\Longrightarrow f+g$ 在 x_0 处一定不连续, 但是 fg 在 x_0 处可能连续. 反例如下

$$f\equiv 0,\quad g(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

(2) f 和 g 都在 x_0 处不连续 $\Longrightarrow f+g$ 在 x_0 处可能连续, 比如

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

fg 在 x_0 处可能连续, 比如

$$f(x)=g(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

(3) f 在 x_0 处不连续 $\Longrightarrow f^2$ 在 x_0 处可能连续.

(4) f,g 都在 x_0 处连续 $\Longrightarrow f\wedge g\equiv\min(f,g)$ 和 $f\vee g\equiv\max(f,g)$ 都连续. 这是因为

$$f\wedge g=\frac{f+g-|f-g|}{2},\quad f\vee g=\frac{f+g+|f-g|}{2}.$$

§3.3.2 函数的间断点

称 a 是函数 $f(x)$ 的**间断点**, 根据定义如果 $f(x)$ 在 a 处不连续 (此时 $f(a)$ 是有定义的) 或者 $f(x)$ 在 a 处没有定义.

定义3.3.8. 假设 a 是 $f(x)$ 的间断点.

(1) a 是**第一类间断点**: $f(a-)$ 和 $f(a+)$ 都存在.

(1a) a 是**可去间断点**如果 $f(a+)=f(a-)$: 要么 $f(a)$ 没有定义但是 $f(a+)=f(a-)$, 此时我们可以延拓定义得到一个连续函数 F:

$$F(x):=\begin{cases}f(x), & x\neq a,\\ f(a+)=f(a-), & x=a;\end{cases}$$

要么 $f(a)$ 有定义但是 $f(a+)=f(a-)\neq f(a)$.

(1b) a 是**跳跃间断点**如果 $f(a+)\neq f(a-)$: 此时把 $|f(a+)-f(a-)|$ 称为函数 f 在 a 处的**跃度**.

(2) a 是**第二类间断点**: $f(a+), f(a-)$ 中至少有一个不存在.

例3.3.9. *(1)* 0 是如下函数的跳跃间断点:

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

(2) $k \in \mathbb{Z}$ 是函数 $f(x) = \lfloor x \rfloor$ 的跳跃间断点.

(3) -1 是函数 $f(x) = x/(1+x)^2$ 的第二类间断点.

(4) -1 是函数 $f(x) = (1+x)/(1+x^3)$ 的可去间断点.

(5) 0 和 $k\pi$ 分别是函数 $f(x) = x/\sin x$ 的可去间断点和第二类间断点.

(6) $k \in \mathbb{Z}$ 是函数 $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ 的跳跃间断点.

(7) 0 和 $1/k$ 分别是函数 $f(x) = 1/x - \lfloor 1/x \rfloor$ 的第二类间断点和跳跃间断点.

(8) 函数 $f(x) = \lfloor x \rfloor \sin(\pi x)$ 处处连续.

(9) $x \neq k \in \mathbb{Z}$ 是如下函数

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x), & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

的第二类间断点.

注3.3.10. 单调函数 $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ 的不连续点只能是跳跃间断点.

证: 不是一般性不妨假设函数 $f(x)$ 是递增函数且 $c \in (a,b)$ 是间断点. 对任意 $a < c_1 < c < c_2 < b$, 根据单调性得到

$$f(c_1) \le f(c) \le f(c_2).$$

从而 $f(c-) \le f(c) \le f(c+)$. 如果 $f(c-) = f(c+)$ 则 $f(x)$ 在 c 处连续, 产生矛盾. 因此 $f(c-) \neq f(c+)$ 实际上 $f(c-) < f(c+)$. □

定理3.3.11. 单调函数的间断点构成的集合是可数的.

证: 不失一般性不妨假设函数 $f(x)$ 单调且定义在开区间 $I \subset \mathbb{R}$ 内. 如果 $x_1 < x_2$ 是函数 $f(x)$ 的间断点, 根据注3.3.10 得到

$$f(x_1 - 0) \le f(x_1) \le f(x_1 + 0) < f(x_2 - 0) \le f(x_2) \le f(x_2 + 0).$$

所以

$$\begin{aligned} I_{x_1} := (f(x_1 - 0), f(x_1 + 0)) \neq \emptyset \quad &\Longrightarrow \quad \exists\, r_1 \in \mathbb{Q} \cap I_{x_1}, \\ I_{x_2} := (f(x_2 - 0), f(x_2 + 0)) \neq \emptyset \quad &\Longrightarrow \quad \exists\, r_2 \in \mathbb{Q} \cap I_{x_2}, \\ I_{x_1} \cap I_{x_2} = \emptyset \quad &\Longrightarrow \quad r_1 < r_2. \end{aligned}$$

令 $X := \{f(x)$ 的间断点$\}$ 并定义

$$F : X \longrightarrow \mathbb{Q}, \quad x \longmapsto r_x.$$

所以 F 是单的, 故 $|X| \le |Q|$. 因此 X 是可数的. □

§3.3.3 连续函数的性质

这一小节我们讨论闭区间上连续函数的几个重要性质.

定理3.3.12. (有界性) *如果函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则 f 必有界.*

证: 否则的话, f 在 $[a,b]$ 上无界. $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists\, x_n\in[a,b]$ 满足 $|f(x_n)|\ge n$. 但是数列 $\{x_n\}_{n\ge1}$ 有界, $\exists\,[a,b]$ 内某个收敛子列 $\{x_{n_k}\}_{k\ge1}$. 记 $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=c\in[a,b]$. 根据函数 f 的连续性得到 $f(c)=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})$, 这和 $f(x_n)\to\infty$ 产生矛盾. □

注3.3.13. *(1) 在**定理**3.3.12 中, 我们假设函数 f 要定义在闭区间上, 这是因为如果函数 f 定义在开区间 (a,b) 内则极限 $c=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}$ 可能是端点 a 或 b, 但此时 $f(c)$ 不一定有定义.*

(2) 函数 f 在 (a,b) 内连续 $\Longrightarrow$ f 在任意闭区间 $[c,d]\subset(a,b)$ 上有界, 但不一定在 (a,b) 内有界, 比如函数 $f(x)=1/x, 0<x<1$.

定理3.3.14. (Weierstrass 最值定理) *如果函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则 $\exists\,\xi,\eta\in[a,b]$ 满足不等式 $f(\xi)\le f(x)\le f(\eta)$ 对 $\forall\,x\in[a,b]$ 都成立.*

证: 不失一般性不妨只证明 $\exists\,\eta\in[a,b]$ 使得 $f(x)\le f(\eta)$ 对任意 $x\in[a,b]$ 都成立. 根据**定理**3.3.12 得到 $M:=\sup_{x\in[a,b]}f(x)$ 存在. 假设 $M>f(x)$ 对任意 $x\in[a,b]$ 都成立. 定义

$$F(x):=\frac{1}{M-f(x)}>0,\quad x\in[a,b].$$

则 F 在 $[a,b]$ 上连续. 再次利用**定理**3.3.12 得到 $0<F(x)\le K, \forall\,a\le x\le b$, $\exists\,K>0$. 故

$$f(x)\le M-\frac{1}{K},\quad \forall\,x\in[a,b]$$

但这和 M 的定义发生矛盾. 所以 $M=f(\eta)$ 对某个 $\eta\in[a,b]$ 成立. □

定义3.3.15. 闭区间构成的数列 $\{[a_n,b_n]\}_{n\ge1}$ 称为**闭区间套**如果

$$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]\ (\forall\,n\ge1),\quad \lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0.$$

定理3.3.16. *如果 $\{[a_n,b_n]\}_{n\ge1}$ 是闭区间套则 $\exists!\,\xi\in\mathbb{R}$ 满足*

$$a_n\le\xi\le b_n\ (\forall\,n\ge1),\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\xi=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

证: 参见**定理**2.3.11 的证明. □

注3.3.17. *(1) **定理**3.3.16 不一定成立如果把闭区间 $[a_n,b_n]$ 换成开区间 (a_n,b_n), 比如 $\{(0,1/n)\}_{n\ge1}$.*

*(2) 可以证明Zorn 引理, **定理**2.3.1, **定理**2.3.11, **定理**2.3.15, **定理**3.3.16 互相等价.*

现在我们引入记号

$$f \in C(I)$$

这是表明函数 f 在区间 I 上连续.

定理3.3.18. (Bolzano-Cauchy 介值定理) *(1) 假设 $f \in C[a,b]$ 且 $f(a)f(b) < 0$ (或 $f(a)f(b) \le 0$), 则 $\exists\, \xi \in (a,b)$ (或 $\exists\, \xi \in [a,b]$) 满足 $f(\xi) = 0$.*

(2) 假设 $f \in C[a,b]$, $M_f := \max_{[a,b]} f$, $m_f := \min_{[a,b]} f$, 则 $\forall\, \mu \in (m_f, M_f)$ 存在 $\xi \in (a,b)$ 满足 $f(\xi) = \mu$. 一般地, 假设 $f(a) < \mu < f(b)$, 则存在 $\exists\, \xi \in (a,b)$ 满足 $f(\xi) = \mu$.

证: 不失一般性不妨假设 $f(a) < 0 < f(b)$. 假设 $f(x) \ne 0$ 对任何 $a < x < b$ 都成立. 若 $f((a+b)/2) > 0$, 取 $a_1 = a, b_1 = (a+b)/2$; 若 $f((a+b)/2) < 0$, 取 $a_1 = (a+b)/2, b_1 = b$. 总之在任何情形下均有不等式 $f(a_1) < 0 < f(b_1)$ 成立. $\{[a_n, b_n]\}_{n\ge 1}$,

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], \quad f(a_n) < 0 < f(b_n), \quad \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0.$$

根据**定理**3.3.16 $\exists\, \xi \in [a,b]$ 满足 $\lim_{n\to\infty} a_n = \xi = \lim_{n\to\infty} b_n$. 因此

$$0 \ge \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \ge 0.$$

(2) 由**定理**3.3.14 $\exists\, \xi_1, \xi_2 \in [a,b]$ 满足 $f(\xi_1) = m_f$ 和 $f(\xi_2) = M_f$. 不失一般性不妨假设 $\xi_1 < \xi_2$. 定义

$$F(x) := f(x) - \mu.$$

则 $f(\xi_1) = m_f - \mu < 0$ 且 $f(\xi_2) = M_f - \mu \ge 0$ 成立. 由 (1) $\exists\, \xi \in [\xi_1, \xi_2]$ 使得 $F(\xi) = 0$ 成立. 即 $\mu = f(\xi)$. □

推论3.3.19. *(1) $f \in C[a,b] \Longrightarrow f([a,b]) = [m_f, M_f]$.*

(2) 如果 I 是区间, 则 $f \in C(I) \Longrightarrow f(I)$ 也是区间.

(3) $f \in C(I) \Longrightarrow f$ 严格单调当且仅当 f^{-1} 存在.

(4) $f : [a,b] \to [a,b]$ 连续 $\Longrightarrow \exists\, \xi \in [a,b]$ 满足 $f(\xi) = \xi$.

: (1) $m_f = M_f \Longrightarrow f$ 为常数 $\Longrightarrow f([a,b]) = [m_f, M_f]$. 所以假设 $m_f < M_f$. 根据**定理**3.3.14 $\exists\, \xi, \eta \in [a,b]$ 使得

$$f(\xi) = m_f, \quad f(\eta) = M_f$$

成立. 由**定理**3.3.18, $\forall\, \mu \in [m_f, M_f]$, $\exists\, x \in [a,b]$ 满足 $f(x) = \mu \Longrightarrow [m_f, M_f] \subset f([a,b]) \subset [m_f, M_f]$.

(2) 若 f 为常数, 则 $f(I)$ 为一点故必是区间. 现在假设 f 不是常数. $\forall\, y_1 < y_2$ 且 $y_1, y_2 \in f(I)$, 我们将证明 $[y_1, y_2] \subset f(I)$. 令 $f(x_1) = y_1 < y_2 = f(x_2)$.

根据**定理**3.3.18, $\forall\, y \in (y_1, y_2)$, $\exists\, x \in (x_1, x_2)$ 满足 $f(x) = y \Longrightarrow [y_1, y_2] \subset f(I)$ $\Longrightarrow f(I)$ 是区间.

(3) $\Longrightarrow$: 显然.

$\Longleftarrow$: 假设函数 f 可逆且 $x_1 < x_2$. 则首先可得到 $f(x_1) \neq f(x_2)$. 不失一般性不妨假设 $f(x_1) < f(x_2)$. 我们将证明 f 在区间 $[x_1, x_2]$ 上严格递增. 否则的话, $\exists\, x' < x''$ 满足 $x', x'' \in [x_1, x_2]$ 且 $f(x') \geq f(x'')$.

情形 1: $f(x'') < f(x_1)$. 此时 $f(x'') < f(x_1) < f(x_2)$. 根据**定理**3.3.18 $\exists\, \xi \in (x'', x_2)$ 使得 $f(\xi) = f(x_1)$ 成立, 矛盾!

情形 2: $f(x'') > f(x_1)$. 此时 $f(x_1) < f(x'') < f(x') \Longrightarrow \exists\, \xi \in (x_1, x')$ 使得 $f(\xi) = f(x'')$ 成立, 矛盾!

(4) 定义 $F(x) := f(x) - x$, $a \leq x \leq b$. 从 $F(a)F(b) \leq 0$, $\exists\, \xi \in [a, b]$ 满足 $F(\xi) = 0$. □

例3.3.20. *(1) 任意定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇数次多项式至少有一个根.*

证: 令此奇数次多项式为

$$P(x) := a_0 x^{2n-1} + a_1 x^{2n-2} + \cdots + a_{2n-2}x + a_{2n-1}, \quad a_0 \neq 0.$$

不失一般性不妨假设 $a_0 > 0$. 根据极限

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{x^{2n-1}} = a_0 > 0$$

得到 $\exists\, x_1 < 0 < x_0$ 满足

$$\frac{P(x_1)}{x_1^{2n-1}} > 0, \quad \frac{P(x_2)}{x_2^{2n-1}} > 0.$$

从而 $x_1^{2n-1} < 0 < x_2^{2n-1} \Longrightarrow P(x_1) < 0 < P(x_2) \Longrightarrow P(\xi) = 0$ 对某个 $\xi \in (x_1, x_2)$ 成立. □

(2) $\lim_{x\to X} f(x) = \alpha > 0$, $\lim_{x\to X} g(x) = \beta \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim_{x\to X}[f(x)]^{g(x)} = \alpha^\beta$. 这里 $x \to X$ 可以是下列极限过程之一: $x \to a$, $x \to a-$, $x \to a+$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$.

证: 根据复合函数性质得到

$$\lim_{x\to X}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to X} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim_{x\to X} g(x)\ln f(x)} = e^{\beta\ln\alpha} = \alpha^\beta. \quad \square$$

(3) $f \in C[0,1]$, $f \geq 0$, $f(0) = f(1) = 0$, $0 < a < 1 \Longrightarrow \exists\, x_0 \in [0,1]$ 使得 $f(x_0) = f(x_0 + a)$ 和 $0 \leq x_0 + a \leq 1$ 都成立.

证: 令 $F(x) := f(x) - f(x+a)$. 则 $F \in C[0, 1-a]$ 且 $F(0) = f(0) - f(a) = -f(a) \leq 0$, $F(1-a) = f(1-a) - f(1) = f(1-a) \geq 0$. 从而 $\exists\, x_0 \in [0, 1-a]$ 满足 $F(x_0) = 0$. □

(4) $f \in C[0,1], f(0)=0, f(1)=1 \Longrightarrow \exists\, \xi \in [\frac{1}{3}, 1)\ f(\xi-\frac{1}{3}) = f(\xi)-\frac{1}{3}$.

证: 令 $F(x) = f(x-\frac{1}{3}) - f(x) + \frac{1}{3}$. 则 $F \in C[1/3, 1]$ 且

$$\begin{aligned} F(1/3) &= f(0) - f(1/3) + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - f(1/3), \\ F(1) &= f(2/3) - f(1) + \frac{1}{3} = f(2/3) - \frac{2}{3}, \\ F(2/3) &= f(1/3) - f(2/3) + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

上述三式相加得到

$$F(1/3) + F(2/3) + F(1) = 0.$$

如果 $F(2/3) = 0$, 则 $\xi = 2/3$. 如果 $F(2/3) \neq 0$, 则不妨假设 $F(2/3) > 0$. 此时 $F(1/3) + F(1) < 0$. 如果 $F(1/3) < 0$, 则存在 $\xi \in (1/3, 2/3)$ 使得 $F(\xi) = 0$ 成立; 如果 $F(1/3) = 0$ 则取 $\xi = 1/3$; 如果 $F(1/3) > 0$, 必有 $F(1) < 0$ 从而存在 $\xi \in (1/3, 1)$ 使得 $F(\xi) = 0$ 成立. 无论哪种情形, 都存在 $\xi \in [1/3, 1)$ 使得 $F(\xi) = 0$ 成立. $\Box$

(5) $f \in C(-\infty,+\infty)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Longrightarrow \exists\, x_0 \in (-\infty,+\infty)$ 满足 $f(x_0) = \inf_{(-\infty,+\infty)} f(x)$.

证: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Longrightarrow \exists\, a < 0$ 使得 $f(x) > f(0)$ 对任意 $x < a$ 都成立. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Longrightarrow \exists\, b > 0$ 使得 $f(x) > f(0)$ 对任意 $x > b$ 都成立. 在闭区间 $[a,b]$ 上, $\exists\, x_0 \in [a,b]$ 使得 $f(x_0) = \min_{[a,b]} f$ 成立. 从而

$$f(x_0 \le f(0) \le f(x), \quad \forall\, x \in (-\infty,+\infty) \setminus [a,b].$$

故 $f(x_0) = \inf_{(-\infty,+\infty)} f$. $\Box$

(6) $f \in C[a,b]$, 且 $\forall\, x \in [a,b]\ \exists\, t \in [a,b]$ 满足 $|f(t)| \le |f(x)|/2 \Longrightarrow \exists\, x_0 \in [a,b]$ 使得 $f(x_0) = 0$ 成立.

证: 否则的话, $\forall\, x \in [a,b]$ 都有 $|f(x)| > 0$. $f \in C[a,b] \Longrightarrow |f| \in C[a,b] \Longrightarrow \exists\, x_0 \in [a,b]\ |f(x_0)| = \min_{[a,b]} |f| > 0 \Longrightarrow \exists\, t_0 \in [a,b]$ 满足 $|f(t_0)| \le \frac{1}{2}|f(x_0)| = \frac{1}{2}\min_{[a,b]} |f| \le \frac{1}{2}|f(t_0)|$. 因此 $|f(t_0)| = 0$, 矛盾! $\Box$

(7) $f \in C[a,b], t, s > 0 \Longrightarrow \exists\, \xi \in [a,b]$ 满足

$$tf(a) + sf(b) = (t+s)f(\xi).$$

证: 令 $F(x) := tf(a) + sf(b) - (t+s)f(x)$. 则

$$F(a) = s[f(b) - f(a)], \quad F(b) = t[f(a) - f(b)], \quad F(a)F(b) \le 0.$$

故 $\exists\, \xi \in [a,b]$ 满足 $F(\xi) = 0$. $\Box$

(8) $f \in C[0,1]$, $f(0) = f(1) \Longrightarrow \forall\, n \geq 1, \exists\, x_n \in (0,1)$ 满足 $f(x_n) = f(x_n + \frac{1}{n})$.

证: 令 $F(x) := f(x) - f(x + \frac{1}{n})$ 得到

$$F\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k+1}{n}\right), \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

从而

$$\sum_{0 \leq k \leq n-1} F\left(\frac{k}{n}\right) = f(0) - f(1) = 0.$$

如果 $\exists\, k$ 满足 $F(k/n) = 0$, 取 $x_n = k/n$. 如果 $\forall\, k$ 都有 $F(k/n) \neq 0\, \exists\, k_1 < k_2$ 满足 $F(k_1/n)F(k_2/n) < 0 \Longrightarrow \exists\, x_n \in (k_1/n, k_2/n)$ 满足 $F(x_n) = 0$. □

(9) $f : [a,b] \to [a,b], \exists\, k > 0\, |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|\ (\forall\, a \leq x, y \leq b) \Longrightarrow$

(*a*) f 连续.

(*b*) $\exists\, \xi \in [a,b]$ 满足 $f(\xi) = \xi$.

(*c*) 如果 $0 \leq L < 1$, $x_{n+1} := f(x_n)$, 其中 $x_0 \in [a,b]$ 给定, 则 $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$.

证: (*a*) 和 (*b*) 之前都已经证明. 下面证明 (*c*). 根据条件得到

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq L|x_n - x_{n-1}| \leq \cdots \leq L^n|x_1 - x_0|.$$

故对 $\forall\, q > p$,

$$|x_q - x_p| \leq \sum_{p \leq k \leq q-1} |x_{k+1} - x_k| \leq \sum_{p \leq k \leq q-1} L^k|x_1 - x_0| \leq |x_1 - x_0|\frac{L^p}{1-L}$$

从而 $\{x_n\}_{n\geq 0}$ 是Cauchy 数列 $\Longrightarrow x := \lim_{n\to\infty} x_n$ 存在且

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f(x), \quad |x - \xi| = |f(x) - f(\xi)| \leq L|x - \xi|.$$

但是 $0 \leq L < 1$, 得到 $x = \xi$. □

(10) $f, g \in C[a,b]$, 且 $\forall\, n \geq 1, \exists\, x_n \in [a,b]$ 满足 $g(x_n) = f(x_{n+1}) \Longrightarrow \exists\, x_0 \in [a,b]\ f(x_0) = g(x_0)$.

证: 因为数列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 有界, 从而存在 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 的某个收敛子列, 不妨假设这个收敛子列就是数列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 本身. 则极限 $x_0 := \lim_{n\to\infty} x_n$ 存在, 故 $f(x_0) = g(x_0)$. □

(11) 证明多项式 $x^3 + 2x - 1 = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内只有一个实根 ξ 且 $\xi \in (0,1)$.

证: 令 $f(x) := x^3 + 2x - 1 \in C(-\infty, +\infty)$. 计算得到

$$f(0) = -1 < 0, \quad f(1) = 1 + 2 - 1 = 2 > 0.$$

从而存在 $x_0 \in (0, 1)$ 满足 $f(x_0) = 0$. 但是 $\forall\, x < y$

$$f(y) - f(x) = (y^3 - x^3) + 2(y - x) = (y - x)\left[\left(y + \frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 + 2\right] > 0$$

推出函数 f 严格单调递增 $\Longrightarrow \exists!\, \xi \in (0, 1)$ 满足 $f(\xi) = 0$. $\square$

(12) $f \in C(-\infty, +\infty)$, 且等式 $f(f(x)) = x$ 对任何 x 成立 $\Rightarrow \exists\, \xi \in (-\infty, +\infty)$ 满足 $f(\xi) = \xi$.

证: 否则的话, $\forall\, x \in (-\infty, +\infty)$ 我们有 $f(x) \neq x$. 若 $\exists\, x_0 \in (-\infty, +\infty)$ 使得 $f(x_0) > x_0$ 成立, 则 $\forall\, x \in (-\infty, +\infty)$ 必有 $f(x) > x$. 如若不然存在 x_1 满足 $f(x_1) < x_1 \Rightarrow \exists\, \xi$ 使得 $f(\xi) = \xi$ 成立, 矛盾! 类似地, 若 $f(x_0) < x_0$ 对某个 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ 成立, 必有 $f(x) < x$ 对任何 x 成立.

不失一般性不妨假设 $f(x) > x$. 则

$$f(x) < f(f(x)) = x < f(x),$$

矛盾! 从而说明存在 ξ 满足 $f(\xi) = \xi$. $\square$

性质3.3.21. 假设 $f \in C[a, b]$. 证明

$$m_f(x) := \inf_{a \le y \le b} f(y), \quad M_f(x) := \sup_{a \le y \le x} f(y)$$

在 $[a, b]$ 上都连续.

证: 不失一般性不妨只证明 m_f 是连续的.

(1) m_f **在** a **处右连续**. 观察到 $m_f(a) = f(a)$. $\forall\, \epsilon > 0$, 由于 f 在 a 处右连续, 所以 $\exists\, \delta > 0$ 不等式 $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ 对任何 $a \le x < a + \delta$ 都成立. 因此

$$f(x) > f(a) - \epsilon = m_f(a) - \epsilon.$$

特别地, $\forall\, a \le y \le x < a + \delta$,

$$m_f(a) - \epsilon < f(y) \quad \Longrightarrow \quad m_f(a) - \epsilon \le m_f(x) \le m_f(a).$$

故不等式 $|m_f(x) - m_f(a)| < \epsilon$ 对任何 $a \le x < a + \delta$ 都成立.

(2) m_f **在** b **处左连续**. $f \in C[a, b]$ $\exists\, \xi \in [a, b]$ 满足 $f(\xi) = \min_{[a,b]} f = m_f(b)$. 首先假设 $\xi = b$. $\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0$, 有

$$|f(x) - f(b)| < \epsilon, \quad b - \delta < x < b,$$

推出

$$f(x) < f(b) + \epsilon = m_f(b) + \epsilon, \quad b - \delta < x < b.$$

所以不等式 $m_f(x) \le m_f(b) + \epsilon$ 对任何 $b - \delta < x < b$ 都成立 $\Rightarrow |m_f(x) - m_f(b)| < \epsilon \Rightarrow \lim_{x\to b-} m_f(x) = m_f(b)$.

现在假设 $m_f(b) = f(\xi)$ 对某个 $a \le \xi \le b$ 成立 $\Rightarrow \forall\, x \in (a,b)$, 有

$$m_f(x) = \inf_{[a,x]} f \le f(\xi) = m_f(b) \ge \inf_{[a,b]} f = m_f(b).$$

所以 $m_f(x) = m_f(b) \Rightarrow m_f$ 在 b 处左连续.

(3) m_f **在** (a,b) **内连续**. 证明已经蕴含在 (1) 和 (2) 中. □

例3.3.22. $f \in C[a,b]$, $x_1, \cdots, x_n \in [a,b] \Rightarrow \exists\, \xi \in [a,b]$ 满足

$$f(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{1\le k\le n} f(x_k).$$

证: 因为不等式 $m_f \le f(x_k) \le M_f$ 对任何 $1 \le k \le n$ 都成立 $\Rightarrow m_f \le \frac{1}{n}\sum_{1\le k\le n} f(x_k) \le M_f$. 根据**定理**3.3.18 得到 $\exists\, \xi$ 使得 $f(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{1\le k\le n} f(x_k)$ 成立. □

§3.3.4 一致连续

回顾下函数在一点连续的定义:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta = \delta(x_0, \epsilon) > 0 \text{ 满足} \\ |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \\ \text{只要 } |x - x_0| < \delta \end{pmatrix}$$

我们自然会问:

在定义中可否找到 δ 使得它仅仅依赖于 x_0 本身?

先来考察如下的例子. 令 $f(x) = \sin x$, $x \in (-\infty, +\infty)$. 计算得到

$$|f(x) - f(x_0)| = |\sin x - \sin x_0| = \left|2\sin\frac{x - x_0}{2}\cos\frac{x + x_0}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right|.$$

只要 $|x - x_0| < \delta = \epsilon$ 充分小 (其实只要小于 $\pi/4$ 即可), 有 $|f(x) - f(x_0)| \le |x - x_0| < \epsilon = \delta$. 此时我们只要取 $\delta = \epsilon$.

定义3.3.23. 函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 称为**一致连续的**, 如果 $\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall\, x, y \in I$ 满足 $|x - y| < \delta$, 都有

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

成立.

注3.3.24. (1) 一致连续 $\Longrightarrow$ 连续.

(2) f 在 I 上不是一致连续 $\Longleftrightarrow \exists\, \epsilon_0 > 0, \forall\, \delta > 0, \exists\, x_0, y_0 \in I$ 满足 $|x_0 - y_0| < \delta$, 但是 $|f(x_0) - f(y_0)| \geq \epsilon_0$.

(3) 说函数 f 是一致连续的一定要讲明定义域. 比如函数 $f(x) = 1/x$ 在 $(0, +\infty)$ 上不是一致连续 (见**例**3.3.25 (2)) 但是在 $[1,2]$ 上却一致连续.

例3.3.25. (1) 函数 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是一致连续的.

(2) 函数 $f(x) = 1/x$ 在 $(0, +\infty)$ 上不是一致连续的.

证: $\exists\, \epsilon_0 = 1, \forall\, \delta > 0, \exists\, x_0 = \min\{1/2, \delta\}, y_0 = x_0/2$, 满足 $|y_0 - x_0| = x_0/2 < \delta$ 但是 $|f(x_0) - f(y_0)| = 1/x_0 \geq 2 > 1 = \epsilon_0$. □

(3) 函数 $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上不是一致连续的.

证: 取 $x_n = 1/2n\pi$ 和 $y_n = 1/(2n\pi + \pi/2)$, 得到 $|x_n - y_n| = 1/[2n(4n+1)\pi]$ 但是 $|f(x_n) - f(y_n)| = |0 - 1| = 1$. □

(4) 给定函数 $f : I \to \mathbb{R}$ 和常数 $0 < \alpha \leq 1$. 如果 $\exists\, M > 0$ 满足如下不等式

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^{\alpha}, \quad \forall\, x, y \in I,$$

则称函数 f 是**Hölder 连续的**并记作 $f \in C^{\alpha}(I)$. 证明 $f \in C^{\alpha}(I) \Longrightarrow f$ 是一致连续的.

证: $\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta = (\epsilon/M)^{1/\alpha} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$ 对任何 $|x - y| < \delta$ 都成立. □

定理3.3.26. 假设函数 f, g 在区间 I 上都是一致连续的 $\Rightarrow$

(a) 对任意常数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ 在 I 上是一致连续的.

(b) f, g 在 I 上有界 $\Rightarrow fg$ 在 I 上是一致连续的.

(c) f 在 I 上有界, 且 $\exists\, \epsilon_0 > 0$ 满足 $g \geq \epsilon_0$ 对任意 $x \in I$ 都成立 $\Rightarrow f/g$ 在 I 上实际一致连续的.

证: 请读者自证. □

定理3.3.27. (Cantor) $f \in C[a, b] \Rightarrow f$ 在 $[a, b]$ 上是一致连续的.

证: 否则 $\exists\, \delta_0 > 0, \exists\, \{x_n\}_{n\geq 1}, \{y_n\}_{n\geq 1} \subset [a, b]$, 满足 $x_n - y_n \to 0$ 但是 $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0$. 由于 $\{y_n\}_{n\geq 1}$ 有界, 可以找到收敛子列 $\{y_{n_k}\}_{k\geq 1}$ 满足 $y_{n_k} \to y_0 \in [a, b]$. 取 $x_{n_k} := y_{n_k} + (x_{n_k} - y_{n_k}) \to y_0 + 0 = y_0$ 得到

$$0 < \epsilon_0 \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \to |f(y_0) - f(y_0)| = 0.$$

矛盾表明函数 f 在 $[a, b]$ 上是一致连续的. □

如下定理给出了函数一致连续的其它充要条件.

定理3.3.28. (1) 函数 f 在区间 I 上一致连续 $\Leftrightarrow \forall\,\{x_n\}_{n\ge1},\{y_n\}_{n\ge1}\subset I$ 只要满足 $\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ 都有 $\lim_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=0$ 成立.

(2) **(Paine, 1968)** 函数 f 在区间 I 上一致连续 $\Leftrightarrow \forall\,\epsilon>0,\ \forall\,x,y\in I$, $\exists\,P\in\mathbb{R}$ 满足

$$|f(x)-f(y)|<\epsilon \quad 只要 \quad \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}>P\ (x\ne y).$$

(3) 函数 f 在区间 (a,b) $(-\infty<a<b<+\infty)$ 上一致连续 $\Leftrightarrow \forall$ Cauchy 数列 $\{x_n\}_{n\ge1}\subset(a,b)$, $\{f(x_n)\}_{n\ge1}$ 也是Cauchy 数列.

证: (1) $\Rightarrow$: $\forall\,\epsilon>0$, $\exists\,\delta>0$, 有不等式 $|f(x)-f(y)|<\epsilon$ 成立只要 $|x-y|<\delta$. 对上述 $\epsilon>0$ 和 $\delta>0$, $\exists\,N\in\mathbb{N}$, $\forall\,n>N$, 有 $|x_n-y_n|<\delta\Rightarrow|f(x_n)-f(y_n)|<\epsilon$.

$\Leftarrow$: 否则的话存在两个数列 $\{x_n\}_{n\ge1}$ 和 $\{y_n\}_{n\ge1}$ 满足 $x_n-y_n\to0$, 但是 $|f(x_n)-f(y_n)|\ge\epsilon_0$.

(2) $\Leftarrow$: 任给 $\epsilon>0$, 当 $P\le0$ 时, $|f(x)-f(y)|<\epsilon$ 对任意 $x,y\in I$ 都成立. 当 $P>0$ 时, 取 $\delta=\epsilon/P$.

$\Rightarrow$: 否则的话 $\exists\,\epsilon_0>0$, $\exists\,x_0,y_0\in I$, $\forall\,P\in\mathbb{R}$, 有

$$|f(x_0)-f(y_0)|\ge\epsilon_0,\quad\left|\frac{f(x_0)-f(y_0)}{x_0-y_0}\right|>P.$$

记 $\alpha:=|f(x_0)-f(y_0)|\ge\epsilon_0$. 存在自然数 $k\ge2$ 满足 $(k-1)\epsilon_0\le\alpha<k\epsilon_0$. 令 $\beta:=\alpha/(k-1)\Rightarrow\epsilon_0\le\beta<k\epsilon_0/(k-1)\le2\epsilon_0$. 不失一般性不妨假设 $x_0<y_0$ 且 $f(x_0)<f(y_0)$. 从

$$f(x_0)<f(x_0)+\beta<f(x_0)+\alpha\le f(y_0)$$

得到 $\exists\,x_1\in(x_0,y_0)$ 满足 $f(x_1)=f(x_0)+\beta\Rightarrow$

$$f(x_1)<f(x_1)+\beta=f(x_0)+2\beta\le f(y_0)+2\beta-\alpha.$$

当 $2\beta-\alpha\le0$ 时 (即 $k\ge3$), 得到 $f(x_1)<f(x_n)+\beta\le f(y_0)$. 所以 $\exists\,x_2\in(x_1,y_0)$ 满足 $f(x_2)=f(x_1)+\beta$. 一般情形下 $\forall\,2\le\ell\le jk$, $\exists\,x_{\ell-1}\in(x_{\ell-2},y_0)$ 满足 $f(x_{\ell-1})=f(x_{\ell-2})+\beta$. 定义 $x_k:=y_0$ 推出

$$\begin{aligned}
f(x_k)-f(x_{k-1})&=f(y_0)-[f(x_{k-2})+\beta]=f(x_0)+\alpha-f(x_{k-2})-\beta\\
&=[f(x_0)-f(x_{k-2})]+(\alpha-\beta)=-\sum_{2\le\ell\le k-1}[f(x_{\ell-1})-f(x_{\ell-2})]+(\alpha-\beta)\\
&=(\alpha-\beta)-\sum_{2\le\ell\le k-1}\beta=\alpha-\beta-(k-2)\beta=\alpha-(k-1)\beta=0.
\end{aligned}$$

做为推论得到

$$f(x_\ell)-f(x_\ell-1)=\beta\ (1\le\ell\le k),\quad x_\ell-x_{\ell-2}\ge\delta\ (\exists\,\delta>0).$$

故
$$\left|\frac{f(x_0)-f(y_0)}{x_0-y_0}\right| = \frac{|f(x_0)-f(x_k)|}{|x_0-x_k|} \le \frac{k\beta}{k\delta} = \frac{\beta}{\delta} < \frac{2\epsilon_0}{\delta} = P.$$
发生矛盾!

(3) $\Rightarrow$: 假设函数 f 在 (a,b) 上是一致连续且 $\{x_n\}_{n\ge1}$ 是Cauchy 数列. $\forall\,\epsilon>0, \exists\,\delta>0, \forall\,x,y\in(a,b)$ 满足 $|x-y|<\delta$, 都有 $|f(x)-f(y)|<\epsilon$ 成立. 对这个 $\delta>0, \exists\,N\in\mathbb{N}, \forall\,m,n>N$, 有不等式 $|x_m-x_n|<\delta$ 成立. 因此有 $|f(x_m)-f(x_n)|<\epsilon \Rightarrow \{f(x_n)\}_{n\ge1}$ 也是Cauchy 的.

$\Leftarrow$: 假设函数 f 不是一致连续的. $\exists\,\epsilon_0>0, \exists\,x'_n, y'_n\in(a,b)$ 满足 $|x'_n-y'_n|<1/n$, 但是 $|f(x'_n)-f(y'_n)|\ge\epsilon_0$. 由于 (a,b) 是有界的, 存在 $\{x'_n\}_{n\ge1}$ 的收敛子列 $\{x'_{n_k}\}_{k\ge1}$; 令 $x=\lim_{k\to\infty}x'_{n_k} \Rightarrow x=\lim_{k\to\infty}y'_{n_k}$. 取
$$x_1=x'_{n_1},\ x_2=y'_{n_1},\ x_3=x'_{n_2},\ x_4=y'_{n_2},\ \cdots,\ x_{2k-1}=x'_{n_k},\ x_{2k}=y'_{n_k},\cdots.$$
则得到Cauchy 数列 $\{x_k\}_{k\ge1}$, 但是 $|f(x_{2k-1})-f(x_{2k})|\ge\epsilon_0 \Rightarrow \{f(x_k)\}_{k\ge1}$ 不是Cauchy 数列. □

定义3.3.29. 假设函数 f 在邻域 $U(x_0,\rho)$ 内有定义, 其中 $\rho>0$. 定义
$$\omega_f(x_0,r) := \sup\{|f(x)-f(y)| : x,y\in U(x_0,r)\},\quad 0<r<\rho. \tag{3.3.1}$$
$\forall\,r_1<r_2\in(0,\rho)$, 有
$$0<\omega_f(x_0,r_1)\le\omega_f(x_0,r_2).$$
故可定义
$$\omega_f(x_0) := \lim_{r\to0+}\omega_f(x_0,r). \tag{3.3.2}$$

当函数 f 定义在 $[x_0,x_0+\rho)$ 或 $(x_0-\rho,x_0]$ 内时, 也可以类似定义 $\omega_f(x_0)$. 另一方面 $\omega_f(x_0)$ 可以为 $+\infty$. 比如对函数
$$f(x)=\begin{cases}1/x, & x>0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$
$\omega_f(0)=+\infty$.

例3.3.30. 考察函数
$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x>0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$
显然有 $\omega_f(0)\le2$. 取 $a_n=1/(2n\pi+\pi/2)$ 和 $b_n=1/(2n\pi-\pi/2)$ 得到
$$|f(a_n)-f(b_n)|=|1-(-1)|=2.$$
因此 $\omega_f(0)=2$.

定理3.3.31. (1) 函数 f 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \omega_f(x_0)=0$.

(2) 函数 f 在区间 I 上一致连续 $\Leftrightarrow \lim_{r\to 0+}\omega_f(r)=0$.

证: (1) $\Rightarrow$: $\forall\,\epsilon>0, \exists\,\delta>0, \forall\,x\in U(x_0,\delta)$, 有

$$|f(x)-f(x_0)|<\epsilon/2.$$

$\forall\,0<r\le\delta, \forall\,x,y\in U(x_0,r)$, 得到

$$|f(x)-f(y)|\le|f(x)-f(x_0)|+|f(y)-f(x_0)|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

因此 $\omega_f(x_0,r)\le\epsilon\Rightarrow\omega_f(x_0)=0$.

$\Leftarrow$: 假设 $\omega_f(x_0)=0$. $\forall\,\epsilon>0, \exists\,\delta>0, \forall\,0<r\le\delta$, 有 $\omega_f(x_0,.r)<\epsilon\Rightarrow$ $|f(x)-f(y)|<\epsilon$ 对 $\forall\,x,y\in U(x_0,r)$ 都成立. 特别地 $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$ 对任何 $x\in U(x_0,\delta)$ 都成立.

(2) 根据定义可得. □

注3.3.32. (1) 函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续 $\Leftrightarrow$ 函数 f 在闭区间 $[s,b]$ 上一致连续.

(2) 函数 f 在开区间 (a,b) 上一致连续 $\Rightarrow$ 函数 f 在开区间 (a,b) 上连续. 但是反之则不一定成立.

接下来我们给出连续函数在开区间上一致连续的充要条件.

定理3.3.33. 给定连续函数 $f\in C(a,b)\Rightarrow$ 函数 f 在 (a,b) 上一致连续当且仅当极限 $\lim_{x\to a+}f(x)$ 和 $\lim_{x\to b-}f(x)$ 都存在.

证: $\Rightarrow$: 根据**定理**3.1.16.

$\Leftarrow$: 令 $A:=\lim_{x\to a+}f(x)$ 和 $B:=\lim_{x\to b-}f(x)$. 定义

$$F(x):=\begin{cases} A, & x=a,\\ f(x), & a<x<b,\\ B, & x=b.\end{cases}$$

则 $F\in C[a,b]\Rightarrow F$ 是一致连续的 $\Rightarrow f$ 在 (a,b) 上一致连续. □

注3.3.34. (1) 连续 + 有界 $\not\Rightarrow$ 一致连续: 函数 $f(x)=\sin(x^2)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且有界. $\exists\,\epsilon_0=1/2, \forall\,\delta>0, \exists\,n_0\in\mathbb{N}$ 满足 $\frac{1}{\sqrt{n_0}}<\delta$, $\exists x_1=\sqrt{2n_0\pi}$, $x_2=\sqrt{2n_0\pi+\frac{\pi}{2}}$, 使得

$$0<x_2-x_1=\frac{\pi}{2}(x_2+x_1)^{-1}\le\frac{\pi}{2}(2x_1)^{-1}=\frac{\pi}{4}x_1^{-1}<\frac{1}{\sqrt{2n_0\pi}}<\frac{1}{\sqrt{n_0}}<\delta$$

和

$$|f(x_2)-f(x_1)|=\sin\left[(2n_0+1)\frac{\pi}{2}\right]-\sin(2n_0\pi)=1>\epsilon_0$$

成立.

(2) 闭区间 $[a,b]$ 上连续 $\Rightarrow$ 闭区间 $[a,b]$ 上一致连续.

(3) f,g 一致连续 $\nRightarrow$ fg 一致连续: $f(x)=x, g(x)=\sin x, x\in(-\infty,+\infty)$.

(4) f 一致连续且 f^{-1} 存在 $\nRightarrow$ f^{-1} 一致连续: $f(x)=\ln x$, $x\in[a,+\infty)$, $a>0$.

(5) $f\in C[a,+\infty)$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=A<\infty \Rightarrow$ 函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续. 一般地, $f\in C(-\infty,+\infty)$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=B\Rightarrow$ 函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

证: $\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Rightarrow\forall\,\epsilon>0,\exists\,M>a,\forall\,x,y\geq M$, 有 $|f(x)-f(y)|<\epsilon$ 成立. 因为 $f\in C[a,M+1]\Rightarrow f$ 在 $[a,M+1]$ 上一致连续 $\Rightarrow\forall\,\epsilon>0$, $\exists\,\delta_1>0$, $\forall\,x,y\in[a,M+1]$ 满足 $|x-y|<\delta_1$, 有 $|f(x)-f(y)|<\epsilon$ 成立. 令 $\delta=\min\{1,\delta_1\}$, $\forall\,x,y>a$ 满足 $|x-y|<\delta\Rightarrow x,y\in[a,M+1]$ 或者 $x,y\in[M,+\infty)\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\epsilon$. □

很多参考书上都是采用这样的证明, 还特意强调不能用函数 f 在闭区间 $[a,M]$ 上一致连续来证明. 人云亦云, 害人不浅! 其实可以这样去做, 请读者思考 (实在想不出来可参考 [3], 第一册, 例 2.5.10)

(6) 假设函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, $\varphi\in C[a,+\infty)$, 且 $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\varphi(x)]=0\Rightarrow\varphi$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

证: $\forall\,\epsilon,\exists\,M>0,\forall\,x>M$, 有 $|f(x)-\varphi(x)|<\epsilon$ 成立. f 一致连续 $\Rightarrow$ $\forall\,\epsilon>0,\exists\,\delta_1>0,\forall\,x,y>a$ 满足 $|x-y|<\delta_1$, 有不等式 $|f(x)-f(y)|<\epsilon$ 成立 $\Rightarrow$ 对任何 $\forall\,x,y>M$ 满足 $|x-y|<\delta_1$ 都有

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\leq|f(x)-\varphi(x)|+|f(y)-\varphi(y)|+|f(x)-f(y)|<\epsilon+\epsilon+\epsilon=3\epsilon.$$

在 $[a,M+1]$ 上应用Cantor 定理 $\Rightarrow\varphi$ 在 $[a,M+1]$ 上一致连续. $\forall\,\epsilon>0,\exists\,\delta_2>0$, $\forall\,x,y\in[a,M+1]$ 满足 $|x-y|<\delta_2$, 有 $|\varphi(x)-\varphi(y)|<\epsilon$ 成立. 取 $\delta=\min\{1,\delta_1,\delta_2\}$, $\forall\,x,y\geq a$ 满足 $|x-y|<\delta$, 有 $x,y\in[M,+\infty$ 或 $[a,M+1]\Rightarrow$ $|\varphi(zx)-\varphi(y)|<3\epsilon$. □

(7) 函数 $f(x)=x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续, 但是其平方 $f^2(x)=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是一致连续的:

$$\left|(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2\right|=1,\quad|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}|=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\to0.$$

(8) 函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续 $\Rightarrow\exists\,a,b\geq0$ 使得 $|f(x)|\leq a|x|+b$ 对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都成立.

证: $\forall\,\epsilon>0,\exists\,\delta>0,\forall\,x,y\in(-\infty,+\infty)$ 满足 $|x-y|<\delta$ 都有不等式 $|f(x)-f(y)|<\epsilon$ 成立. 固定上述 $\epsilon,\delta>0$, $\forall\,x\in(-\infty,+\infty)$, $\exists\,n\in\mathbb{Z}$ 和 $x_0\in(-\delta,\delta)$ 使得 $x=n\delta+x_0$ 成立. 故 $\exists\,M>0$ 使得 $|f(x)|\leq M$ 对任何 $x\in[-\delta,\delta]$ 都成立. 根据

$$f(x)=\sum_{1\leq k\leq|n|}\{f(k\delta+x_0)-f[(k-1)\delta+x_0]\}+f(x_0)$$

$$|f(x)| \le \sum_{1\le k\le |n|} |f(k\delta+x_0)-f[(k-1)\delta+x_0]| + |f(x_0)| \le |n|\epsilon + M$$

$$= \frac{\epsilon}{\delta}|x-x_0| + M \le \frac{\epsilon}{\delta}|x| + \left(M+\frac{\epsilon}{\delta}|x_0|\right) \le \frac{\epsilon}{\delta}|x| + (M+\epsilon). \quad \square$$

例3.3.35. 证明函数

$$f(x) = \begin{cases} |x|\left(2+\sin\frac{1}{x}\right), & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$$

一致连续. $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(2x+1)] = \lim_{x\to-\infty}[f(x)+(2x+1)] = 0$ 并结合注3.3.34 (6) 得到结论.

根据**注**3.3.34 中的想法, 可以证明如果函数 f 在 $(-\infty,1]$ 和 $[-1,+\infty)$ 上都是一致连续则函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上也是一致连续. 请读者自证.

§3.4 参考文献

1. Ramankutty, P.; Vamanamurthy, M. K. *Limit of the composite of two functions*, Amer. Math. Monthly, **82**(1975), 63 - 64.

2. 谭琳 著: **Γ 函数札记**, 浙江大学出版社, 1997.

3. 徐森林, 薛春华编著: **数学分析**, 清华出版社, 2005.

4. 张福保, 薛金美, 潮小李 主编: **数学分析讲义**, 科学出版社, 2019.

5. 梅加强 编著: **数学分析**, 高等教育出版社, 2015.

6. 邓建平 编: **微积分 I 和 II**, 科学出版社, 2019.

7. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis I*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+574 pp. ISBN: 3-540-40386-8

8. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis II*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xvi+681 pp. ISBN: 3-540-40633-6

9. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis I*, Translated from the 1988 German original by Gary Brookfield, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. xiv+426 pp. ISBN: 3-7643-7153-6

10. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis II*, Translated from the 1999 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. xii+400 pp. ISBN: 978-3-7643-7472-3; 3-7643-7472-3

11. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis III*, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. xii+468 pp. ISBN: 978-3-7643-7479-2; 3-7643-7479-2

12. 汪林 著: **数学分析中的问题和反例**, 现代数学基础 **56**, 高等教育出版社, 2015.

13. 裴礼文 编著: **数学分析中的典型问题与方法** (第二版), 高等教育出版社, 2015.

14. 朱尧辰 编著: **数学分析例选通过范例学技巧**, 哈尔滨工业大学出版社, 2013.

15. 周民强 编著: **数学分析习题演练** (第一、二、三册), 科学出版社, 2018.

16. 吉米多维奇 著 (李荣涑, 李植 译): **数学分析习题集** (根据 2010 年俄文版翻译), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.

第四章　导数理论

左边写个微分, 右边写个导数, 不要忘记Taylor, 你的心会痛痛 —《野狼 disco》改编

§4.1　微分和导数

给定函数 f 和其定义域中的点 a, 一个很自然的问题是当 $x \to a$ 如何用已知的函数值 $f(a)$ 来 (近似地) 计算未知的函数值 $f(x)$. 比如考察如下的例子:

$$f(x) = x^2.$$

令 $\Delta x := x - a$ 得到

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a+\Delta x) = (a+\Delta x)^2 \\ &= a^2 + 2a\Delta x + (\Delta x)^2 = f(a) + 2a(x-a) + (x-a)^2. \end{aligned}$$

因为

$$\frac{f(x) - f(a) - 2a(x-a)}{x-a} = \frac{(x-a)^2}{x-a} = x - a \to 0$$

所以当 $x \to a$ 时得到

$$f(x) = f(a) + 2a(x-a) + o(x-a).$$

§4.1.1　微分

由此我们引入如下定义.

定义4.1.1. *假设函数 f 定义在某个邻域 $U(x_0, r)$ 内. 称f* **在 x_0 处可微** *如果存在常数 A (不依赖 x) 使得*

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$$

当 $x \to x_0$ 时成立. 线性函数 $A(x - x_0)$ 称为f **在 x_0 处的微分**.

记号:
(a) $\Delta x := x - x_0$.
(b) $\Delta y \equiv \Delta f := f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
(c) $df(x) := A(x - x_0)$ 或者 $dy \equiv df := A\Delta x$.

例4.1.2. *(1) 函数 $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}_+$, 在每点 $x \in (-\infty, +\infty)$ 处都可微且 $dy = nx^{n-1}\Delta x$.*

(2) 函数 $f(x) = |x|$ 只在 $x = 0$ 处不可微.

证: (1) $x \in \mathbb{R}$, 从下列计算

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^n - x^n$$

$$= nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n = nx^{n-1}\Delta x + o(\Delta x)$$

得到 $\Delta y = nx^{n-1}\Delta x$.

(2) 若 $x \neq 0$ 则根据 (1) 知道函数 $f(x)$ 在 x 处可微. 若 $x = 0$ 得到

$$\Delta y = f(0+\Delta x) - f(0) = |\Delta x|.$$

如果 $\Delta x > 0$, 则 $\Delta y = \Delta x$; 如果 $\Delta x < 0$, 则 $\Delta y = -\Delta x$. 故不存在常数 A 使得 $\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x)$ 成立. □

注4.1.3. (1) 对函数 $f(x) = x$ 得到

$$dx = dy = \Delta x \quad \Longrightarrow \quad \text{一般地把微分记作 } dy = Adx \text{ Leibniz 记号}$$

(2) 函数 f 在 x_0 处可微 $\Longrightarrow$ 函数 f 在 x_0 处连续. 但反之则不对, 譬如例4.1.2 (2).

(3) 给定点 $x_1, \cdots, x_n \Longrightarrow$ 存在函数只在 $x_1, \cdots, x_n$ 处不可微. 比如,

$$f(x) = \sum_{1 \le k \le n} |x - x_k|.$$

(4) 存在函数只在 $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ 处可微但在 $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ 处不可微. 比如

$$f(x) = \sum_{n \ge 1} \frac{|x - r_n|}{3^n}$$

其中 $\{r_n\} = [0,1] \cap \mathbb{Q}$.

(5) **(Weierstrass)** 存在函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处不可微.

$$f(x) = \sum_{n \ge 0} b^n \cos(a^n \pi x),$$

这里 $0 < b < 1$, $a > 0$ 为奇数, 且满足 $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

(6) **(Carathéodory)** 可微的等价定义:

$$\text{函数 } f \text{在 } x_0 \text{ 可微} \Longleftrightarrow \exists \text{函数 } g \text{在 } x_0 \text{处连续且 } f(x) = f(x_0) + g(x)(x - x_0).$$

证: $\Rightarrow$: $\exists\, A$ 满足

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0).$$

由此定义

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A + \frac{o(x-x_0)}{x-x_0}, & x \neq x_0, \\ A, & x = x_0. \end{cases}$$

因为 $\lim_{x\to x_0} g(x) = A = g(x_0)$, 函数 g 在 x_0 处连续.

$\Leftarrow$: 假设 $\exists\, g$ 使得 g 在 x_0 处连续且 $f(x) = f(x_0) + g(x)(x - x_0)$. 令 $A := g(x_0)$ 得到

$$\frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{x - x_0} = g(x) - g(x_0) \to 0$$

当 $x \to x_0$ 时. □

§4.1.2 导数

假设函数 f 在 x_0 处可微. 则

$$A = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + o(1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} + o(1).$$

令 $x \to x_0$ 得到

$$A = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

定义4.1.4. 假设函数 f 定义在邻域 $U(x_0, r)$ 内. 称 f **在 x_0 处可导**若极限

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0) \tag{4.1.1}$$

存在. 该极限 $f'(x_0)$ 称为 f **在 x_0 处的导数**.

定理4.1.5. 函数 f 在 x_0 处可微 $\Longleftrightarrow$ 函数 f 在 x_0 处可导.

例4.1.6. (1) 考察函数

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

其中 $n \in \mathbb{N}_+$. 证明 (a) $n \geq 1 \Rightarrow f \in C(-\infty, +\infty)$. (b) $n \geq 2 \Rightarrow f$ 在 $x = 0$ 处可导. (c) $n \geq 3 \Rightarrow f'$ 在 $x = 0$ 处连续.

证: $n \geq 1$ d 得到

$$\lim_{x\to 0} x^n \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\left(x \sin\frac{1}{x}\right)(x^{n-1}) = 0.$$

$n \geq 2$ 得到

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} (\Delta x)^{n-1} \sin\frac{1}{\Delta x} = 0.$$

$n \geq 3$ 得到

$$f'(x) = nx^{n-1} \sin\frac{1}{x} - x^{n-2} \cos\frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

$\lim_{x\to 0} f'(x) = 0 - \lim_{x\to 0} x^{n-2}\cos(1/x) = 0$. □

(2) 给定区间 I. 如果函数 f 在 I 内处处可导, 记作 $f \in D(I)$. 如果函数 $f \in D(I)$ 的导函数 f' 在 I 内处处连续, 记作 $f \in C^1(I)$. 根据 (1) 得到下列关系

$$C(I) \supsetneqq D(I) \supsetneqq C^1(I). \tag{4.1.2}$$

(3) 假设函数 f 在 x_0 处可导 $\Rightarrow$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x} = f'(x_0).$$

进一步, 对任何 $\alpha \neq \beta$ 有

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\alpha\Delta x) - f(x_0+\beta\Delta x)}{(\alpha-\beta)\Delta x} = f'(x_0).$$

证: 计算得到

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{2\Delta x} + \frac{f(x_0-\Delta x) - f(x_0)}{-2\Delta x}$$

$$\to \frac{f'(x_0)}{2} + \frac{f'(x_0)}{2} = f'(x_0).$$

若 α, β 中有一个为 0, 则结论显然成立. 下面假设 $\alpha, \beta \neq 0$. 和上面计算类似可得到

$$\frac{f(x_0+\alpha\Delta x) - f(x_0+\beta\Delta x)}{(\alpha-\beta)\Delta x} = \frac{f(x_0+\alpha\Delta x) - f(x_0)}{\alpha\Delta x}\frac{\alpha}{\alpha-\beta}$$

$$+ \frac{f(x_0+\beta\Delta x) - f(x_0)}{\beta\beta\Delta x}\frac{-\beta}{\alpha-\beta} \to f'(x_0)\frac{\alpha}{\alpha-\beta} + f'(x_0)\frac{-\beta}{\alpha-\beta} = f'(x_0). \quad \square$$

(4) (3) 的反命题不一定成立, 不如考察函数 $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$.

(5) 如果函数 f 在 x_0 处可导, 且存在数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$, $\{b_n\}_{n\geq 1}$ 满足

$$a_n < x_0 < b_n, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = x_0 = \lim_{n\to\infty} b_n,$$

则

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}.$$

证: 计算得到

$$I_n := \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = \frac{b_n - x_0}{b_n - a_n}\frac{f(b_n) - f(x_0)}{b_n - x_0} + \frac{x - a_n}{b_n - a_n}\frac{f(a_n) - f(x_0)}{a_n - x_0}.$$

引入记号

$$\lambda_n := \frac{b_n - x_0}{b_n - a_n}, \quad \mu_n := \frac{x_0 - a_n}{b_n - a_n}, \quad 0 \leq \lambda_n, \mu_n \leq 1, \ \lambda_n + \mu_n = 1.$$

从而有

$$|I_n - f'(x_0)| = \left|\lambda_n \frac{f(b_n)-f(x_0)}{b_n-x_0} + \mu_n \frac{f(x_n)-f(x_0)}{a_n-x_0} - (\lambda_n+\mu_n)f'(x_0)\right|$$

$$\leq \lambda_n \left|\frac{f(b_n)-f(x_0)}{b_n-x_0} - f'(x_0)\right| + \mu_n \left|\frac{f(a_n)-f(x_0)}{a_n-x_0} - f'(x_0)\right| \to 0. \ \square$$

(6) 在 (5) 中条件 “$a_n < x_0 < b_n$” 是必须的. 比如考察函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

例4.1.6 (1) 已经告诉我们 $f'(0) = 0$. 但是若取 $a_n = 2/[(4n+1)\pi]$ 和 $b_n = 2/4n\pi$, 得到 $0 < a_n < b_n$ 但是

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{16n^2\pi^2}\cdot 0 - \frac{4}{(4n+1)^2\pi^2}\cdot 1}{\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{4n} - \frac{1}{4n+1}\right)} = -\frac{2}{\pi} \neq 0 = f'(0).$$

(7) 如果 $f'(0)$ 存在, 且存在数列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$, $\{y_n\}_{n\geq 1}$ 满足条件

$$0 < x_n < y_n, \quad y_n \to 0, \quad \frac{y_n}{y_n - x_n}$$

则

$$f'(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}.$$

证: 和 (5) 证明几乎一样. $\square$

(8) 证明Riemann 函数

$$R(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0,1)\setminus\mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in (0,1)\cap\mathbb{Q}\ ((p,q)=1). \end{cases}$$

在 $x \in (0,1)\setminus\mathbb{Q}$ 连续但不可导.

证: 连续性之前已证明. 下证第二个论断. $\forall\, x_0 \in (0,1)\setminus\mathbb{Q}$, $\exists\, \{h_n\}_{n\geq 1} \to 0$ 使得 $x_0 + h \in (0,1)\setminus\mathbb{Q}$ 成立. 比如, 若记 $x_0 = 0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$, 则可取 $h_n = 0.a_1a_2\cdots a_n - x_0$. 令 N 为最小正整数满足 $a_N \neq 0$.

$$f(x_0+h_n) = f(0,a_1\cdots a_n) \geq \frac{1}{10^n}\ (n \geq N), \quad |h_n| \leq \frac{1}{10^n}$$

$$\left|\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}\right| = \left|\frac{f(x_0+h_n)}{h_n}\right| \geq 1. \ \square$$

(9) $f \in D([a,+\infty))$, $f(a) = 0$, 且 $f'(x) \geq -f(x)$ $(x \in [a,+\infty)) \Rightarrow f(x) \geq 0$ 对任何 $x \in [a,+\infty)$ 成立.

证: 否则存在 $x_0 > a$ 满足 $f(x_0) < 0$. 根据闭区间上连续函数必有最小值, 得到

$$f(t) = \min_{[a,x_0]} f, \quad \exists\, t \in [a,x_0].$$

因为 $f(a)=0$, 必有 $a<t\le x_0$ 且 $f(t)<0$. 因为 $f'(t)>0$, $\exists h>0$ 使得不等式 $0<[f(t-h)-f(t)]/-h$ 成立, 即 $f(t-h)<f(t)$, 这是不可能的! □

(10) 根据行列式定义及第二节中的Leibniz 法则得到

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{in}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{1\le i\le n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{i1}(x) & f'_{i2}(x) & \cdots & f'_{in}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

§4.1.3 线性逼近

考虑曲线 $y=f(x)$ 和其上的点 $P=(x_0,y_0)$. 任取曲线上点 $Q=(x,y)$, 得到直线 PQ 方程

$$y-y_0=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0).$$

当 $Q\to P$ 沿着曲线得到 P 处的**切线**方程

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0). \tag{4.1.3}$$

此时过 P 的**法线**方程为

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0),\quad 若\ f'(x_0)\neq 0, \tag{4.1.4}$$

或者 $x=x_0$, 若 $f'(x_0)=0$.

§4.1.4 单侧导数

因为导数 $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]/(x-x_0)$ 是函数极限的一种特殊情况, 所以可以引入单侧导数之概念.

定义4.1.7. 假设函数 f 定义在区间 $[x_0,x_0+r)$ 内. 函数 f 在 x_0 处的**右导数**定义为

$$f'_+(x_0):=\lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \tag{4.1.5}$$

类似地对定义在区间 $(x_0-r,x_0]$ 内的函数 f 可以定义其在 x_0 处的**左导数**:

$$f'_-(x_0):=\lim_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \tag{4.1.6}$$

例4.1.8. (1) 对函数 $f(x)=|x|$ 求 $f'_+(0)$ 和 $f'_-(0)$.

解: 因为

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+}\frac{x-0}{x} = 1, \\ f'_-(0) &= \lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-}\frac{-x-0}{x} = -1, \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 处不存在导数. □

(2) 对函数 $f(x)=|\ln|x||, x\neq 0$, 求 $f'_+(1)$ 和 $f'_-(1)$.

解: 根据 $f(1)=|\ln 1|=0$, 得到

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{|\ln x|}{x-1}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{|\ln(1+\Delta x)|}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0+}\left|\ln\left[(1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}\right]\right| = \ln e = 1.$$

类似地得到 $f'_-(1)=-1$. □

注4.1.9. (1) 函数 f 在 x_0 处可导 $\Leftrightarrow f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$ 存在.

(2) 函数 f 在 x_0 处可导$\not\Leftarrow$ 其绝对值 $|f|$ 在 x_0 处连续.

(3) 可以定义函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 甚至一般区间 I 上的可导性. 对内部点 $x_0\in I$, $f'(x_0)$ 是通常意义下的导数, 对端点 $x_0\in I$, $f'(x_0)$ 定义为左导数或右导数.

(4) 假设 $f\in D((a,b))$.

(a) $\lim_{x\to a+}f(x)=\infty \not\Rightarrow \lim_{x\to a+}f'(x)=\infty$. 比如

$$f(x):=\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x},\quad 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

(b) $\lim_{x\to a+}f'(x)=\infty \not\Rightarrow \lim_{x\to a+}f(x)=\infty$. 比如

$$f(x)=x^{1/3},\quad 0<x<1.$$

(5) 假设 $f\in D((a,+\infty))$.

(a) $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 存在$\not\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在. 比如

$$f(x)=\frac{\sin(x^2)}{x},\quad x>0.$$

(b) $\lim_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在$\not\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)$ 存在. 比如

$$f(x)=\cos(\ln x),\quad x>0.$$

(c) $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 和 $\lim_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在 $\Rightarrow \lim_{xc\to+\infty}f'(x)=0$. 这个需要微分中值定理来证明.

证: 令 $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=A$. $\exists\, x_0>a, \forall\, x>x_0$, 有 $|f'(x)|\geq |A|/2$. 根据微分中值定理 $\exists\,\xi\in(x_0,x)$

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|=|f'(\xi)|\geq\frac{|A|}{2}.$$

由于 $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 故 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$. 因此 $A=0$. □

例4.1.10. 假设 $f \in C((-\infty, +\infty))$, 且对 $\forall\, x \in \mathbb{R}$, 有

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h} = 0.$$

证明右侧导数 $f'_+(x)$ 存在且 f 为常值函数.

证: $\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall\, 0 < h < \delta$, 有

$$\left| \frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h} \right| < \epsilon.$$

对一般的 $k \in \mathbb{N}$ 得到

$$\left| \frac{f(x+2^{-k}h) - f(x+2^{-k-1}h)}{2^{-k-1}h} \right| < \epsilon.$$

因为函数 f 连续, 故得到

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \lim_{n \to \infty} \sum_{0 \le k \le n} \left[f\left(x + \frac{h}{2^k}\right) - f\left(x + \frac{h}{2^{k+1}}\right) \right] \\ &= \sum_{k \ge 0} \left[f\left(x + \frac{h}{2^k}\right) - f\left(x + \frac{h}{2^{k+1}}\right) \right]. \end{aligned}$$

从而

$$|f(x+h) - f(x)| \le \sum_{k \ge 0} \frac{h\epsilon}{2^{k+1}} = h\epsilon.$$

这表明右侧导数 $f'_+(x)$ 存在且 $f'_+(x) = 0$. 接下来证明函数的导数均为 0. $\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall\, 0 < h < \delta$,

$$|f(x+h) - f(x)| < h\epsilon.$$

$\forall\, a < b, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ (b-a)/n_0 < \delta$

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| \le &\left| f(b) - f\left(a + \frac{b-a}{n_0}\right) \right| + \left| f\left(a + \frac{b-a}{n_0}\right) - f\left(a + 2\frac{b-a}{n_0}\right) \right| \\ &+ \cdots + \left| f\left(a + (n_0-1)\frac{b-a}{n_0}\right) - f(b) \right| \le \left(\frac{b-a}{n_0}\epsilon\right) n_0 = (b-a)\epsilon. \end{aligned}$$

由于 ϵ 的任意性得到 $f(b) = f(a)$. $\square$

例4.1.11. 若 $|f(x) - f(x_0)| \le L|x - x_0|^a$, 其中 $a > 1$ 和 $L > 0$, 证明 $f'(x_0) = 0$.

证: 根据条件得到

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - 0 \right| \le L|x - x_0|^{a-1}.$$

当 $x \to x_0$ 时, 由于 $a > 1$, 得到 $f'(x_0) = 0$. $\square$

§4.2 求导法则

以下基本初等函数的导数容易求得:

(1) (常值函数)$' = 0$.

(2) $(x^n)' = nx^{n-1}$, 其中 $n \in \mathbb{N}_+$, $x \in \mathbb{R}$.

(3) $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, 其中 $x \in \mathbb{R}$. 事实上

$$\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = 2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \to \cos x,$$

$$\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x} = -2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \to -\sin x$$

当 $\Delta x \to 0$ 时.

(4) $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$, 其中 $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$. 特别地, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$. 事实上

$$\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x} = \frac{\ln(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} = \frac{1}{x}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right] \to \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}$$

当 $\Delta x \to 0$ 时. 根据 $\log_a x = \ln x / \ln a$ 可得到一般对数函数的导数.

(5) $(a^x)' = a^x \ln a$, 其中 $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. 特别地 $(e^x)' = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. 事实上根据

$$\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = \frac{e^{\ln a\Delta x}-1}{\Delta x} \to \ln a, \quad \Delta x \to 0,$$

得到

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

(6) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, 其中 $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$. 事实上

$$(x^\alpha)' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = x^{\alpha-1}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{(1+\frac{\Delta x}{x})^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = x^{\alpha-1}\alpha.$$

§4.2.1 算术运算

最基本的算术运算是导数的四则运算.

性质4.2.1. (1) $f, g \in D(I)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g \in D(I)$ 且

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'. \tag{4.2.1}$$

(2) $f, g \in D(I) \Rightarrow fg \in D(I)$ 且

$$(fg)' = f'g + fg'. \tag{4.2.2}$$

(3) $f, g \in D(I), g \neq 0$ 在 I 内 $\Rightarrow f/g \in D(I)$ 且

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{f'}{g} - \frac{f}{g}\frac{g'}{g}. \tag{4.2.3}$$

证: (1) 根据定义

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[\alpha f(x+\Delta) + \beta g(x+\Delta x)] - [\alpha f(x) + \beta g(x)]}{\Delta x}$$

$$= \alpha \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \beta \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \quad = \alpha f'(x) + \beta g'(x).$$

(2) 根据定义

$$(fg)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x+\Delta x) \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x) \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

$$= f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

(3) 根据定义

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)f(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x)g(x+\Delta x)\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{g(x)(f(x+\Delta x) - f(x)) - f(x)(g(x+\Delta x) - g(x))}{g(x)g(x+\Delta x)\Delta x} \right]$$

$$= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}. \quad \square$$

注4.2.2. (1) 一般地对任意可导函数 $f_1, \cdots, f_n$ 和常数 $c_1, \cdots, c_n$, 有

$$\left(\sum_{1 \le k \le n} c_k f_k \right)' = \sum_{1 \le k \le n} c_k f_k',$$

和

$$\left(\prod_{1 \le k \le n} f_k \right)' = \sum_{1 \le k \le n} f_1 \cdots f_{k-1} f_k' f_{k+1} \cdots f_n = \left(\prod_{1 \le k \le n} f_k \right) \sum_{1 \le i \le n} \frac{f_i'}{f_i}.$$

(2) 微分的四则运算可根据相应导数的四则运算得到

$$d(\alpha f + \beta g) = \alpha df + \beta dg, \quad d(fg) = fdg + gdf, \quad d(f/g) = \frac{gdf - fdg}{g^2}.$$

(3) 给定区间 I 定义映射

$$\mathbf{L} : \mathscr{X} = \{I \text{ 上的可导函数}\} \longrightarrow \mathscr{Y} = \{I \text{ 上的函数}\}, \quad f \longmapsto f'.$$

根据导数的四则运算得到

$$\mathbf{L}(fg) = f\mathbf{L}(g) + g\mathbf{L}(f), \quad \mathbf{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathbf{L}(f) + \beta\mathbf{L}(g).$$

满足上述两个条件的映射 $\mathbf{L}$ 称为**导子**. 仅通过这两个条件有

$$\mathbf{L}(1) = \mathbf{L}(1 \cdot 1) = 2\mathbf{L}(1) \Longrightarrow \mathbf{L}(1) = 0$$

从而对任何常数 c 得到 $\mathbf{L}(c) = \mathbf{L}(c \cdot 1) = c\mathbf{L}(1) = 0$.

导子是一种 1 阶线性微分算子, 可推广到所谓微分流形上. 至于流形上高阶线性微分算子甚至高阶微分算子的引入需要向量丛的概念, 这在之后的章节中会给出详细定义.

§4.2.2 反函数的求导

函数 $y = f(x) = x^2, x > 0$, 的反函数为 $x = f^{-1}(y) = g(y) = y^{1/2}, y > 0$. 把变量 y 换成变量 x (按照一般函数的写法) 得到 $g'(x) = 1/2x^{1/2}$.

定理4.2.3. 假设 $f \in D((a,b))$, 严格单调, 且 $f'(x_0) \neq 0$, 其中 $x_0 \in (a,b)$. 则其反函数 $x = g(y) = f^{-1}(y)$ 在 (α,β) 内可导且

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{4.2.4}$$

这里 $y_0 = f(x_0)$, $\alpha = \min\{f(a+), f(b-)\}$ 且 $\beta = \max\{f(a+), f(b-)\}$.

证: 不妨假设函数 f 严格单调递增. 根据函数 f 的连续性得到 $f^{-1} \in C((\alpha,\beta))$ 且也是严格单调递增. 从

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \neq 0 \Longleftrightarrow \Delta x = f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)$$

推出 $\Delta y \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0$. 故得到

$$\begin{aligned} g'(y_0) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad \square \end{aligned}$$

例4.2.4. (1) 求 $(\arcsin x)'$, $(\arccos x)'$, $(\arctan x)'$, 和 $(\mathrm{arccot}\, x)'$.

解: $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$.

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\cos x_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x_0}}, \quad -\frac{\pi}{2} < x_0 < \frac{\pi}{2}.$$

故

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad |x| < 1. \tag{4.2.5}$$

类似地,

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \ (|x|<1), \tag{4.2.6}$$

和

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}. \tag{4.2.7}$$

(2) 求 $(\cot x)'$ 和 $(\csc x)'$.

解: 根据定义得到

$$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = -\csc^2 x, \quad (\csc x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\cot x \csc x. \tag{4.2.8}$$

注4.2.5. (1) 假设函数 f 在 x_0 处可微, 且函数 g 在 x_0 处可微. 则 fg 在 x_0 处可微.

(2) 假设函数 f 在 x_0 处可微, 但函数 g 在 x_0 处不可微. 则 fg 可能在 x_0 处可微也可能不可微. 比如, 取 $f(x)=x$, $g(x)=|x|$, $x_0=0$, 得到 fg 在 $x_0=0$ 可微; 取 $f(x)=x$, $g(x)=\operatorname{sgn}(x)$, $x_0=0$, 得到 fg 在 x_0 处不可微.

(3) 假设函数 f 在 x_0 处不可微, 且函数 g 在 x_0 处也不可微. 则 fg 可能在 x_0 处可微也可能不可微. 比如, 取 $f(x)=g(x)=|x|$, $x_0=0$, 得到 fg 在 $x_0=0$ 可微; 取 $f(x)=g(x)=|x|^{1/2}$, $x_0=0$, 得到 fg 在 x_0 处不可微.

§4.2.3 链式法则

链式法则告诉我们如何求复合函数 $f(g(x))$ 的导数.

定理4.2.6. (链式法则) 假设函数 $u=g(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导且函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0:=g(x_0)$ 处可导. 则复合函数 $(f\circ g)(x)=f[g(x)]$ 在 $x=x_0$ 处可导且

$$(f\circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0). \tag{4.2.9}$$

证: 根据定义得到

$$(f\circ g)'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(g(x_0+\Delta x))-f(g(x_0))}{\Delta x}$$

其中

$$g(x_0+\Delta x) = g(x_0)+g'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$$

和

$$f(g(x_0+\Delta x)) = f(g(x_0))+f'(u_0)\Delta u+o(\Delta u)$$

这里 $\Delta u = g(x_0+\Delta x)-g(x_0)$. 从而得到

$$\begin{aligned} f(g(x_0+\Delta x))-f(g(x_0)) &= f'(g(x_0))\Delta u+o(\Delta u) \\ &= f'(g(x_0))[g(x_0+\Delta x)-g(x_0)]+o(\Delta u) \end{aligned}$$

$$= f'(g(x_0))[g'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)] + o(g'(x_0)\Delta x + o(\Delta x))$$

$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f'(g(x_0))(g'(x_0) + o(1)) + o(1)\right] = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

这是因为 $o(\Delta x)/\Delta x \to 0$ 且 $o(o(\Delta x))/\Delta x \to 0$, 当 $\Delta x \to 0$ 时. □

注4.2.7. (1) 微分的链式法则可类似得到:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}, \quad d(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)dx. \tag{4.2.10}$$

(2) 三个函数构成的复合函数之导数为

$$(f(g(h(x))))' = f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x).$$

(3)**一阶微分的不变性**.

$$\text{函数 } y = f(u) \text{ 可导} \Longrightarrow dy = df(u) = f'(u)du$$

当 $u = g(x)$ 可导时, $du = g'(x)dx$ 从而

$$d[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)dx = f'(g(x))du = f'(u)du.$$

无论 u 是自变量还是关于 x 的函数, 微分形式 $dy = f'(u)du$ 保持不变.

(4) 假设 $u, v \in D(I)$, $u > 0$. 求 $f(x) = [u(x)]^{v(x)}$. 事实上若令

$$f(x) = e^{v(x)\ln u(x)}$$

得到

$$\begin{aligned} df'(x) &= e^{v(x)\ln u(x)}\left[v'(x)\ln u(x) + \frac{v(x)u'(x)}{u(x)}\right] \\ &= [u(x)]^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right]. \end{aligned}$$

(5) **双曲函数**定义为

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}. \tag{4.2.11}$$

计算得到

$$(\sinh x)' = \cosh x, (\cosh x)' = \sinh x, (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}, (\coth x)' = \frac{-1}{\sinh^2 x}. \tag{4.2.12}$$

(6) **对数导数**. 假设 $f \in D(I)$ 且 $f \neq 0$, 则

$$f'(x) = f(x)\frac{d}{dx}\ln|f(x)|. \tag{4.2.13}$$

若引入算子

$$D := \frac{d}{dx}\ln$$

得到

$$D|f| = \frac{f'}{f}.$$

(7) 求 $(x^{x^x})'$ $x > 0$.

解: 令 $y = x^{x^x}$ 得到 $\ln y = x^x \ln x$ 和 $\ln\ln y = x\ln x + \ln\ln x$. 两边求导得到

$$\frac{1}{\ln y}\frac{y'}{y} = \ln x + 1 + \frac{1}{x\ln x}$$

所以

$$y' = x^x x^{x^x}\left[\ln x + (\ln x)^2 + \frac{1}{x}\right]. \ \square$$

§4.2.4 隐函数的求导

A: 假设可导函数 $y = f(x)$ 满足方程 $F(x,y) = 0$. 此时两边求导得到

$$0 = F_x(x_0, y_0) + F_y(x_0, y_0)y'$$

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}, \quad F_y(x_0,y_0) \neq 0. \tag{4.2.14}$$

其中 $F_x(x_0,y_0)$ 是表示在 $F(x,y)$ 中先把 y 看成常数, 然后对 x 求导, 再把 (x_0,y_0) 带入所得到的函数值. 类似的可定义 $F_y(x_0,y_0)$. 在多元微分学中, 我们会详细阐述.

B: 参数方程 $x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha < t < \beta$, 其中 φ, ψ 可导且 $\varphi' \neq 0$. 如果反函数 $\varphi^{-1}(x)$ 存在, 则

$$y'(x_0) = (\psi \circ \varphi^{-1})'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}, \quad \varphi^{-1}(x_0) = t_0. \tag{4.2.15}$$

例4.2.8. (1) 已知 $y^3 + 3y = x$ 求 $y'(x)$.

解: 设 $x = f(y) := y^3 + 3y$ 得到 $f'(y) = 3y^2 + 3 > 0$ 故

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{3y^2+3}.$$

或者应用 (4.2.14) 得到 $(3y^2+3)y' = 1$. $\square$

(2) 已知 $y - \epsilon\sin y = x, 0 \leq \epsilon < 1$, 求 $y'(x)$. $y' = \frac{1}{1-\epsilon\cos y}$.

(3) 已知 $x = \sqrt[3]{1-\sqrt{t}}, y = \sqrt{1-\sqrt[3]{t}}$ 求 $y'(x)$.

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[6]{\frac{(1-\sqrt{t})^4}{t(1-\sqrt[3]{t})^3}}, \quad t > 0, \ t \neq 1.$$

(4) 已知 $x = e^{2t}\cos^2 t, y = e^{2t}\sin^2 t$ 求 $y'(x)$.

$$\frac{dy}{dx} = \tan t \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right), \quad t \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \quad t \neq n\pi + \frac{\pi}{2} \ (n \in \mathbb{N}).$$

练习4.2.9. (1) 已知 $y^2 = 2px$ 求 $y'(x)$.

(2) 已知 $x^y = y^x$ 求 $y'(x)$.

(3) 已知 $x^2 - 4xy + 4y^{23} + 4x - 3y - 7 = 0, x < 2y - 1$ 求 $y'(x)$.

§4.3 高阶导数

如果函数 f 的导数 $f' = df/dx$ 任然可以求导, 则得到所谓的高阶导数.

定义4.3.1. 假设函数 $f \in D(U(x_0, r))$, 且导函数 f' 在 x_0 处也可导, 则称函数 f 在 x_0 处**二阶可导**, 并把

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) = f''(x_0) := (f')'(x_0)$$

称为 f 在 x_0 处的**二阶导数**. 一般地, 假设函数 f 在 $U(x_0, r)$ 内 n 阶可导, 且 $f^{(n)}$ 在 x_0 处也可导, 则称函数 f 在 x_0 处$n+1$ **阶可导**, 并记作

$$f^{(n+1)}(x_0) := (f^{(n)})'(x_0).$$

一般地我们把前三阶导数记作 f' f'' f''', 而把之后的导数记为 $f^{(4)}$, $f^{(5)}$, $\cdots$. 为把自变量 x 也写出来, 那么高阶导数可写成

$$\frac{d^k f}{dx^k} = f^{(k)}.$$

§4.3.1 记号

给定区间 I 可定义函数 f 在 I 内的高阶导数. 引入记号

$$f \in D^k(I) \iff f^{(i)} \in D(I), \quad \forall\, 1 \le i \le k, \tag{4.3.1}$$

$$f \in C^k(I) \iff f \in D^k(I) \text{ 且 } f^{(n)} \in C(I). \tag{4.3.2}$$

注意到

$$D(I) = D^1(I) \quad \text{但是} \quad C(I) \neq C^1(I). \tag{4.3.3}$$

因为可导函数必连续, 故得到

$$C(I) \supsetneq D(I) = D^1(I) \supsetneq C^1(I) \supsetneq D^2(I) \supsetneq C^2(I) \supsetneq D^3(I) \supsetneq \cdots \tag{4.3.4}$$

例4.3.2. (1) $(e^x)^{(n)} = e^x, n \in \mathbb{N}_+$.

(2) $(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n, a > 0, n \in \mathbb{N}_+$.

(3) $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$ 和 $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2}), n \in \mathbb{N}_+$.

(4) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}, x > 0$. 特别地

$$(x^m)^{(n)} = \begin{cases} m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}, & m \geq n, \\ 0, & m < n. \end{cases}$$

(5) $(1/x))^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.

(6) $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

定义4.3.3. 定义

$$D^\infty(I) := \bigcap_{n\geq 1} D^n(I), \quad C^\infty(I) := \bigcap_{n\geq 1} C^n(I). \tag{4.3.5}$$

注意到 $D^\infty(I) = C^\infty(I)$. 称函数 $f \in C^\infty(I)$ 为 I 上的**光滑函数**.

例4.3.4. (1) 求 $f''(x)$, 其中

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

计算得到

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 \sin\frac{1}{x} - x^2\cos\frac{1}{x}, m & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

和

$$f''(x) = \begin{cases} 12x^2 \sin\frac{1}{x} - 6x\cos\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

但是 $f'''(0)$ 不存在.

(2) 求 $f^{(n)}(x)$, 其中

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

低阶导数直接计算得到

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^4}e^{-\frac{1}{x}} - \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ 0, & xc \leq 0. \end{cases}$$

一般可得到

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases} P_{2n}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

这里多项式 P_{2n} 的次数为 $\deg P_{2n}=2n$. 下面证明 $f^{(n)}(0)$ 对任意正整数 n 都存在且为 0. 实际上根据归纳假设得到

$$\begin{aligned} f_+^{(n+1)}(0) &= \lim_{x\to 0+}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0+}\left[\frac{1}{x}P_{2n}\left(\frac{1}{x}\right)\right]e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{tP_{2n}(t)}{e^t} = 0. \end{aligned}$$

左侧导数是显然: $f_-^{(n+1)}(0)=0$.

(3) 函数 $y=a\cos x+b\sin x$ 满足微分方程 $y''+y=0$.

(4) 函数 $y=c_1e^{\lambda_1x}+c_2e^{\lambda_2x}$ 满足微分方程 $y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2y=0$. 这里 $c_1,c_2,\lambda_1,\lambda_2$ 都是常数.

(5) 函数

$$y=e^{x/\sqrt{2}}\left(c_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+c_2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+e^{-x/\sqrt{2}}\left(c_3\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+c_4\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

满足微分方程 $y^{(4)}+y=0$.

例4.3.5. (1) 考虑集合

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}):=\left\{A:=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}:\det A=1,\ a,b,c,d\in\mathbb{Z}\right\}.$$

对任意 $A,B\in\mathbf{SL}(2,\mathbb{Z})$, 可证明 $AB\in\mathbf{SL}(2,\mathbb{Z})$, 从而 $\mathbf{SL}(2,\mathbb{Z})$ 是群, 称为**二阶特殊线性群**. 定义映射

$$\mathbf{SL}(2,\mathbb{Z})\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\quad (A,x)\longmapsto A\cdot x:=\frac{ax+b}{cx+d}.$$

固定 $A\in\mathbf{SL}(2,\mathbb{Z})$ 考虑函数

$$f(x):=\mathbf{L}(A,x)=\frac{ax+b}{cx+d}.$$

计算得到

$$f'(x)=\frac{\det A}{(cx+d)^2}=\frac{1}{(cx+d)^2}.$$

和

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}c^{n-1}n!}{(cx+d)^{n+1}}.$$

(2) 上述映射可推广到复平面. 定义

$$\mathbf{SL}(2,\mathbb{Z})\times\mathbb{H}\longrightarrow\mathbb{H},\quad (A,z)\longmapsto A\cdot z:=\frac{az+b}{cz+d}.$$

这里 $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$. 作为练习可证明

$$(AB) \cdot z = A \cdot (B \cdot z), \quad A, B \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{Z}), \ z \in \mathbb{H}.$$

定义

$$j(A, z) := cz + d, \quad A := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

可以证明

$$j(AB, z) = j(A, B \cdot z) j(B, z), \quad \mathrm{Im}(A \cdot z) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|j(A, z)|^2}.$$

如果 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$ 满足 $A \cdot z = z$ 对某个 $z \in \mathbb{H}$ 成立, 则必有 $|a + d| < 2$.

§4.3.2 算术运算

对高阶导数来说最重要的性质就是 Leibniz 法则.

定理4.3.6. 若函数 f, g 都是 n 阶可导, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, 则 $c_1 f + c_2 g$ 也 n 阶可导且

$$(c_1 f + c_2 g)^{(n)} = c_1 f^{(n)} + c_2 g^{(n)}. \tag{4.3.6}$$

如果函数 $f_1, \cdots, f_n$ 都是 n 阶可导, $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$, 则

$$\left(\sum_{1 \le i \le m} c_i f_i \right)^{(n)} = \sum_{1 \le i \le m} c_i f_i^{(n)}. \tag{4.3.7}$$

定理4.3.7. **(Leibniz)** 如果函数 f, g 都 n 阶可导, 则 fg 也 n 阶可导且

$$(fg)^{(n)} = \sum_{0 \le k \le n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}. \tag{4.3.8}$$

证: 假设 (4.3.8) 对 n 成立. 则对 $n + 1$ 得到

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= (f'g + fg')^{(n)} = (f'g)^{(n)} + (fg')^{(n)} \\
&= \sum_{0 \le k \le n} \binom{n}{k} f^{(n-k+1)} g^{(k)} + \sum_{0 \le k \le n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k+1)} \\
&= \sum_{0 \le k \le n} \binom{b}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)} + \sum_{1 \le k \le n+1} \binom{n}{k-1} f^{(n+1-k} g^{(k)} \\
&= g f^{(n+1)} + f g^{(n+1)} + \sum_{1 \le k \le n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] f^{(n+1-k)} g^{(k)}.
\end{aligned}$$

中括号中的二项式系数之和为 $(n+1)!/k!(n+1-k)!$. □

注4.3.8. (1) **复合函数**. $y=f(u), u=g(x)\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$. 但是

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\right)=\frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}.$$

(2) **隐函数**. $F(x,y)=0\Rightarrow y'=-F_x(x,y)/F_y(x,y)$. 但是从

$$0=F_{xx}(x,y)+F_{xy}(x,y)y'+F_{yx}(x,y)y'+F_{yy}(x,y)(y')^2$$

得到

$$y''=-\frac{1}{F_y^3}\left[F_{xx}F_y^2-F_xF_y(F_{xy}+F_{yx})+F_{yy}F_x^2\right].$$

(3) **反函数**. $y=f(x)\Rightarrow x=f^{-1}(y)=g(y)$. 根据恒等式 $y=f(g(y))$ 得到 $1=f'(g(y))g'(y)$ 以及

$$0=f''(g(y))(g'(y))^2+f'(g(y))g''(y)$$

故

$$g''(y)=-\frac{f''(g(y))(g'(y))^2}{f'(g(y))}=-\frac{f''(g(y))}{[f'(g(y))]^2}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

(4) $x=\varphi(t), y=\psi(t)\Rightarrow dy/dx=\psi'(t)/\varphi'(t)$. 因此

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

例4.3.9. (1) 求 $y^{(n)}(0)$, 这里 $y(x)=\arcsin x$.

解: 因为前面 2 个低阶导数分别为 $y'=(1-x^2)^{-1/2}$ 和 $y''=\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}=xy'/(1-x^2)$, 故得到

$$(x^2-1)y''+xy'=0.$$

对上述微分方程再求 n 阶导数得到

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{0\le k\le n-2}\binom{n-2}{k}(x^2-1)^{(k)}y^{(n-k)}+\sum_{0\le k\le n-2}\binom{n-2}{k}x^{(k)}y^{(n-1-k)}\\ &= (x^2-1)y^{(n)}+2x\binom{n-2}{1}y^{(n-1)}+2\binom{n-2}{2}y^{(n-2)}+xy^{(n-1)}+\binom{n-2}{1}y^{(n-2)}\end{aligned}$$

从而 $y^{(n)}(0)=(n-2)^2y^{(n-2)}(0)$.

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases}[(n-2)!!]^2, & n=2k+1,\ k\in\mathbb{N}_+,\\ 1, & n=1,\\ 0, & n=2k,\ k\in\mathbb{N}.\end{cases}\qquad\square$$

(2) 定义

$$T_m(x):=\frac{1}{2^{m-1}}\cos(m\arccos x),\quad m\in\mathbb{N}.$$

易证

$$(1-x^2)T_m''(x) - xT_m'(x) + m^2T_m(x) = 0.$$

(3) 定义

$$P_m(x) := \frac{1}{2^m m!}\left[(x^2-1)^m\right]^{(m)}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

易证

$$0 = (1-x^2)P_m''(x) - 2xP_m'(x) + m(m+1)P_m(x).$$

(4) 定义

$$L_m(x) := e^x(x^m e^{-x})^{(m)}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

易证

$$x :_m'' (x) + (1-x)L_m'(x) + mL_m(x) = 0.$$

(5) 定义

$$H_m(x) := (-1)^m e^{x^2}(e^{-x^2})^{(m)}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

易证

$$H_m''(x) - 2xH_m'(x) + 2mH_m(x) = 0.$$

(6) 引入记号

$$\mathbf{D} := \frac{d}{dx}, \quad f(\mathbf{D}) := \sum_{0\le k\le n} p_k(x)\mathbf{D}^k$$

这里 p_k 都是连续的. 证明 $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ 有

$$f(\mathbf{D})\left[e^{\lambda x}u(x)\right] = e^{\lambda x} f(\mathbf{D}+\lambda)u(x).$$

证: 对每个 k 有

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^k\left[e^{\lambda x}u(x)\right] &= \left[e^{\lambda x}u(x)\right]^{(k)} = \sum_{0\le i\le k}\binom{k}{i}\lambda^i e^{\lambda x}u^{(k-i)}(x) \\ &= \sum_{0\le i\le k}\binom{k}{i}\lambda^i \mathbf{D}^{k-i}u(x) = (\mathbf{D}+\lambda)^k u(x).\ \square\end{aligned}$$

(7) 假设函数 $y = y(x)$ 满足条件

$$\sum_{0\le k\le n} a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} = 0.$$

如果 $x = e^t$, 则

$$0 = \sum_{0\le k\le n} a_k \mathbf{D}(\mathbf{D}-1)\cdots(\mathbf{D}-k+1)y$$

其中 $\mathbf{D} = d/dt$.

证: 引入 $\delta := d/dx$ 得到 $\mathbf{D}y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = x\delta y$. 即

$$\delta = e^{-t}\mathbf{D} \quad 或 \quad \mathbf{D} = e^{t}\delta.$$

进一步

$$\begin{aligned}\delta^2 y &= e^{-t}\mathbf{D}[e^{-t}\mathbf{D}y] = e^{-t}[-e^{-t}\mathbf{D}y + e^{-t}\mathbf{D}^2 y] \\ &= -e^{-2t}\mathbf{D}y + e^{-2t}\mathbf{D}^2 y = e^{-2t}\mathbf{D}(\mathbf{D}-1)y.\end{aligned}$$

断言

$$\delta^{(k)}y = e^{-kt}\mathbf{D}(\mathbf{D}-1)\cdots(\mathbf{D}-k+1)y.$$

事实上, 根据归纳假设得到

$$\delta^{(k+1)}y = \delta(\delta^{(k)}y) = e^{-t}\mathbf{D}\left[e^{-kt}\mathbf{D}(\mathbf{D}-1)\cdots(\mathbf{D}-k+2)y\right]$$

$$= e^{-t}\left[-ke^{-kt}\mathbf{D}(\mathbf{D}-1)\cdots(\mathbf{D}-k+1)y + e^{-kt}\mathbf{D}^2(\mathbf{D}-1)\cdots(\mathbf{D}-k+1)y\right]$$

$$= e^{-(k+1)t}\mathbf{D}(\mathbf{D}-1)\cdots(\mathbf{D}-k+1)(\mathbf{D}-k)y. \quad \square$$

§4.4 极值定理

考察函数 $f(x) = x^2, x \in [-1,1]$. 易知函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处达到最小. 另一方面根据 $f'(x) = 2x$，得到 $f'(0) = 0$. 这个例子告诉我们最值点和导数为零的点似乎有某种关系. 本节就来探讨这个问题.

§4.4.1 极值

定义4.4.1. 假设函数 f 定义在 (a,b) 内且 $x_0 \in (a,b)$.

(1) 称 x_0 是 f 的**极大值点**或**局部最大值点**, 如果 $\exists\, U(x_0,\delta) \subset (a,b)$ 满足

$$f(x) \le f(x_0), \quad \forall\, x \in U(x_0,\delta).$$

此时函数值 $f(x_0)$ 称为**极大值**或**局部最大值**.

(2) 称 x_0 是 f 的**极小值点**或**局部最小值点**, 如果 $\exists\, U(x_0,\delta) \subset (a,b)$ 满足

$$f(x) \ge f(x_0), \quad \forall\, x \in U(x_0,\delta).$$

此时函数值 $f(x_0)$ 称为**极小值**或**局部最小值**.

(3) 称 $x_0 \in (a,b)$ 是**极值点**或**局部最值点**如果 x_0 是极大值点或极小值点. 相应的函数值称为**极值**或**局部最值**.

注4.4.2. (1) 根据**定义**4.4.1, 任何极值点一定在区间内部.

(2) 如果函数 f 的定义域是一般的区间 I, 此时 I 可以是 (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$ 中的一种. 那么 I 中的极值点可如下定义:

$$x_0 \in I \text{ 是极值点} \Longleftrightarrow \begin{array}{c} \exists\,\delta > 0 \text{ 满足 } f(x) \le f(x_0)\ (\text{或 } f(x) \ge f(x_0)) \\ \forall\, x \in U_I(x_0,\delta) := U(x_0,\delta) \cap I \end{array}$$

按照这种定义极值点可以取到端点.

为了方便起见我们总是按照**定义**4.4.1 来阐述极值点和极值的含义.

(3) 显然极值点不一定是最值点. 但是如果最值点在定义域内部, 则必是极值点.

§4.4.2 Fermat 引理

这个引理告诉我们如果极值点是可微点那么此点处的导数必为零.

定理4.4.3. (Fermat) 若 x_0 是函数 f 的极值点且 f 在 x_0 处可导, 则 $f'(x_0) = 0$.

证: 不妨假设 x_0 是 f 的极小值点. 则 $\exists\,\delta > 0$ 使得 $U(x_0,\delta) \subset (a,b)$ 且满足不等式 $f(x) \le f(x_0), \forall\, x \in U(x_0,\delta)$. 根据定义得到

$$x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0, \quad x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0.$$

因为函数 f 在 x_0 处可导, $f'_+(x_0) = f'(x_0) = f'_-(x_0)$, 从而 $0 \le f'_-(x_0) = f'_+(x_0) \le 0$. 由此得到 $f'_+(x_0) = 0$. □

注4.4.4. (1) 称 x_0 是函数 f 的**驻点**或**临界点**如果 $f'(x_0) = 0$.

(2) 根据**定理**4.4.3 得到

$$\begin{array}{c} x_0 \text{ 是极值点} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f'(x_0)\text{ 存在}} \\ x_0 \text{ 是驻点} \end{array}$$

上述条件 “$f'(x_0)$ 存在” 不能去掉. 比如函数 $f(x) = |x|$ 在 $x_0 = 0$ 处有极小值, 但是 0 显然不是驻点因为函数在 0 处不可导.

反之, 驻点不一定是极值点. 比如 $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$.

§4.4.3 Darboux 定理

回顾闭区间上连续函数的介值定理:

$$f \in C[a,b] \text{ 且 } f(a)f(b) < 0 \Longrightarrow \exists\,\xi \in (a,b) \text{ 满足 } f(\xi) = 0.$$

如果 $f \in C^1([a,b])$, 则得到

$$f \in C^1[a,b] \text{ 且 } f'(a)f'(b) < 0 \Longrightarrow \exists\,\xi \in (a,b) \text{ 满足 } f'(\xi) = 0.$$

但是 Darboux 定理告诉我们把条件 $f \in C^1([a,b])$ 减弱为 $f \in D([a,b])$ 则结论仍旧成立.

定理4.4.5. (Darboux) 假设 $f \in D(a,b)$ 且 $f'(x_1)f'(x_2) < 0$, 其中 $x_1, x_2 \in (a,b)$ $\Rightarrow f'(\xi) = 0$, 这里 ξ 介于 x_1 和 x_2 之间.

证: 不妨假设 $x_1 < x_2$, $f'(x_1) < 0$, 且 $f'(x_2) > 0$ (否则的话考察函数 $-f$). $\exists\,(a,b)$ 内的两个开区间 $U(x_1,\delta_1)$ 和 $U(x_2,\delta_2)$ 使得下列不等式成立:

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < 0,\ \forall\, x \in U(x_1,\delta_1) \ \text{且}\ \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2} > 0,\ \forall\, x \in U(x_2,\delta_2).$$

存在 $x_1' > x_1$, $x_2' < x_2$, 且 $x_1' < x_2'$ 使得 $f(x_1') < f(x_1)$ 和 $f(x_2') < f(x_2)$ 都成立. 由于 $f \in C([x_1,x_2])$, $\exists\,\xi \in [x_1,x_2]$ 满足 $f(\xi) = \min_{[x_1,x_2]} f$. 根据 x_1' 和 x_2' 的取法, 必有 $\xi \in (x_1,x_2)$ 成立. 利用**定理**4.4.3 推出 $f'(\xi) = 0$. □

注4.4.6. (1) $f \in D((a,b))$, $x_1, x_2 \in (a,b)$, μ 介于 $f'(x_1)$ 和 $f'(x_2)$ 之间 $\Rightarrow \exists\,\xi$ 介于 x_1 和 x_2 之间满足 $f'(\xi) = \mu$.

证: 应用**定理**4.4.5 到函数 $F(x) := f(x) - \mu$. □

(2) 在**定理**4.4.5 中不需要 f' 连续.

根据**定理**4.4.3 知道 x_0 要么是端点, 要么是内点但不可导, 要么是内点且为驻点. 所以求函数在某个区间上的最值就要把这三种情况考虑进去.

例4.4.7. (1) 求函数 $f(x) = x^3 - x + 1$, $-1 \le x \le 1$, 的最值.

解: 根据 $f'(x) = 0$ 得到驻点为 $\pm 1/\sqrt{3}$. 计算可得

$$f(-1) = 1,\quad f(-1/\sqrt{3}) = 1 + \frac{2}{3\sqrt{3}},\quad f(1/\sqrt{3}) = 1 - \frac{2}{3\sqrt{3}},\quad f(1) = 1.$$

故 $\max_{[-1,1]} f = 1 + \frac{2}{3\sqrt{3}} = f(-\frac{1}{\sqrt{3}})$, $\min_{[-1,1]} f = 1 - \frac{2}{3\sqrt{3}} = f(\frac{1}{\sqrt{3}})$. □

(2) 求函数 $f(x) = x^3 - x^2 + 1$, $-1 \le x \le 2$, 的最值.

解: 根据 $f'(x) = 0$ 得到驻点为 0 和 2/3. 计算可得

$$f(-1) = -1,\quad f(0) = 1,\quad f(2/3) = 1 - \frac{23}{27},\quad f(2) = 5.$$

故 $\max_{[-1,2]} f = 5 = f(2)$, $\min_{[-1,2]} f = -1 = f(-1)$. □

(3) $f \in D([0,+\infty))$, $0 \le f(x) \le \frac{x}{1+x^2} \Rightarrow \exists\,\xi \in (0,+\infty)$ 满足 $f'(\xi) = (1-\xi^2)/(1+\xi^2)^2$.

证: 注意到 $(1-\xi^2)/(1+\xi^2)^2 = (\xi/(1+\xi^2))'$, 故定义函数 $F(x) := \frac{x}{1+x^2} - f(x)$. 因为 $F(0) = F(+\infty) = 0$, $F \ge 0$, 若函数 F 不恒为零则 F 的最大值点必在 $(0,+\infty)$ 内取到. □

§4.5 微分中值定理

§4.5.1 Rolle 定理

定理4.5.1. (Rolle, 1691) $f \in C([a,b]) \cap D((a,b))$ 且 $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b)$ 满足 $f'(\xi) = 0$.

证: 因为函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 存在 $\xi, \eta \in [a,b]$ 满足

$$m_f := \min_{[a,b]} f = f(\xi) \le f(x) \le f(\eta) = M_f := \max_{[a,b]} f, \quad \forall\, x \in [a,b].$$

若 $M_f = m_f$, 则函数 f 是常值函数, 从而对任何 $\xi \in (a,b)$ 都有 $f'(\xi) = 0$.

若 $M_f > m_f$, 那么 ξ 和 η 中至少有一个不等于区间的端点, 这是因为 $f(a) = f(b)$. 不妨假设 $a < \xi < b$. 根据**定理**4.4.3 得到 $f'(\xi) = 0$. □

注4.5.2. (1) **定理**4.5.1 中三个条件缺一不可. 令

$$A : f \in C([a,b]),\ \ B : f \in D((a,b)),\ \ C : f(a) = f(b),\ \ D : f'(\xi) = 0\, \exists\, \xi \in (a,b).$$

则

$$\begin{aligned}
A + B &\not\Rightarrow D, \quad (f(x) = x,\ 0 \le x \le 1) \\
A + C &\not\Rightarrow D, \quad (f(x) = |1 - 2x|,\ 0 \le x \le 1), \\
B + C &\not\Rightarrow D, \quad \left(f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases} \right).
\end{aligned}$$

(2) 函数 f 在"闭区间 $[a,b]$ 上连续"这个条件不能减弱为在"开区间 (a,b) 内连续". 比如

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ -1, & x = 0 \text{ 或 } 1. \end{cases}$$

(3) 反之, 在 (1) 中,

$$\begin{aligned}
D &\not\Rightarrow A \quad \left(f(x) = \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & c = 0 \text{ 或 } 1. \end{cases} \right) \\
D &\not\Rightarrow B \quad \left(f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} \le 1. \end{cases} \right) \\
D &\not\Rightarrow C \quad (f(x) = -x(x-1),\ 0 < x \le 1.).
\end{aligned}$$

(4) $f \in D^2([a,b])$ 且 $f(a) = f(b) = 0 \Rightarrow \forall\, x \in (a,b)\, \exists\, \xi_x \in (a,b)$ 满足

$$f(x) = \frac{f''(\xi_x)}{2}(x-a)(x-b).$$

证: 只要证明存在 $\xi_x \in (a,b)$ 满足

$$f''(\xi_x) = \frac{2f(x)}{(x-a)(x-b)}.$$

固定 $x\in(a,b)$ 并定义 $\lambda:=2f(x)/(x-a)(x-b)$. 考察函数

$$F(u):=f(u)-\frac{\lambda}{2}(u-a)(u-b).$$

计算得到 $F(a)=F(b)=F(x)=0$. 利用**定理**4.5.1 两次推出 $\exists\,\xi_1\in(a,x)$ 和 $\xi_2\in(x,b)$ 使得 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$ 成立. 再次利用**定理**4.5.1 得到 $\exists\,\xi_x\in(\xi_1,\xi_2)$ 满足 $F''(\xi_x)=0$. $\square$

(5) $f\in D^3([a,b])$ 且 $f(a)=f'(a)=f(b)=0\Rightarrow\forall\,x\in(a,b)\,\exists\,\xi_x\in(a,b)$ 满足

$$f(x)=\frac{f'''(\xi_x)}{3!}(x-a)^2(x-b).$$

证: 固定 $x\in(a,b)$ 并定义函数

$$F(u):=f(u)-\frac{\lambda}{3!}(u-a)^2(u-b),\quad \lambda:=\frac{3!f(x)}{(x-a)^2(x-b)}.$$

因为 $F(a)=F(x)=F(b)=0$, 利用**定理**4.5.1 得到存在 $\exists\,a<\xi_1<x<\xi_2<b$ 使得 $0=F'(\xi_1)=F'(\xi_2)$ 成立. 但是

$$F'(u)=f'(u)-\frac{\lambda}{3!}\left[2(u-a)(u-b)+(u-a)^2\right],\quad F'(a)=0,$$

再次利用**定理**4.5.1 得到存在 $\exists\,a<\xi_3<\xi_1<\xi_4<\xi_2$ 满足 $F''(\xi_3)=F''(\xi_4)=0$. 故 $\exists\,\xi_x\in(\xi_3,\xi_4)\subset(a,b)$ 使得 $F'''(\xi_x)=0$ 成立. 根据

$$F''(u)=f''(u)-\frac{\lambda}{3!}\left[2(u-b)+(u-a)+2(u-a)\right],\quad F'''(u)=f'''(u)-\lambda$$

得到结论成立. $\square$

(6) $f\in C([a,b])\cap D^2((a,b))\Rightarrow\forall\,c\in(a,b)\,\exists\,\xi_c\in(a,b)$ 满足

$$f''(\xi_c)=\frac{2f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{2f(b)}{(b-c)(b-a)}+\frac{2f(c)}{(c-a)(c-b)}.$$

证: 引入记号

$$\lambda_1:=\frac{2f(a)}{(a-b)(a-c)},\quad \lambda_2:=\frac{2f(b)}{(b-c)(b-a)},\quad \lambda_3:=\frac{2f(c)}{(c-a)(c-b)}.$$

定义函数

$$F(x):=f(x)-\frac{\lambda_1}{2}(x-b)(x-c)-\frac{\lambda_2}{2}(x-c)(x-a)-\frac{\lambda_3}{2}(x-a)(x-b).$$

则 $F(a)=F(b)=F(c)=0$, 从而 $\exists\,a<\xi_1<c<\xi_2<b$ 使得 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$ 成立. 故存在 $\exists\,\xi_1<\xi_c<\xi_2$ 满足 $F''(\xi_c)=0$. 根据

$$F''(x)=f''(x)-\sum_{1\le i\le 3}\lambda_i,$$

得到 $f''(\xi_c)=\sum_{1\le i\le 3}\lambda_i$. $\square$

§4.5.2 Lagrange 定理

Rolle 定理, **定理**4.5.1, 中需要条件 $f(a)=f(b)$. 如果 $f(a)\neq f(b)$, 即两点 $(a,f(a))$ 和 $(b,f(b))$ 不等高, 可以把坐标轴旋转一个角度使得在新的坐标下该两点等高.

定理4.5.3. (Lagrange) $f\in C([a,b])\cap D((a,b))\Rightarrow \exists\,\xi\in(a,b)$ 满足

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{4.5.1}$$

证: 连接两点 $(a,f(a))$ 和 $(b,f(b))$ 的直线方程为

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a).$$

因此旋转坐标使得新的 x 轴和这个直线平行从而在新的坐标下上述两点是等高的. 定义

$$F(x):=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

则 $F\in C([a,b])\cap D((a,b))$ 且 $F(a)=F(b)=0$. 根据**定理**4.5.1 得到 $F'(\xi)=0$ 对某个 $\xi\in(a,b)$ 成立. □

注4.5.4. (1) 根据**定理**4.5.3 得到

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\quad \exists\,a<\xi<b.$$

如果把 ξ 写成如下形式

$$\xi=(1-\theta)a+\theta b=a+\theta(b-a),\quad \exists\,0<\theta<1$$

则得到

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a).$$

一般地对 $\forall\,a\leq x,x_0\leq b\,\exists\,\theta\in(0,1)$ 使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0) \tag{4.5.2}$$

成立. 当 $x-x_0=\Delta x$ 足够小时得到

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x. \tag{4.5.3}$$

(2) 引入记号

$$\begin{aligned} A: &\quad f\in C([a,b]),\\ B: &\quad f\in D((a,b)),\\ C: &\quad f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\ \exists\,a<\xi<b. \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} A &\nRightarrow C \quad (\text{显然}),\\ B &\nRightarrow C \quad \left(f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1,\\ 0, & x=1. \end{cases}\right). \end{aligned}$$

定理4.5.5. $f\in C((a,b))\Rightarrow f$ 是常值函数当且仅当在 (a,b) 内 $f'\equiv 0$.

证: 假设 $f'\equiv 0$. $\forall\, x\in(a,b)$, 根据**定理**4.5.3 得到

$$0=f'(\xi)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a},\quad \exists\, a<\xi<x.$$

故 $f(x)=f(a)$. 反之是显然成立的. □

定理4.5.6. $f\in C([a,b])\cap D((a,b))\Rightarrow f$ 在 $[a,b]$ 上为常值函数当且仅当在 (a,b) 内 $f'\equiv 0$.

证: 假设在 (a,b) 内 $f'\equiv 0$. 根据**定理**4.5.5 得到在 (a,b) 内 $f\equiv c$, 其中 c 是一个常数. 根据连续性得到在 $[a,b]$ 上 $f\equiv c$. 反之是显然成立的. □

例4.5.7. (1)

$$1-\frac{a}{b}<\ln\frac{a}{b}<\frac{b}{a}-1,\quad \forall\, 0<a<b. \tag{4.5.4}$$

证: 令 $x=a/b\in(0,1)$ 并考虑函数 $f(x)=\ln x$. 由 $f'(x)=1/x$ 得到

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=f'(\xi)=\frac{1}{\xi}\in(b^{-1},a^{-1}).$$

这立即得到 4.5.4. □

(2) 证明

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},\quad 0\le x\le 1. \tag{4.5.5}$$

证: 考虑函数 $f(x):=\arcsin x+\arccos x$. 由 $f'(x)=(1-x^2)^{-1/2}-(1-x^2)^{-1/2}=0$ 得到 $f(x)=f(0)=\pi/2$. □

(3) 证明

$$x-\frac{1}{2}x^2<\ln(1+x)<x,\quad \forall\, x>0. \tag{4.5.6}$$

证: 定义函数 $f(x)=x-\ln(1+x)$. 根据导数 $f'(x)=x/(1+x)>0$ 及微分中值定理得到 $f(x)-f(0)>0$, 即 $f(x)>0$. 另一端不等式考虑函数 $g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2$. □

(4) 证明

$$|e^x-\cos x|\le\sqrt{2}xe^x,\quad \forall\, x\ge 0. \tag{4.5.7}$$

证:定义函数

$$f(x):=e^x-\cos x-\sqrt{2}xe^x,\quad \forall\, x\ge 0.$$

计算可得

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x + \sin x - \sqrt{2}\left(e^x + xe^x\right) = [1 - \sqrt{2}(1+x)]e^x + \sin x, \\ f''(x) &= -\sqrt{2}e^x + [1 - \sqrt{2}(1+x)]e^x - \cos x \\ &= [1 - \sqrt{2}(2+x)]e^x - \cos x \le [1 - \sqrt{2}(2+0)]e^0 + 1 < 0. \end{aligned}$$

故 $f'(x) < f'(0) = 1 - \sqrt{2} < 0$ 推出 $f(x) \le f(0) = 0$. 另一个不等式可类似得到. □

(5) 计算

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \left[\ln \arctan(x+1) - \ln \arctan x\right].$$

解: 根据微分中值定理得到

$$x^2 \left[\ln \arctan(x+1) - \ln \arctan x\right] = x^2 \frac{1}{1+\xi_x^2} \frac{1}{\arctan \xi_x} \to 1 \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi},$$

这里 $x < \xi_x < x+1$. □

§4.5.3 Cauchy 定理

可以把结论 4.5.1 改写成如下形式

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad g(x) := x.$$

一般形式就是如下的定理.

定理4.5.8. (Cauchy) $f, g \in C([a,b]) \cap D((a,b))$ 且 $g'(x) \neq 0$ ($\forall\, a < t < b$) $\Rightarrow$ $\exists\, \xi \in (a,b)$ 满足

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}. \tag{4.5.8}$$

证: 注意到

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \iff f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = 0, \quad \lambda := \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

考察函数

$$F(x) := f(x) - f(a) - \lambda[g(x) - g(a)].$$

则 $F \in C([a,b]) \cap D((a,b))$ 且 $F(a) = F(b) = 0$. 根据**定理**4.5.1 得到 $\exists\, a < \xi < b$ 满足 $0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \lambda g'(\xi)$. □

例4.5.9. (1) $f \in C([a,b]) \cap D((a,b))$ 且 $0 < a < b \Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b)$ 满足

$$f(b) - f(a) = \xi f'(\xi) \ln \frac{b}{a}.$$

证: 取函数 $g(x) = \ln x$. □

(2) $f\in D([a,b])$ 且 $0<a<b\Rightarrow\exists\,\xi\in(a,b)$ 满足

$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi).$$

证: 取函数 $g(x)=x^2$. □

(3) $f\in D([a,b])$ 且 $0<a<b\Rightarrow\exists\,\xi\in(a,b)$ 满足

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

证: 注意到

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=\frac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}.$$

取函数 $F(x)=f(x)/x$ 和 $G(x)=1/x$. □

(4) $f\in C([a,b])\cap D((a,b))$ 且 $0<a<b\Rightarrow\exists\,\xi,\eta\in(a,b)$ 满足

$$f'(\eta)=(b^2+ab+a^2+2)\frac{f'(\xi)}{3\xi^2+2}.$$

证: η 的选取是显然的: $\exists\,\eta\in(a,b)$ 满足

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\eta).$$

这样只要证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3+2(b-a)}=\frac{f'(\xi)}{3\xi^3+2}$$

成立, 也即证明

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3+2(b-a)}(3\xi^2+2)=\frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3+2(b-a)}(\xi^3+2\xi)'.$$

定义函数

$$F(x):=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3+2(b-a)}(x^3-a^3+2(x-a)).$$

则 $F\in C([a,b])\cap D((a,b))$ 且 $F(a)=F(b)=0$. 从而 $\exists\,\xi\in(a,b)$ 使得 $F'(\xi)=0$ 成立. □

(5) $f\in C([a,b])\cap D((a,b))$ 且 $0<a<b\Rightarrow\exists\,\xi,\eta\in(a,b)$ 满足

$$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta).$$

证: 首先 $\exists\,\xi\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

成立. 其次定义函数

$$F(x):=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}(x^2-a^2).$$

则 $F\in C([a,b])\cap D((a,b))$ 且 $F(a)=F(b)=0$. 从而 $\exists\,\xi\in(a,b)$ 使得 $F'(\xi)=0$ 成立. $\square$

(6) $f\in D([a,b]$ $f'(a)=f'(b)=0\Rightarrow\exists\,\xi\in(a,b)$

$$f(\xi)-f(a)=f'(\xi)(\xi-a).$$

证: 注意到

$$f(\xi)-f(a)=f'(\xi)(\xi-a)\Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}.$$

定义函数

$$F(x):=\begin{cases}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}, & a<x\le b,\\ f'(a), & x=a.\end{cases}$$

则 $F\in C([a,b])\cap D((a,b))$. $\forall\,x\in(a,b)$ 计算得到

$$F'(x)=\frac{f'(x)}{x-a}-\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}$$

且

$$F'(b)=-\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2},\quad F(b)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\quad F(a)=0.$$

情形 1: $f(a)=f(b)$. 此时 $F(b)=0=F(a)$. 则 $\exists\,\xi\in(a,b)$ 满足 $F'(\xi)=0$.

情形 2: $f(a)\ne f(b)$. 不失一般性不妨假设 $f(a)>f(b)$ 从而得到 $F'(b)>0$ 和 $F(b)<0$. 故 $\exists\,\xi_1\in(a,b)$ 满足 $F(\xi_1)<F(b)<0=F(a)$. 利用连续函数介质性定理得到 $\exists\,\xi_2\in(a,\xi_1)$ 使得 $F(\xi_2)=F(b)$ 成立. $\exists\,\xi\in(\xi_2,b)$ 满足 $F'(\xi)=0$. $\square$

(7) 假设 f 不是线性函数且 $f\in C([a,b])\cap D((a,b))\Rightarrow\exists\,\xi\in(a,b)$ 满足

$$|f'(\xi)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

证: 定义函数

$$F(x):=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),\quad x\in[a,b].$$

因为函数 F 不是线性的, 故存在 $\exists\,c\in(a,b)$ 满足 $F(c)\ne0$. 不妨假设 $F(c)>0$. 则 $\exists\,\xi_1\in(a,c)$ 和 $\xi_2\in(c,b)$ 使得

$$F'(\xi_1)=\frac{F(c)-F(a)}{c-a}=\frac{F(c)}{c-a}>0,\quad F'(\xi_2)=\frac{F(b)-F(c)}{b-c}=\frac{-F(c)}{b-c}<0$$

成立, 也即

$$f'(\xi_1)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\qquad f'(\xi_2)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

当 $f(b)\geq f(a)$ 时取 $\xi=\xi_1$ 得到

$$|f'(\xi_1)|=f'(\xi_1)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>0.$$

否则的话取 $\xi=\xi_2$. □

(8) $f\in D^2([a,b])$ 且 $f'(a)=f'(b)=0\Rightarrow\exists\,c\in(a,b)$ 满足

$$|f''(c)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

证: $\forall\,x_0\in[a,b]$ 可以证明

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}(x-x_0)^2f''(\xi_x)\tag{4.5.9}$$

这里 ξ 是介于 x 和 x_0 之间. 事实上定义函数

$$F(x):=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0),\quad G(x):=(x-x_0)^2.$$

根据微分中值定理得到

$$\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)}=\frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}=\frac{f'(\xi_1)-f'(x_0)}{2(\xi_1-x_0)}\frac{f''(\xi_2)}{2},$$

其中 $x_0<x_2<\xi_1<x$. 特别地取 $x_0=a$ 和 $x=(a+b)/2$ 得到

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{(n-a)^2}{8}f''(\xi_1),\quad\exists\,\xi_1\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right).$$

类似地 $\exists\,(a+b)/2<\xi_2<b$ 满足

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\frac{(b-a)^2}{8}f''(\xi_2).$$

从而得到

$$f(b)-f(a)=\frac{(b-a)^2}{8}[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)]$$

或

$$\frac{4}{(b-a)^2}[f(b)-f(a)]=\frac{f''(\xi_1)-f''(\xi_2)}{2}.$$

两边取绝对值得到

$$\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|\leq\frac{|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|}{2}.$$

若 $|f''(\xi_1)|\leq|f''(\xi_2)|$, 则取 $\xi=\xi_2$, 否则的话取 $\xi=\xi_1$. □

(9) $f\in D^2((-\infty,+\infty))$ 且 $M_k:=\sup_{(-\infty,+\infty)}|f^{(k)}|<+\infty\ (k=0,1,2)\Rightarrow M_1^2\leq 2M_0M_2$.

证: 利用 (4.5.9) 得到

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x)+f'(x)h+\frac{f''(\xi_1)}{2}h^2, \\ f(x-h) &= f(x)-f'(x)h+\frac{f''(\xi_2)}{2}h^2, \end{aligned}$$

其中 $x-h<\xi_2<x<\xi_1<x+h$. 两式相加得到

$$2f'(x)h=[f(x+h)-f(x-h)]-\frac{h^2}{2}[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)]$$

从而不等式 $2h|f'(x)|\le 2M_0+h^2M_2$ 对任何 $h\in\mathbb{R}$ 都成立. 根据二次多项式的判别式得到 $4M_1^2-4M_0 2M_2\le 0$. □

§4.6 L'Hospital 法则

假设函数 f,g 定义在 $U(a,r)$ 内且均在 a 处可导. 如果 $f(a)=g(a)=0$ 且 $g'(a)\neq 0$ 则得到

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

§4.6.1 $\frac{0}{0}$ 型

定理4.6.1. (L'Hospital, 1696) 假设 $f,g\in D((a,b))$, $g'\neq 0$, 且 $\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}g(x)=0\Longrightarrow$ 如果极限

$$\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\quad(\text{存在或}\infty)$$

则

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{4.6.1}$$

证: 延拓定义函数

$$F(x):=\begin{cases}0, & x=a,\\ f(x), & a<x<b,\end{cases}\qquad G(x):=\begin{cases}0, & x=a,\\ g(x), & a<x<b.\end{cases}$$

则 $F,G\in C([a,b])\cap D((a,b))$. 从而对 $\forall\, x\in(a,b)\ \exists\,\xi\in(a,x)$ 使得

$$\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}\Longrightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\to A$$

成立. □

例4.6.2. (1) 证明

$$f''(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}$$

对在 a 处二阶可导的函数 f 都成立.

证: 根据定义

$$f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}$$

可知 $f\in D(U(a,r))$. 利用**定理**4.6.1 两次计算得到

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a-h)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f(a)}{2h}+\lim_{h\to 0}\frac{f'(a-h)-f(a)}{-2h}=\frac{f''(a)+f''(a)}{2}=f''(a).\quad\square$$

(2) 已知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(6x)-xf(x)}{x^3}=0$$

求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{6-f(x)}{x^2}.$$

证: 利用**定理**4.6.1 两次计算得到

$$\frac{6-f(x)}{x^2}=\frac{5x-xf(x)}{x^3}=\frac{\sin(6x)-xf(x)}{x^3}+\frac{6x-\sin(6x)}{x^3}$$

$$\to 0+\frac{6-6\cos(6x)}{3x^2}\to\frac{12\sin(6x)}{2x}\to 36\cos(6x)\to 36.\quad\square$$

§4.6.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型

定理4.6.3. 假设 $f,g\in D((a,b))$, 在 (a,b) 内 $g'\neq 0$, 且 $\lim_{x\to a+}g(x)=\infty\Longrightarrow$ 若

$$\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\quad(\text{存在或}\ \infty)$$

则

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.\tag{4.6.2}$$

证: (1) $A<\infty$. 对 $\forall\, x,x_0>a$ 只要 $x\neq x_0$ 有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)}+\frac{f(x_0)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\frac{g(x)-g(x_0)}{g(x)}+\frac{f(x_0)}{g(x)}$$

$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\left[1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right]+\frac{f(x_0)}{g(x)}$$

成立. 从而

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-A\right|=\left|\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-A\right]\left[1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right]+\frac{f(x_0)-Ag(x_0)}{g(x)}\right|$$

$$\leq\left|1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-A\right|+\left|\frac{f(x_0)-Ag(x_0)}{g(x)}\right|.$$

因为 $\lim_{x\to a+} f'(x)/g'(x) = A$ 故 $\forall\,\epsilon > 0\ \exists\,\delta_1 < b - a$ 使得

$$\left|\frac{f'(zx)}{g'(x)} - A\right| < \epsilon \quad \forall\,x \in (a, a+\delta_1)$$

成立. 令 $x_0 := a + \delta_1$. $\forall\,x \in (a, x_0)\ \exists\,\xi \in (x, x_0)$ 满足

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

则

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - A\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A\right| < \epsilon.$$

根据假设条件 $\lim_{x\to a+} g(x) = \infty$ 得到对上述 $\epsilon > 0\ \exists\,\delta < \delta_1$ 使得

$$\left|1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}\right| < \epsilon, \quad \left|\frac{f(x_0) - Ag(x_0)}{g(x)}\right| < \epsilon$$

成立. 因此 $\forall\,a < x < a + \delta$ 得到

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| < \epsilon + 2\epsilon = 3\epsilon.$$

(2) $A = \infty$. 基本想法是证明此时 $\lim_{x\to a+} f(x) = \infty$ 从而可以利用 (1) 中的结论. 因为

$$\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty,$$

故 $\exists\,\delta_1 > 0$ 使得不等式 $|f'(x)/g'(x)| \geq 1$ 成立, $\forall\,a < x < a + \delta_1$. 对 $\forall\,a < x < y < a + \delta_1$ 得到

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)}\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right| \geq 1, \quad \exists\,\xi \in (x, y).$$

从而

$$|f(x) - f(y)| \geq |g(x) - g(y)| \geq |g(x)| - |g(y)|.$$

但是 $\lim_{x\to a+} g(x) = \infty$ 推出 $\lim_{x\to a+} f(x) = \infty$. 利用 (1) 得到

$$\lim_{x\to a+} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty. \quad \square$$

例4.6.4. (1) $\forall\,\alpha > 0, \forall\,k \in \mathbb{N}_+ \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{(\ln x)^k} = +\infty$.

证: 定理4.6.3 利用 k 次得到

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^k}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{k(\ln x)^{k-1}}{\alpha x^\alpha} = \cdots = \lim_{x\to+\infty} \frac{k!}{\alpha^k x^\alpha} = 0. \quad \square$$

(2) $f \in D([a, +\infty))$, f 有界, 且 $\lim_{x\to+\infty} f'(x) \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

证: 利用**定理**4.6.3 得到

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}f'(x)=A.$$

但是 f 有界故 $f(x)/x\to 0$. 从而 $A=0$. $\square$

(3) $f\in D([a,+\infty))$, f 有界, 且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0 \not\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

解: 考察函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin(x^2)}{x}, & x>0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

对 $\forall\, x>0$, 计算得到

$$f'(x)=\frac{2x^2\cos(x^2)-\sin(x^2)}{x^2}=2\cos(x^2)-\frac{\sin(x^2)}{x^2}.$$

从而极限 $\lim_{x\to\infty}f'(x)$ 不存在. 注意到 $f'_+(0)=1$. $\square$

§4.6.3 其它型

主要有以下三种类型.

(A) “$0\cdot\infty$” 型. $\lim_{x\to a}f(x)=0$ 且 $\lim_{x\to a}g(x)=\infty\Longrightarrow$

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad 或 \quad \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}. \tag{4.6.3}$$

(B) “$\infty-\infty$” 型. $\lim_{x\to a}f(x)=\infty=\lim_{x\to a}g(x)\Longrightarrow$

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}. \tag{4.6.4}$$

(C) “$0^0,\infty^0,1^\infty$” 型.

$$\left.\begin{array}{r}0^0\ 型\\ \infty^0\ 型\\ 1^\infty\ 型\end{array}\right\}\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim_{x\to a}g(x)\ln f(x)}\left\{\begin{array}{l}0\cdot\infty\ 型\\ 0\cdot\infty\ 型\\ \infty\cdot 0\ 型\end{array}\right. \tag{4.6.5}$$

例4.6.5. (1) 计算

$$\lim_{x\to\pi}(x-\pi)\cot x=\lim_{x\to\pi}\frac{x-\pi}{\tan x}=\lim_{x\to\pi}\frac{1}{\sec^2 x}=1.$$

(2) 计算

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x} = 0.$$

(3) 计算

$$\lim_{x\to 0+}\left[\frac{e}{(1+x)^{1/x}}\right]^{1/x} = e^{\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}\ln\frac{e}{(1+x)^{1/x}}} = e^{\lim_{x\to 0+}\frac{1-\frac{1}{x}\ln(1+x)}{x}}$$

$$= e^{\lim_{x\to 0+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0+}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}} = e^{\lim_{x\to 0+}\frac{1}{2(1+x)}} = e^{1/2}.$$

(4) 计算

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = \lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1.$$

(5) $f\in D((0,\infty))$, $a>0$, 且 $\lim_{x\to+\infty}[af(x)+f'(x)] = L \Longrightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{L}{a}.$$

证: 计算得到

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{ax}f(x)}{e^{ax}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{ax}f(x))'}{ae^{ax}} = \frac{L}{a}. \quad \square$$

(6) $f\in D^2((0,+\infty))$ 且 $\lim_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)+f''(x)] = L \Longrightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L.$$

证: 注意到 (5) 的结论所以引入两个参数

$$f+f'+f'' = \beta[(\alpha f+f') + (\alpha f+f')'.$$

得到 $\alpha+\beta = 1 = \alpha\beta$. 利用 (5) 两次得到

$$\lim_{x\to+\infty}[\alpha(x)+f'(x)] = \frac{L}{\beta}$$

和 $\lim_{x\to\infty} f(x) = L/\alpha\beta = L$. $\square$

(7) 假设函数 f 在 a 处 n 阶可导 $\Longrightarrow$

$$f^{(n)}(a) = \lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{h^n}\sum_{0\le k\le n}\left[(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(a+kh)\right]\right\}.$$

证: 计算得到

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{h^n}\sum_{0\le k\le n}\left[(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(a+kh)\right]\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{nh^{n-1}}\sum_{1\le k\le n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f'(a+kh)k$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{n(n-1)h^{n-2}}\sum_{2\le k\le n}(-1)^{n-k}k^2\binom{n}{k}f''(a+kh)$$

$$= \cdots = \frac{1}{n!}f^{(n)}(a) = f^{(n)}(a). \quad \square$$

§4.7 Taylor 公式

观察到

$$f \text{ 在 } x_0 \text{ 处可导} \Longrightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0),$$

$$f \text{ 在 } x_0 \text{ 处二阶可导} \Longrightarrow f(x) = f(x_0) + \sum_{1 \le k \le 2} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^2).$$

定义4.7.1. 假设函数 f 在 x_0 处 n 阶可导, 则 $f \in D^{n-1}((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$ 对某个 $\delta > 0$ 成立. f 在 x_0 处的n 阶 **Taylor 多项式**定义为

$$P_n(x) \equiv P_n(x; x_0, f) := f(x_0) + \sum_{1 \le k \le n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \tag{4.7.1}$$

§4.7.1 Peano 型余项

定理4.7.2. (Peano 型余项) 假设函数 f 在 x_0 处 n 阶可导 $\Longrightarrow \exists\, \delta > 0$ 使得

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x), \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \tag{4.7.2}$$

成立, 这里

$$r_n(x) = o((x - x_0)^n) \tag{4.7.3}$$

$x \to x_0$.

证: n 次利用**定理4.6.1** 得到

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} &= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - \sum_{1 \le k \le n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x - x_0)^{k-1}}{n(x - x_0)^{n-1}} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - \sum_{0 \le k \le n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}{n(x - x_0)^{n-1}} = \cdots \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(m)}(x) - \sum_{0 \le k \le n-m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}{n(n-1)\cdots(n-m+1)(x - x_0)^{n-m}} \quad (0 \le m \le n) \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x - x_0)}{n!(x - x_0)} \\
&= \frac{1}{n!}\left[f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)\right] = 0. \quad \square
\end{aligned}$$

§4.7.2 Lagrange 型余项

假设 $f\in C^1([x_0-\delta,x_0+\delta])\cap D^2((x_0-\delta,x_0+\delta))$ 则得到 $f'\in C([x_0-\delta,x_0+\delta])\cap D((x_0-\delta,x_0+\delta))$. 故

$$f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=:r_1(x)=o(x-x_0),\quad x\to x_0,$$

其中 $r_1(x_0)=0$ 且 $r_1\in C([x_0-\delta,x_0+\delta])\cap D((x_0-\delta,x_0+\delta))$. 利用微分中值定理得到

$$\frac{r_1(x)-r_1(x_0)}{(x-x_0)^2-0}=\frac{r_1'(\xi)}{2(\xi-x_0)}=\frac{f'(\xi)-f'(x_0)}{2(\xi-x_0)},\quad \exists\,\xi\in(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

从而

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\eta)}{2}(x-x_0)^2,\quad \exists\,\eta\in(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

定理4.7.3. (Lagrange 型余项) $f\in C^n([x_0,x_0+\delta])\cap D^{n+1}((x_0,x_0+\delta))\Longrightarrow\forall\,x\in(x_0,x_0+\delta)$ 有

$$f(x)=P_n(x)+r_n(x),\tag{4.7.4}$$

这里

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\quad \exists\,\xi\in(x_0,x_0+\delta).\tag{4.7.5}$$

证: 引入函数

$$G(t):=f(x)-\sum_{0\le k\le n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k,\quad H(t)\in D((x_0,x_0+\delta))\text{ 且 }H(x)=0.$$

因为 $G\in C([x_0,x_0+\delta])\cap D((x_0,x_0+\delta)),\exists\,\xi\in(x_0,x_0+\delta)$ 满足

$$\frac{G(x_0)}{H(x_0)}=\frac{G(x)-G(x_0)}{H(x)-H(x_0)}=\frac{G'(\xi)}{H'(\xi)}=-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!H'(\xi)}(x-\xi)^n.$$

即

$$G(x_0)=-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!H'(\xi)}(x-\xi)^nH(x_0).\tag{4.7.6}$$

如果取函数 $G(t)=(x-t)^{n+1}$ 得到 (4.7.5). □

注4.7.4. (1) 根据**定理**4.7.2, f 在 x_0 处 n 阶可导 $\Rightarrow r_n(x)=o((x-x_0)^n)$. 根据**定理**4.7.3, $f\in C^n([x_0,x_0+\delta])\cap D^{n+1}((x_0,x_0+\delta))\Rightarrow r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^n$; 如果进一步 $f^{(n+1)}$ 有界则 $r_n(x)=o((x-x_0)^n)$.

(2) 若 $f\in C([a,b])$ 则存在 $[a,b]$ 上的多项式数列 $\{P_n(x)\}_{n\ge1}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}P_n(x)=f(x),\quad \forall\,x\in[a,b]\tag{4.7.7}$$

成立

证: 不妨假设 $[a,b]=[0,1]$. 定义多项式

$$P_n(x) := \sum_{0\le k\le n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

计算得到

$$\begin{aligned}|f(x)-P_n(x)| &= \left|\sum_{0\le k\le n} f(x)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}-P_n(x)\right| \\ &\le \sum_{0\le k\le n}\binom{n}{k}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|x^k(1-x)^{n-k}.\end{aligned}$$

由于 $f\in C([a,b])$, $\forall\,\epsilon>0$, $\exists\,\delta>0$, $\forall\,y\in(x-\delta,x+\delta)\cap[0,1]$ 有

$$|f(x)-f(y)|<\epsilon.$$

因此

$$\begin{aligned}|f(x)-P_n(x)| &\le \sum_{|x-k/n|<\delta}\binom{n}{k}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|x^k(1-x)^{n-k} \\ &\quad + 2M_f\sum_{|x-k/n|\ge\delta}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\ &\le \epsilon+\frac{2M_f}{\delta}\sum_{|nx-k|\ge n\delta}\delta\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\ &\le \epsilon+\frac{2M_f}{\delta}\sum_{0\le k\le n}\frac{(nx-k)^2}{n^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\ &= \epsilon+\frac{2M_f}{\delta n^2}nx(1-x) \;=\; \epsilon+\frac{2M_f}{\delta n}x(1-x).\end{aligned}$$

这里 $M_f:=\max_{[0,1]}|f|$. 令 $n\to+\infty$ 得到 $P_n(x)\to f(x)$. 作为练习请计算最后那个求和. □

§4.7.3 Cauchy 型余项

如果在 4.7.6 中取 $H(t)=x-t$, 则得到

定理4.7.5. (Cauchy 型余项) $f\in C^n([x_0,x_0+\delta])\cap D^{n+1}((x_0,x_0+\delta))\Longrightarrow\forall\,x\in(x_0,x_0+\delta)$

$$f(x)=P_n(x)+r_n(x), \tag{4.7.8}$$

这里

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0). \tag{4.7.9}$$

注4.7.6. (Maclaurin 公式) 该公式形式上可写成

$$f(x)=f(0)+\sum_{1\le k\le n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+r_n(x), \tag{4.7.10}$$

(1) f 在 0 处 n 阶可导 $\Longrightarrow r_n(x)=o(x^n)$.

(2) $f\in C^n([0,\delta])\cap D^{n+1}((0,\delta))\Longrightarrow r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ 或 $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}x(x-\xi)^n$. 此时若记作 $\xi=\theta x$, 其中 $\theta\in(0,1)$, 得到

$$f(x)=f(0)+\sum_{1\le k\le n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \tag{4.7.11}$$

或者

$$f(x)=f(0)+\sum_{1\le k\le n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)(1-\theta)^n}{n!}x^{n+1}. \tag{4.7.12}$$

例4.7.7. (1) 指数函数 e^x:

$$e^x=1+\sum_{1\le k\le n}\frac{x^k}{k!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \tag{4.7.13}$$

或

$$e^x=1+\sum_{1\le k\le n}\frac{x^k}{k!}+\frac{e^{\theta x}(1-\theta)^n}{n!}x^{n+1}. \tag{4.7.14}$$

(2) 对数函数 $\ln(1+x)$ $(x>-1)$:

$$\ln(1+x)=\sum_{1\le k\le n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}, \tag{4.7.15}$$

或

$$\ln(1+x)=\sum_{1\le k\le n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+\frac{(-1)^n(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}. \tag{4.7.16}$$

(3) 三角函数 $\sin x$:

$$\sin x=\sum_{0\le k\le n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\begin{cases}o(x^{2n+2}),\\ \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\sin(\theta x+\frac{2n+3}{2}\pi),\\ \frac{x^{2n+3}}{(2n+1)!}(1-\theta)^{2n+1}\sin(\theta x+\frac{2n+3}{2}\pi).\end{cases} \tag{4.7.17}$$

(4) 三角函数 $\cos x$:

$$\cos x=\sum_{0\le k\le n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}+\begin{cases}o(x^{2n+1}),\\ \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos(\theta x),\\ \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{(2n)!}(1-\theta)^{2n}\cos(\theta x).\end{cases} \tag{4.7.18}$$

(5) 函数 $(1+x)^\alpha$:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{0\le k\le n}\binom{\alpha}{k}x^k + \begin{cases} o(x^n), \\ \binom{\alpha}{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}x^{n+1}, \\ \binom{\alpha}{n+1}(n+1)(1-\theta)^n(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}x^{n+1}. \end{cases} \tag{4.7.19}$$

这里 $\binom{\alpha}{k} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)/k!$.

在例3.2.13 (3) 中我们断言 (但当时没有给出证明)

$$(1+x)^\alpha - \sum_{0\le k\le n-1}\frac{\alpha(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k \sim \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

当 $x\to 0$ 时. 事实上

$$\frac{(1+x)^\alpha - \sum_{0\le k\le n-1}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k}{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n} = 1 + \frac{o(x^n)}{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n} = 1+o(1)$$

当 $x\to 0$ 时. 特别的

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{0\le k\le n}(-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}}, \quad x > -1. \tag{4.7.20}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{0\le k\le n}x^k + \frac{x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+2}}, \quad 0 < x < 1. \tag{4.7.21}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{1\le k\le n}\frac{(-1)^{k-1}(2k-3)!!}{(2k)!!}x^k + \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+\frac{1}{2}}}. \tag{4.7.22}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{1\le k\le n}\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k)!!}x^k + \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+\frac{3}{2}}}. \tag{4.7.23}$$

定理4.7.8. (唯一性) 假设函数 f 在 x_0 处 n 阶可导且在 x_0 附近有

$$f(x) = a_0 + \sum_{1\le k\le n}a_k(x-x_0)^k + R_n(x)$$

这里 $R_n(x) = o((x-x_0)^n) \Longrightarrow$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad 0\le k\le n.$$

证: 根据假设条件有

$$a_0 + \sum_{1\le k\le n}a_k(x-x_0)^k + R_n(x) = f(x_0) + \sum_{1\le k\le n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n).$$

令 $x \to x_0$ 得到 $a_0 = f(x_0)$ 且

$$\sum_{1 \le k \le n} \left[a_k - \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \right] (x - x_0)^k = o((x - x_0)^k) - R_n(x).$$

特别地

$$\left[a_1 - \frac{f'(x_0)}{1!} \right] + \sum_{2 \le k \le n} \left[a_k - \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \right] (x - x_0)^{k-1} = o((x - x_0)^{n-1}).$$

令 $x \to x_0$ 得到 $a_1 = f'(x_0)$. 同样过程可得到 $a_k = f^{(k)}(x_0)/k!$. □

推论4.7.9. 假设函数 f 在 x_0 处 $(n+1)$ 阶可导 $\Longrightarrow$

$$P'_{n+1}(x; x_0, f) = P_n(x; x_0, f'), \tag{4.7.24}$$

即, 函数 f 在 x_0 处的 $n+1$ 阶Taylor 多项式等于 f' 在 x_0 处的 n 阶Taylor 多项式.

证: 根据定义得到

$$f(x) = P_{n+1}(x) + o((x - x_0)^{n+1}), \quad f'(x) = Q_n(x) + o((x - x_0)^n),$$

这里 $P_{n+1}(x) = P_{n+1}(x; x_0, f)$ 和 $Q_n(x) := P_n(x; x_0, f')$. 然而

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= \sum_{0 \le k \le n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \\ Q_n(x) &= \sum_{0 \le k \le n} \frac{(f')^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \\ &= \sum_{1 \le k \le n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!} (x - x_0)^{k-1} = P'_{n+1}(x). \quad \square \end{aligned}$$

例4.7.10. (1) 已知 $f(x) = \tan x$ 求 $P_5(x; 0, f)$.

解: 根据定义可令

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)} = \sum_{0 \le k \le 5} a_k x^k + o(x^5)$$

故有等式

$$\begin{aligned} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) &= a_0 + a_1 x + \left(a_2 - \frac{a_0}{2} \right) x^2 + \left(a_3 - \frac{a_1}{2} \right) x^3 \\ &+ \left(a_4 - \frac{a_2}{2} + \frac{a_0}{24} \right) x^4 + \left(a_5 - \frac{a_3}{2} + \frac{a_1}{24} \right) x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

由定理4.7.8 比较两边系数得到 $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_0 = 0$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = 0$, $a_5 = \frac{2}{15}$. 所以

$$\tan x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + o(x^5). \tag{4.7.25}$$

实际上可以证明(等学过级数理论后)

$$\tan x = \sum_{1\le k\le n} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!} B_k x^{2k-1} + o(x^{2n-1}), \tag{4.7.26}$$

这里 B_k 是第 k 个Bernoulli 数 (定义见下个例题). □

(2) 已知 $f(x) = x/(e^x-1)$ 求 $P_4(x;0,f)$.

解: 根据 (4.7.13) 得到

$$\frac{x}{e^x-1} = \frac{x}{x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)} = 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+o(x^4).$$

一般可以得到

$$\frac{x}{e^x-1} = 1-\frac{1}{2}x + \sum_{1\le k\le n} \frac{(-1)^{k-1}B_k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n}), \tag{4.7.27}$$

这里 B_k 就是所谓的**第 k 个 Bernoulli 数**, 比如

$$B_1 = \frac{1}{6},\ B_2 = \frac{1}{30},\ B_3 = \frac{1}{42},\ B_4 = \frac{1}{30},\ B_5 = \frac{5}{66},\ \cdots,\ B_k \in \mathbb{Q}.$$

回顾**Riemann ζ 函数**定义为

$$\zeta(z) := \sum_{k\ge 1} \frac{1}{k^z} = \lim_{n\to\infty} \sum_{1\le k\le n} \frac{1}{k^z},\quad \mathrm{Re}(z) > 1. \tag{4.7.28}$$

一个经典结果是

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_n \in \mathbb{Q}, \tag{4.7.29}$$

即所有 $\zeta(2n)$ 是有理数, 我们猜测 $\zeta(2n+1)$ 是无理数 (对前面几个已经证明了). □

(3) $f \in D^2([0,1])$, $|f(0)| \le 1$, $|f(1)| \le 1$, $|f''(x)| \le 2$ ($\forall\, x \in [0,1]$) $\Longrightarrow$ $|f'(x)| \le 3$, $\forall\, x \in [0,1]$.

证: 给定 $x \in (0,1)$ 根据Taylor 公式得到

$$\begin{aligned} f(1) &= f(x) + f'(x)(1-x) + \frac{f''(\xi)}{2}(1-x)^2,\quad \exists\, \xi \in (x,1),\\ f(0) &= f(x) + f'(x)(0-x) + \frac{f''(\eta)}{2}(0-x)^2,\quad \exists\, \eta \in (0,x). \end{aligned}$$

$$f(1) - f(0) = f'(x) + \frac{f''(\xi)}{2}(1-x)^2 - \frac{f''(\eta)}{2}x^2$$

$$
\begin{aligned}
|f'(x)| &= \left|f(1)-f(0)-\frac{f''(\xi)}{2}(1-x)^2+\frac{f''(\eta)}{2}x^2\right| \\
&\le |f(1)|+|f(0)|+|1-x|^2+|x|^2 \\
&\le 2+x^2+(1-x)^2 \;=\; 2x^2-2x+3 \;\le\; 3.
\end{aligned}
$$

如果 $x=0$ 或 $x=1$, 同样的不等式也成立. □

(4) 假设 $f \in C^{n+1}((a-\delta, a+\delta))$, $-\delta < h < \delta$, $f^{(n+1)}(a) \neq 0$, 且

$$f(a+h) = \sum_{0\le k\le n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta_h h)}{n!}h^n, \quad 0<\theta_h<1.$$

证明

$$\lim_{h\to 0}\theta_h = \frac{1}{n+1}.$$

证: 根据Taylor 展开得到

$$f(a+h) = \sum_{0\le k\le n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}h^{n+1} + o(h^{n+1}).$$

由**定理***4.7.8* 得到

$$\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta_h h) = \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a) + o(h^{n+1}).$$

故

$$f^{(n)}(a+\theta_h h) = f^{(n)}(a) + \frac{h}{n+1}f^{(n+1)}(a) + o(h).$$

两边同除以 h 推出

$$
\begin{tikzcd}
\frac{f^{(n)}(a+\theta_h h)-f^{(n)}(a)}{h} \arrow[r, equal] \arrow[d, "h\to 0"'] & \frac{f^{(n+1)}(a)}{n+1}+o(1) \arrow[d, "h\to 0"] \\
\lim_{h\to 0}\theta_h \lim_{h\to 0}\frac{f^{(n)}(a+\theta_h h)-f^{(n)}(a)}{\theta_h h} \arrow[r, equal] & \frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(a)
\end{tikzcd}
$$

因此得到 $\lim_{h\to 0}\theta_h = 1/(n+1)$. □

(5) $f \in D^2([a,b])$, $f(a)=f(b)=0$, $|f''(x)| \le 8\ (\forall\, x\in[a,b]) \Longrightarrow$

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \le (b-a)^2.$$

证: 根据Taylor 公式得到 $\exists\, \xi, \eta \in (a,b)$ 满足

$$
\begin{aligned}
f(a) &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f'\left(\frac{a+b}{2}\right)}{1!}\left(\frac{a-b}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{2!}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2, \\
f(b) &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f'\left(\frac{a+b}{2}\right)}{1!}\left(\frac{b-a}{2}\right) + \frac{f''(\eta)}{2!}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.
\end{aligned}
$$

化简得到

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi)+f''(\eta)}{4}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

由条件 $|f''|\le 8$ 得到

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\left|\frac{f''(\xi)+f''(\eta)}{4}\right|\le\frac{(b-a)^2}{4}\times\frac{8+8}{4}=(b-a)^2.\quad\square$$

§4.7.4 Taylor 级数

目前为止Taylor 公式中会有余项 $r_n(x)$, 即

$$f(x)=P_n(x)+r_n(x).$$

一个很自然的问题是什么时候余项消失. 但是根据余项定义, 要使余项消失首要的前提是函数本身的高阶导数都存在. 那么问题可如下陈述. 如果 $f\in C^\infty((x_0-\delta,x_0+\delta))$, 则对任意 $n\in\mathbb{N}_+$, 存在 f 在 x_0 处的 n 阶Taylor 多项式 $P_n(x)$

$$P_n(x)\equiv P_n(x;x_0,f)=\sum_{0\le k\le n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

什么时候如下极限

$$\lim_{n\to\infty}P_n(x)=f(x)\quad ???$$

存在.

定义4.7.11. 假设对每个 $n\in\mathbb{N}_+$ 函数 f 在 x_0 处是 n 阶可导的, 则其在x_0 **处的Taylor 级数**定义为

$$P_f(x)\equiv P_\infty(x;x_0,f)=\sum_{k\ge 0}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=\lim_{n\to\infty}P_n(x;x_0,f).\tag{4.7.30}$$

称函数 f 在x_0 **处实解析**如果存在 x_0 的邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 使得对任何 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 极限 $\lim_{n\to\infty}P_n(x)$ 都存在且满足

$$f(x)=P_f(x).\tag{4.7.31}$$

称函数 f 在区间 I 内实解析, 记作 $f\in C^\omega(I)$, 如果 f 在 I 中的每个点处都是实解析.

注4.7.12. (1) 函数 f 在 x_0 处实解析 $\Rightarrow$ 函数 f 在 x_0 处光滑 (即 f 的各阶导数都存在).

(2) 函数 f 在 x_0 处光滑$\not\Rightarrow$ 函数 f 在 x_0 处实解析. 比如考察如下例子

$$f(x)=\begin{cases}e^{-1/x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

根据例4.3.4 (2) 得到

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases} Q_{2n}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

单数

$$P_f(x)=\sum_{k\ge 0}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=0$$

对任何 x 靠近 0 都成立, 这是不可能的.

(3) 利用级数理论可以证明

$$\sin x=\sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!},\quad \cos x=\sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!},$$

$$e^x=\sum_{k\ge 0}\frac{x^k}{k!},\quad \ln(1+x)=\sum_{k\ge 1}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k},$$

$$\tan x=\sum_{k\ge 1}\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)B_k}{(2k)!}x^{2k-1},\quad |x|<\frac{\pi}{2}.$$

(4) **(Bernstein)** $f\in D^\infty([a,b])$ 且 $f^{(k)}(x)\ge 0$ ($\forall\, x\in[a,b]$) $\Rightarrow \forall\, x,x_0\in(a,b)$ 满足 $|x-x_0|<b-x_0$, 有

$$f(x)=\sum_{k\ge 0}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

定理4.7.13. 假设函数 $f\in D^\infty((x_0-\delta,x_0+\delta))$ 且 $|f^{(n)}(x)|\le M^n$ ($\exists\, M>0$, $\forall\, x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, $\forall\, n\in\mathbb{N}_+$) $\Rightarrow$ 得到

$$f(x)=\sum_{k\ge 0}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,\quad \forall\, x\in(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

证: 根据Taylor 公式得到

$$\left|f(x)-\sum_{0\le k\le n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\le\frac{M^{n+1}\delta^{n+1}}{(n+1)!}.$$

当 $n\to\infty$ 得到结论成立. □

例4.7.14. 求函数

$$f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2},\quad -\pi<x<\pi$$

的Taylor 级数.

解: 因为 $f^{(n)}(x)\ge 0$ 根据**定理**4.7.13 得到

$$\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}=\sum_{k\ge 0}\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k}=\sum_{k\ge 0}\frac{\zeta(2k+2)}{\pi^{2k+2}}(4k+2)x^{2k}$$

这里
$$f^{(2k)}(0) = 2\sum_{n\geq 1}\frac{(2k+1)!}{(n\pi)^{2k+2}} = 2(2k+1)!\frac{\zeta(2k+2)}{\pi^{2k+2}}.$$
$f^{(2k+1)} = 0.$ □

例4.7.15. (1) 回顾**Bernoulli** 数的定义
$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n\geq 0}\frac{b_n}{n!}x^n = 1-\frac{1}{2}x+\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}B_n}{(2n)!}x^{2n}, \tag{4.7.32}$$
这里 $b_0 = 1, b_1 = -\frac{1}{2}, b_{2n+1} = 0\ (n\geq 1)$, 和 $b_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{0\leq i\leq n-1}\binom{n+1}{i}b_i$.

(2) 类似地可以定义**Euler** 数
$$\frac{2e^x}{e^{2x}+1} = \sum_{n\geq 0}\frac{e_n}{n!}x^n = 1+\sum_{n\geq 1}\frac{E_n}{(2n)!}x^{2n}, \tag{4.7.33}$$
其中 $e_{2n+1} = 0\ (n\geq 1)$ 和 $e_{2n} = -\sum_{0\leq i\leq n-1}\binom{2n}{2i}e_{2i}$.

§4.8 微分学的应用

这节主要是利用微分中值定理来研究函数的性质.

§4.8.1 单调函数和一阶导数

定理4.8.1. $f\in C([a,b])\cap D((a,b)) \Rightarrow$ 在 (a,b) 内有

(1) $f' > 0 \Rightarrow f$ 严格递增 $\Rightarrow f' \geq 0$.

(2) $f' \geq 0 \Rightarrow f$ 递增 $\Rightarrow f' \geq 0$.

(3) $f' \equiv 0 \Rightarrow f$ 为常数 $\Rightarrow f' \equiv 0$.

(4) $f' \leq 0 \Rightarrow f$ 递减 $f' \leq 0$.

(5) $f' < 0 \Rightarrow f$ 严格递减 $\Rightarrow f \leq 0$.

证: (1) $\forall\, x_1 < x_2, \exists\, \xi \in (x_1, x_2) \subset (a,b)$, 使得
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f'(\xi)}{1} > 0 \Longrightarrow f \text{ 严格递增}.$$
假设函数 f 严格递增. $\forall\, x, x_0 \in (a,b)$, 只要 $x \neq x_0$ 有
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0.$$
即得到 $f'(x_0) \geq 0$.

(2) 此时 $f(x_2)-f(x_1) \geq 0$. 余下证明和 (1) 一样.

同理可证 (3), (4) 和 (5). □

注4.8.2. (1) 函数 f 严格递增 $\not\Rightarrow$ $f' \geq 0$. 比如考虑函数 $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$.

(2) $f \in C([0,+\infty)) \cap D((0,+\infty))$, $f(0) = 0$, $f(x) \geq 0$, 且 $f(x) \geq f'(x)$ $(x > 0) \Rightarrow$ 在 $[0,+\infty)$ 上 $f \equiv 0$

证: 定义函数 $F(x) := e^{-x}f(x)$. 则得到 $F'(x) = [f'(x) - f(x)]e^{-x} \leq 0$, 从而 $F(x) \leq F(0) = 0$. 因此 $F \equiv 0$ 即 $f \equiv 0$. □

(3) $f \in D([1,+\infty))$, $f'(x) \geq 0$, 且 $f(1) = 1 \Rightarrow$

$$F(x) := \frac{f(x)}{1+f(x)} \text{ 递增}, \quad G(x) := \frac{f(x)}{[1+f(x)]^2} \text{ 递减}.$$

证: 计算可得

$$F' = \frac{f'}{(1+f)^2} \geq 0, \quad G' = \frac{f'(1-f^2)}{(1+f)^4} \leq 0$$

这是因为 $f(x) \geq f(1) = 1$. □

§4.8.2 凸函数和一阶、二阶导数

在 §3.1.5 已经引入了凸函数的概念, 在此我们重新给出定义.

定义4.8.3. 假设函数 f 定义在闭区间 $[a,b]$ 上. 称函数 f 在 $[a,b]$ 上是**凸的**如果不等式

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \tag{4.8.1}$$

对任意 $x_1, x_2 \in [a,b]$ 和任意 $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1$ 满足 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ 都成立. 如果不等式 (4.8.1) 是严格不等式 (对 $x_1 \neq x_2$), 则称函数 f 在 $[a,b]$ 上是**严格凸的**. 若函数 $-f$ 是凸的 (或严格凸的) 则称函数 f 是**凹的**(或**严格凹的**).

注4.8.4. (1) 下面命题等价: 其中 $x_1 < x < x_2$,

$$\text{函数 } f \text{ 在 } [a,b] \text{ 上是凸的}$$

$$\Updownarrow \clubsuit$$

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1) = f(x_2) - \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x_2-x)$$

$$\Updownarrow \spadesuit$$

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

证: $\spadesuit$ $\Downarrow$. 根据假设得到

$$f(x)(x_2-x_1) \leq [f(x_2)-f(x_1)](x-x_1) + (x_2-x_1)f(x_1)$$

从而

$$x_2[f(x)-f(x_1)] \leq [f(x_2)-f(x_1)](x-x_1) + x_1[f(x)-f(x_1)].$$

即
$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-a} \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$
用另一个等式可推出第二个不等式.

♠ ⇑. 显然成立.

♣. 任意 $x_1 \le x \le x_2$ 都可以写成 $x = tx_1 + (1-t)x_2$ $(0 \le t \le 1)$. 从而得到
$$f(tx_1+(1-t)x_2) \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(tx_1(1-t)x_2 - x_1) + f(x_1)$$
$$= (1-t)[f(x_2)-f(x_1)] + f(x_1) = tf(x_1)+(1-t)f(x_2). \quad \square$$

(2) 函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上是凸的 $\Rightarrow \forall\, [c,d] \subset [a,b]$ 满足 $a<c<d<b$, 函数 f 在 $[c,d]$ 上是Lipschitz 的. 特别地, 函数 f 在开区间 (a,b) 内是连续的.

证: $\forall\, c \le x < y \le d$, 有
$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \le \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(d)-f(y)}{d-y} \le \frac{f(b)-f(d)}{b-d}.$$
故
$$|f(y)-f(x)| \le M|y-x|, \quad M := \max\left\{\left|\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\right|, \left|\frac{f(b)-f(d)}{b-d}\right|\right\}. \quad \square$$

(3) 函数 f 在 $[a,b]$ 上是凸的 $\not\Rightarrow$ $f \in C([a,b])$. 比如函数
$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0<x<1, \\ 0, & x=0, \\ 2, & x=1. \end{cases}$$

(4) 函数 f 定义在 $[a,b]$ 上 $\Rightarrow$
$$f \text{ 是凸的} \iff f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \ \forall\, x_1, x_2 \in [a,b]. \tag{4.8.2}$$

证: $\Rightarrow$: 取 $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$.

$\Leftarrow$: 令
$$L(x) := f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$
首先证明在闭区间 $[a,b]$ 上有不等式 $f \le L$ 成立. 定义函数 $g(x) := f(x) - L(x)$, 则 $g \in C([a,b])$. 从而根据闭区间上连续函数的最值性得到 $M_g := \max_{[a,b]} g$ 存在且 $M_g = g(x_0)$ 对某个 $x_0 \in [a,b]$ 成立. 如果 $x_0 = a$ 或 b 则 $M_g = 0$. 如果 $x_0 \in (a,b)$, 则 $x_0 \in (a,(a+b)/2]$ 或 $[(a+b)/2, b)$, 不妨假设 $a < x_0 \le (a+b)/2$. 定义
$$x_0^* := 2x_0 - a \in (a,b].$$

从而得到 $M=g(x_0)=g((a+x_0^*)/2)\le[g(a)+g(x_0^*)]/2\le M/2$, 所以 $M=0$. □

(5) 函数 f 在 $[a,b]$ 上是凸的且 $\max_{[a,b]}f=f(\xi)$ 对某个 $\xi\in(a,b)$ 成立 $\Rightarrow$ $f\equiv f(\xi)$.

证: 因为 $\xi\in(a,b)$, $\exists\,\lambda\in(0,1)$ 使得 $\xi=\lambda x+(1-\lambda)y$ 成立. 根据凸性得到

$$\begin{aligned} f(\xi) &= f(\lambda x+(1-\lambda)y) \le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\\ &\le \lambda M_f+(1-\lambda)M_f = M_f = f(\xi)\end{aligned}$$

由于 $\lambda\in(0,1)$ 必有 $f(x)=f(y)=f(\xi)$ 即 $f\equiv f(\xi)$. □

(6) 函数 f 在 $[a,b]$ 上是凸的且 $x\in(a,b)\Rightarrow$ 单侧导数 $f'_-(x)$ 和 $f'_+(x)$ 都存在且 $f'_-(x)\le f'_+(x)$.

证: $\forall\,x_1,x_2\in(a,b)$ 满足 $x_1<x<x_2$ 推出

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

令

$$g(y):=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{f(y)-f(x)}{y-x},\quad y<x.$$

对任何 $a<y_1<y_2<x$ 得到

$$g(y_1)=\frac{f(x)-f(y_1)}{x-y_1}\le\frac{f(x)-f(y_2)}{x-y_2}=g(y_2).$$

即函数 g 关于 y 单调递增, 从而左导数 $f'_-(x)$ 存在. 类似的函数

$$h(y):=\frac{f(y)-f(x)}{y-x},\quad x<y$$

关于 y 单调递减, 从而右导数 $f'_+(x)$ 存在. 不等式 $f'_-(x)\le f'_+(x)$ 显然成立. □

(7) 凸的$\not\Rightarrow$ 可导的. 比如函数 $f(x)=|x|$.

(8) 假设函数 f 在 (a,b) 内是凸的. 可以证明集合

$$\{x\in(a,b): f\text{ 在 }x\text{ 处不可导的}\}$$

是可数的.

定理4.8.5. 假设函数 $f\in C([a,b])\cap D((a,b))\Rightarrow$

$$f\text{ 在 }[a,b]\text{ 上是凸的}\iff f'\text{ 在 }(a,b)\text{ 上递增}.\tag{4.8.3}$$

证: $\Rightarrow$: $\forall\,a<x_1<x_2<b$, $\forall\,0<\lambda<1$, 令 $x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$. 由于 f 是凸的得到

$$f(x)-f(x_1)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)-f(x_1)=(1-\lambda)[f(x_2)-f(x_1)].$$

同样可得

$$f(x)-f(x_2)\le -\lambda[f(x_2)-f(x_1)].$$

即

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

两边求极限得到

$$f'(x_1)\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le f'(x_2). \tag{4.8.4}$$

$\Leftarrow$: $\exists\,\eta_1\in(x_1,x)$ 和 $\exists\,\eta_2\in(x,x_2)$ 满足

$$f(x_1)-f(x)=f'(\eta_1)(x_1-x),\quad f(x_2)-f(x)=f'(\eta_2)(x_2-x).$$

所以

$$\begin{aligned}
f(x)-[\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)] &= \lambda f'(\eta_1)(x-x_1)+(1-\lambda)f'(\eta_2)(x-x_2)\\
&\le \lambda f'(\eta_1)(1-\lambda)(x_2-x_1)+(1-\lambda)f'(\eta_2)\lambda(x_1-x_2)\\
&= \lambda(1-\lambda)(x_2-x_1)[f'(\eta_1)-f'(\eta_2)]\ \le\ 0.\quad\square
\end{aligned}$$

注4.8.6. (1) $f\in C([a,b])\cap D((a,b))$ 且 f' 在 (a,b) 内严格递增 $\Rightarrow f$ 在 $[a,b]$ 上严格凸的. 但是反之则不成立. 比如考察函数

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<1,\\ -1, & x=0,\\ 2, & x=1.\end{cases}$$

(2) $f\in C([a,b])\cap D((a,b))\Rightarrow$

$$f\text{ 在 }[a,b]\text{ 上是凸的}\iff\left(\begin{array}{c}\forall\, a<x_1,x_2<b\text{ 有不等式成立}\\ f(x_2)\ge f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1)\end{array}\right) \tag{4.8.5}$$

证: $\Rightarrow$: 对 $\forall\,x<x_1<y$ 根据不等式 (4.8.4) 得到

$$f'(x)\le\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}\le f'(x_1)\le\frac{f(y)-f(x_1)}{y-x_1}\le f'(y).$$

$\Leftarrow$: 对 $\forall\,x_1<x<x_2$ 有不等式

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le f'(x)\le\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x_1}.$$

利用下面的初等不等式

$$\frac{m}{k}\le\frac{k+n}{k+\ell}\le\frac{n}{\ell},\quad\forall\,k,\ell>0,\ \frac{m}{k}\le\frac{n}{\ell},$$

得到

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

根据注4.8.4 (1) 知道 f 是凸的. $\square$

综合以上结果得到

定理4.8.7. 假设函数 $f \in C([a,b]) \cap D^2((a,b)) \Rightarrow$

(1) 函数 f 在 $[a,b]$ 上是凸的 $\Leftrightarrow$ 在 (a,b) 内 $f'' \geq 0$

(2) 在 (a,b) 内 $f'' > 0 \Rightarrow$ 函数 f 在 $[a,b]$ 上是严格凸的.

注4.8.8. (1) **Jensen 不等式**: 函数 f 在 $[a,b]$ 上是凸的 $\Rightarrow \forall\, x_1, \cdots, x_n \in [a,b]$, $\forall\, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in [0,1]$ 满足 $\sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i = 1$, 有

$$f\left(\sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i f(x_i). \tag{4.8.6}$$

(2) 函数 $\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内是凸的.

(3)**Young 不等式**: 实数 $a,b \geq 0$, 实数 $p,q > 0$ 且满足 $1/p + 1/q = 1 \Rightarrow$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}. \tag{4.8.7}$$

(4) **Hölder 不等式**: 实数 $a_i, b_i > 0$ ($1 \leq i \leq n$), 实数 $p,q > 0$ 且满足 $1/p + 1/q = 1 \Rightarrow$

$$\sum_{1\leq i\leq n} a_i b_i \leq \left(\sum_{1\leq i\leq n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{1\leq i\leq n} b_i^q\right)^{1/q}. \tag{4.8.8}$$

定义4.8.9. 假设函数 f 定义在开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内. 称 x_0 是函数f **的拐点** 如果函数 f 在 $(x_0-\delta, x_0)$ 内是凸的但在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内是凹的, 或者在 $(x_0-\delta, x_0)$ 内是凹的但在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内是凸的.

例4.8.10. (1) $f(x) = x^3$.

(2) $f(x) = x^{1/3}$.

(3) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $f'(x) = -2x/(1+x^2)^2$, $f''(x) = 2(3x^2-1)/(1+x^2)^3$.

(4) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, $f'(x) = 2(1-x^2)/(1+x^2)^2$, $f''(x) = 4x(x^2-3)/(1+x^2)^3$.

定理4.8.11. 给定函数 $f \in C((x_0-\delta, x_0+\delta)) \Rightarrow$

(1) 假设函数 $f \in D((x_0-\delta, x_0)) \cap D((x_0, x_0, x_0+\delta))$. 如果 f' 在 $(x_0-\delta, x_0)$ 内递增但在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内递减, 或 f' 在 $(x_0-\delta, x_0)$ 内递减但在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内递增, 则 x_0 是拐点.

(2) 假设函数 $f \in D^2((x_0-\delta, x_0)) \cap D((x_0, x_0+\delta))$. 如果在 $(x_0-\delta, x_0)$ 内 $f'' \geq 0$ 但在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内 $f'' \leq 0$, 或在 $(x_0-\delta, x_0)$ 内 $f'' \leq 0$ 但在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内 $f'' \geq 0$, 则 x_0 是拐点.

(3) 假设函数 $f \in D^2((x_0-\delta, x_0+\delta))$. 如果 x_0 是拐点, 则 $f''(x_0)=0$.

证: (1) 和 (2) 显然成立. 对 (3), 不妨假设函数 f 在 $(x_0-\delta, x_0)$ 内是凸的而在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内是凹的. 则 f' 在 $(x_0-\delta, x_0)$ 内是单调递增而在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内单调递减. 从而 x_0 是函数 f 的极值点, 故根据Fermat 引理得到 $f''(x_0)$. □

注4.8.12. (1) x_0 是拐点 $\not\Rightarrow$ $f''(x_0)=0$. 比如 $f(x)=x^{1/3}$.

(2) $f''(x_0)=0 \not\Rightarrow x_0$ 是拐点. 比如 $f(x)=x^4$.

§4.8.3 极值和一阶、二阶导数

定理4.8.13. (必要条件) 假设函数 f 定义在开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内, x_0 是极值点 $\Rightarrow$ 函数 f 要么在 x_0 处不可导, 要么 $f'(x_0)=0$.

例4.8.14. (1) $f(x)=x^3$, $x_0=0$.

(2) $f(x)=\begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 2x, & x<0. \end{cases}$

定理4.8.15. (1) 假设函数 $f \in C((x_0-\delta, x_0+\delta)) \cap D(\mathring{U}(x_0,\delta))$.

(1.1) 在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内 $f'(x)(x-x_0) \leq 0 \Rightarrow x_0$ 是极大值点.

(1.2) 在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内 $f'(x)(x-x_0) \geq 0 \Rightarrow x_0$ 是极小值点.

(1.3) 在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内 $f'(x)>0$ (或 <0) $\Rightarrow x_0$ 不是极值点.

(2) 假设函数 f 在 x_0 处 2 阶可导且 $f'(x_0)=0$.

(2.1) $f''(x_0)<0 \Rightarrow x_0$ 是极大指点.

(2.2) $f''(x_0)>0 \Rightarrow x_0$ 是极小值点.

(2.3) $f''(x_0)=0 \Rightarrow$ 无法判断.

证: 由Taylor 公式得到

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$$

即

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=\frac{1}{2}f''(x_0)+o(1), \quad x \to x_0.$$

如果 $f''(x_0)<0, \exists\, \delta>0$ 满足

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}<0, \quad \forall\, x \in (x_0-\delta, x_0+\delta).$$

所以 $f(x)<f(x_0)$ 对任何 $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ 都成立, 故 x_0 是极大值点. 同理可证当 $f''(x_0)>0$ 时, x_0 是极小值点. 但是当 $f''(x_0)=0$, 上述方法无法判断 x_0 是否是极值点. □

推论4.8.16. 假设函数 f 在 x_0 处 n 阶可导, $f^{(k)}(x_0)=0\,(1\le k\le n-1)$, 但 $f^{(n)}(x_0)\ne 0$.

(1) 如果 n 是偶数 $\Rightarrow x_0$ 是极值点. 进一步如果 $f^{(n)}(x_0)>0$ (或 $f^{(n)}(x_0)<0$), 则 x_0 是极大指点 (或极小值点).

(2) 如果 n 是奇数 $\Rightarrow x_0$ 不是极值点.

证: 根据Taylor 公式得到

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

即

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)+o(1),\quad x\to x_0.$$

此时结论显而易见. □

注4.8.17. (1) 已知函数 $f\in C([a,b])$ 求 $M_f=\max_{[a,b]}f=f(\xi)$ 和 $m_f=\min_{[a,b]}f=f(\eta)$. 如果 $\xi,\eta\in(a,b)$, 则 ξ,η 都是内点从而 $f'(\xi)=f'(\eta)=0$, 假设 f 在 ξ,η 处可导. 否则的话 ξ,η 都是 $[a,b]$ 的端点. 因此

$$M_f/m_f:=\max/\min\left\{f(\text{端点}),f(\text{驻点}),f(\text{不可导点})\right\}.$$

(2) 求函数 $f(x)=x-2\sin x$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 上的最值.

解: 根据 $f'(x)=1-2\cos x$ 计算得到驻点为 $\pi/3,5\pi/3$. 结合端点处的值得到

$$M_f=f(5\pi/3)=\frac{5\pi}{3}+\sqrt{3},\quad m_f=f(\pi/3)=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}.\ \square$$

(3) 假设函数 $f\in C(I)$, 这里 $I=(a,b]$, $[a,b)$, (a,b) 或 $[a,b]$, 或者甚至是 $(a,+\infty)$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,+\infty)\Rightarrow M_f$ 或 m_f 可能不存在.

(4) 求函数 $f(x)=xe^{-x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的最值.

解: 根据 $f'(x)=(1-2x^2)e^{-x^2}$ 计算得到驻点为 $\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2$. 函数 f 在 $(-\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)$ 内单调递增而在 $(-\infty,-\sqrt{2}/2)\cup(\sqrt{2}/2,+\infty)$ 内单调递减. 结合端点处的值得到

$$\sup_{\mathbb{R}}f=\max_{\mathbb{R}}f=f(\sqrt{2}/2)=\frac{1}{\sqrt{2e}},\quad \inf_{\mathbb{R}}f=\min_{\mathbb{R}}f=f(-\sqrt{2}/2)=\frac{-1}{\sqrt{2e}}.\ \square$$

(5) 假设函数 $f\in C(I)$ 且 $x_0\in\mathring{I}$ 是 I 内唯一的极值点 $\Rightarrow x_0$ 是 I 的最值点.

证: 不妨假设 x_0 是函数 f 的唯一极大值点. $\forall\, x\in I$ 且 $x\ne x_0$, 考虑闭区间 $[x,x_0]$ 和 $[x_0,x]$. 为了方便期间不妨进一步假设 $x<x_0$, 从而只要考虑闭区间 $[x,x_0]$ 即可. 根据闭区间上连续函数的最值性得到存在 $\xi\in[x,x_0]$ 满足 $f(\xi)=\max_{[x,x_0]}f$. 如果 $\xi\ne x_0$, 则得到另一个极大值, 这就和已知假设矛盾从

而 $\xi = x_0$. 根据 x 的任意性知道 $\forall\, x \in \mathring{I}$ 有 $f(x) \le f(x_0)$ 成立. 根据函数的连续性可知 $f(x) \le f(x_0)$ 对 $\forall\, x \in I$ 都成立. □

(6) 给定函数 $y = f(x), \alpha < x < \beta$, 其中 $f \in C((\alpha, \beta))$. 考察其图像

$$S = \{(x, f(x)) : \alpha < x < \beta\}.$$

称直线 $L : y = ax + b$ 是曲线 S 的**渐近线**如果

$$\lim_{(x, f(x)) \to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0. \tag{4.8.9}$$

这里 "$(x, f(x)) \to \infty$" 表示 $\lim_{x\to\alpha+}[x^2 + |f(x)|^2] = +\infty$ 或 $\lim_{x\to\beta-}[x^2 + |f(x)|^2] = +\infty$.

(1) α 有限: $\lim_{x\to\alpha+}[x^2 + |f(x)|^2] = +\infty$ 推出 $\lim_{x\to\alpha+} f(x) = \infty$. 此时直线 $L : x = \alpha$ 称为**垂直渐近线**.

(2) β 有限: $\lim_{x\to\beta-}[x^2 + |f(x)|^2] = +\infty$ 推出 $\lim_{x\to\beta-} f(x) = \infty$. 此时直线 $L : x = \beta$ 也称为**垂直渐近线**.

(3) $\alpha = -\infty\ \beta = +\infty$: 此时得到

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax]. \tag{4.8.10}$$

当 $a = 0$ 时, 称直线 $L : y = b$ 为**水平渐近线**; 当 $a \ne 0$ 时, 称直线 $L : y = ax + b$ 为**一般渐近线**或**斜渐近线**.

综上所述, 最多有两条水平渐近线或斜渐近线, 但是可以有许多条垂直渐近线.

例4.8.18. 求函数 $f(x) = x^3/(x+3)(x-1)$ 的渐近线. 显然垂直渐近线为 $x = -3$ 或 $x = 1$. 根据

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2 + 3x}{(x+3)(x-1)} = -2$$

得到斜渐近线为 $y = x - 2$.

§4.8.4 函数画图

§4.8.5 Newton 方法

§4.9 参考文献

1. Diamond, Fred; Shurman, Jerry. *A first course in modular forms*, Graduate Texts in Mathematics **228**, Springer-Verlag, New York, 2005. xvi+436 pp. ISBN: 0-387-23229-x

2. 徐森林, 薛春华编著: **数学分析**, 清华出版社, 2005.

3. 张福保, 薛金美, 潮小李 主编: **数学分析讲义**, 科学出版社, 2019.

4. 梅加强 编著: **数学分析**, 高等教育出版社, 2015.

5. 邓建平 编: **微积分 I 和 II**, 科学出版社, 2019.

6. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis I*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+574 pp. ISBN: 3-540-40386-8

7. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis II*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xvi+681 pp. ISBN: 3-540-40633-6

8. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis I*, Translated from the 1988 German original by Gary Brookfield, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. xiv+426 pp. ISBN: 3-7643-7153-6

9. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis II*, Translated from the 1999 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. xii+400 pp. ISBN: 978-3-7643-7472-3; 3-7643-7472-3

10. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis III*, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. xii+468 pp. ISBN: 978-3-7643-7479-2; 3-7643-7479-2

11. 汪林 著: **数学分析中的问题和反例**, 现代数学基础 **56**, 高等教育出版社, 2015.

12. 裴礼文 编著: **数学分析中的典型问题与方法** (第二版), 高等教育出版社, 2015.

13. 朱尧辰 编著: **数学分析例选通过范例学技巧**, 哈尔滨工业大学出版社, 2013.

14. 周民强 编著: **数学分析习题演练** (第一、二、三册), 科学出版社, 2018.

15. 吉米多维奇 著 (李荣涑, 李植 译): **数学分析习题集** (根据 2010 年俄文版翻译), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.

§4.10 极限和微分理论小结

这节主要是把第二章至第四章做个小结.

§4.10.1 数列和函数极限

重点掌握 $\epsilon - N$ 和 $\epsilon - \delta$ 方法和熟练运用几类求极限的技巧.

I. 用定义证明.-

II. 求极限若干方法.

III. Stolz 定理.

IV. 递推形式.

§4.10.2 函数的连续性

§4.10.3 函数的可导性

§4.10.4 微分中值定理

第五章　积分理论

格物, 致知之事也; 诚意, 力行之事也. 物者何? 即所谓本末之物也. 身、心、意、知、家、国、天下皆物也, 天地万物皆物也, 日用常行之事皆物也. 格者, 即物而穷其理也. — 曾国藩家书 ·《致诸弟》道光二十二年十月二十六日

§5.1　不定积分

回顾下导数的定义:

$$\mathbf{L}: D((a,b)) \longrightarrow \{(a,b) \text{ 上的函数}\}, \quad f \longmapsto f,$$

且满足 Leibniz 法则

$$\mathbf{L}(fg) = f\mathbf{L}(g) + g\mathbf{L}(f), \quad \mathbf{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathbf{L}(f) + \beta\mathbf{L}(g).$$

一个很自然的问题是 $\mathbf{L}$ 的反函数是什么? 首席看两个例子:

$$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = x^n, \quad \left(\frac{1}{n+1}x^{n+1} + 3\right)' = x^n.$$

因此若反函数 $\mathbf{L}^{-1}$ 存在, 则必不唯一!

§5.1.1　原函数和不定积分

定义5.1.1. 称 F 是定义在区间 I 上的函数 f 的**原函数**如果 $F \in D(I)$ 且

$$F'(x) = f(x), \quad x \in I.$$

注5.1.2. (1) 给定函数 f, 改变定义域 I 会给出不同的原函数:

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad x \in \mathbb{R}, \quad \left(\arctan\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+x^2} \quad x \neq 0.$$

(2) 原函数不是唯一的.

性质5.1.3. 如果函数 F_1 和 F_2 是定义在区间 I 上的函数 f 的原函数, 则 $F_1(x) - F_2(x)$ 是常数, 对任何 $x \in I$ 都成立.

证: 令 $G := F_1 - F_2$, 则在 I 上成立 $G' \equiv 0$. 根据**定理**4.5.5 得到 $G = c$. □

定义5.1.4. 给定区间 I 上的函数 f, 定义

$$\int f(x)dx = \{\text{定义在 } I \text{ 上的所有 } f \text{ 的原函数}\}.$$

如果 F 是原函数则根据性质5.1.3 得到

$$\int f(x)\,dx = \{F + C : C \in \mathbb{R}\}.$$

为了方便起见一般记作

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C. \tag{5.1.1}$$

根据定义得到

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x), \quad \int F'(x)\,dx = F(x) + C. \tag{5.1.2}$$

§5.1.2 基本不定积分表 I

基本初等函数的原函数如下

$$\int \frac{1}{x}dx \equiv \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$$\int 0\,dx = C, \quad \int 1\,dx = x + C,$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{1+\alpha}x^{1+\alpha} + C \quad (\alpha \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx \equiv \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C,$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx \equiv \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \equiv \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(1+\sqrt{1+x^2}) + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \equiv \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1), \quad \int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx \equiv \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx \equiv \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C,$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C, \quad \int \cosh x\,dx = \sinh x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2 x}dx \equiv \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C,$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x}dx \equiv \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C.$$

§5.2 不定积分的基本性质

不定积分最重要的基本性质是分部积分法, 这个给出计算复杂不定积分的一个非常有效的方法和技巧.

§5.2.1 线性性质

定理5.2.1. 如果

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad \int g(x)dx = G(x) + C,$$

则

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx = [\alpha F(x) + \beta G(x)] + C.$$

推论5.2.2. 如果

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

则对 $\forall\, a \neq 0$ 和 $\forall\, b$, 有

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C. \tag{5.2.1}$$

证: 令 $t := ax + b$, 得到

$$\frac{d}{dx}F(ax+b) = \frac{d}{dt}F(t) \cdot \frac{dt}{dx} = F'(t) \cdot a = af(ax+b). \quad \square$$

例5.2.3. (1) 对 $\forall\, a$ 和 $k \in \mathbb{N}_+$,

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \begin{cases} \ln|x-a| + C, & \\ \frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C, & k > 1. \end{cases}$$

(2) 对 $\forall\, m \neq 0$,

$$\int \sin(mx)dx = -\frac{1}{m}\cos(mx) + C, \quad \int \cos(mx)dx = \frac{1}{m}\sin(mx) + C,$$

(3) 对 $\forall\, a > 0$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,$$

(4) 对 $\forall\, c \neq 0$,

$$\int \frac{ax+b}{cx+d}dx = \int \left(\frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}\frac{1}{cx+d}\right)dx = \frac{a}{c}x + \frac{bc-ad}{c^2}\ln|cx+d| + C,$$

(5) 对 $\forall\, a$,

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,$$

对 $a \neq b$,

$$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x+b}{x+a} \right| + C,$$

(6) 考察不定积分

$$\int \frac{dx}{A = ax^2 + 2bx + c}.$$

情形 1: $b^2 - ac > 0$. 此时可写成 $ax^2 + 2bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$, 其中 $\alpha \neq \beta$, 从而

$$\int \frac{dx}{ax^2 + 2bx + c} = \frac{1}{2\sqrt{b^2 - ac}} \ln \left| \frac{ax + b - \sqrt{b^2 - ac}}{ax + b + \sqrt{b^2 - ac}} \right| + C.$$

情形 2: $b^2 - ac = 0$. 此时可写成 $ax^2 + 2bx + c = a(x-\alpha)^2$, 其中 $\alpha = -b/a$, 从而

$$\int \frac{dx}{ax^2 + 2bx + c} = \int \frac{dx}{a(x-\alpha)^2} = -\frac{1}{a}\frac{1}{x-\alpha} + C = \frac{-1}{ax+b} + C.$$

情形 3: $b^2 - ac = 0$. 此时可写成 $ax^2 + 2bx + c = a[(x + b/a)^2 + (ac - b^2)/a^2]$, 从而

$$\int \frac{dx}{ax^2 + 2bx + c} = \frac{1}{\sqrt{ac - b^2}} \arctan \frac{ax + b}{\sqrt{ac - b^2}} + C.$$

(7) 利用三角恒等式

$$\cos^2(mx) = \frac{1 + \cos(2mx)}{2}, \quad \sin^2(mx) = \frac{1 - \cos(2mx)}{2},$$

得到对 $\forall\, m \neq 0$

$$\int \cos^2(mx)\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4m}\sin(2mx) + C,$$

$$\int \sin^2(mx)\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4m}\sin(2mx) + C.$$

(8) 利用三角恒等式

$$\sin(mx)\cos(nx) = \frac{\sin[(m+n)x] + \sin[(m-n)x]}{2},$$

$$\cos(mx)\cos(nx) = \frac{\cos[(m+n)x] + \cos[(m-n)x]}{2},$$

$$\sin(mx)\sin(nx) = \frac{\cos[(m+n)x] - \cos[(m-n)x]}{2},$$

得到对 $\forall\, m + n \neq 0$ 和 $m - n \neq 0$

$$\int \sin(mx)\cos(nx)\,dx = -\frac{1}{2(m+n)}\cos[(m+n)x] - \frac{1}{2(m-n)}\cos[(m-n)x],$$

$$\int \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{2(m+n)}\sin[(m+n)x] + \frac{1}{2(m-n)}\sin[(m-n)x],$$

$$\int \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{2(m+n)}\sin[(m+n)x] - \frac{1}{2(m-n)}\sin[(m-n)x].$$

(9) 利用三角恒等式

$$\sin(2nx) = \sum_{1\le k\le n}[\sin(2kx) - \sin((2k-2)x)] = 2\sin x \sum_{1\le k\le n}\cos[(2k-1)x]$$

得到

$$\int \frac{\sin(2nx)}{\sin x}dx = 2\sum_{1\le k\le n}\frac{\sin[(2k-1)x]}{2k-1} + C.$$

类似地利用三角恒等式

$$\begin{aligned}\sin[(2n+1)x] &= \sum_{1\le k\le n}[\sin((2k+1)x) - \sin((2k-1)x)] + \sin x\\ &= \sin x + 2\sin x\sum_{1\le k\le n}\cos(2kx)\end{aligned}$$

有

$$\int \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x}dx = x + 2\sum_{1\le k\le n}\frac{\sin(2kx)}{2k} + C.$$

§5.2.2 变量替换

基本想法是考虑变量替换 $x = \varphi(t)$ 得到

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

上述公式告诉我们两件事:

(1) 如果给定的不定积分可以写成如下形式

$$\int d(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt,$$

则根据上述公式得到

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

如果此时原函数 $F(x)$ 可以求出来.

(2) 反之, 如果给定不定积分

$$\int f(x)\,dx,$$

考察某种变量替换 $x = \varphi(t)$ 使得

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

容易求出原函数.

例5.2.4. (1) 我们有

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x (\sin x)' dx = \frac{1}{4}\sin^4 x + C.$$

(2) 作变量替换 $x = t^6$ 得到

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} &= \int \frac{6t^5 dt}{t^3(1+t^2)} = 6\int \frac{t^2 dt}{1+t^2} \\ &= 6(t - \arctan t) + C = 6\left(\sqrt[6]{x} - \arctan \sqrt[6]{x}\right) + C. \end{aligned}$$

(3) 我们有

$$\int g(x^2) x dx = \frac{1}{2}\int g(x^2) d(x^2),$$

$$\int g(\ln x)\frac{dx}{x} = \int g(\ln x) d\ln x,$$

$$\int g(\sin x)\cos x dx = \int g(\sin x) d\sin x,$$

$$\int g(\cos x)\sin x dx = -\int g(\cos x) d\cos x,$$

$$\int g(\tan x)\frac{dx}{\cos^2 x} = \int g(\tan x) d\tan x,$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln|g(x)| + C.$$

(4) 其它变量替换:

- $x = a\sin t,\ a\sin^2 t,\ a\cos t,\ a\cos^2 t,\ \alpha\sin^2 t + \beta\cos^2 t,$
- $x = a\sinh t,\ a\sinh^2 t,\ a\cosh t,\ a\cosh^2 t,\ \alpha\sinh^2 t + \beta\sinh^2 t,$
- $x = a\tan t,\ a\tanh t,$
- (**万有公式**) 利用 $t = \tan\frac{x}{2}$ 得到 $dt = (1+\tan^2\frac{x}{2})d\frac{x}{2}$ 且

$$\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}, \quad \sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}, \quad \tan x = \frac{2\tan\frac{x}{1}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}.$$

把上述变量替换应用到如下例子:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} \quad (\alpha < x < \beta), \quad \left(\text{答案: } 2\tan^{-1}\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}} + C\right)$$

考虑 $x = \alpha\cos^2 t + \beta\sin^2 t,\ 0 < t < \pi/2.$

$$\int \frac{dx}{\sin x}, \quad \left(\text{答案: } \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C\right),$$

考虑 $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

$$\int \frac{dx}{\cos x}, \quad \left(答案: \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C\right).$$

考虑变量替换 $x = t + \frac{\pi}{2}$.

$$\int \frac{dx}{1+\epsilon\cos x} \quad (0<\epsilon<1), \quad \left(答案: \frac{2}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}}\right) + C\right),$$

考虑变量替换 $t = \tan\frac{x}{2}$.

§5.2.3 分部积分及基本不定积分表 II

根据 Leibniz 法则得到

$$(uv)' = u'v + uv'$$

从而

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{5.2.2}$$

例5.2.5. (1) 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,d\ln x = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C,$$

(2) 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \int x\frac{dx}{1+x^2} = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C,$$

(3) 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C,$$

(4) 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$\begin{aligned}\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - \int x\cdot\cos(\ln x)\frac{dx}{x} &= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx \\ &= x\sin(\ln x) - \left[x\cos(\ln x) + \int x\cdot\sin(\ln x)\frac{dx}{x}\right]\end{aligned}$$

从而

$$\int \sin(\ln x)\,dx = \frac{x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]}{2} + C,$$

(5) 利用分部积分 (5.2.2) 和 (4) 得到

$$\int \cos(\ln x)\,dx = \frac{x[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]}{2}+C,$$

(6) 计算不定积分

$$I_n = \int x^n \ln x\,dx, \quad n \neq -1.$$

解: 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n+1}\int \ln x\,d(x^{n+1}) = \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\ln x - \int x^n dx\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}x^{n+1}\right) = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right)+C. \ \square \end{aligned}$$

(7) 计算不定积分

$$I_{n,m} := \int x^n \ln^m x\,dx, \quad n \neq -1 \text{ 且 } m \in \mathbb{N}_+.$$

解: 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$\begin{aligned} I_{n,m} &= \frac{1}{n+1}\int \ln^m x\,d(x^{n+1}) \\ &= \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\ln^m x - \int x^{n+1}\cdot m\ln^{m-1}x\cdot\frac{1}{x}dx\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\ln^m x - m\int x^n\ln^{m-1}x\,dx\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\ln^m x - mI_{n,m-1}\right) = \frac{x^{n+1}\ln^m x}{n+1} - \frac{m}{n+1}I_{n,m-1}. \ \square \end{aligned}$$

比如

$$\begin{aligned} I_{n,2} &= \frac{x^{n+1}\ln^2 x}{n+1} - \frac{2}{n+1}I_{n,1} = \frac{x^{n+1}\ln^2 x}{n+1} - \frac{2}{n+1}I_n \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1}\left[\ln^2 x - \frac{2}{n+1}\ln x + \frac{2}{(n+1)^2}\right]+C. \end{aligned}$$

(8) 计算不定积分

$$I := \int P(x)e^{ax}dx, \quad a \neq 0,\ \deg P = n.$$

解: 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{P(x)}{a}de^{ax} = \frac{P(x)e^{ax}}{a} - \int \frac{P'(x)}{a}e^{ax}dx = \frac{P(x)}{a}e^{ax} - \int \frac{P'(x)}{a^2}de^{ax} \\ &= \left[\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2}\right]e^{ax} + \int \frac{P''(x)}{a^2}e^{ax}dx \end{aligned}$$

$$= \sum_{0\le k\le n-1} \frac{P^{(k)}(x)}{a^{k+1}} e^{ax} + \int (-1)^n \frac{P^{(n)}(x)}{a^n} e^{ax} dx$$

$$= \sum_{0\le k\le n-1} \frac{(-1)^k P^{(k)}(x)}{a^{k+1}} e^{ax} + \frac{(-1)^n P^{(n)}(x)}{a^{n+1}} e^{ax} + C = \sum_{0\le k\le n} \frac{(-1)^k P^{(k)}(x)}{a^{k+1}} + C. \square$$

(9) 计算不定积分

$$I_P := \int P(x)\sin(bx)\,dx, \quad J_P := \int P(x)\cos(bx)\,dx, \quad \det P = n.$$

解: 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$\begin{aligned} I_P &= \int \frac{-P(x)}{b} d\cos(bx) = -\frac{P(x)}{b}\cos(bx) + \int \frac{P'(x)}{b}\cos(bx)\,dx \\ &= -\frac{P(x)}{b}\cos(bx) + \int \frac{P'(x)}{b^2} d\sin(bx) \\ &= -\frac{P(x)}{b}\cos(bx) + \frac{P'(x)}{b^2}\sin(bx) - \int \frac{P''(x)}{b^2}\sin(bx)\,dx. \end{aligned}$$

即

$$I_P = -\frac{P(x)}{b}\cos(bx) + J_{P'/b}, \quad J_P = \frac{P(x)}{b}\sin(bx) - I_{P'/b}. \ \square$$

(10) 计算不定积分

$$I_n := \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, \quad a \ne 0.$$

解: 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int x \frac{-n(x^2+a^2)^{n-1}\cdot 2x}{(x^2+a^2)^{2n}} dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1},$$

从而得到

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2na^2} I_n + \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n}, \quad I_1 = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C. \ \square$$

(11) 计算不定积分

$$I_n := \int \tan^n x\,dx, \quad n \ge 1.$$

解: 利用分部积分 (5.2.2) 得到 $(n \ge 2)$

$$I_n = \int \tan^{n-2} x \tan^2 x\,dx = \int \tan^{n-2} x \sin^2 x\,d\tan x$$

$$= \tan^{n-1} x \sin^2 x - \int \tan x \left[(n-2)\tan^{n-3} x \tan^2 x c + \tan^2 x \cdot 2\sin x \cos x \right] dx$$

$$= \tan^{n-1} x \sin^2 x - (n-2) I_n - 2 \int \tan^n x \cos^2 x dx$$

故

$$\begin{aligned}(n-1) I_n &= \tan^{n-1} x (1 - \cos^2 x) + \int \tan^{n-1} x d(\cos^2 x) \\ &= \tan^{n-1} x (1 - \cos^2 x) + \tan^{n-1} x \cos^2 x - (n-1) \int \cos^2 x \tan^{n-2} x \frac{dx}{\cos^2 x} \\ &= \tan^{n-1} x - (n-1) I_{n-2}.\end{aligned}$$

因此得到递推公式

$$I_n = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

观察到

$$I_1 = \int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C,$$

$$\begin{aligned}I_2 &= \int \tan^2 x dx = \int \sin^2 x d \tan x = \sin^2 x \tan x - \int 2 \tan x \sin x \cos x dx \\ &= \sin^2 x \tan x - 2 \int \tan^2 x d \tan x = \sin^2 x \tan x - \frac{2}{3} \tan^3 x + C.\end{aligned}$$

所以最后得到

$$I_{2n} = (-1)^{n-1} I_2 + \sum_{2 \leq k \leq n} \frac{(-1)^{n-k}}{2k-1} \tan^{2k-1} x,$$

$$I_{2n+1} = (-1)^n I_1 + \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{(-)^{n-k}}{2k} \tan^{2k} x. \quad \square$$

(12) 计算不定积分

$$I_{m,n} := \int \cos^m \sin^n x dx, \quad m, n \neq 0.$$

解: 利用分部积分 *(5.2.2)* 得到

$$\begin{aligned}I_{m,n} &= \int -\cos^m x \sin^{n-1} x d \cos x = \int -\frac{1}{m+1} \sin^{n-1} x d\left(\cos^{m+1} x\right) \\ &= -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \cos^m x (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x dx \\ &= \frac{n-1}{m+1} (I_{m,n-2}, I_{m,n}) - \frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+1}.\end{aligned}$$

故

$$I_{m,n} = \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2} - \frac{\cos^{m+1} x \sin^{n-1} x}{m+n}.$$

类似地可得到

$$I_{m,n} = \int \cos^{m-1} x \sin^n x d \sin x = \int \cos^{m-1} x d\left(\frac{1}{n+1} \sin^{n+1} x\right)$$

$$= \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \sin^n x (1-\cos^2 x) \cos^{m-2} x dx$$

$$= \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} (I_{m-2,x} - I_{m,n})$$

故

$$I_{m,n} = \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n} + \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{m+n}. \square$$

(13) 计算不定积分

$$I_n := \int e^x \sin^n x dx, \quad J_n := \int e^x \cos^n x dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

解: 显然成立

$$I_0 = J_0 = e^x + C$$

和

$$I_1 = \int e^x \sin x dx = -\int e^x d\cos x = -\cos x e^x + J_1,$$

$$J_1 = \int e^x \cos x dx = \int e^x d\sin x = \sin x e^x - I_1.$$

所以

$$I_1 = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C, \quad J_1 = \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2} + C.$$

对 $n \geq 2$,

$$I_n = \int e^x \sin^n x dx = \int -e^x \sin^{n-1} x d\cos x$$

$$= -e^x \sin^{n-1} x \cos x + \int \cos x e^x \left[\sin^{n-1} x + (n-1) \sin^{n-2} x \cos x\right] dx$$

$$= -e^x \sin^{n-1} x \cos x + \int e^x \sin^{n-1} x d\sin x + (n-1) \int e^x \sin^{n-2} x (1-\sin^2 x) dx$$

$$= -e^x \sin^{n-1} x \cos x + \frac{1}{n} \int e^x d(\sin^n x) + (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

故

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} - \frac{e^x}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{1}{n^2} \left(e^x \sin^n x - \int \sin^n x e^x dx\right)$$

$$= \frac{n-1}{n} I_{n-2} + \frac{e^x}{n^2} \left(\sin^n x - n \sin^{n-1} x \cos x\right) - \frac{1}{n^2} I_n.$$

化简得到

$$I_n = \frac{n(n-1)}{1+n^2} I_{n-2} - \frac{e^x}{1+n^2} \left(\sin^n x - n \sin^{n-1} x \cos x\right).$$

请补齐 J_n 的计算. $\square$

(14) 若 $y := ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ 且 $b^2 - 4ac > 0$, 计算不定积分

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |\frac{y'}{2} + \sqrt{ay}| + C, & a > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-y'}{\sqrt{b^2-4ac}} + C, & a < 0. \end{cases}$$

解: 实际上如果 $a>0$ 得到

$$\sqrt{y} \;=\; \sqrt{a}\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}} \;=\; \sqrt{a}\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}.$$

所以

$$\int\frac{dx}{\sqrt{y}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{y'}{2a}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{a}}\right|+C \;=\; \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{y'}{2}+\sqrt{ay}\right|+C/$$

如果 $a<0$ 得到

$$\sqrt{y} \;=\; \sqrt{-a}\sqrt{-x^2-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}} \;=\; \sqrt{-a}\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}$$

故

$$\int\frac{dx}{\sqrt{y}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{\frac{y'}{2a}}{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}}+C \;=\; \frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{y'}{-\sqrt{b^2-4ac}}+C. \quad \square$$

(15) 计算不定积分

$$I=\int\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx.$$

解: 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$I=\int e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int xd\left(e^{x+\frac{1}{x}}\right) \;=\; xe^{x+\frac{1}{x}}+C. \quad \square$$

§5.2.4 有理函数的原函数

考察不定积分

$$\int R(x)dx, \quad 其中 \quad R(x):=\frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{5.2.3}$$

这里 $P(x), Q(x)$ 是多项式. 根据代数学基本定理可知

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=p(x)+\sum_{1\le j\le \ell}\sum_{1\le k\le k_j}\frac{a_{jk}}{(x-x_j)^k}+\sum_{1\le j\le n}\sum_{1\le k\le m_j}\frac{b_{jk}x+c_{jk}}{(x^2+p_jx+q_j)^k}, \tag{5.2.4}$$

其中

$$\begin{aligned} p(x): &\quad 多项式, \\ a_{jk}, b_{jk}, c_{jk}: &\quad 唯一确定的实数, \\ Q(x): &\quad =\prod_{1\le j\le \ell}(x-x_j)^{k_j}\prod_{1\le j\le n}(x^2+p_jx+q_j)^{m_j} \quad (p_j^2-4q_j<0). \end{aligned}$$

所以计算不定积分 (5.2.3) 分成下面三种情况.

情形 1:

$$\int p(x)\,dx.$$

如果 $p(x)=\sum_{0\le i\le N}\alpha_i x^i$ 得到

$$\int p(x)\,dx=\sum_{0\le i\le N}\frac{\alpha_i}{i+1}x^{i+1}+C. \tag{5.2.5}$$

情形 2:

$$\int\frac{dx}{(x-a)^k},\quad k\in\mathbb{N}.$$

根据基本不定积分表,

$$\int\frac{dx}{(x-a)^k}=\begin{cases}\ln|x-a|+C, & k=1,\\ \frac{1}{1-k}(x-a)^{1-k}, & k\ne 1.\end{cases} \tag{5.2.6}$$

情形 3:

$$\int\frac{bx+c}{(x^2+px+q)^k},\quad p^2-4q<0.$$

根据恒等式

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2$$

和

$$\frac{bx+c}{(x^2+px+q)^k}=\frac{b\left(x+\frac{p}{2}\right)+\left(c-\frac{bp}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2\right]^k},$$

得到

$$\int\frac{bx+c}{(x^2+px+q)^k}dx=\frac{b}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2\right]^k}$$
$$+\left(c-\frac{bp}{2}\right)\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2\right]^k}.$$

所以只要如下两个不定积分

$$I_k:=\int\frac{du^2}{(u^2+a^2)^k},\quad J_k:=\int\frac{du}{(u^2+a^2)^k}.$$

然而第一个积分显然

$$I_k = \begin{cases} \ln|u^2+a^2|+C, & k=1, \\ \frac{1}{1-k}(u^2+a^2)^{1-k}, & k\neq 1. \end{cases}$$

并且第二个积分由**例**5.2.5 (10) 给出, 即

$$J_k = \frac{2k-1}{2ka^2}J_{k-1}+\frac{1}{2ka^2}\frac{u}{(u^2+a^2)^k}, \quad J_1=\frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}+C.$$

例5.2.6. 计算不定积分

$$\int R(x)dx, \quad 其中 \quad R(x)=\frac{x^7-2x^6+4x^5-5x^4+4x^3-5x^2-x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}.$$

解: 观察到

$$\begin{aligned} R(x) &= x+\frac{x^5-x^4+x^3-3x^2-2x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} \\ &= x+\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+1}. \end{aligned}$$

故得到 $(A,B,C,D,E,F)=(-1,1,1,1,0,1)$ 且

$$\int R(x)dx=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{x-1}+\frac{x}{2(x^2+2)^2}+\ln|x-1|+\frac{3}{2}\tan^{-1}x+C. \quad \square$$

例5.2.7. (1) 计算不定积分

$$I_n := \int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}, \quad a\neq 0.$$

解: 根据

$$4a(ax^2+bx+c)=(2ax+b)^2+(4ac-b^2)=: t^2+\Delta$$

得到

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{(4a)^n}{2a}\int\frac{dt}{(t^2+\Delta)^n} = 2^{2n-1}a^{n-1}\int\frac{dt}{(t^2+\Delta)^n} \\ &= \begin{cases} \frac{2n-3}{n-1}\frac{2a}{\Delta}I_{n-1}+\frac{1}{(n-1)\Delta}\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}, & \Delta\neq 0, \\ \frac{1}{a^n(1-2n)}(x+\frac{b}{2a})^{1-2n}+C, & \Delta=0. \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

(2) 计算不定积分

$$I_{m,n} := \int\frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}, \quad m,n\in\mathbb{N}_+.$$

解: 如果 $a=b$, 则

$$I_{m,n}=\int\frac{dx}{(x+a)^{m+n}}=\frac{1}{1-m-n}(x+a)^{1-m-n}+C.$$

如果 $a \neq b$, 令 $t = \frac{x+a}{x+b}$ 则

$$I_{m,n} = \frac{1}{(b-a)^{m+n-1}} \int \frac{(1-t)^{m+n-2}}{t^m} dt. \quad \square$$

(3) 计算不定积分

$$\int \frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}} dx, \quad \det P_n = n.$$

解: 根据Taylor 公式

$$P_n(x) = \sum_{0 \le k \le n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

得到

$$\begin{aligned} \int \frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}} dx &= \sum_{0 \le k \le n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^{k-n-1} dx \\ &= \sum_{0 \le k \le n-1} \frac{-P_n^{(k)}(a)}{k!(n-k)(x-a)^{n-k}} + \frac{P_n^{(n)}(a)}{n!} \ln|x-a| + C. \quad \square \end{aligned}$$

(4) 计算不定积分

$$I_n = \int \frac{dx}{1+x^{2n}}, \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

解: 根据代数学基本定理得到 $1+x^{2n} = \prod_{1 \le k \le 2n} (x-a_k)$ 其中 $a_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi + \sqrt{-1} \sin \frac{2k-1}{2n} \pi$. 所以

$$\frac{1}{1+x^{2n}} = -\frac{1}{2n} \sum_{1 \le k \le 2n} \frac{a_k}{x-a_k} = \frac{1}{n} \sum_{1 \le k \le n} \frac{1-(\cos \frac{2k-1}{2n} \pi) x}{x^2 - 2x \cos \frac{2k-1}{2n} \pi + 1}.$$

故

$$\begin{aligned} I_n &= -\frac{1}{2n} \sum_{1 \le k \le n} \left(\cos \frac{2k-1}{2n} \pi \int \frac{2x - 2\cos \frac{2k-1}{2n} \pi}{x^2 - 2x \cos \frac{2k-1}{2n} \pi + 1} dx \right) \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{1 \le k \le n} \left[\sin^2 \frac{2k-1}{2n} \pi \int \frac{dx}{\left(x - \cos \frac{2k-1}{2n} \pi \right)^2 + \sin 62 \frac{2k-1}{2n} \pi} \right] \\ &= -\frac{1}{2n} \sum_{1 \le k \le n} \left[\cos \frac{2k-1}{2n} \pi \cdot \ln \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k-1}{2n} \pi + 1 \right) \right] \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{1 \le k \le n} \left(\sin \frac{2k-1}{2n} \pi \cdot \tan^{-1} \frac{x - \cos \frac{2k-1}{2n} \pi}{\sin \frac{3k-1}{2n} \pi} \right) + C. \quad \square \end{aligned}$$

我们已经使用了**代数学基本定理**, 即任何非常数的 n 次多项式 $P(z)$ 由如下分解

$$P(z)=A\prod_{1\le k\le n}(z-\alpha_k),\quad A\in\mathbb{R},\ \alpha_k\in\mathbb{C}. \tag{5.2.7}$$

等价地, 任何非常数多项式 $P(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上至少有一个根 α. 否则的话 $P(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上没有根. 因此函数

$$f(z):=\frac{1}{P(z)}$$

是全纯的. 当 $|z|\to+\infty$, $|P(z)|\to+\infty$ 和 $|f(z)|\to 0$。所以全纯函数 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有界. 由 Lioullie 定理得到 $f(z)\equiv C$, for all $z\in\mathbb{C}$.

§5.2.5 形如 $\int R(\sin x,\cos x)dx$ 的原函数

令

$$R(u,v):=\frac{P(u,v)}{Q(u,v)},\quad \text{其中 } P,Q \text{ 是关于 } u,v \text{ 的多项式}. \tag{5.2.8}$$

考察如下不定积分

$$\int R(\sin x,\cos x)dx. \tag{5.2.9}$$

利用变量替换

$$t:=\tan\frac{x}{2}$$

得到

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt. \tag{5.2.10}$$

如果函数 $R(u,v)$ 满足一定的函数结构, 可以利用其它简单的变量替换.

(1) $R(-u,v)=R(u,v)$**.** 此时 $R(u,v)=R_1(u^2,v)$ 且

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R_1(1-\cos^2 x,\cos x)dx=\int\frac{-R_1(1-t^2,t)dt}{\sqrt{1-t^2}}. \tag{5.2.11}$$

(2) $R(u,-v)=-R(u,v)$**.** 此时 $R(u,v)=R_2(u,v^2)$ 且

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R_2(\sin x,1-\sin^2 x)dx=\int\frac{R_2(t,1-t^2)dt}{\sqrt{1-t^2}}. \tag{5.2.12}$$

(3) $R(-u,v)=-R(u,v)$**.** 此时 $R(u,v)=uR_1^*(u^2,v)$ 且

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int \sin x R_1^*(\sin^2 x,\cos x)dx=\int -R_1^*(1-t^2,t)dt. \tag{5.2.13}$$

(4) $R(u,-v)=-R(u,v)$**.** 此时 $R(u,v)=vR_2^*(u^2,v)$ 且

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int \cos x R_2^*(\sin x,\cos^2 x)dx=\int R_2^*(t,1-t^2)dt. \tag{5.2.14}$$

(5) $R(-u,-v)=R(u,v)$**.** 此时 $R(u,v)=R((u/v)v,v)=R^*(u/v,v)$ 从而

$$R^*(u/v,-v)=R^*((-u/-v),-v)=R(-u,-v)=R^*(u/v,v).$$

所以得到 $R(u,v)=R^*(u/v,v)=R_3(u/v,v^2)$ 且

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R_3(\tan^2 x,\cos^2 x)dx=\int R_3\left(t,\frac{1}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}. \tag{5.2.15}$$

(6) 一般情形. 对任意 $R(u,v)$ 可写成

$$R(u,v)=\frac{R(u,v)-R(-u,v)}{2}+\frac{R(-u,v)-R(-u,-v)}{2}+\frac{R(-u,-v)+R(u,v)}{2}.$$

即可以写成 (4), (5), (6) 的组合.

(7) $R(u,v)=R^*(u^2,v^2)$**.** 此时只要作变量替换 $t=\sin x$ 便得到

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R^*(t^2,1-t^2)\frac{dt}{\sqrt{2-t^2}}. \tag{5.2.16}$$

作为一个典型例子考虑

$$\int \sin^\nu x\cos^\mu x dx,\quad \mu,\nu\in\mathbb{Q}\text{ 且 }0<x<\frac{\pi}{2}.$$

作变量替换 $z=\sin x$ 得到

$$\sin^\nu x\cos^\mu x dx=\frac{1}{2}\sin^{\nu-1}x(1-\sin^2 x)^{\frac{\mu-1}{2}}2\sin x d\sin x=\frac{1}{2}(1-z)^{\frac{\mu-1}{2}}z^{\frac{\nu-1}{2}}dz.$$

例5.2.8. (1) 计算不定积分

$$I_n:=\int\frac{dx}{\sin^n x},\quad J_n:=\int\frac{dx}{\cos^n x}.$$

解: 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$\begin{aligned} I_n &= \int\frac{\sin x dx}{\sin^{n+1}x} = -\int\frac{d\cos x}{\sin^{n+1}x}\\ &= -\frac{\cos x}{\sin^{n+1}x}+\int\cos x\left[-(n+1)\sin^{-n-2}x\cdot\cos x\right]dx\\ &= -\frac{\cos x}{\sin^{n+1}x}-(n+1)\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^{n+2}x}dx = -\frac{\cos x}{\sin^{n+1}x}-(n+1)(I_{n+2}-I_n)\end{aligned}$$

从而

$$I_n=-\frac{-\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}.$$

类似地得到

$$J_n=\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}J_{n-2}.\ \square$$

(2) 计算不定积分

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x}, \quad (a>0 \text{ 且 } |b|<|a|).$$

解: 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a}\int \frac{dx}{1+\epsilon\cos x} \quad (\epsilon := b/a \in (-1,1)) \\ &= \frac{2}{a}\int \frac{d\tan\frac{x}{2}}{(1+\epsilon)+(1-\epsilon)\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2}{a(1-\epsilon)}\int \frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}\right)^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right)+C. \quad \square \end{aligned}$$

(3) 计算不定积分

$$\int P(x)e^{ax}dx, \quad \int P(x)\sin bx\,dx, \quad \int P(x)\cos(bx)\,dx$$

可归结到计算如下两个不定积分 (其中 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$)

$$I_n := \int x^n e^{ax}\sin bx\,dx, \quad J_n := \int x^n e^{ax}\cos bx\,dx.$$

利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$\begin{aligned} I_n &= -\frac{1}{b}\int x^n e^{ax}\,d\cos bx \\ &= -\frac{1}{b}\left[x^n e^{ax}\cos bx - \int \cos bx\left(nx^{n-1}e^{ax}+ax^n e^{ax}\right)dx\right] \\ &= -\frac{1}{b}x^n e^{ax}\cos bx + \frac{n}{b}J_{n-1}+\frac{a}{b}J_n \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{1}{b}\int x^n e^{ax}\,d\sin bx \\ &= \frac{1}{b}\left[x^n e^{ax}\sin bx - \int \sin bx\left(nx^{n-1}e^{ax}+ax^n e^{ax}\right)dx\right] \\ &= \frac{1}{b}x^n e^{ax}\sin bx - \frac{n}{b}I_{n-1}-\frac{a}{b}I_n. \end{aligned}$$

所以推出

$$I_n = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left[(a+n)x^{n-1}\sin bx - bx^n\cos bx\right] - \frac{2na}{a^2+b^2}I_{n-1} - \frac{n(n-1)}{a^2+b^2}I_{n-2}.$$

请补充完整 J_n 的表达式.

§5.2.6 形如 $\int R(x, y(x))dx$ 的原函数

(I) $y(x) = \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$, **其中** $m \in \mathbb{N}_+$ **且** $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. 此时令

$$t := \omega(t) = \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{1}{m}}, \quad t^m = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}, \quad x = \varphi(t) = \frac{\delta t^m - \beta}{\alpha - \gamma t^m}.$$

则

$$\int R(x, y(x))dx = \int R(\varphi(t), t)\varphi'(t)dt. \tag{5.2.17}$$

(II) $R(x, y) = x^m(a+bx^n)^p$, **这里** $m, n, p \in \mathbb{Q}$ **且** $a, b \in \mathbb{R}$. 如果 $p \in \mathbb{Z}$, 得到

$$R(x, y(x)) = x^{\frac{m_1}{m_2}}\left(a + bx^{\frac{n_1}{n_2}}\right)^p$$

其中 $p = p_1/p_2, m = m_1/m_2, n = n_1/n_2$. 令

$$\lambda := [m_2, n_2], \quad t := x^{\frac{1}{\lambda}},$$

得到

$$\int R(x, y(x))dx = \int t^{\frac{\lambda}{m_2}m_1}\left(a + bt^{\frac{\lambda}{n_2}n_1}\right)^p \lambda t^{\lambda-1}dt = \int R^*(t)dt. \tag{5.2.18}$$

如果 $p \notin \mathbb{Z}$, 令 $z = x^n$ 得到

$$R(x, y(x))dx = \frac{1}{n}(a+bz)^p z^q dz, \quad q := \frac{m+1}{n} - 1.$$

从而

$$\int R(x, y(x))dx = \frac{1}{n}\int (a+bz)^p z^q dz. \tag{5.2.19}$$

如果 $q \in \mathbb{Z}$ 则令

$$t := \sqrt[\nu]{a+bz}, \quad p := \frac{p_1}{\nu},$$

上述不定积分可化简为

$$\int R(x, y(x))dx = \int \frac{t^{\nu p}}{n}\left(\frac{t^\nu - a}{b}\right)^q \frac{\nu t^{\nu-1}}{b}dt = \int R^*(t)dt. \tag{5.2.20}$$

如果 $q \notin \mathbb{Z}$, 把 (5.2.19) 写成

$$\int R(x, y(x))dx = \frac{1}{n}\int \left(\frac{a+bz}{z}\right)^p z^{p+q}dz.$$

如果 $p + q \in \mathbb{Z}$ 令

$$t = \sqrt[\nu]{\frac{a+bz}{z}}, \quad p = \frac{p_1}{\nu}$$

得到

$$\int R(x, y(x))dx = \frac{1}{n}\int t^{\nu p}z^{p+q}dz = \int R^*(t, z)dz. \tag{5.2.21}$$

下面结论Newton 最早知道, 但是由Chebeshev 给出了严格证明.

不定积分

$$\int R(x,y(x))dx$$

可以用初等函数表示, 如果 $p, q, p+q$ 中有一个是整数, 或者 p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n}+p$ 中有一个是整数.

例5.2.9. (1) 计算不定积分

$$J_{p,q} := \int (a+bz)^p z^q dz.$$

解: 因为

$$((a+bz)^p z^q)' = p(a+bz)^{p-1} bz^q + q(a+bz)^p z^{q-1}$$

和

$$(a+bz)^{p+1} z^q = (a+bz)(a+bz)^p z^q,$$

得到

$$\begin{aligned} J_{p+1,q} &= aJ_{p,q} + bJ_{p,q+1}, \\ (a+bz)^{p+1} z^{q+1} &= (p+1)bJ_{p,q+1} + (q+1)J_{p+1,q}. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} J_{p,q} &= -\frac{(a+bz)^{p+2} z^{q+1}}{a(p+1)} + \frac{p+q+2}{a(p+1)} J_{p+1,q} \quad (p \neq -1) \\ &= \frac{(a+bz)^{p+2} z^{q+1}}{a(q+1)} - b\frac{p+q+2}{a(q+1)} J_{p,q+1} \quad (q \neq -1) \\ &= \frac{(a+bz)^p z^{p+1}}{p+q+1} + \frac{ap}{p+q+1} J_{p-1,q} \quad (p+q+1 \neq 0) \\ &= \frac{(a+bz)^{p+1} z^q}{b(p+q+1)} - \frac{aq}{b(p+q+1)} J_{p,q-1} \quad (p+q \neq -1). \quad \square \end{aligned}$$

(2) 计算不定积分

$$H_m := \int \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

解: 如果 m 是奇数, 则 $\frac{m+1}{2} \in \mathbb{Z}$; 如果 m 是偶数, 则 $\frac{m+1}{2} + q = \frac{m+1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{m}{2} \in \mathbb{Z}$. 所以任意 m 上述不定积分可用初等函数表示. 若 $m \geq 2$,

$$\begin{aligned} H_m &= \frac{1}{2} \int (1-z)^{-1/2} z^{\frac{m-1}{2}} dz = \frac{1}{2} J_{-\frac{1}{2}, \frac{m-1}{2}} \\ &= -\frac{1}{m} x^{m-1} \sqrt{1-x^2} + \frac{m-1}{m} H_{m-2}. \end{aligned}$$

这里

$$H_1 = -\sqrt{1-x^2} + C, \quad H_0 = \arcsin x + C.$$

如果 $m<-1$, 可记 $m=-\mu$ 其中 $\mu>1$, 从而

$$H_m=\frac{1}{2}J_{-\frac{1}{2},\frac{m-1}{2}}=-\frac{x^{-(\mu-1)}\sqrt{1-x^2}}{\mu-1}+\frac{\mu-2}{\mu-1}H_{-(\mu-2)}.$$

这里

$$H_{-1}=\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C,\quad H_{-2}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C.\quad \square$$

(III) $R(x,y(x))=R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$, **其中** $a,b,c\in\mathbb{R}$. 此时一般的变量替换, 即**Euler 替换**:

情形 1: $a>0$. 此时考虑

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x \tag{5.2.22}$$

从而得到 $bx+c=t^2-2\sqrt{a}tx$ 且

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b},\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}.$$

最后得到

$$\begin{aligned}&\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx\\ =\ &\int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b},\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}\right)2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt\ =\ \int R^*(t)dt.\end{aligned}$$

情形 2: $c>0$. 此时考虑

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c} \tag{5.2.23}$$

从而得到 $ax+b=xt^2+2\sqrt{c}t$ 且

$$x=\frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2},\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{c}t^2-bt+\sqrt{c}a}{a-t^2}.$$

最后得到

$$\begin{aligned}&\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx\\ =\ &\int R\left(\frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2},\frac{\sqrt{c}t^2-bt+\sqrt{c}a}{a-t^2}\right)2\frac{\sqrt{c}t^2-bt+\sqrt{c}a}{(a-t^2)^2}dt\ =\ \int R^*(t)dt.\end{aligned}$$

观察到

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{x^2\left(\frac{c}{x^2}+\frac{b}{x}+a\right)}$$

且

$$R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)\ =\ R\left(x,x\sqrt{\frac{c}{x^2}+\frac{b}{x}+a}\right)=R^*\left(z,\sqrt{cz^2+bz+a}\right),$$

其中 $z=1/x$, 所以**情形 1** 和**情形 2** 等价.

情形 3: $ax^2+bx+c=a(x-\lambda)(x-\mu)$**, 其中** $\lambda\neq\mu$ **且** $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$**.** 此时考虑

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\lambda),\quad t=\sqrt{a\frac{x-\mu}{x-\lambda}},\quad dx=\frac{2a(\mu-\lambda)t}{(t^2-a^2)^2}dt. \tag{5.2.24}$$

一般地不定积分

$$I:=\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$$

可以归结到如下三个不定积分

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,\\ I_2 &:= \int\frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}},\\ I_3 &:= \int\frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}. \end{aligned}$$

例5.2.10. 计算不定积分

$$I:=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}.$$

解: 作变量替换 $\sqrt{x^2-x+1}=t-x$ 得到

$$\begin{aligned} I &= \int\frac{2t^2-2t+2}{t(2t-1)^2}dt = \int\left[\frac{2}{t}-\frac{3}{2t-1}+\frac{3}{(2t-1)^2}\right]dt\\ &= -\frac{3}{2}\frac{1}{2t-1}+2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|2t-1|+C\\ &= -\frac{3}{2}\frac{1}{2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1}+2\ln\left|x+\sqrt{x^2-x+1}\right|\\ &\quad -\frac{3}{2}\ln\left|2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1\right|+C. \ \Box \end{aligned}$$

对不定积分 I_1 只要考虑

$$V_m:=\int\frac{x^m}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\int\frac{x^m}{\sqrt{Y}}dx,\quad Y:=ax^2+bx+c. \tag{5.2.25}$$

由于

$$\begin{aligned} \left(x^{m-1}\sqrt{Y}\right)' &= (m-1)x^{m-2}\sqrt{Y}+\frac{x^{m-1}Y'}{2\sqrt{Y}}\\ &= \frac{2(m-1)x^{m-2}(ax^2+bx+c)+x^{m-1}(2ax+b)}{2\sqrt{Y}} \end{aligned}$$

$$= \quad ma\frac{x^m}{\sqrt{Y}} + \left(m - \frac{1}{2}\right) b\frac{x^{m-1}}{\sqrt{Y}} + (m-1)c\frac{x^{m-2}}{\sqrt{Y}}.$$

所以得到

$$x^{m-1}\sqrt{Y} = maV_m + \left(m - \frac{1}{2}\right) bV_{m-1} + (m-1)cV_{m-2}$$

且

$$V_1 = \frac{1}{a}\sqrt{Y} - \frac{b}{2a}V_0, \quad V_2 = \frac{2a-3b}{4a^2}\sqrt{Y} + \frac{b^2-4ac}{8a^2}V_0.$$

所以

$$V_m = p_{m-1}(x)\sqrt{Y} + \lambda_m V_0, \tag{5.2.26}$$

其中 $\deg p_{m-1} = m-1$ 且 $\lambda_m \in \mathbb{R}$. 最后一点是如何计算

$$V_0 := \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

显然这个不定积分可归结到

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm \alpha^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm \alpha^2}\right| + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{\alpha} + C \quad (\alpha > 0).$$

对不定积分 I_2 作变量替换 $x - \alpha = 1/t$ 得到

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{Y}} = \int \frac{t^{k-1}dt}{\sqrt{(a\alpha^2+b\alpha+c)t^2 + (2a\alpha+b)t + a}}. \tag{5.2.27}$$

这就转化成不定积分 I_1.

对不定积分 I_3 分两种情形考虑. 情形 1: $a(x^2+px+c) = ax^2+bx+c$. 此时

$$\begin{aligned} I_3 \quad &= \int \frac{a^m(Ax+B)}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m+1}{2}}}dx \quad = \int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m+1}{2}}}dx \\ &= \frac{M}{2a}\int \frac{(2ax+b)dx}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m+1}{2}}} + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m+1}{2}}} \\ &= \frac{M}{2a}\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{m-\frac{1}{2}}}\frac{1}{-m+\frac{1}{2}} + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m+1}{2}}}. \end{aligned}$$

所以就归结到求不定积分

$$J := \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{m+\frac{1}{2}}} = \int \frac{dx}{Y^{m+\frac{1}{2}}}. \tag{5.2.28}$$

考虑**Abel 变换**:

$$t := (\sqrt{Y})' = \frac{Y'}{2\sqrt{Y}} = \frac{ax+\frac{b}{2}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad Y = \frac{4ac-b^2}{4(a-t^2)}. \tag{5.2.29}$$

因此得到

$$J=\left(\frac{4}{4ac-b^2}\right)^m\int(a-t^2)^{m-1}dt. \tag{5.2.30}$$

情形 2: 一般得有 $ax^2+bx+c=a(x^2+p'x+q')$, 这里 $x^2+p'x+q'\neq x^2+px+q$. 此时想法是把线性项去掉. 当 $p\neq p'$ 时考虑变量替换

$$x=\frac{\mu t+\nu}{t+1}.$$

得到

$$x^2+px+q=\frac{(\mu^2+p\mu+q)t^2+[2\mu\nu+(\mu+\nu)+2q]t+(\nu^2+p\nu+q)}{(t+1)^2}.$$

对 $x^2+p'x+q'$ 也有类似的表达式, 只要把上述等式中 p,q' 换成 p',q' 即可. 令线性项为零就得到 μ,ν 所要满足的条件

$$2\mu\nu+p(\mu+\nu)+2q=0=2\mu\nu+p'(\mu+\nu)+2q'.$$

由此得到

$$\mu+\nu=-2\frac{q-q'}{p-p'},\quad \mu=\frac{p'q-pq'}{p-p'}$$

而且 μ,ν 是

$$(p-p')u^2+2(q-q')u+(p'q-pq')=0$$

得两个实根. 根据二项式判别法知道

$$\mu\neq\nu\quad\Longleftrightarrow\quad(q-q')^2-(p-p')(p'q-pq')>0.$$

利用如上选择的 μ,ν 计算得到, 其中 $\deg P=2m-1$ 且 $\lambda>0$,

$$\begin{aligned}\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}dx &= \int\frac{P(t)\,dt}{(t^2+\lambda)^m\sqrt{\alpha t^2+\beta}}\\ &=\sum_i\int\frac{A_it+B_i}{(t^2+\lambda)^{k_i}\sqrt{\alpha t^2+\beta}}dt\quad(1\le k_i\le m).\end{aligned}$$

对每个不定积分有

$$\int\frac{At+B}{(t^2+\lambda)^k\sqrt{\alpha t^2+\beta}}dt=\frac{A}{\alpha}\int\frac{\alpha t\,dt}{(t^2+\lambda)^k\sqrt{\alpha t^2+\beta}}+B\int\frac{dt}{(t^2+\lambda)^k\sqrt{\alpha t^2+\beta}}$$

其中对第一个不定积分作变量替换 $u=\sqrt{\alpha t^2+\beta}$ 和对第二个不定积分作变量替换 $u=\alpha t/\sqrt{\alpha t^2+\beta}$ 得到

$$\int\frac{At+B}{(t^2+\lambda)^k\sqrt{\alpha t^2+\beta}}dt=\int\frac{A\alpha^{k-1}du}{(u^2+\alpha\lambda-\beta)^k}+\int\frac{B\alpha^k(\alpha-u^2)^{k-1}du}{[(\beta-\alpha\lambda)u^2+\lambda\alpha^2]^k}.$$

即可以归结到有理函数的不定积分.

当$p=p'$ 时, 作变量替换 $x=t-\frac{p}{2}$ 得到

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m\sqrt{a(x^2+px+q')}}dx=\int\frac{Ax+(B-\frac{Ap}{2})}{\left(t^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^m\sqrt{at^2+a\left(q'-\frac{p^2}{4}\right)}}dt.$$

§5.2.7 椭圆积分

椭圆积分最早起源于计算椭圆的周长. Abel 把它推广到现在称为的**Abel 积分**:

$$\int R(x,y)dx, \quad P(x,y)=0 \tag{5.2.31}$$

其中 $R(x,y)$ 是关于 x,y 的有理函数, 多项式 $P(x,y)$ 满足条件 $P\in\mathbb{Z}[x,y]$ 且 $\deg P\geq 2$. Abel 和Liouville 证明了

一般情况下 (5.2.31) 不能同初等函数来表示.

Abel 积分的特殊情形就是**椭圆积分**

$$\int R\left(x,\sqrt{P(x)}\right)dx, \quad \deg P=3 \text{ 或 } 4. \tag{5.2.32}$$

如果 $\deg P=2$ 前面已经讨论过. 多项式次数 ≥ 5 时相应的不定积分称为**超椭圆积分**

$$\int R\left(x,\sqrt{P(x)}\right)dx, \quad \deg P\geq 5. \tag{5.2.33}$$

对 (5.2.32) 只要考虑 $\deg P=4$ 的情形:

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}\right)dx. \tag{5.2.34}$$

根据代数学基本定理

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=a(x^2+px+q)(x^2+p'x+q'). \tag{5.2.35}$$

情形 1: $p=p'$. 此时

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=a\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right]\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q'-\frac{p^2}{4}\right]. \tag{5.2.36}$$

令

$$x=t-\frac{p}{2} \qquad t=x+\frac{p}{2}, \tag{5.2.37}$$

得到

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=a\left(t^2+q-\frac{p^2}{4}\right)\left(t^2+q'-\frac{p^2}{4}\right)$$

且

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}\right)dx=\int R^*\left(t,\sqrt{a(t^2+\alpha)(t^2+\beta)}\right)dt. \tag{5.2.38}$$

情形 2: $p\neq p'$. 此时令

$$x=\frac{\mu t+\nu}{t+1} \quad \text{或} \quad t=\frac{x-\nu}{\mu-x} \tag{5.2.39}$$

得到

$$x^2+px+q=\frac{(\mu^2+p\mu+q)t^2+[2\mu\nu+p(\mu+\nu)+2q]t+(\nu^2+p\nu+q)}{(t+1)^2}.$$

选择 μ,ν 使得

$$2\mu\nu+p(\mu+\nu)+2q=0=2\mu\nu+p'(\mu+\nu)+2q'.$$

进一步有

$$\mu\neq\nu \text{ 且为实的} \quad\Longleftrightarrow\quad (q-q')^2-(p-p')(p'q-pq')>0.$$

从而得到

$$\begin{aligned}&\int R\left(x,\sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}\right)dx\\ =&\int R\left(\frac{\mu t+\nu}{t+1},\frac{\sqrt{(M+Nt^2)(M'+N't^2)}}{(t+1)^2}\right)\frac{\mu-\nu}{(t+1)^2}dt\\ =&\int \widetilde{R}\left(t,\sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}\right)dt.\end{aligned}$$

令

$$Y:=A(1+mt^2)(1+m't^2),\quad y:=\sqrt{Y}.$$

得到

$$\widetilde{R}(t,y)=\frac{P_1(t)+P_2(t)y}{P_3(t)+P_4(t)y}=\widetilde{R}_1(t)+\widetilde{R}_2(t)y=\widetilde{R}_1(t)+\frac{y^2\widetilde{R}_2(t)}{y}.$$

这样就归结到求以下不定积分

$$\int\frac{R^*(t)}{\sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}}dt. \tag{5.2.40}$$

考虑分解

$$R^*(t)=\frac{R^*(t)+R^*(-t)}{2}+\frac{R^*(t)-R^*(-t)}{2}:=R_1^*(t)+R_2^*(t),$$

这里显然成立 $R_1^*(-t)=R_1^*(t)$ 和 $R_2^*(-t)=-R_2^*(t)$. 所以

$$R_1^*(t)=R_1(t^2),\quad R_2^*(t)=tR_2(t^2).$$

因此进一步归结到如下两个不定积分

$$\int\frac{R_1(t^2)dt}{\sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}}+\int\frac{R_2(t^2)\,tdt}{\sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}} \tag{5.2.41}$$

或者, 对第二个不定积分作变量替换 $t^2=u$ 后, 归结到如下积分

$$\int\frac{R_3(t^2)dt}{\sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}},\quad y:=\sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}, \tag{5.2.42}$$

其中不妨假设 $A=\pm 1$ 和 $t>0$.

(1) 首先我们证明 (5.2.42) 可化简为**标准形式**

$$\int \frac{R(z^2)\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \tag{5.2.43}$$

这里 k 是分数且 $0<k<1$.

情形 1: $A=+1,\ m=-h^2,\ m'=-h^2\ (h>h'>0)$. 此时 $t<1/h$ 或 $t>1/h'$. 令

$$ht=z \quad \left(0<t<1\ \text{或}\ z>\frac{h}{h'}\right).$$

则得到

$$\frac{dt}{y}=\frac{dz}{h\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{h'^2}{h^2}z^2\right)}},\quad \int\frac{R_3(t^2)dt}{\sqrt{y}}=\int\frac{R(z^2)dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

情形 2: $A=+1,\ m=-h^2,\ m'=h^2\ (h,h'>0)$. 此时 $t<1/h$. 令

$$ht=\sqrt{1-z^2}\quad (0<z\le 1).$$

则得到

$$\frac{dt}{y}=\frac{-1}{\sqrt{h^2+h'^2}}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{h'^2}{h^2+h'^2}z^2\right)}}.$$

情形 3: $A=+1,\ m=h^2,\ m'=h^2\ (h>h'>0)$. 此时令

$$ht=\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\quad (0\le z<1),\quad z=\frac{ht}{\sqrt{1+h^2t^2}}.$$

则得到

$$\frac{dt}{y}=\frac{dz}{h\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{h^2-h'^2}{h^2}z^2\right)}}.$$

情形 4: $A=-1,\ m=-h^2,\ m'=h^2\ (h,h'>0)$. 此时 $t>1/h$. 令

$$ht=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad (0<z<1).$$

则得到

$$\frac{dt}{y}=\frac{dz}{\sqrt{h^2+h'^2}\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{h^2}{h^2+h'^2}z^2\right)}}.$$

情形 5: $A=-1, m=-h^2, m'=-h^2$ $(h>h'>0)$. 此时 $1/h<t<1/h'$. 令

$$h't=\sqrt{1-\frac{h^2-h'^2}{h^2}z^2}\quad (0<z<1).$$

则得到

$$\frac{dt}{y}=\frac{-dz}{h\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{h^2-h'^2}{h^2}z^2\right)}}.$$

(2) **第一类、第二类、第三类椭圆积分.** 根据上面讨论可知

$$\int\frac{R(z^2)dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=I_n \text{ 和 } H_n \text{ 的线性组合} \tag{5.2.44}$$

这里 $n\in\mathbb{N}$ 和 $m\in\mathbb{N}_+$, 且

$$\begin{aligned} I_n &:= \int\frac{z^{2n}dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},\quad n\in\mathbb{N},\\ H_m &:= \int\frac{dz}{(z^2-a)^m\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},\quad m\in\mathbb{N}_+,\ a\in\mathbb{C}. \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} &\left[z^{2n-3}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}\right]'\\ =\ &(2n-3)z^{2n-4}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}+z^{2n-3}\frac{2k^2z^3-(k^2+1)z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\\ =\ &\frac{(2n-1)k^2z^{2n}-(2n-2)(k^2+1)z^{2n-2}+(2n-3)z^{2n-4}}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \end{aligned}$$

所以得到递推关系

$$(2n-1)k^2I_n-(2n-2)(k^2+1)I_{n-1}+(2n-3)I_{n-2}=z^{2n-3}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)} \tag{5.2.45}$$

等价地

$$I_n=\alpha I_0+\beta_nI_1+q_{2n-3}(z)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}, \tag{5.2.46}$$

其中 $\alpha_n,\beta_n\in\mathbb{R}$, $\det q_{2n-3}=2n-3$, 且

$$I_0 := \int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},\quad \text{第一类椭圆积分}, \tag{5.2.47}$$

$$I_1 := \int\frac{z^2dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},\quad \text{第二类椭圆积分}. \tag{5.2.48}$$

对 $z(z^2-a)^{-m+1}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$ 微分得到

$$(2m-2)\left[-a+(k^2+1)a^2-k^2a^3\right]H_m-(2m-3)\left[1-2a(k^2+1)+3k^2a^2\right]H_{m-1}$$

$$+(2m-4)[(k^2+1)-3k^2a]H_{m-2}-(2m-5)k^2H_{m-3}=\frac{z}{(z^2-a)^{m-1}}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}.$$

最终得到结论: H_m 唯一被

$$\begin{aligned} H_1 &:= \int\frac{dz}{(z^2-a)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\\ &\sim \int\frac{dz}{(1+hz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad \text{第三类椭圆积分},\\ H_0 &:= I_0,\\ H_{-1} &:= \int\frac{(z^2-a)dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = I_1-aI_0\end{aligned}$$

所决定, 即

所有的椭圆积分被 I_0, I_1, H_1 所唯一确定.

(3) **Legendre 型椭圆积分.** 对上述三类椭圆积分作变量替换 $z=\sin\varphi$ 得到

$$I_0 = \int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} := F(k,\varphi), \tag{5.2.49}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{k^2}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}-\frac{1}{k^2}\int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi\\ &= \frac{E(k,\varphi)-E(k,\varphi)}{k^2}, \end{aligned} \tag{5.2.50}$$

这里

$$E(k,\varphi) := \int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi. \tag{5.2.51}$$

对第三类椭圆积分有

$$H_1 = \int\frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{5.2.52}$$

例5.2.11. (1) 非初等函数:

$$\mathbf{Ei}(x) := \int\frac{e^x}{x}dx, \quad \mathbf{li}(x) := \int\frac{dx}{\ln x},$$

$$\mathbf{Si}(x) := \int\frac{\sin x}{x}dx, \quad \mathbf{Ci}(x) := \int\frac{\cos x}{x}dx,$$

$$\mathbf{Shi}(x) := \int\frac{\sinh x}{x}dx, \quad \mathbf{Chi}(x) := \int\frac{\cosh x}{x}dx,$$

$$\mathbf{S}(x) := \int\sin(x^2)dx, \quad \mathbf{C}(x) = \int\cos(x^2)dx, \quad \textbf{Fresnel 积分},$$

$$\Phi(x) := \int e^{-x^2}dx, \quad \textbf{Euler-Poisson 积分}.$$

(2) 计算积分

$$I_n := \int_0^1 \frac{t^n dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

实际上

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2n}\theta \cdot 2\sin\theta\cos\theta d\theta}{\sin\theta\cos\theta} = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}\theta d\theta.$$

利用分布积分计算得到

$$\begin{aligned}
I_n &= -2\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}\theta d\cos\theta = 2\int_0^{\pi/2} \cos\theta(2n-1)\sin^{2n-2}\theta\cos\theta d\theta \\
&= 2(2n-1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2\theta)\sin^{2n-2}\theta d\theta = (2n-1)(I_{n-1}-I_n)
\end{aligned}$$

故

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} I_0 = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi.$$

接下来计算

$$F(\lambda) := \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-\lambda t)}}.$$

根据Taylor 公式得到

$$(1-\lambda t)^{-1/2} = \sum_{n\geq 0} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\lambda^n t^n$$

从而推出

$$\begin{aligned}
F(\lambda) &= \int_0^1 \left[\sum_{n\geq 0} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\lambda^n \frac{t^n dt}{\sqrt{t(1-t)}}\right] \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\lambda^n I_n = \sum_{n\geq 0} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 \pi\lambda^n
\end{aligned}$$

最后一个级数就是所谓的**超几何级数**. 上述计算过程的第二个等式, 即求积分和求级数可以相互交换需要确认是否成立 (这个在含参变量积分中会给出详细说明). 把 $F(\lambda)$ 重新写成

$$\begin{aligned}
F(\lambda) &= \pi\sum_{n\geq 0} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+n-1\right)\right]^2 \frac{\lambda^n}{(n!)^2} \\
&= \pi\sum_{n\geq 0} \frac{\binom{1/2}{n}\binom{1/2}{n}}{n!}\frac{\lambda^n}{n!}. \qquad (5.2.53)
\end{aligned}$$

§5.2.8 超几何级数

在这一小节我们来简单介绍下超几何级数的定义和性质, 当然假定知道反常积分的定义.

定义5.2.12. Γ 函数定义为

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} r^{-t} t^{z-1} dt, \quad \mathrm{Re}(z) > 0. \tag{5.2.54}$$

之后的章节中我们会证明如下关于 $\Gamma(z)$ 的性质:

(1) $\Gamma(x) \in C^1((0,+\infty)), \Gamma(1+n) = n!, \Gamma'(1) = \gamma.$

(2) $\mathrm{Re}(z) > 0 \Longrightarrow \Gamma(1+z) = z\Gamma(z).$

(3) $\Gamma(z)$ 可以解析延拓到 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^-$ 且

$$\lim_{z \to -n} (z+n)\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

(4) $\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

(5) $\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, -2, \cdots\}$,

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} 2^{1-2z} \Gamma(2z).$$

(6) $(2n-1)!! = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \Gamma(n+1/2)$ 故

$$\frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(1/2)} = \binom{1/2}{n}.$$

定义5.2.13. *Gauss* 引入了如下的**超几何级数**

$$\begin{aligned} F(\alpha,\beta,\gamma,x) \quad &:= \quad 1 + \sum_{n \ge 1} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots+(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} \frac{x^n}{n!} \\ &= \quad 1 + \sum_{n \ge 1} \frac{\binom{\alpha}{n}\binom{\beta}{n}}{\binom{\gamma}{n}} \frac{x^n}{n!}. \end{aligned} \tag{5.2.55}$$

注意到函数 F 满足微分方程

$$x(x-1)y'' - [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' + \alpha\beta y = 0. \tag{5.2.56}$$

定义5.2.14. 令

$$(a)_k := \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}, \quad a,k \in \mathbb{C} \tag{5.2.57}$$

并定义**(广义) 超几何级数**如下

$${}_pF_q\left[\begin{array}{c} \alpha_1,\cdots,\alpha_p \\ \beta_1,\cdots,\beta_q \end{array}\middle| x\right] := \sum_{n\geq 0}\frac{(\alpha_1)_n\cdots(\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n\cdots(\beta_q)_n}\frac{x^n}{n!}. \tag{5.2.58}$$

其中

$$p,q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \alpha_1,\cdots,\alpha_p,\beta_1,\cdots,\beta_q \in \mathbb{C}.$$

当 $p = q+1$ 时可以证明 ${}_pF_q$ 对任意 α_i, β_j 都收敛, 如果 $|x| < 1$. 并且 ${}_{q+1}F_q$ 可解析延拓到 $\mathbb{C}\setminus[1,+\infty)$. 如果 $x = 1$ 此时级数当 $\mathrm{Re}(\alpha_1+\cdots+\alpha_{q+1}) < \mathrm{Re}(\beta_1+\cdots+\beta_q)$ 时收敛; 如果 $x = -1$ 此时级数当 $\mathrm{Re}(\alpha_1+\cdots+\alpha_{q+1}) < \mathrm{Re}(\beta_1+\cdots+\beta_q)+1$ 时收敛.

定义5.2.15. 定义Ψ 函数如下

$$\Psi(z) := -\gamma - \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n\geq 1}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{z+n}\right]. \tag{5.2.59}$$

可以证明如下结论:

$$\Psi(z+1) - \Psi(z) = \frac{1}{z}, \quad \Psi(1-z) - \Psi(z) = \pi\cot(\pi z),$$

$$\Psi'(z) = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(z+n)^2}, \quad \Psi(z) = \frac{1}{2}\left[\Psi\left(\frac{z}{2}\right) + \Psi\left(\frac{z+1}{2}\right)\right] + \ln 2,$$

$$\Psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z), \tag{5.2.60}$$

Ψ 仅有实根; Ψ 在区间 $(0,+\infty)$ 和每个区间 $(-n-1,-n)$ $(n \in \mathbb{N})$; 仅在区间 $(1,2)$ 内存在唯一的实根; 在每个区间 $(-n-1,-n)$ 内存在根; $\lim_{x\to\infty}[\Psi(x) - \ln x] = 0$.

例5.2.16. 定义函数

$$z := {}_2F_1\left[\begin{array}{c} \frac{1}{2},\frac{1}{2} \\ 1 \end{array}\middle| x\right] = {}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|1\middle|x\right), \tag{5.2.61}$$

$$y := \pi\frac{{}_2F_1\left[\begin{array}{c} \frac{1}{2},\frac{1}{2} \\ 1 \end{array}\middle| 1-x\right]}{{}_2F_1\left[\begin{array}{c} \frac{1}{2},\frac{1}{2} \\ 1 \end{array}\middle| x\right]} = \pi\frac{{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|1\middle|1-x\right)}{{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|1\middle|x\right)}. \tag{5.2.62}$$

第一类完备椭圆积分定义为

$$K \equiv K(x) := \int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-x\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|1\middle|x\right) = \frac{\pi}{2}z, \tag{5.2.63}$$

而**第二类完备椭圆积分**定义为

$$E \equiv E(x) := \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - x\sin^2\varphi} d\varphi = \pi x(1-x)z' + \frac{\pi z(1-x)}{2}. \tag{5.2.64}$$

其实可以证明

$$K = \frac{\pi}{2}\sum_{n\geq 0}\left[\binom{1/2}{n}\right]^2 \frac{x^n}{(n!)^2}. \tag{5.2.65}$$

例5.2.17. (1) $\mathrm{Re}(2x+n+2) > 0 \Longrightarrow$

$$\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n+k}\right)\frac{(-1)^k(-x)_k}{(x+n+1)_k} = \Psi(x+n+1) - \Psi(n+1).$$

(2) $\mathrm{Re}(2x+2y+n+2) > 0 \Longrightarrow$

$${}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{n}{2}+1, n, -x, -y \\ \frac{n}{2}, x+n+1, y+n+1\end{matrix}\middle| -1\right] = \frac{\Gamma(x+n+1)\Gamma(y+n+1)}{\Gamma(x+y+n+1)\Gamma(n+1)}.$$

(3) 取 $n = -x = -y = \frac{1}{2}$ 得到

$$\frac{2}{\pi} = 1 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3 - \cdots = \sum_{n\geq 0}(-1)^n(4n+1)\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^3. \tag{5.2.66}$$

(4) *Ramanujan:*

$$\mu := \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma^2(3/4)} = 1.180340599016096, \tag{5.2.67}$$

$$\nu := \frac{\Gamma^2(3/4)}{\pi^{3/2}} = 0.269676300594190, \tag{5.2.68}$$

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ 1\end{matrix}\middle| \frac{1}{2} + \frac{x}{1+x^2}\right] &= \mu\sqrt{1+x^2}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4}\end{matrix}\middle| x^4\right] \\ &\quad + x(1+x^2)^{3/2}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \\ \frac{5}{4}\end{matrix}\middle| x^4\right]. \end{aligned} \tag{5.2.69}$$

§5.3 定积分

§5.3.1 Riemann 积分的定义

积分通俗地讲就是曲线所围区域的面积.

定义5.3.1. *(1)* 闭区间 $[a, b]$ 的**划分** T 是该区间内的一组有限个点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 满足

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

区间 $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \le i \le n$, 统称为 T 的区间. 记

$$\Delta x_i := x_i - x_{i-1}, \quad ||T|| := \max_{1\le i\le n} \Delta x_i$$

其中把 $||T||$ 称为 T 的**模**.

(2) 闭区间 $[a,b]$ 上的**带点划分** $(T, \boldsymbol{\xi})$ 是由划分 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 和点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $1 \le i \le n$ 所组成. 这里 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

(3) 假设函数 f 定义在闭区间 $[a,b]$ 上且 $(T, \boldsymbol{\xi})$ 是 $[a,b]$ 上的带点划分, 则有限和

$$\sigma(f; T, \boldsymbol{\xi}) := \sum_{1\le i\le n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{5.3.1}$$

称为函数 f 相对于 $[a,b]$ 上的带点划分 $(T, \boldsymbol{\xi})$ 的**Riemann 和**.

(4) 实数 I 称为闭区间 $[a,b]$ 上函数 f 的**Riemann 积分**如果

$$I = \lim_{||T||\to 0} \sigma(f; T, \boldsymbol{\xi}) = \lim_{||T||\to 0} \sum_{1\le i\le n} f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{5.3.2}$$

也就是说

$$\begin{array}{c}\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, [a,b] \text{ 上的带点划分 } (T, \boldsymbol{\xi}) \text{ 只要 } ||T|| < \delta \text{ 有} \\ \text{不等式 } \left|\sum_{1\le i\le n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \epsilon \text{ 成立.}\end{array} \tag{5.3.3}$$

Riemann 积分通常记作

$$I = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{5.3.4}$$

这里 a 和 b 分别是**积分下限**和**积分上限**, x 是**积分变量**, $f(x)$ 是**被积函数**. 此时函数 f 称为 $[a,b]$ 上**Riemann 可积的**.

(5) 引入**Riemann 可积空间**如下

$$R([a,b]) := \left\{[a,b] \text{ 上所有 Riemann 可积的函数}\right\}. \tag{5.3.5}$$

之后我们将会证明包含关系: $C([a,b]) \subsetneq R([a,b])$, 到此为止三个重要的函数空间 $C([a,b])$, $D([a,b])$, $R([a,b])$, 它们之间的关系如下:

$$D([a,b]) \subsetneq C([a,b]) \subsetneq R([a,b]). \tag{5.3.6}$$

注5.3.2. (1) Riemann 积分和积分变量无关, 即

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(t)\,dt.$$

(2) 为了方便期间引入记号

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \quad \int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx \quad (a < b).$$

例5.3.3. *(1)* 证明

$$\int_0^1 c\,dx = c.$$

证: 令函数 $f(x) = c$, $x \in [0,1]$. 对任何带点划分 (T,ξ) 都有

$$\sigma(f;T,\xi) = \sum_{1\le i\le n} f(\xi_i)\Delta x_i = c\sum_{1\le i\le n}\Delta x_i = c(1-0) = c. \quad \square$$

(2) 证明

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}, \quad \int_a^b \frac{dx}{x^2} = -\frac{b-a}{ab} \quad (0<a<b).$$

证: 对任何 $[a,b]$ 上的带点划分 (T,ξ) 有

$$\sigma(f;T,\xi) = \sum_{1\le i\le n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

$\underline{f(x) = x}$: 此时

$$\sigma(f;T,\xi) = \sum_{1\le i\le n}\xi_i\Delta x_i.$$

为了便于计算首先选取特殊点 $\tilde{\xi}_i$ 如下

$$\tilde{\xi}_i := \frac{x_{i-1}+x_i}{2}.$$

从而得到

$$\sigma(f;T,\tilde{\xi}) = \sum_{1\le i\le n}\frac{x_{i-1}+x_i}{2}(x_i-x_{i-1}) = \frac{1}{2}\sum_{1\le i\le n}\left(x_i^2-x_{i-1}^2\right) = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

对一般的 ξ 利用

$$\sigma(f;T,\xi)-\sigma(f;T,\tilde{\xi}) = \sum_{1\le i\le n}(\xi_i-\tilde{\xi}_i)\Delta x_i$$

得到

$$\left|\sigma(f;T,\xi)-\sigma(f;T,\tilde{\xi})\right| \le ||T||\sum_{1\le i\le n}\Delta x_i = ||T||(b-a)$$

即可得到相应的积分值

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{||T||\to 0}\sigma(f;T,\tilde{\xi}) = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

$\underline{f(x) = \frac{1}{x^2}}$: 此时

$$\sigma(f;T,\xi) = \sum_{1\le i\le n}\frac{\Delta x_i}{\xi_i^2}.$$

为了便于计算首先选取特殊点 $\tilde{\xi}_i$ 如下

$$\tilde{\xi}_i := \sqrt{x_{i-1}x_i}.$$

从而得到

$$\sigma(f;T,\tilde{\xi}) = \sum_{1\le i\le n} \frac{x_i - x_{i-1}}{2}(x_{i-1}x_i) = \sum_{1\le i\le n}\left(\frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i}\right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

对一般的 ξ 得到

$$\begin{aligned}\left|\sigma(f;T,\xi) - \sigma(f;T,\tilde{\xi})\right| &= \left|\sum_{1\le i\le n}\left(\frac{1}{\xi_i^2} - \frac{1}{\tilde{\xi}_i^2}\right)\Delta x_i\right| \le \sum_{1\le i\le n}\left|\frac{\tilde{\xi}_i^2 - \xi_i^2}{\xi_i^2\tilde{\xi}_i^2}\Delta x_i\right| \\ &\le \sum_{1\le i\le n}\frac{|\tilde{\xi}_i^2 - \xi_i^2|\Delta x_i}{a^4} \le \sum_{1\le i\le n}\frac{2b}{a^4}|\xi_i - \tilde{\xi}_i|\Delta x_i \le \frac{2b}{a^4}(b-a)||T||.\end{aligned}$$

从而得到相应的积分值

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{||T||\to 0}\sigma(f;T,\tilde{\xi}) = \frac{b-a}{ab}. \quad \square$$

(3) 计算积分

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx, \quad a > 0.$$

证: 这个积分是半径为 a 的圆盘位于第一象限内的面积, 所以

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{4}\pi a^2 = \frac{\pi a^2}{4}. \quad \square.$$

(4) 计算积分

$$\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}dx, \quad a < b.$$

证: 利用恒等式得到

$$\begin{aligned}\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}dx &= \int_a^b \sqrt{-x^2 - ab + (a+b)x}dx \\ = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}dx &= \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \frac{\pi(b-a)^2}{8}\end{aligned}$$

这是因为积分是以 $((a+b)/2, 0)$ 为中心半径为 $(b-a)/2$ 的圆盘位于第一象限内的面积. $\square$

(5) 根据对称性得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0.$$

(6) Dirichlet 函数 $D(x) \notin R([0,1])$.

证: 对 $[0,1]$ 上的任何带点划分 (T,ξ) 有

$$\sigma(D;T,\xi) = \sum_{1\le i\le n} D(\xi_i)\Delta x_i.$$

如果所有 $\xi_i \in \mathbb{Q}$, 则 $D(\xi_i) = 1$ 从而

$$\sigma(D;T,\xi) = \sum_{1\le i\le n}\Delta x_i = 1 - 0 = 1.$$

如果所有 $\xi_i \notin \mathbb{Q}$, 则 $D(\xi_i) = 0$ 从而

$$\sigma(D; T, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{1 \le i \le n} 0 = 0.$$

因此 $D(x) \notin R([0,1])$. □

§5.3.2 可积的必要条件

首先我们证明闭区间上的可积函数必有界.

定理5.3.4. $f \in R([a,b]) \Rightarrow f$ 在 $[a,b]$ 上有界.

证: 根据假设条件 $f \in R([a,b])$, 得到 $\exists\, I \in \mathbb{R}$, $\exists\, \delta > 0$, $\forall$ 带点划分 $(T, \boldsymbol{\xi})$ 都有不等式

$$\left| \sum_{1 \le i \le n} f(\xi_i)\Delta x_i - I \right| < 1$$

成立. 如果函数 f 在 $[a,b]$ 上无界, $\exists\, i_0$ 使得函数 f 在 $[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ 上必无界. 从而 $\exists\, \xi_{i_0} \in [x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ 使得不等式

$$|f(\xi_{i_0})\Delta x_{i_0}| > 1 + |I| + \left| \sum_{1 \le i \ne i_0 \le n} f(\xi_i)\Delta x_i \right|$$

成立. 但是由下面计算

$$1 + |I| + \left| \sum_{1 \le i \ne i_0 \le n} f(\xi_i)\Delta x_i \right| \ < \ |f(\xi_{i_0})\Delta x_{i_0}|$$

$$= \left| \left[\sum_{1 \le i \le n} f(\xi_i)\Delta x_i - I \right] - \sum_{1 \le i \ne i_0 \ne n} f(\xi_i)\Delta x_i + I \right| \ \le \ 1 + |I| + \left| \sum_{1 \le i \ne i_0 \le n} f(\xi_i)\Delta x_i \right|$$

却推出矛盾! □

注5.3.5. 函数 f 在 $[a,b]$ 上有界 $\not\Rightarrow$ $f \in R([a,b])$. 反例就是**例**5.3.3 中的Dirichlet 函数 $f(x) = D(x)$.

§5.3.3 可积的充分条件

给定 $[a,b]$ 上的划分 T: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. 回忆下记号 $\Delta_i := [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$, $1 \le i \le n$.

(1) 称 $[a,b]$ 上的划分 $\widetilde{T}$ 是 T 的**加细** 如果它可以由 T 添加一些新的分点而得到.

(2) 假设 $\widetilde{T}$ 是 T 的加细. 根据定义在区间 $[x_{i-1},x_i]$ 内有若干个新增加的分点 $x_{i,j}$ $(0\le j\le n_i)$:

$$x_{i-1}=x_{i,0}<x_{i,1}<\cdots<x_{i,n_i}=x_i$$

并记 $\Delta_{i,j}:=[x_{i,j-1},x_{i,j}]$ 和 $\Delta x_{i,j}:=x_{i,j}-x_{i,j-1}$. 观察到

$$\sum_{0\le j\le n_i}\Delta x_{i,j}=\Delta x_i=x_i-x_{i-1}.$$

(3) 给定 $[a,b]$ 上两个划分 T' 和 T'', 存在 $[a,b]$ 上的划分 $\widetilde{T}$ 使得它分别是 T' 和 T'' 的加细,

$$\widetilde{T}=T'\cup T'',$$

即取划分 T' 和 T'' 的所有点 (注意: 有可能 T' 和 T'' 部分分点是重合的).

(4) 定义函数 f 在 Δ_i 上的**振幅**如下:

$$\omega(f;\Delta_i):=\sup_{x',x''\in\Delta_i}|f(x')-f(x'')|. \tag{5.3.7}$$

定理5.3.6. *如果函数 f 在 $[a,b]$ 上有界且满足下列条件*

$$\left(\begin{array}{c}\forall\,\epsilon>0\,\exists\,\delta>0\,\forall\,[a,b]\text{ 上的划分 }T\text{ 只要满足 }||T||<\delta\text{ 有不等式}\\ \sum_{1\le i\le n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i<\epsilon\end{array}\right),$$

则 $f\in R([a,b])$.

证: 根据Cauchy 判别法则得到

$$\lim_{||T||\to 0}\sum_{1\le i\le n}f(\xi_i)\Delta x_i\text{ 存在 }\Leftrightarrow\left(\begin{array}{c}\forall\,\epsilon>0\,\exists\,\delta>0\,\forall\,||T'||<\delta\text{ 和 }||T''||<\delta\text{ 有}\\ |\sigma(f;T',\boldsymbol{\xi}')-\sigma(f;T'',\boldsymbol{\xi}'')|<\epsilon\end{array}\right).$$

(1) 设 T 是 $[a,b]$ 的划分且 $\widetilde{T}$ 是 T 的加细, 则得到

$$|\sigma(f;\widetilde{T},\widetilde{\boldsymbol{\xi}})-\sigma(f;T,\boldsymbol{\xi})| = \left|\sum_{1\le i\le n}\sum_{1\le j\le n_i}f(\xi_{i,j})\Delta x_{i,j}-\sum_{1\le i\le n}f(\xi_i)\Delta x_i\right|$$

$$=\left|\sum_{1\le i\le n}\sum_{1\le j\le n_i}[f(\xi_{i,j})-f(\xi_i)]\Delta x_{i,j}\right| \le \sum_{1\le\le n}\sum_{1\le j\le n_i}|f(\xi_{i,j})-f(\xi_i)|\Delta x_{i,j}$$

$$\le \sum_{1\le i\le n}\sum_{1\le j\le n_i}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_{i,j} = \sum_{1\le i\le n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i,$$

这里 $\xi_{i,j}\in\Delta_{i,j}$ 和 $\xi_i\in\Delta_i$.

$\forall\,\epsilon>0\,\exists\delta>0$ 使得不等式

$$|\sigma(f;\widetilde{T},\widetilde{\boldsymbol{\xi}})-\sigma(f;T,\boldsymbol{\xi})|<\frac{\epsilon}{2}$$

对 $[a,b]$ 上的任意带点划分 (T,ξ) 和 (T,ξ) 的任意带点加细 $(\widetilde{T},\tilde{\xi})$ 都成立.

(2) 对任意 $[a,b]$ 上的带点划分 (T',ξ') 和 (T'',ξ'') 只要满足条件 $||T'||<\delta$ 和 $||T''||<\delta$ 根据 (1) 就有

$$|\sigma(f;\widetilde{T},\tilde{\xi})-\sigma(f;T',\xi')|<\frac{\epsilon}{2},\quad |\sigma(f;\widetilde{T},\tilde{\xi})-\sigma(f;T'',\xi'')|<\frac{\epsilon}{2},$$

其中 $\widetilde{T}=T'\cup T''$. 所以

$$|\sigma(f;T',\xi')-\sigma(f;T'',\xi'')|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.\quad \square$$

推论5.3.7. *$C([a,b])\subsetneq R([a,b])$.*

证: 给定连续函数 $f\in C([a,b])$. 则根据Cantor 定理知道函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上一致连续. $\forall\,\epsilon>0\,\exists\,\delta>0$ 使得不等式

$$\omega(f;\Delta)<\frac{\epsilon}{b-a}$$

对任何满足条件 $|\Delta|<\delta$ 的闭子区间 $\Delta\subset[a,b]$ 都成立. 从而对任意划分 T 只要 $||T||<\delta$ 就有

$$\sum_{1\le i\le n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i<\sum_{1\le i\le n}\frac{\epsilon}{b-a}\Delta x_i=\frac{\epsilon}{b-a}(b-a)=\epsilon.\quad \square$$

推论5.3.8. *如果有界函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上除了有限个点外是连续的, 则 $f\in R([a,b])$.*

证: 根据有界性得到 $\omega(f;[a,b])\le C<+\infty$. 假设函数 f 有 k 个不连续点 $y_1,\cdots,y_k\in[a,b]$. 下面我们将证明

$$\left(\begin{array}{c}\forall\,\epsilon>0\,\exists\,\delta>0\,\forall\,[a,b]\text{ 的划分 }T\text{ 只要 }||T||<\delta\text{ 有}\\ \sum_{1\le i\le n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i<\epsilon\end{array}\right).$$

上述断言结合**定理**5.3.6 足可以保证 $f\in R([a,b])$.

对任意给定 $\epsilon>0$ 取 $\delta_1:=\epsilon/8Ck$. 对函数 f 的每个不连续点 y_j 构造其 δ_1- 领域, 即 $U(y_j,\delta_1):=(y_j-\delta_1,y_j+\delta_1)\cap[a,b]$. 不失一般性不妨假设

$$a<y_1<\cdots<y_k<b$$

且 ϵ 足够小使得 $(y_j-\delta_1,y_j+\delta_1)=U(y_j,\delta_1)$ 且互不相交. 则

$$[a,b]\setminus\bigcup_{1\le j\le k}U(y_j,\delta_1)$$

是 $k+1$ 个互不相交的闭区间 $B_1,\cdots,B_{k+1}$ 的并; 在每个这样的闭区间上函数 f 是连续的从而是一致连续的. $\exists\,\delta_2>0$ 使得不等式

$$\omega(f;\Delta)<\frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

对任何满足条件 $|\Delta| < \delta_2$ 且包含在某个闭区间 $B_j, 1 \le j \le k+1$, 的闭子区间 Δ 都成立.

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. 对 $[a,b]$ 上满足条件 $||T|| < \delta$ 的任何划分 T 都有

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i\le n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i &= \sum_{\Delta_i\cap U_j=\emptyset,\,\forall j}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i + \sum_{\Delta_i\cap U_j\neq\emptyset,\,\exists j}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i \\ &< \frac{\epsilon}{2(b-a)}\sum_{\Delta_i\cap U_j=\emptyset,\,\forall j}\Delta x_i + C\sum_{\Delta_i\cap U_j\neq\emptyset,\,\exists j}\Delta x_i \\ &< \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a) + C(\delta+2\delta_1+\delta)k < \frac{\epsilon}{2} + 4kC\frac{\epsilon}{8kC} = \epsilon. \quad \square\end{aligned}$$

推论5.3.9. 闭区间 $[a,b]$ 上的单调函数 f 一定是可积的.

证: 不失一般性不妨假设 $f(b) \neq f(a)$. 如果函数 f 单调则 $\omega(f;[a,b]) = |f(b)-f(a)| > 0$. $\forall\,\epsilon > 0$, $\exists\,\delta = \epsilon/|f(b)-f(a)| > 0$, $\forall\,[a,b]$ 上满足条件 $||T|| < \delta$ 的任何划分 T 都有

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i\le n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i &< \delta\sum_{1\le i\le n}\omega(f;\Delta_i) = \delta\sum_{1\le i\le n}|f(x_i)-f(x_{i-1})| \\ &= \delta|f(b)-f(a)| = \epsilon. \quad \square\end{aligned}$$

注5.3.10. 闭区间上的单调函数可能会有可数多个不连续点. 比如考察函数

$$f(x) = \begin{cases} 1-\frac{1}{2^{n-1}}, & 1-\frac{1}{2^{n-1}} \le x < 1-\frac{1}{2^n},\ n \ge 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

定义5.3.11. 假设函数 $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的有界函数. 记

$$M \equiv M_f := \sup_{[a,b]} f, \quad m \equiv m_f := \inf_{[a,b]} f. \tag{5.3.8}$$

对 $[a,b]$ 上的任意划分 T: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 引入记号

$$M_i := \sup_{\Delta_i} f, \quad m_i := \inf_{\Delta_i} f, \quad 1 \le i \le n, \tag{5.3.9}$$

这里 $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$.

(1) 函数 f 相对于划分 T 的下 **Darboux** 和定义为

$$\underline{S}(f;T) := \sum_{1\le i\le n} m_i\Delta x_i. \tag{5.3.10}$$

(2) 函数 f 相对于划分 T 的上 **Darboux** 和定义为

$$\overline{S}(f;T) := \sum_{1\le i\le n} M_i\Delta x_i. \tag{5.3.11}$$

(3) 观察到如下不等式

$$m(b-a) \le \underline{S}(f;T) \le \sigma(f;T,\boldsymbol{\xi}) \le \underline{S}(f;T) \le M(b-a). \tag{5.3.12}$$

(4) 断言:

$$\underline{S}(f;T) = \inf_{\boldsymbol{\xi}} \sigma(f;T,\boldsymbol{\xi}), \quad \overline{S}(f;T) = \sup_{\boldsymbol{\xi}} \sigma(f;T,\boldsymbol{\xi}). \tag{5.3.13}$$

证: 根据(5.3.12) 得到

$$\underline{S}(f;T) \le \inf_{\boldsymbol{\xi}} \sigma(f;T,\boldsymbol{\xi}), \quad \overline{S}(f;T) \ge \sup_{\boldsymbol{\xi}} \sigma(f;T,\boldsymbol{\xi}).$$

给定 $\epsilon > 0$. $\forall\, i \in \{1, \cdots, n\}$ $\exists\, \xi_i \in \Delta_i$ 满足

$$M_i < f(\xi_i) + \frac{\epsilon}{b-a}.$$

因此

$$\sum_{1\le i\le n} M_i \Delta x_i < \sum_{1\le i\le n} \left[f(\xi_i) + \frac{\epsilon}{b-a} \right] \Delta x_i = \sum_{1\le i\le n} f(\xi_i)\Delta x_i + \epsilon.$$

即 $\underline{S}(f;T) = \sup_{\boldsymbol{\xi}} \sigma(f;T,\boldsymbol{\xi})$. □

(5) 断言: $\forall$ $[a,b]$ 上的划分 T_1 和 T_2 有

$$\underline{S}(f;T_1) \le \overline{S}(f;T_2). \tag{5.3.14}$$

证: 令 $T := T_1 \cup T_2$. 则 T 是 T_1 和 T_2 的加细. 根据下面要证明的断言(6) 得到

$$\underline{S}(f;T_1) \le \underline{S}(f;T) \le \overline{S}(f;T) \le \overline{S}(f;T_2). \quad \square$$

(6) 假设划分 $\widetilde{T}$ 是 $[a,b]$ 上的划分 T 的加细, 并记 $\Delta_{i_1}, \cdots, \Delta_{i_k}$ 是划分 T 的区间使得它们包含属于划分 $\widetilde{T}$ 而不属于划分 T 的点. 则

$$0 \le \overline{S}(f;T) - \overline{S}(f;\widetilde{T}) \le \omega(f;[a,b]) \sum_{1\le j\le k} \Delta x_{i_j}, \tag{5.3.15}$$

$$0 \le \underline{S}(f;\widetilde{T}) - \underline{S}(f;T) \le \omega(f;[a,b]) \sum_{1\le j\le k} \Delta x_{i_j}. \tag{5.3.16}$$

证:

$$\overline{S}(f;T) - \overline{S}(f;\widetilde{T}) = \sum_{1\le j\le k} \left(M_{i_j}\Delta x_{i_j} - \sum_{1\le \ell\le L_{i_j}} M_{i_j}^{(\ell)} |\Delta_{i_j}^{(\ell)}| \right)$$

这里 $\sum_{1\le\ell\le L_{ij}}\Delta_{i_j}^{(\ell)}=\Delta_{i_j}$ 是根据 Δ_{i_j} 内 $\widetilde{T}$ 的点进行划分而得到的, 而 $M_{i_j}^{(\ell)}$ 是相应区间 $\Delta_{i_j}^{(\ell)}$ 上的上确界. 因此得到

$$\overline{S}(f;T)-\overline{S}(f;\widetilde{T})=\sum_{1\le j\le k}\sum_{1\le\ell\le L_{i_j}}\left[M_{i_j}-M_{i_j}^{(\ell)}\right]|\Delta_{i_j}^{(\ell)}|\ge 0.$$

另一方面, 有

$$\overline{S}(f;T)-\overline{S}(f;\widetilde{T})\le\sum_{1\le j\le k}\sum_{1\le\ell\le L_{i_j}}\omega(f;[a,b])|\Delta_{i_j}^{(\ell)}|\le\omega(f;[a,b])\sum_{1\le j\le k}\Delta x_{i_j}.$$

同理可证第二个不等式. □

(7) 函数 f 的**下 Darboux 积分**和**上 Darboux 积分**分别定义为

$$\underline{I}:=\sup_T\underline{S}(f;T),\quad \overline{I}:=\inf_T\overline{S}(f;T).\tag{5.3.17}$$

实际上, 在给出定义之前首先要证明 sup 和 inf 都存在. 引入偏序关系 $\le$ 如下:

$$T_1\le T_2\quad\Leftrightarrow\quad T_2 \text{ 是 } T_1 \text{ 的加细}.$$

则根据(6) 得到

$$T_1\le T_2\quad\Rightarrow\quad \underline{S}(f;T_1)\le\underline{S}(f;T_2),\quad \overline{S}(f;T_2)\le\overline{S}(f;T_1).$$

从**(5)** 和Zorn 引理得到 $\underline{S}(f;T)$ 相对于偏序 $\le$ 是递增有上界而 $\overline{S}(f;T)$ 相对于偏序 $\le$ 是递减有下界, 从而 $\underline{I}$ 和 $\overline{I}$ 都存在且满足 $\underline{I}\le\overline{I}$.

(8) **(Darboux 定理)**

$$\underline{I}=\lim_{||T||\to 0}\underline{S}(f;T),\quad \overline{I}=\lim_{||T||\to 0}\overline{S}(f;T).\tag{5.3.18}$$

证: $\forall\,\epsilon>0\,\exists$ 划分 T_1 满足 $\overline{S}(f;T_1)<\overline{I}+\frac{\epsilon}{2}$. $\forall$ 划分 T, $\widetilde{T}:=T\cup T_1$ 是 T 的加细. 在(6) 中的记号得到

$$\overline{S}(f;T)-(M-m)k||T||\le\overline{S}(f;\widetilde{T})\le\overline{S}(f;T_1).$$

当 $||T||<\delta:=\epsilon/[2(M-m+1)k]$ (这里 k 依赖于 T_1) 时, 我们得到

$$\begin{aligned}\overline{I}\ &\le\ \overline{S}(f;T)\ \le\ \overline{S}(f;T_1)+(M-m)k||T||\\ &<\ \overline{S}(f;T_1)+\frac{M-m}{2(M-m+1)}\epsilon\ <\ \overline{S}(f;T_1)+\frac{\epsilon}{2}\ <\ \overline{I}+\epsilon.\end{aligned}$$

因此 $\lim_{||T||\to 0}\overline{S}(f;T)=\overline{I}$. □

(9) 有界函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上可积 $\Leftrightarrow \underline{I}$ 和 $\overline{I}$ 都存在且 $\underline{I}=\overline{I}$. 此时有

$$\underline{I}=\overline{I}=I=\int_a^b f(x)dx.$$

证: $\Rightarrow$: $f\in R([a,b])$ 推出 $\lim_{\|T\|\to 0}\sigma(f;T,\boldsymbol{\xi})=I$. 根据

$$\underline{S}(f;T)\le\sigma(f;T,\boldsymbol{\xi})\le\overline{S}(f;T)$$

和(8) 得到不等式 $\underline{I}\le I\le\overline{I}$. 另一方面 $\forall\,\epsilon>0$, 由(4), $\exists\, T_1,T_2$ 使得

$$\sigma(f;T_1,\boldsymbol{\xi})\le\underline{S}(f;T_1)+\epsilon,\quad \overline{S}(f;T_2)\le\sigma(f;T_2,\boldsymbol{\xi})+\epsilon$$

成立. 根据(5) 得到

$$\sigma(f;T_1,\boldsymbol{\xi})\le\underline{S}(f;T_1)+\epsilon\le\overline{S}(f;T_2)+\epsilon\le\sigma(f;T_2,\boldsymbol{\xi})+3\epsilon.$$

从而得到 $I\le\underline{I}\le\overline{I}\le I$.

$\Leftarrow$: 反之从 $\underline{S}(f;T)\le\sigma(f;T,\boldsymbol{\xi})\le\overline{S}(f;T)$ 得到 $\underline{I}=I=\overline{I}$. $\square$

(10) $f\in R([a,b])\Leftrightarrow\forall\,\epsilon>0\,\exists$ 划分 T 满足 $\overline{S}(f;T)-\underline{S}(f;T)<\epsilon$.

证: $f\in R([a,b])\Leftrightarrow\underline{I}=\overline{I}$. $\square$

(11) $f\in R([a,b])\Leftrightarrow\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{1\le i\le n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i=0$.

证: $\Leftarrow$: **定理**5.3.6.

$\Rightarrow$: 因为 $\omega(f;\Delta_i)=M_i-m_i$ 所以

$$\sum_{1\le i\le n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i=\overline{S}(f;T)-\underline{S}(f;T).$$

根据(9) 或(10), 若 $f\in R([a,b])$, 则 $\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{1\le i\le n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i=0$. $\square$

定理5.3.12. **($R([a,b])$ 是向量空间)** $f,g\in R([a,b])\Rightarrow$

(1) $f+g\in R([a,b])$.

(2) $\alpha f\in R([a,b]),\forall\,\alpha\in\mathbb{R}$.

(3) $|f|\in R([a,b])$.

(4) $f|_{[c,d]}\in R([c,d]),\forall\,[c,d]\subseteq[a,b]$.

(5) $fg\in R([a,b])$.

证: (1) 根据定义

$$\int_a^b(f+g)(x)dx \;=\; \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{1\le i\le n}(f+g)(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \lim_{||T||\to 0}\sum_{1\le i\le n}[f(\xi_i)+g(\xi_i)]\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx + \int_x^b g(x)dx.$$

(2) 根据定义

$$\int_a^b (\alpha f)(x)dx = \lim_{||T||\to 0}\sum_{1\le i\le n}(\alpha f)(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \lim_{||T||\to 0}\sum_{1\le i\le n}\alpha f(\xi_i)\Delta x_i = \alpha\int_a^b f(x)dx.$$

(3) 根据定义

$$\int_a^b |f|(x)dx = \lim_{||T||\to 0}\sum_{1\le i\le n}|f|(\xi_i)\Delta x_i.$$

由于

$$\sum_{1\le i\le n}\omega(|f|;\Delta_i)\Delta x_i \le \sum_{1\le i\le n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i,$$

利用**定理**5.3.6 得到 $|f| \in R([a,b])$.

(4) 因为 $[c,d]$ 上任何划分 $\widehat{T}$ 都可以延拓成 $[a,b]$ 上的划分 T, 所以 $||T|| \le ||\widehat{T}||$. 从而得到

$$\sum_{\widehat{T}}\omega(f|_{[c,d]};\Delta_i)\Delta x_i \le \sum_T \omega(f;\Delta_i)\Delta x_i$$

其中左边是对 $\widehat{T}$ 的区间求和, 而右边是对 T 的区间求和. 因此 $f \in R([a,b])$ 推出 $f|_{[c,d]} \in R([c,d])$.

(5) 对任何 $f,g \in R([a,b])$ 有

$$fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2].$$

根据 (1) 和 (2) 只要证明

$$f \in R([a,b]) \quad \Rightarrow \quad f^2 \in R([a,b]).$$

因为 $f \in R([a,b])$, 所以 $|f| \le C$ 从而得到

$$|f^2(x_1) - f^2(x_2)| = |[f(x_1)+f(x_2)][f(x_1)-f(x_2)]| \le 2C|f(x_1)-f(x_2)|$$

和

$$\sum_{1\le i\le n}\omega(f^2;\Delta_i)\Delta x_i \le 2C\sum_{1\le i\le n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i$$

因此 $f^2 \in R([a,b])$. $\square$

§5.3.4 Lebesgue 判别法则: 可积的充要条件

定义5.3.13. 集合 $E\subseteq\mathbb{R}$ 称为**测度为零的**或**零测集**(在**Lebesgue** 意义下) 如果 $\forall\,\epsilon>0\,\exists$ 可数个开区间 $(I_k)_{k\geq 1}$ 使得

$$E\subseteq\bigcup_{k\geq 1}I_k \quad 和 \quad \sum_{k\geq 1}|I_k|<\epsilon$$

成立.

注5.3.14. (a) 单点集和有限集都是零测集.

(b) 有限个或可数多个零测集的并也是零测集.

(c) 零测集的子集自身也是零测集.

证: (a) $\forall\,x\in\mathbb{R}$, 取 $I_k=(x-\epsilon/2^k,x+\epsilon/2^k)$ 得到 $\sum_{k\geq 1}|I_k|=2\epsilon$.

(b) 假设 $E=\cup_{n\geq 1}E_n$, 其中 E_n 是零测集. $\forall\,\epsilon>0\,\exists\,(I_{n,k})_{k\geq 1}$ 满足

$$E_n\subseteq\bigcup_{k\geq 1}I_{n,k} \qquad \sum_{k\geq 1}|I_{n,k}|\leq\frac{\epsilon}{2^n}.$$

因此

$$E\subseteq\bigcup_{n,k\geq 1}I_{n,k} \qquad \sum_{n,k\geq 1}|I_{n,k}|=\sum_{n\geq 1}\frac{\epsilon}{2^n}=\epsilon.$$

(c) 显然. $\square$

(d) $\mathbb{Q}$ 是零测集.

定义5.3.15. 如果性质/条件/结论对集合 X 中的点, 可能除了一个零测集外, 都成立, 称该性质/条件/结论在 X 上**几乎处处**成立或对 X 的**几乎每个**点都成立.

定理5.3.16. **(Lebesgue)** $f\in R([a,b])\Leftrightarrow f$ 在 $[a,b]$ 上有界且几乎处处连续.

例5.3.17. (1) 对 $[0,1]$ 上的Riemann 函数

$$R(x):=\begin{cases}\frac{1}{q}, & x=\frac{p}{q}\ ((p,q)=1),\\ 1, & x=0,1,\\ 0, & x\in(0,1)\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

有 $R\in R([0,1])$ 和

$$\int_0^1 R(x)dx=0.$$

证: $\{R$ 的不连续点$\}=\mathbb{Q}\cap[0,1]$. 根据**定理**5.3.16, 得到 R 是可积的. 进一步

$$\int_0^1 R(x)dx=\sup_T\underline{S}(R;T)=\sup_T\left(\sum_{1\leq i\leq n}\inf_{\xi_i}R(\xi_i)\Delta x_i\right)=\sup_T\sum_{1\leq i\leq n}0\Delta x_i=0.$$

(2) $f \in C([a,b])$, $\varphi \in R([\alpha,\beta])$, $a \le \varphi(t) \le b$, $\forall\, t \in [\alpha,\beta] \Rightarrow f\circ\varphi \in R([a,b])$.

证: 因为 f 有界所以 $f\circ\varphi$ 也有界. 令

$$\begin{aligned} D_{\varphi} &:= \{t\in[\alpha,\beta] : \varphi \ \ t\}, \\ D_{f\circ\varphi} &:= \{t\in[\alpha,\beta] : f\circ\varphi \ \ t\}. \end{aligned}$$

因为 φ 在 t 连续得到 $f\circ\varphi$ 在 t 也连续, 从而 $D_{f\circ\varphi} \subseteq D_{\varphi}$. 根据**注**5.3.14, $D_{f\circ\varphi}$ 是零测集. $\square$

(3) $f \in R([a,b])$, $\varphi \in R([\alpha,\beta])$, $a \le \varphi(t) \le b$, $\forall\, t \in [\alpha,\beta] \not\Rightarrow f\circ\varphi \in R([\alpha,\beta])$.

反例: $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, $\varphi(t) = R(t)$, $0 \le t \le 1$.

$$f\circ\varphi(t) = \begin{cases} 1, & t\in[0,1]\cap\mathbb{Q}, \\ 0, & t\in[0,1]\setminus\mathbb{Q} \end{cases} = D(t)|_{[0,1]}. \quad \square$$

(4) $f \in R([a,b])$, $\varphi \in C([\alpha,\beta])$, $a \le \varphi(t) \le b$, $\forall\, t \in [\alpha,\beta] \not\Rightarrow f\circ\varphi \in R([\alpha,\beta])$.

反例: 记 C 为Cantor 集, 则 $[0,1]\setminus C = \cup_{n\ge1}(a_n,b_n)$. 考察函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x \le 1, \end{cases} \qquad \varphi(t) = \begin{cases} 0, & t\in C, \\ \frac{b_n-a_n}{2} - \left|t - \frac{b_n+a_n}{2}\right|, & a_n < t < b_n. \end{cases}$$

则

$$f\circ\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t\in C, \\ 1, & t\in[0,1]\setminus C. \end{cases} \qquad \square$$

定理5.3.18. (充要条件) *假设函数 f 在 $[a,b]$ 上有界, 则下面断言等价:*

(1) $f \in R([a,b])$,

(2) $\underline{I} = \overline{I}$,

(3) $\forall\,\epsilon > 0\ \exists\,[a,b]$ 上的划分 T 满足

$$\overline{S}(f;T) - \underline{S}(f;T) < \epsilon,$$

(4) $\lim_{||T||\to0}[\overline{S}(f;T) - \underline{S}(f;T)] = 0$,

(5) $\exists\,[a,b]$ 上的一组划分 $(T_m)_{m\ge1}$ 满足

$$\lim_{m\to\infty}[\overline{S}(f;T_m) - \underline{S}(f;T)_m] = 0,$$

(6) f 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续,

(7) $\forall\,\epsilon>0\,\forall\,\eta>0\,\exists\,[a,b]$ 上的划分 T 满足

$$\sum_{\omega(f;\Delta_i)\geq\epsilon}\Delta x_i<\eta,$$

(8) **(du Bois-Reymond)** $\forall\,\epsilon>0\,\forall\,\delta>0\,\forall\,E\subset[a,b]$ 满足条件 $\omega(f;E)\geq\epsilon$, $\exists\,I_1,\cdots,I_n$ 使得 $E\subset\cup_{1\leq k\leq n}I_k$ 和 $\sum_{1\leq k\leq n}|I_k|<\delta$ 成立.

证: 只需证明 (1) $\Leftrightarrow$ (7). 由于 (1) $\Leftrightarrow$ (3), 所以只要验证 (3) $\Leftrightarrow$ (7).

(3) $\Rightarrow$ (7): $\forall\,\epsilon>0\,\forall\,\eta>0\,\exists\,[a,b]$ 上的划分 T 满足

$$\sum_{1\leq i\leq n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i<\epsilon\eta.$$

因此

$$\epsilon\sum_{\omega(f;\Delta_i)\geq\epsilon}\Delta x_i\leq\sum_{\omega(f;\Delta_i)\geq\epsilon}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i<\sum_{1\leq i\leq n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i<\epsilon\eta.$$

即

$$\sum_{\omega(f;\Delta_i)\geq\epsilon}\Delta x_i<\eta$$

成立.

(7) $\Rightarrow$ (3): $\forall\,\epsilon>0$, 取 $\epsilon'=\epsilon/2(b-a)>0$ 和 $\eta'=\epsilon/2(M-m+1)>0$. $\exists\,[a,b]$ 上的划分 T 满足

$$\sum_{\omega(f;\Delta_i)\geq\epsilon'}\Delta x_i<\eta'.$$

从而

$$\begin{aligned}\overline{S}(f;T)-\underline{S}(f;T)&=\sum_{1\leq i\leq n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i\\ &=\sum_{\omega(f;\Delta_i)\geq\epsilon'}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i+\sum_{\omega(f;\Delta_i)<\epsilon'}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i\\ &\leq(M-m)\eta'+(b-a)\epsilon'<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.\ \Box\end{aligned}$$

例5.3.19. (1) 假设 $f\in R([0,1])$ 且

$$\int_0^1 f(x)\,dx=I>0.$$

证明 $\exists$ 闭子区间 $[\alpha,\beta]\subseteq[0,1]$ 使得对任何点 $x\in[\alpha,\beta]$ 都有 $f(x)>\frac{1}{2}I$.

证: 否则的话, 对任何闭子区间 $[\alpha,\beta]\subseteq[0,1]$ 存在点 $\xi\in[\alpha,\beta]$ 使得 $f(\xi)\leq\frac{1}{2}I$ 成立. 则

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\lim_{||T||\to0}\sum_{1\leq i\leq n}f(\xi_i)\Delta x_i\leq\lim_{||T||\to0}\sum_{1\leq i\leq n}\frac{1}{2}I\Delta x_i=\frac{1}{2}I.\ \Box$$

(2) 假设 $f \in R([0,1])$ $f \geq 0$, 且

$$\int_0^1 f(x)dx = 0.$$

证明 $\forall\,\epsilon > 0\,\exists\,[\alpha,\beta] \subseteq [0,1]$ 使得对任何点 $x \in [\alpha,\beta]$ 都有 $f(x) < \epsilon$.

证: 否则的话, $\exists\,\epsilon_0 > 0\,\forall\,[\alpha,\beta] \subseteq [0,1]\,\exists\,\xi \in [\alpha,\beta]$ 满足 $f(\xi) \geq \epsilon_0$. 则得到

$$0 = \int_0^1 f(x)dx = \lim_{||T||\to 0}\sum_{1\leq i\leq n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq \lim_{||T||\to 0}\sum_{1\leq i\leq n}\epsilon_0\Delta x_i = \epsilon_0 > 0. \quad \square$$

(3) $f \in R([a,b])$ 且 $|f| \geq C > 0 \Rightarrow \frac{1}{f} \in R([a,b])$.

§5.4 定积分的基本性质

这节主要来证明积分中值定理和微积分基本定理, 最后一个定理的直接推论就是众所周知的**Newton-Leibniz 公式**. 另一方面, Newton-Leibniz 公式可以看成高维版本的 Stokes 公式的一维表现. 具体细节要在微分流形课上给出.

§5.4.1 基本性质

定理5.4.1. (线性) $f,g \in R([a,b])$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g \in R([a,b])$ 且

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx. \tag{5.4.1}$$

定理5.4.2. (可加性) $f \in R([a,b])$, 任意 $c \in [a,b] \Rightarrow f|_{[a,c]} \in R([a,c])$, $f|_{[c,b]} \in R([c,b])$, 且

$$\int_a^b f(x)dfx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{5.4.2}$$

证: 结论 $f|_{[a,c]} \in R([a,c])$ 和 $f|_{[c,b]} \in R([c,b])$ 已证明. 令 $M = \sup_{[a,b]} f$ 和 $m = \inf_{[a,b]} f$. $\forall\,\epsilon > 0\,\exists\,\delta_k > 0\,\forall$ 划分 T_k 满足 $||T_k|| < \delta_k$, $1 \leq k \leq 2$, 有

$$\left|\sum_{T_k} f(\xi_i)\Delta x_i - I_k\right| < \epsilon,$$

这里

$$I_1 = \int_a^c f(x)dx, \quad I_2 = \int_c^b f(x)dx.$$

给定 $[a,b]$ 上任意划分 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 且满足条件 $||T|| < \delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \epsilon/(M-m)\}$. 如果 $c = x_i$, 则 $T = T_1 \cup T_2$, 这里

$$T_1: a = x_0 < \cdots < x_i = c, \quad T_2: c = x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b.$$

因此

$$\sum_T f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{T_1} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{T_2} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

如果 $c \in (x_{i-1}, x_i)$, 则

$$\sum_T f(\xi_j)\Delta x_j = \sum_{j<i} f(\xi_j)\Delta x_j + \sum_{j>i} f(\xi_j)\Delta x_j + f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

不失一般性不妨假设 $x_{i-1} < \xi_i \le c < x_i$. 此时

$$\begin{aligned}\sum_T f(\xi_j)\Delta x_j &= \sum_{j<i} f(\xi_j)\Delta x_j + f(\xi_i)(c - x_{i-1}) + \sum_{j>i} f(\xi_j)\Delta x_j + f(c)(x_i - c) \\ &\quad + [f(\xi_i) - f(c)](x_i - c) \\ &:= \sum_{T_1} f(\xi_j)\Delta x_j + \sum_{T_2} f(\xi_j)\Delta_j + [f(\xi_i) - f(c)](x_i - c).\end{aligned}$$

综上所述, 我们总有

$$\left|\sum_T f(\xi_i)\Delta x_i - (I_1 + I_2)\right| \le 2\epsilon + (M - m)||T|| < 3\epsilon. \quad \square$$

定理5.4.3. (单调性) $f, g \in R([a,b])$ 且在 $[a,b]$ 上满足不等式 $f \le g \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx. \tag{5.4.3}$$

特别地

$$0 \le g \in R([a,b]) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \ge 0. \tag{5.4.4}$$

证: 根据假设条件得到

$$\sum_{1 \le i \le n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{1 \le i \le n} g(\xi_i)\Delta x_i. \quad \square$$

定理5.4.4. $f \in R([a,b]) \Rightarrow |f| \in R([a,b])$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx. \tag{5.4.5}$$

证: 根据基本初等不等式得到

$$\sum_{1 \le i \le n} \omega(|f|; \Delta_i)\Delta x_i \le \sum_{1 \le i \le n} \omega(f; \Delta_i)\Delta x_i.$$

故 $|f| \in R([a,b])$. 进一步

$$\left|\sum_{1 \le i \le n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \le \sum_{1 \le i \le n} |f(\xi_i)|\Delta x_i. \quad \square$$

§5.4.2 积分中值定理

定理5.4.5. (积分第一中值定理) 假设 $f\in R([a,b])$, $m=\inf_{[a,b]}f$, $M=\sup_{[a,b]}f$ $\Rightarrow \exists\,\mu\in[m,M]$

$$\int_a^b f(x)dx=\mu(b-a). \tag{5.4.6}$$

特别地

$$f\in C([a,b]) \quad\Rightarrow\quad \int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a),\ \exists\,\xi\in[a,b]. \tag{5.4.7}$$

证: 根据题意得到

$$m\le f\le M \quad\Rightarrow\quad m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a),$$

所以

$$m\le\mu:=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le M.$$

如果 $f\in C([a,b])$, 则 $f\in R([a,b])$ 且根据连续函数的介值定理 $\exists\,\xi\in[a,b]$ 满足 $\mu=f(\xi)$. □

定理5.4.6. (广义积分第一中值定理) 假设 $f,g\in R([a,b])$, $m=\inf_{[a,b]}f$, $M=\sup_{[a,b]}f$, 在 $[a,b]$ 上恒有 $g\ge 0$ 或者恒有 $\le 0\Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx,\quad \exists\,\mu\in[m,M]. \tag{5.4.8}$$

特别地如果 $f\in C([a,b])$ 则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx,\quad \exists\,\xi\in[a,b]. \tag{5.4.9}$$

证: 不失一般性不妨假设在 $[a,b]$ 上恒有 $g\ge 0$. 如果 $\int_a^b g(x)dx\ne 0$, 从不等式

$$mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x)$$

得到

$$m\le\mu:=\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\le M.$$

如果 $\int_a^b g(x)dx=0$, 则显然有 $\int_a^b f(x)dx=0$. □

给定两组有限数列 $a_1,\cdots,a_n$ 和 $b_1,\cdots,b_n$ 引入如下的**Abel** 变换:

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i\le n}a_ib_i &= \sum_{1\le i\le n}(A_i-A_{i-1})b_i = \sum_{1\le i\le n}A_ib_i-\sum_{0\le i\le n-1}A_ib_{i+1}\\ &= A_nb_n-A_0b_1+\sum_{1\le i\le n-1}A_i(b_i-b_{i+1}) = \sum_{1\le i\le n-1}A_i(b_i-b_{i+1})+A_nb_n,\end{aligned}$$

这里 $A_k := \sum_{1\le i\le k} a_i$ 且 $A_0 := 0$. 当

$m \le A_k \le M\ (1\le k\le n)$, $b_i \ge 0\ (1\le i\le n)$ 且 $b_i \ge b_{i+1}\ (1\le i\le n-1)$,

此时必有不等式

$$mb_1 \le \sum_{1\le i\le n} a_i b_i \le Mb_1. \tag{5.4.10}$$

引理5.4.7. $f\in R([a,b]) \Rightarrow \forall\, x\in[a,b]$, 有

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \in C([a,b]). \tag{5.4.11}$$

证: 首先得到 $|f|\in R([a,b]$. $\forall\, x\in[a,b]$, 有 $f|_{[a,x]}\in R([a,x])$. $\forall\, x, x+h\in[a,b]$ 得到

$$|F(x+h)-F(x)| = \left|\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right| \le \left|\int_x^{x+h} |f(t)|\,dt\right| \le M|h|,$$

这里 $M=\sup_{[a,b]}|f|$. 故函数 F 连续. □

定理5.4.8. (积分第二中值定理) 假设 $f,g\in R([a,b])$ 且 $g\ge 0$.

(1) g 单调递减 $\Rightarrow \exists\, \xi\in[a,b]$ 满足

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx. \tag{5.4.12}$$

(2) g 单调递增 $\Rightarrow \exists\, \eta\in[a,b]$ 满足

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b)\int_{\eta}^{b} f(x)\,dx. \tag{5.4.13}$$

证: (1) 任取 $[a,b]$ 的划分 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. 根据**定理**5.4.2 得到

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\,dx &= \sum_{1\le i\le n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)\,dx\\ &= \sum_{1\le i\le n} g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx + \sum_{1\le i\le n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[g(x)-g(x_{i-1})]f(x)\,dx.\end{aligned}$$

由于 $f\in R([a,b])$ 则存在某个正常数 C 满足 $\sup_{[a,b]}|f|\le C$ 从而得到

$$\begin{aligned}\left|\sum_{1\le i\le n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[g(x)-g(x_{i-1})]f(x)\,dx\right| &\le \sum_{1\le i\le n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|g(x)-g(x_{i-1})||f(x)|\,dx\\ &\le C\sum_{1\le i\le n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|g(x)-g(x_{i-1})|\,dx \le C\sum_{1\le i\le n}\omega(g;\Delta_i)\Delta x_i.\end{aligned}$$

但是 $g\in R([a,b])$ 所以必有

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{1\le i\le n}\omega(g;\Delta_i)\Delta x_i = 0,$$

从而导致

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \lim_{||T||\to 0}\sum_{1\le i\le n} g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx.$$

引入函数

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt.$$

根据**引理**5.4.7, 可知 $F\in C([a,b])$ 且 $F(a)=0$. 定义

$$m_F := \min_{[a,b]} F \qquad M_F := \max_{[a,b]} F.$$

利用 Abel 变换得到

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i\le n} g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx &= \sum_{1\le i\le n} g(x_{i-1})[F(x_i)-F(x_{i-1})]\\ &= \sum_{1\le i\le n-1} A_i(b_i-b_{i+1}) + A_n b_n\end{aligned}$$

这里

$$a_i := F(x_i)-F(x_{i-1}),\quad b_i := g(x_{i-1})\ge 0,\quad A_k := \sum_{1\le i\le k} a_i = F(x_k).$$

故得到

$$m_F g(a) \le \sum_{1\le i\le n} g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \le M_F g(a)$$

和

$$m_F g(a) \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M_F g(a).$$

如果 $g(a)=0$, 则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

如果 $g(a)>0$, 则

$$m_F \le \frac{1}{g(a)}\int_a^b f(x)g(x)dx \le M_F.$$

根据 F 的连续性, $\exists\,\xi\in[a,b]$ 满足

$$\frac{1}{g(a)}\int_a^b f(x)g(x)dx = F(\xi) = \int_a^\xi f(x)dx.$$

(2) 若 $g\ge 0$ 且递增, 和 (1) 类似地, 可得到

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &= \sum_{1\le i\le n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)f(x)dx\\ &= \sum_{1\le i\le n} g(x_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx + \sum_{1\le i\le n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[g(x)-g(x_i)]f(x)dx.\end{aligned}$$

则

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \lim_{||T||\to 0} \sum_{1\le i\le n} g(x_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx.$$

令

$$\widetilde{F}(x) := \int_x^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt - F(x).$$

从而 $\widetilde{F} \in C([a,b])$ 且 $\widetilde{F}(b) = 0$. 定义

$$m_{\widetilde{F}} := \min_{[a,b]} \widetilde{F}, \quad M_{\widetilde{F}} := \max_{[a,b]} \widetilde{F}.$$

得到

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i\le n} g(x_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx &= \sum_{1\le i\le n} g(x_i)[\widetilde{F}(x_{i-1}) - \widetilde{F}(x_i)] \\ &= \sum_{1\le i\le n-1} A_i[b_{i+1} - b_i] + A_0 b_1\end{aligned}$$

其中

$$a_i := \widetilde{F}(x_{i-1}) - \widetilde{F}(x_i), \quad b_i := g(x_i) \ge 0, \quad A_k := \sum_{k+1\le i\le n} a_i - \widetilde{F}(x_k).$$

因此

$$m_{\widetilde{F}} b_n \le \sum_{1\le i\le n} g(x_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \le M_{\widetilde{F}} b_n$$

和

$$m_{\widetilde{F}} g(b) \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M_{\widetilde{F}} g(b).$$

如果 $g(b) = 0$, 则

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0.$$

如果 $g(b) > 0$, 则

$$m_{\widetilde{F}} \le \frac{1}{g(b)}\int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M_{\widetilde{F}}.$$

从而 $\exists\, \eta \in [a,b]$ 满足

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b)\int_\eta^b f(x)\,dx. \quad \square$$

定理5.4.9. (广义积分第二中值定理) $f, g \in R([a,b])$ 且 g 在 $[a,b]$ 上单调 $\Rightarrow \exists\, \xi \in [a,b]$ 满足

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx. \tag{5.4.14}$$

证: (1) 假设 g 在 $[a,b]$ 上递增. 令 $G(x) := g(b) - g(x)$. 则在 $[a,b]$ 上 $G \geq 0$, 递减且可积. 根据**定理**5.4.8, $\exists\, \xi \in [a,b]$ 满足

$$\int_a^b G(x) f(x)\, dx = G(a) \int_a^{\xi} f(x)\, dx.$$

另一方面

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) G(x)\, dx &= g(b) \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b f(x) g(x)\, dx, \\ G(a) \int_a^{\xi} f(x)\, dx &= g(b) \int_a^{\xi} f(x)\, dx - g(a) \int_a^{\xi} f(x)\, dx,\end{aligned}$$

从而得到 (5.4.14).

(2) 如果 g 在 $[a,b]$ 上递减, 考虑函数 $\widetilde{G}(x) := g(x) - g(b)$. □

例5.4.10. (1) 任意 $\beta \geq 0$ 和 $b > a > 0$ 证明

$$\left| \int_a^b e^{-\beta x} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \frac{2}{a}.$$

证: 根据**定理**5.4.8 得到

$$\int_a^b e^{-\beta x} \frac{\sin x}{x} dx = \int_a^b \frac{e^{-\beta x}}{x} \sin x\, dx = \frac{e^{-a\beta}}{a} \int_a^{\xi} \sin x\, dx.$$

因此

$$\left| \int_a^b e^{-\beta x} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \frac{2}{a e^{\beta a}} \leq \frac{2}{a}. \quad \square$$

(2) $f \in R([a,b]) \Rightarrow \exists\, \xi \in [a,b]$ 满足

$$\int_a^{\xi} f(x)\, dx = \int_{\xi}^b f(x)\, dx.$$

证: 定义函数

$$g(x) := \begin{cases} -1, & x = a, \\ 0, & a < x < b, \\ 1, & x = b. \end{cases}$$

因为 g 的不连续点集是 $\{a,b\}$ 且 g 单调递增, 所以 $g \in R([a,b])$. 根据**定理**5.4.9, $\exists\, \xi \in [a,b]$ 满足

$$0 = \int_a^b f(x) g(x)\, dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x)\, dx + g(b) \int_{\xi}^b f(x)\, dx. \quad \square$$

(3) 假设 $f \in C([a,b])$ 且

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b x f(x)\, dx = 0.$$

证明存在 $x_1, x_2 \in (a,b)$ 使得 $f(x_1) = f(x_2) = 0$ 成立.

证: 因为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分为 0, 故存在 $x_0 \in (a,b)$ 使得 $f(x_0)=0$ 成立. 否则的话, 在整个区间上 $f>0$ 或者 $f<0$. 利用函数的连续性得到 $f \geq \min_{[a,b]} f > 0$ 或者 $f \leq \max_{[a,b]} f < 0$ 从而 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 的积分 <0 或者 >0, 矛盾. 假设 $f(x)$ 只有一个零点 $x_0 \in (a,b)$. 根据函数连续性和积分为零, 不妨假设 $f(x)$ 在区间 $[a,x_0]$ 上非负而在 $[x_0,b]$ 上非正. 根据前面所证必有

$$\int_a^{x_0} f(x)dx = -\int_{x_0}^b f(x)dx \neq 0.$$

根据**定理**5.4.6 得到

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b xf(x)dx = \int_a^{x_0} xf(x)dx + \int_{x_0}^b xf(x)dx \\ &= \xi_1 \int_a^{x_0} f(x)dx + \xi_2 \int_{x_0}^b f(x)dx \quad (\exists\, a \leq \xi_1 \leq x_0 \leq \xi_2 \leq b) \\ &= (\xi_1 - \xi_2)\int_a^{x_0} f(x)dx \neq 0. \end{aligned}$$

这是因为 $\xi_1 \neq x_0$ 且 $\xi_2 \neq x_0$. 因为函数 $(x_0-x)f(x)$, $x \in [a,x_0]$, 是非负且不恒为零, 所以

$$0 < \int_a^{x_0}(x_0-x)f(x)dx = x_0\int_a^{x_0} f(x)dx - \int_a^{x_0} xf(x)dx.$$

所以 $\xi_1 \neq x_0$. 同理可证 $\xi_2 \neq x_0$. □

(4) $a>0$ 且 $f \in C^1([0,a]) \Rightarrow$

$$|f(0)| \leq \frac{1}{a}\int_0^a |f(x)|dx + \int_0^a |f'(x)|dx.$$

证: 根据**定理**5.4.5 得到

$$\int_0^a f(x)dx = f(\zeta)a \ \ (\exists\, 0 \leq \zeta \leq a), \quad f(\zeta)-f(0) = \int_0^\zeta f'(x)dx.$$

因此

$$\begin{aligned} |f(0)| &\leq |f(\zeta)| + \int_0^\zeta |f'(x)|dx \\ &\leq \left|\frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx\right| + \int_0^a |f'(x)|dx \\ &\leq \frac{1}{a}\int_0^a |f(x)|dx + \int_0^a |f'(x)|dx. \quad \square \end{aligned}$$

(5) 假设 $f \in D([0,1])$ 且

$$f(1) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx.$$

证明

$$f'(\zeta) = -\frac{f(\zeta)}{\zeta}, \quad \exists\, \zeta \in (0,1).$$

证: $\exists\, \eta \in [0, \frac{1}{2}]$ 满足

$$f(1) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} x f(x)\, dx = 2\eta f(\eta)\frac{1}{2} = \eta f(\eta).$$

定义函数

$$F(x) := x f(x), \quad \eta \le x \le 1.$$

因为 $F \in C([\eta, 1]) \cap D((\eta, 1))$ 且 $F(\eta) = F(1)$, 则存在 $\zeta \in (\eta, 1) \subseteq (0, 1)$ 满足 $0 = F'(\zeta) = \zeta f'(\zeta) + f(\zeta)$. □

(6) **(Jacobson, 1982)** $f \in C([a, x]) \Rightarrow \exists\, c_x \in (a, x)$ 满足

$$\int_a^x f(t)\, dt = f(c_x)(x - a).$$

进一步, 如果 f 在 a 处可导且 $f'(a) \neq 0$, 则

$$\lim_{x\to a+} \frac{c_x - a}{x - a} = \frac{1}{2}.$$

证: 根据**定理**5.4.5 得到 c_x 的存在性. 定义

$$I := \lim_{x\to a+} \frac{1}{(x-a)^2}\left[\int_a^x f(t)\, dt - x f(a) + a f(a)\right].$$

首先利用L'Hospital 法则得到

$$I = \lim_{x\to a+} \frac{f(x) - f(a)}{2(x-a)} = \frac{1}{2} f'(a).$$

另一方面

$$I = \lim_{x\to a+} \frac{f(c_x)(x-a) - f(a)(x-a)}{(x-a)^2} = f'(a) \lim_{x\to a+} \frac{c_x - a}{x - a}.$$

由于 $f'(a) \neq 0$, 结论得证. □

(7) $f \in D^2([a, b]) \Rightarrow \exists\, \xi \in (a, b)$ 满足

$$f''(\xi) = \frac{25}{(b-a)^3}\int_a^b \left[f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] dx.$$

证: 利用Taylor 公式展开得到

$$f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\eta_x)}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2.$$

两边积分得到

$$\int_a^b \left[f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] dx = \frac{1}{2}\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\eta_x)\, dx.$$

根据**定理**5.4.4 可知存在 $\xi \in (a,b)$ 满足

$$\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\xi_x)dx = f''(\eta)\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx.$$

故

$$\int_a^b \left[f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]dx = \frac{1}{2}f''(\eta)\frac{2}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 = \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3. \ \square$$

(8) 假设 $f \in C([0,1])$ 且在 $[a,b]$ 上 $f>0 \Rightarrow \forall\, n \geq 1\, \exists\, \xi_n$ 满足

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\int_0^1 f(x)dx &= \int_0^{\xi_n} f(x)dx + \int_{1-\xi_n}^1 f(x)dx,\\ \lim_{n\to\infty} n\xi_n &= \frac{1}{f(0)+f(1)}\int_0^1 f(x)dx.\end{aligned}$$

证: 令

$$F(x) := \int_0^x f(t)dt + \int_{1-x}^1 f(t)dt \in C([0,1]).$$

注意到

$$F(0)=0, \quad F(1) = 2\int_0^1 f(t)dt.$$

因为

$$F(0) = 0 < \frac{1}{n}\int_0^1 f(t)dt < 2\int_0^1 f(t)dt = F(1),$$

根据连续函数的介值性可知存在 $\xi_n \in (0,1)$ 满足

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\int_0^1 f(t)dt = F(\xi_n) &= \int_0^{\xi_n} f(t)dt + \int_{1-\xi_n}^1 f(t)dt\\ &= f(\eta_n')\xi_n + \xi_n f(\eta_n'')\end{aligned}$$

这里 $0 \leq \eta' \leq \xi_n\ 1-\xi_n \leq \eta_n'' \leq 1$. 因此

$$\lim_{n\to\infty} n\xi_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{f(\eta_n')+f(\eta_n'')}\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{f(0)+f(1)}\int_0^1 f(t)dt$$

这是因为 $\xi_n \to 0$. $\square$

(9) 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+3} x\sin\frac{1}{x}dx = 3.$$

证: $\exists\, \xi_n \in [n, n+3]$ 满足

$$\int_n^{n+3} x\sin\frac{1}{x}dx = 3\xi_n \sin\frac{1}{\xi_n}.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+3} x\sin\frac{1}{x}dx = 3\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{\xi_n}}{\frac{1}{\xi_n}} = 3. \ \square$$

(10) 假设 $f \in C([0,1])$ 且

$$\int_0^x f(t)\,dt \ge f(x) \ge 0 \quad \forall\, x \in [0,1].$$

证明 $f \equiv 0$.

证: 定义函数

$$F(x) := \int_0^x f(t)\,dt.$$

则可知 $F(0)=0$, $F \ge 0$ 且 $F \in D([0,1])$. 从不等式

$$F'(x) = f(x) \le \int_0^x f(t)\,dt = F(x)$$

得到

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}F(x)\right) = e^{-x}\left(-F(x)+F'(x)\right) \le 0.$$

故 $e^{-x}F(x) \le 0$, 即 $F(x) \le 0$ 所以 $F \equiv 0$. 再次利用不等式得到 $f \equiv 0$. □

例5.4.11. (1)**(Cauchy-Schwarz 不等式)** $f, g \in R([a,b]) \Rightarrow$

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right]^2 \le \left[\int_a^b f^2(x)dx\right]\left[\int_a^b g^2(x)dx\right]. \tag{5.4.15}$$

证: $\forall$ $[a,b]$ 的划分 T 得到

$$\begin{aligned}\left(\sum_{1\le i\le n} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i\right)^2 &= \left(\sum_{1\le i\le n} f(\xi_i)\sqrt{\Delta x_i}\cdot g(\xi_i)\sqrt{\Delta x_i}\right)^2 \\ &\le \left(\sum_{1\le i\le n} f^2(\xi_i)\Delta x_i\right)\left(\sum_{1\le i\le n} g^2(\xi_i)\Delta x_i\right).\end{aligned}$$

令 $||T|| \to 0$ 得到不等式. □

(2) $f \in R([a,b]) \Rightarrow$

$$\left[\int_a^b f(x)\,dx\right]^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

(3) $f \in R([a,b])$ 且 $f \ge m > 0 \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \ge (b-a)^2.$$

(4) **(Minkowski 不等式)** $f, g \in R([a,b]) \Rightarrow$

$$\left[\int_a^b (f(x)+g(x))^2 dx\right]^{1/2} \le \left[\int_a^b f^2(x)dx\right]^{1/2} + \left[\int_a^b g^2(x)dx\right]^{1/2}. \tag{5.4.16}$$

证: 利用 *(5.4.15)*. □

(5) **(Hölder 不等式)** $f,g\in R([a,b])$, $p,q>1$, 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\Rightarrow$

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\le\left(\int_a^b|f(x)|^pdx\right)^{1/p}\left(\int_a^b|g(x)|^qdx\right)^{1/q}. \tag{5.4.17}$$

(6) **(Minkowski 不等式)** $f,g\in R([a,b])$ 且 $p\ge 1\Rightarrow$

$$\left(\int_a^b|f(x)+|g(x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\int_a^b|f(x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b|g(x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{5.4.18}$$

如果 $0<p<1$ 则不等式反号.

(7) **(Jensen 不等式)** 假设函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且凸的, 且 $\varphi\in C((-\infty,+\infty))\Rightarrow$

$$f\left(\frac{1}{c}\int_0^c\varphi(t)dt\right)\le\frac{1}{c}\int_0^c f(\varphi(t))dt. \tag{5.4.19}$$

证: $\forall$ $[0,c]$ 上的划分 T 得到

$$f\left(\frac{1}{c}\sum_{1\le i\le n}\varphi(\xi_i)\Delta x_i\right)\le\sum_{1\le i\le n}\frac{\Delta x_i}{c}f(\varphi(\xi_i)).$$

令 $||T||\to 0$ 得到不等式. □

(8) **(Hadamard 不等式)** $f\in C([a,b])$ 且在 $[a,b]$ 上是凸的 $\Rightarrow\forall\ a\le x_1<x_2\le b$,

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{1}{x_1-x_2}\int_{x_1}^{x_2}f(t)dt\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}. \tag{5.4.20}$$

证: 令 $t:=x_1+\lambda(x_2-x_1)$, $0\le\lambda\le 1\Rightarrow$

$$\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}f(t)dt=\int_0^1F(\lambda)d\lambda,\quad F(\lambda):=f[x_1+\lambda(x_2-x_1)].$$

$\forall\ \lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$ 和 $0\le a_1,a_2\le 1$ 且满足 $a_1+a_2=1\Rightarrow$

$$\begin{aligned}F(a_1\lambda_1+a_2\lambda_2) &= f[x_1+(a_1\lambda_1+a_2\lambda_2)(x_2-x_1)]\\ = f\left(a_1(x_1+\lambda_1(x_2-x_1))+a_2(x_1+\lambda_2(x_2-x_1))\right) &\le a_1F(\lambda_1)+a_2F(\lambda_2).\end{aligned}$$

故 F 也是凸的. 因此根据(7) 得到

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=F\left(\frac{1}{2}\right)=F\left(\int_0^1\lambda d\lambda\right)\le\int_0^2F(\lambda)d\lambda=\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}f(t)dt.$$

另一方面

$$\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}f(t)dt\le\int_0^1[(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)]d\lambda=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.\ \square$$

§5.4.3 微积分基本定理

首先回顾下面定义.

定义5.4.12. $f\in R([a,b])\Rightarrow\forall\, x\in[a,b],\ f|_{[a,x]}\in R([a,x])$. 定义

$$F(x):=\int_a^x f(t)\,dt,\quad x\in[a,b]. \tag{5.4.21}$$

称为函数 f 的**变上限积分**. 根据**引理**5.4.7 可知 F 在 $[a,b]$ 上连续.

定理5.4.13. **(微积分基本定理)** $f\in R([a,b])$ 且 f 在 $x_0\in[a,b]$ 处连续 $\Rightarrow F$ 在 x_0 处可导且

$$F'(x_0)=f(x_0).$$

证: 如果 $f\in C([a,b])$ 则利用积分第一中值定理得到

$$F(x_0+\Delta x)-F(x_0)=\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}f(t)\,dt=f(\xi)\Delta x.$$

但是现在 f 只假设在 x_0 处连续, 上述方法不能用. $\forall\,\epsilon>0$, 根据函数 f 在 x_0 处连续, $\exists\,\delta>0$ 使得 $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$ 对任意 $|x-x_0|<\delta$ 和 $x\in[a,b]$ 都成立. 故

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{x-x_0}\left[\int_a^x f(t)\,dt-\int_a^{x_0}f(t)\,dt\right]-f(x_0)\right|\\ = \left|\frac{1}{x-x_0}\left[\int_{x_0}^x f(t)\,dt-\int_{x_0}^x f(x_0)\,dt\right]\right| &< \frac{\epsilon}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^x dt\right| = \epsilon.\ \square\end{aligned}$$

推论5.4.14. $f\in C([a,b])\Rightarrow F'(x)=f(x),\forall\,x\in[a,b]$. 即

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'=f(x). \tag{5.4.22}$$

推论5.4.15. $f\in C([a,b]),\ \alpha,\beta\in D([c,d])$, 且 $a\le\alpha(x),\beta(x)\le b\Rightarrow$

$$\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f(t)\,dt\right)'=f(\beta(x))\beta'(x)-f(\alpha(x))\alpha'(x). \tag{5.4.23}$$

证: 这是因为

$$\begin{aligned}\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f(t)\,dt\right)' &= \left(\int_a^{\beta(x)}f(t)\,dt\right)'-\left(\int_a^{\alpha(x)}f(t)\,dt\right)'\\ = \frac{d}{dx}\left[F(\beta(x))-F(\alpha(x))\right] &= F'(\beta(x))\beta'(x)-F'(\alpha(x))\alpha'(x)\\ &= f(\beta(x))\beta'(x)-f(\alpha(x))\alpha'(x).\ \square\end{aligned}$$

例5.4.16. (1) 计算

$$\lim_{x\to0+}\frac{1}{x^3}\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt.$$

解:

$$\lim_{x\to0+}\frac{1}{3x^2}\left(\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt\right)'=\lim_{x\to0+}\frac{2x\cdot\sin x}{3x^2}=\frac{2}{3}.$$

(2) 寻找 $a,b>0$ 使得下列极限存在

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2dt}{\sqrt{a+t}}=1.$$

解: 积分第一中值定理告诉我们

$$\int_0^x\frac{t^2dt}{\sqrt{a+t}}=\frac{\xi^2}{\sqrt{a+\xi}}x,\quad \xi\in[0,x].$$

故

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\int_0^x\frac{t^2dt}{\sqrt{a+t}}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{3x^2\sqrt{a+x}}=\frac{1}{3\sqrt{a}}>0.$$

另一方面

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)=1-\frac{x^2}{6}+o(x^4).$$

从而得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2dt}{\sqrt{a+t}}&=\frac{x^3}{bx-\sin x}\cdot\frac{1}{x^3}\int_0^x\frac{t^2dt}{\sqrt{a+t}}\\&=\frac{x^2}{b-\frac{\sin x}{x}}\cdot\frac{1}{x^3}\int_0^x\frac{t^2dt}{\sqrt{a+t}}.\end{aligned}$$

所以必须有

$$b-1=0\ \text{且}\ \frac{6}{3\sqrt{a}}=1\quad\Rightarrow\quad(a,b)=(4,1).\quad\square$$

(3) $f\in R([a,b])$ 且在 $[a,b]$ 上 $f>0\Rightarrow\exists\,\xi\in(a,b)$ 满足

$$\int_a^\xi f(x)dx=\int_\xi^b f(x)dx=\frac{1}{2}f(x)dx.$$

证: 定义

$$F(x):=\int_a^x f(t)dt-\int_x^b f(t)dt\in C([a,b]).$$

则

$$F(a)=-\int_a^b f(t)dt<0,\quad F(b)=\int_a^b f(t)dt>0.$$

$\exists\,\xi\in(a,b)$ 满足

$$0=F(\xi)=\int_a^{\xi}f(x)dx-\int_{\xi}^{b}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx.\quad\square$$

(4) $f\in C([0,1])\Rightarrow\exists\,\xi\in(0,1)$ 满足

$$\xi f(\xi)=\int_{\xi}^{1}f(x)dx.$$

证: 定义

$$F(x):=x\int_x^1 f(t)dt,\quad x\in[0,1].$$

则

$$F(0)=0=F(1)\quad\Rightarrow\quad 0=F'(\xi)=\int_{\xi}^{1}f(x)dx-\xi f(\xi).\quad\square$$

(5) $f\in C([a,b])$ 且 $0=\int_a^b f(x)dx\Rightarrow\exists\,\xi\in(a,b)$ 满足

$$\int_a^{\xi}f(x)dx=f(\xi).$$

证: 定义

$$F(x):=e^{-x}\int_a^x f(t)dt.$$

则

$$F(a)=0=F(b)\quad\Rightarrow\quad 0=F'(\xi)=e^{-\xi}\left[f(\xi)-\int_a^{\xi}f(t)dt\right].\quad\square$$

(6) $f\in C([a,b]),a>0$ 且 $0=\int_a^b f(x)dx\Rightarrow\exists\,\xi\in(a,b)$ 满足

$$\xi f(\xi)=\int_a^{\xi}f(x)dx.$$

证: 定义

$$F(x):=\frac{1}{x}\int_a^x f(t)dt\in C([a,b])\cap D((a,b)).$$

则

$$F(a)=0=F(b)\quad\Rightarrow\quad 0=F'(\xi)=\frac{1}{\xi^2}\left[\xi f(\xi)-\int_a^{\xi}f(t)dt\right].\quad\square$$

(7) $f\in C([a,b]),g\in C([a,b])\Rightarrow\exists\,\xi\in(a,b)$ 满足

$$g(\xi)\int_a^{\xi}f(x)dx=f(\xi)\int_{\xi}^{b}g(x)dx.$$

证: 定义

$$F(x):=\int_a^x f(t)dt\cdot\int_x^b g(t)dt.$$

则

$$F(a)=0=F(b)\quad\Rightarrow\quad 0=F'(\xi)\ \ (\exists\,\xi\in[a,b]).$$

但是

$$F'(x)=f(x)\int_x^b g(t)dt+\int_a^x f(t)dt(-g(x)).\ \square$$

(8) $f,g\in C([a,b])$ 且在 $[a,b]$ 上 $f,g>0\Rightarrow\exists\,\xi\in(a,b)$ 满足

$$\frac{f(\xi)}{\int_a^\xi f(x)dx}-\frac{g(\xi)}{\int_\xi^b g(x)dx}=1.$$

证: 这等价于证明

$$0=f(\xi)\int_\xi^b g(x)dx-g(\xi)\int_a^\xi f(x)dx-\int_a^\xi f(x)dx\int_\xi^b g(x)dx.$$

定义

$$F(x):=e^{-x}\int_a^x f(t)dt\int_x^b g(t)dt.$$

则

$$F(a)=0=F(b)\quad\Rightarrow\quad 0=F'(\xi).\ \square$$

(9) $f\varphi,g\varphi\in C([a,b])$ 且在 (a,b) 内 $\varphi\neq 0\Rightarrow\exists\,\xi\in(a,b)$ 满足

$$g(\xi)\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)\varphi(x)dx.$$

证: 定义

$$F(x):=\left[\int_a^b f(t)\varphi(t)dt\right]\int_a^x g(t)\varphi(t)dt-\left[\int_a^b g(t)\varphi(t)dt\right]\int_a^x f(t)\varphi(t)dt.$$

则

$$F(a)=0=F(b)\quad\Rightarrow\quad\exists\,\xi\in(a,b)\text{ 满足 }0=F'(\xi).\ \square$$

(10) 一般求极限和求积分不能相交换:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx\neq\int_a^b\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx,\quad f_n\in R([a,b]).$$

反例: 考察函数

$$f_n(x):=\begin{cases}n, & 0<x\le\frac{1}{n},\\ 0, & x=0,\\ 0, & \frac{1}{n}<x\le 1.\end{cases}$$

则

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0,\quad\int_0^1 f_n(x)dx=1.\ \square$$

(11) $f\in C([-1,1])$, f 在 $x=0$ 处可导, $f(0)=0$, 且 $f'(0)\neq 0\Rightarrow$ 求

$$I:=\lim_{x\to 0+}\frac{\int_0^x(x^2-t^2)f(t)dt}{\int_0^x tf(x^2-t^2)dt}.$$

证: 做变量替换 $u := x^2 - t^2$ 或 $x = \sqrt{u + t^2}$ 得到

$$\int_0^x tf(x^2 - t^2)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)\,du.$$

所以

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to 0+} \frac{\int_0^x (x^2 - t^2) f(t)\,dt}{\frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(t)\,dt} = \lim_{x\to 0+} \frac{\int_0^x 2x f(t)\,dt}{x f(x^2)} = \lim_{x\to 0+} \frac{2}{f(x^2)}\int_0^x f(t)\,dt \\ &= 2\lim_{x\to 0+} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x^2} \cdot \frac{1}{\frac{f(x^2)-f(0)}{x^2}} = \frac{1}{f'(0)}\lim_{x\to 0+} \frac{2\int_0^x f(t)\,dt}{x^2} \\ &= \frac{1}{f'(0)}\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{f'(0)}\lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f'(0)}{f'(0)} = 1. \ \square \end{aligned}$$

(12) $f \geq 0$, $f \in C([0,1])$ 且

$$f^2(x) \leq 1 + 2\int_0^x f(t)\,dt.$$

证明

$$f(x) \leq 1 + x.$$

证: 令

$$G(x) := \int_0^x f(t)\,dt.$$

则

$$[G'(x)]^2 = f^2(x) \leq 1 + 2G(x) \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{G'(x)}{\sqrt{1 + 2G(x)}} \leq 1.$$

两边积分得到

$$0 \leq \int_0^x \frac{2dG(t)}{\sqrt{1 + 2G(t)}} \leq 2x \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 + 2G(x)} - 1 \leq 2x.$$

即 $f(x) \leq 1 + x$. □

(13) $f \in C([0,1]) \cap D((0,1))$, $f(0) = f(\frac{1}{4}) = 0$, 且

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(y)\,dy = \frac{1}{2}f(1).$$

证明 $\exists\, \xi \in (0,1)$ 满足 $f''(\xi) = 0$.

证: 首先 $\exists\, \xi_1 \in (0, \frac{1}{4})$ $f'(\xi_1) = 0$. 根据积分第一中值定理 $\exists\, \xi_2 \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ 满足 $f(\xi_2) = f(1)$; 从而 $\exists\, \xi_3 \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ 满足 $f'(\xi_3)0$. 故 $\exists\, \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0,1)$ 满足 $f''(\xi) = 0$. □

§5.4.4 Newton-Leibniz 公式

下面定理的第一部分就是经典的Newton-Leibniz 公式.

定理5.4.17. *(1) $f \in C([a,b])$, F 是 f 在 $[a,b]$ 上的原函数 $\Rightarrow$*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{5.4.24}$$

(2) $f \in C([a,b] \setminus \{x_1, \cdots, x_k\})$, F 是 f 在 $[a,b] \setminus \{x_1, \cdots, x_k\}$ 上的原函数且 $F \in C([a,b]) \Rightarrow$ (5.4.24) 仍然成立.

证: (1) 令

$$\widetilde{F}(x) := \int_a^x f(t)\,dt.$$

则

$$F'(x) = f(x) = \widetilde{F}'(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = \widetilde{F}(x) + C.$$

从而

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \widetilde{F}(b) = F(b) - C = \widetilde{F}(b) - \widetilde{F}(a) \\ &= F(b) - C - F(a) + C = F(b) - F(a).\end{aligned}$$

(2) 不妨假设 $x_1 < \cdots < x_k$ 并延拓成划分 $T : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < \cdots < x_n = b$. 我们可进一步假设 $||T||$ 足够小, 否则的话在把区间细分直到新的划分的模足够小. $\exists\, \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ 满足

$$f(\xi_i) = F'(\xi_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

使得

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(\xi_i)\Delta x_i, \quad 1 \le i \le n.$$

故

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{||T|| \to 0} \sum_{1 \le i \le n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{||T|| \to 0} \sum_{1 \le i \le n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] = F(b) - F(a). \ \square$$

注5.4.18. *在定理5.4.17 (2) 中, 条件 $F \in C([a,b])$ 是必须的. 反例如下*

$$f(x) = 0, \quad F(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

则 $F'(x) = f(x), \forall\, x \ne 0$, 且 $f \in C([-1,1]) \Rightarrow$

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = 0 \ne F(1) - F(-1) = 1 - 0 = 1. \ \square$$

例5.4.19. (1) 证明

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \pi\delta_{m,n}$$

且

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0, \quad \forall\, m,n \in \mathbb{N}.$$

证: 利用三角函数积化和差公式:

$$\begin{aligned}
\cos mx \cos nx &= \frac{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x}{2}, \\
\sin mx \sin nx &= \frac{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x}{2}, \\
\sin mx \cos nx &= \frac{\sin(m+n)x + \sin(m+n)x}{2}. \quad \square
\end{aligned}$$

(2) 计算

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}, \quad p > -1.$$

解: Stolz定理推出

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{(p+1)n^p + \frac{(p+1)p}{2}n^{p-1} + \cdots} = \frac{1}{p+1}.$$

如果利用Newton-Leibniz 公式得到

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{1\le i\le n} \left(\frac{i}{n}\right)^p = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}. \quad \square$$

(3) $f \in C^1([a,b])$ 且 $f(a) = 0 \Rightarrow$

$$\max_{[a,b]} f^2 \le (b-a)\int_a^b [f'(x)]^2 dx, \quad \int_a^b f^2(x)dx \le \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2 dx.$$

证: 利用Newton-Leibniz 公式得到

$$\begin{aligned}
f^2(x) &= [f(x) - f(a)]^2 = \left[\int_a^x f'(t)dt\right]^2 \\
&\le \left[\int_a^x (f'(x))^2 dx\right]\left(\int_a^x dt\right) = (x-a)\int_a^x [f'(t)]^2 dt.
\end{aligned}$$

特别地,

$$\max_{[a,b]} f^2 \le (b-a)\int_a^b [f'(x)]^2 dx$$

和

$$\int_a^b f^2(x)dx \le \left[\int_a^b (x-a)dx\right]\int_a^b [f'(t)]^2 dt. \quad \square$$

(4) $f\in C^1([0,1])$, $f(0)=0$, $f(1)=1\Rightarrow$

$$\int_0^1 |f(x)-f'(x)|dx\geq \frac{1}{e}.$$

证:

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)-f'(x)|dx &\geq \int_0^1 e^{-x}[f'(x)-f(x)]dx\\ = \int_0^1 [e^{-x}f(x)]'dx &= e^{-1}f(1)-e^0f(0) = \frac{1}{e}. \ \square\end{aligned}$$

(5) $f\in C^1([0,1])$, $f(0)=0$, 且在 $[0,1]$ 上 $0\leq f'\leq 1\Rightarrow$

$$\int_0^1 f^3(x)dx\leq \left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2.$$

证: 定义

$$F(t):=\left[\int_0^t f(x)dx\right]^2-\int_0^t f^3(x)dx.$$

则 $F(0)=0$ 且

$$F'(t) = 2f(t)\int_0^t f(x)dx-f^3(t) = f(t)G(t)$$

这里

$$G(t):=2\int_0^t f(x)dx-f^2(t).$$

因为

$$G(0)=0,\quad G'(t)=2f(t)-2f(t)f'(t)=2f(t)[1-f'(t)]\geq 0$$

所以 $G(t)\geq G(0)=0$. 因此 $F(t)\geq F(0)=0$ 从而得到结论. $\square$

(6) 证明

$$\ln(1+n)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n. \tag{5.4.25}$$

证: 显然有如下严格不等式 (为什么? 请思考)

$$\frac{1}{k+1}<\int_k^{k+1}\frac{dt}{t}=\ln(k+1)-\ln k<\frac{1}{k}$$

故

$$\sum_{1\leq k\leq n}\frac{1}{k}<1+\sum_{2\leq k\leq n}\int_{k-1}^k\frac{dt}{t}=1+\int_1^n\frac{dt}{t}=1+\ln n.\ \square$$

(7) $f\in C^2([0,1])$, $f(0)=f(1)=0$, 且在 $(0,1)$ 内 f 不为 $0\Rightarrow$

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx\geq 4.$$

证: 不失一般性不妨假设在 $(0,1)$ 内 $f>0$. 从而

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx=\int_0^1\frac{|f''(x)|}{f(x)}dx.$$

$\exists\, c \in (0,1)$ 满足 $f(c) = \max_{[0,1]} f > 0$. 故得到

$$\frac{f(c)}{c} = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = f'(a), \quad -\frac{f(c)}{1-c} = \frac{f(1) - f(c)}{1-c} = f'(b)$$

对某个 $a \in (0,c)$ 和某个 $b \in (c,1)$ 都成立. 所以

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx \;&\geq\; \frac{1}{f(c)} \int_0^2 |f''(x)| dx \;\geq\; \frac{1}{f(c)} \left|\int_a^b f''(x)\, dx\right| \\ &=\; \frac{|f'(b) - f'(a)|}{f(c)} \;=\; \left|\frac{-1}{1-c} - \frac{1}{c}\right| \;=\; \frac{1}{c(1-c)} \;\geq\; 4. \quad \square\end{aligned}$$

(8) 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx.$$

解: 因为

$$\int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = \sin\xi_n \int_n^{n+p} \frac{dx}{x} = \sin\xi_n \cdot \ln \frac{n+p}{n}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = 0. \quad \square$$

(9) $f \in D([a,b])$ 且 $f' \in R([a,b]) \Rightarrow$

$$\max_{[a,b]} |f| \leq \left|\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx\right| + \int_a^b |f'(x)| dx.$$

证: $\forall\, x, y \in [a,b] \Rightarrow$

$$f(y) = f(x) + \int_x^y f'(t)\, dt.$$

两边对 x 积分得到, $\exists \xi \in [x,y]$,

$$(b-a) f(y) = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b \left[\int_x^y f'(t)\, dt\right] dx.$$

利用积分第一中值定理得到

$$(b-a) f(y) \leq \int_a^b f(x)\, dx + (b-a) \int_\xi^y f'(t)\, dt$$

即得到所求的不等式. $\square$

§5.4.5 分部积分法

不定积分中的分部积分法可以平行地挪到定积分中来.

定理5.4.20. $u, v \in C^1([a,b]) \Rightarrow$

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx. \tag{5.4.26}$$

等价地

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du. \tag{5.4.27}$$

证: 因为

$$\int_a^b [u(x)v'(x) + u'(x)v(x)]dx = \int_a^b [u(x)v(x)]'dx. \quad \square$$

定理5.4.21. (带积分型余项的 Taylor 公式) $f \in C^{n+1}([x_0, x_0+\delta]) \Rightarrow \forall\ x \in (x_0, x_0+\delta)$

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x) \tag{5.4.28}$$

这里

$$P_n(x) \equiv P_n(x; f, x_0) := f(x_0) + \sum_{1\le i\le n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$$

且

$$r_n(x) := \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt. \tag{5.4.29}$$

证: 首先来看 $n=1$ 情形然后做到一般情形:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \int_{x_0}^x f'(t)dt = -\int_{x_0}^x f'(t)(x-t)'dt \\ &= f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^x (x-t)f''(t)dt \\ &= f'(x_0(x-x_0) - \frac{1}{2}\int_{x_0}^x f''(t)\left((x-t)^2\right)' dt \\ &= f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 - \frac{1}{3!}\int_{x_0}^x f'''(t)\left((x-t)^3\right)' dt = \cdots \\ &= \sum_{1\le k\le n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt. \quad \square \end{aligned}$$

因为 $f^{(n+1)}$ 连续, 故得到Lagrange 型余项

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0}^x (x-t)^n dt = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}.$$

同理得到Cauchy 型余项

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n\int_{x_0}^x dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0).$$

例5.4.22. (1) 计算定积分

$$I_n := \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx, \quad J_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx.$$

解: 首先注意到

$$I_0 = J_0 = 1, \quad I_1 = J_1 = \frac{\pi}{2}.$$

$\forall\, n \geq 2$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x d \sin x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \cos^{n-2} x \sin^2 x dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

得到

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

所以

$$I_n = \begin{cases} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \frac{\pi}{2}, & n = 2m, \\ \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & n = 2m+1. \end{cases} \tag{5.4.30}$$

类似地可证明

$$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$$

所以 J_n 的通项公式也由 (5.4.30) 所给出.

(2)**(Wallis 公式)** 考察定积分

$$J_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x \sin x dx.$$

利用不等式

$$J_{2n+1} \leq J_{2n} \leq J_{2n-1}$$

得到

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

即

$$\frac{2n}{2n+1} \frac{\pi}{2} \leq \frac{[(2n)!!]^2}{(2n+1)[(2n-1)!!]^2} \leq \frac{\pi}{2}.$$

最后得到

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{[(2n)!!]^2}{(2n+1)[(2n-1)!!]^2}. \tag{5.4.31}$$

(3) **(Stirling 公式)** $\forall\, n$ 有

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi} \tag{5.4.32}$$

实际上

$$\sqrt{2n\pi}\, n^n e^{-n} < n! \leq \sqrt{2n\pi}\, n^n e^{-n} \left(1 + \frac{1}{4n}\right). \tag{5.4.33}$$

进一步得到

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}} \ (\exists\, \theta_n \in (0,1)) \quad \sim \quad \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n+\frac{1}{12n}-\frac{1}{360n^3}}. \qquad (5.4.34)$$

对 $n = 10$ 比较如下:

$$10! = 3628800, \quad \left(\frac{10}{e}\right)^{10}\sqrt{20\pi} = 3598695.6,$$

$$\sqrt{20\pi}10^{10}e^{-10+\frac{1}{120}} = 3628810.032, \quad \sqrt{20\pi}\left(\frac{10}{e}\right)^{10} e^{\frac{1}{120}-\frac{1}{360000}} = 3628799.9714.$$

证: 考察积分

$$A_n := \int_1^n \ln x\, dx = x\ln x\Big|_1^n - n = n\ln n - n + 1.$$

因为

$$\ln n! = \sum_{2\le k\le n} \ln k > A_n > \ln[(n-1)!] = \sum_{2\le k\le n-1} \ln k$$

得到

$$n! > n^n e^{-n+1} > (n-1)! \quad \Rightarrow \quad e\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < ne\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

另一方面, 利用梯形面积近似代替得到

$$A_n \approx \sum_{1\le k\le n-1} \frac{\ln k + \ln(k+1)}{2} =: B_n = \sum_{1\le k\le n-1} \ln k + \frac{1}{2}\ln n.$$

定义

$$a_n := A_n - B_n, \quad B_n = A_n\left(1 - \frac{a_n}{A_n}\right) \ (n \ge 1).$$

注意到

$$a_{k+1} - a_k = (A_{k+1} - A_k) - (B_{k+1} - B_k) > 0$$

且

$$a_n = \sum_{1\le k\le n-1} (a_{k+1} - a_k) + a_1 \quad \Rightarrow \quad \{a_n\}_{n\ge 1} \text{ 递增}.$$

但是

$$a_{k+1} - a_k < \frac{\ln(k+\frac{1}{2}) - \frac{1}{2k+1} + \ln(k+\frac{1}{2}) + \frac{1}{2k+1}}{2} - \frac{\ln k + \ln(k+1)}{2}$$

$$= \ln\left(k+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln k - \frac{1}{2}\ln(k+1) = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{2k+1}\right).$$

故得到

$$a_{k+1} - a_k < \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right) - \frac{1}{2}\ln\left[1+\frac{1}{2(k+1)}\right]$$

和

$$a_n < \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) < \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ 存在且 } a - a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{n\le k\le m}(a_{k+1}-a_k) < \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{12n}\right).$$

由 $A_n - B_n = a_n$ 得到

$$\ln n! = (1-a_n) + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n \quad\Rightarrow\quad n! = n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^{1-a_n}.$$

令

$$b_n := e^{1-a_n} \quad\Rightarrow\quad n! = b_n e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}.$$

因为 $a_n \uparrow a$, $b_n \downarrow e^{1-a} =: b$. 从而得到

$$1 < \frac{b_n}{b} = e^{a-a_n} < e^{\frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{2n})} = \sqrt{1+\frac{1}{2n}} < 1+\frac{1}{4n}.$$

所以得到

$$bn^{n+\frac{1}{2}}e^{-n} < n! > bn^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\left(1+\frac{1}{4n}\right).$$

最后估计 b. Wallis 公式 (5.4.31) 推出

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{[n!]^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}\frac{(b_n e^{-n}n^{n+\frac{1}{2}})^2}{b_{2n}e^{-2n}(2n)^{2n+\frac{1}{2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{b_n^2}{b_{2n}\sqrt{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

所以 $b = \sqrt{2\pi}$. □

(4) $\pi \notin \mathbb{Q}$.

证: 假设 $\pi = a/b$ 是有理数 ($a, b \in \mathbb{N}$ 且 $(a,b)=1$) 考虑函数

$$f(x) := \frac{1}{n!}x^n(a-bx)^n, \quad g(x) := \sum_{0\le k\le n}(-1)^k f^{(2k)}(x).$$

则得到

$$g''(x) = \sum_{0\le k\le n}(-1)^k f^{(2k+2)}(x) = \sum_{1\le k\le n+1}(-1)^{k+1}f^{(2k)}(x)$$

和 $g''(x) + g(x) = f(x)$ 和

$$[g'(x)\sin x - g(x)\cos x]' = [g''(x)+g(x)]\sin x = f(x)\sin x.$$

故

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin x dx = g(\pi) + g(0).$$

但是

$$f(\pi-x)=f\left(\frac{a}{b}-x\right)=\frac{1}{n!}\left(\frac{a}{b}-x\right)^n[a-(a-bx)]^n=f(x)$$

得到

$$f^{(2k)}(\pi-x)=f^{(2k)}(x),\quad f(\pi)=f(0),\quad f^{(2k)}(\pi)=f^{(2k)}(0)$$

和

$$g(\pi)=g(0)\in\mathbb{Z}\quad\Rightarrow\quad\int_0^{\pi}f(x)\sin x\,dx\in\mathbb{Z}.$$

根据 $0<\sin x\le 1\ (0<x\le\pi)$, 推出

$$0<f(x)\sin x<\frac{\pi^n a^n}{4^n n!},\quad 0<\int_0^{\pi}f(x)\sin x\,dx<\frac{\pi^n a^n}{4^n n!}\to 0$$

当 $n\to\infty$ 时. □

(5) $\pi^2\notin\mathbb{Q}$.

证: $\forall\, n\in\mathbb{N}$, 定义

$$I_n:=\frac{1}{n!}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^n\cos t\,dt.$$

则

$$\begin{aligned}
I_{n+1}&=\frac{1}{(n+1)!}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n+1}d\sin t\\
&=-\frac{1}{(n+1)!}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin t\cdot(n+1)\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^n(-2t)\,dt\\
&=\frac{2}{n!}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}t\sin t\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^n dt=\frac{-2}{n!}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}t\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^n d\cos t\\
&=\frac{2}{n!}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos t\left[\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^n-2nt^2\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-1}\right]dt\\
&=\frac{2}{n!}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-1}\cos t\left[\frac{\pi^2}{4}-(2n+1)t^2\right]dt
\end{aligned}$$

所以得到

$$I_{n+1}=2(2n+1)I_n-\pi^2 I_{n-1}\quad\Rightarrow\quad I_nP_n(\pi^2)$$

这里 P_n 是次数不超过 n 的整系数多项式. 注意到

$$I_0=2,\quad I_1=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)\cos t\,dt=4.$$

假设 $\pi^2=p/q$ 则得到

$$\mathbb{N}\ni q^nP_n\left(\frac{p}{q}\right)=q^nI_n\to 0,$$

矛盾!. □

(6) 令

$$I_n := e^{n/4} n^{-\frac{n+1}{2}} \left(1 \times 2^2 \times 3^3 \times \cdots \times n^n\right)^{1/n}.$$

证明

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 1.$$

证: 取对数得到

$$\begin{aligned}
\ln I_n &= \frac{n}{4} + \frac{1}{n}\sum_{1\le k\le n} k\ln k - \frac{n+1}{2}\ln n \\
&= n\left(\frac{1}{n}\sum_{1\le k\le n}\frac{k}{n}\ln\frac{k}{n} - \int_0^1 x\ln x\,dx\right) \\
&= n\sum_{1\le k\le n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(\frac{k}{n}\ln\frac{k}{n} - x\ln x\right)dx - n\int_0^{\frac{1}{n}} x\ln x\,dx
\end{aligned}$$

$$= \sum_{1\le k\le n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(\frac{k}{n}-x\right)[1+\ln\theta_n(x)]\,dx - n\int_0^{\frac{1}{n}} x\ln x\,dx \ \left(\frac{k}{n}\le\theta_n(x)\le x\right).$$

考虑

$$1+\ln\xi_k = \min_{[k/n,(k+1)/n]}(1+\ln x), \quad 1+\ln\eta_k = \max_{[k/n,(k+1)/n]}(1+\ln x).$$

所以

$$\begin{aligned}
(1+\ln\xi_k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(\frac{k}{n}-x\right)dx &\ge \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(\frac{k}{n}-x\right)[1+\ln\theta_k(x)]\,dx \\
&\ge (1+\ln\eta_k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(\frac{k}{n}-x\right)dx
\end{aligned}$$

和

$$-\frac{1}{2}\sum_{2\le k\le n}\frac{1}{n}(1+\ln\eta_k) \le \ln I_n + n\int_0^{\frac{1}{n}} x\ln x\,dx \le -\frac{1}{2}\sum_{2\le k\le n}\frac{1}{n}(1+\ln\xi_k).$$

因此得到

$$\lim_{n\to\infty}\left[\ln I_n + n\int_0^{\frac{1}{n}} x\ln x\,dx\right] = -\frac{1}{2}\int_0^1(1+\ln x)\,dx.$$

根据

$$\begin{aligned}
\int_0^1(1+\ln x)dx &= 1-\int_0^1 dx = 0, \\
\int_0^{\frac{1}{n}} x\ln x\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{n}}\ln x\,dx^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n^2} - \int_0^{\frac{1}{n}} x\,dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n^2} - \frac{1}{2n^2}\right),
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\ln I_n = -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n}-\frac{1}{2n}\right)=0,\quad I_n\to 1.\ \square$$

§5.4.6 变量替换法

定理5.4.23. *(1) 假设函数 $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ 连续可导, $(\varphi(\alpha),\varphi(\beta))=(a,b)\Rightarrow$ $\forall\, f\in C([a,b])$, $f(\varphi(t))\varphi'(t)\in C([\alpha,\beta])$ 且*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.\tag{5.4.35}$$

(2) 假设函数 $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ 连续可导且严格单调, $(\varphi(\alpha),\varphi(\beta))=(a,b)$ 或 $(b,a)\Rightarrow\forall\, f\in R([a,b])$, $f(\varphi(t))\varphi'(t)\in R([\alpha,\beta])$ 且

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.\tag{5.4.36}$$

证: (1) $\exists\, F$ 满足 $F'(x)=f(x)$. 因此

$$[F(\varphi(t))]'=F'(\varphi(t))\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Newton-Leibniz 公式告诉我们

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt &= F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))\\ &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.\end{aligned}$$

(2) 不失一般性不妨假设 $\varphi'>0$. $\forall\,\epsilon>0\ \exists\,\delta_1>0$ 有

$$|\varphi'(t')-\varphi'(t'')|<\frac{\epsilon}{3M+1},\quad \forall\, t',t''\in[\alpha,\beta]\ 且\ |t'-t''|<\delta_1,$$

这里 $M:=\sup_{[a,b]}|f|$. 根据 $f\in R([a,b])$ 得到 $\exists\,\delta_2>0\ \forall\,[a,b]$ 上的划分 T 只要 $||T||<\delta_2$ 就有

$$\sum_{1\le i\le n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i<\frac{\epsilon}{3}$$

和

$$\left|\sum_{1\le i\le n} f(\xi_i)\Delta x_i-\int_a^b f(x)\,dx\right|<\frac{\epsilon}{3},\quad \forall\, xi_i\in[x_{i-1},x_i].$$

对 $\forall\,[a,b]$ 上的划分 $W:\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$ 和 $\forall\,\tilde{\tau}_i\in[t_{i-1},t_i]$, 令 $x_i:=\varphi(t_i)$, 则 $\exists\,\tau_i\in[t_{i-1},t_i]$ 满足

$$x_i-x_{i-1}=\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})=\varphi'(\tau)(t_i-t_{i-1})>0$$

(这里用到了假设条件 $\varphi'>0$). 取

$$\delta:=\min\left\{\delta_1,\frac{\delta_2}{1+K}\right\},\quad K:=\max_{[\alpha,\beta]}|\varphi'|.$$

则当 $||W|| < \delta$ 时得到

$$||T|| \le K||W|| \le K\frac{\delta_2}{1+K} < \delta_2$$

和

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{1\le i\le n} f(\varphi(\tilde{\tau}_i))\varphi'(\tilde{\tau}_i)\Delta t_i - \int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\le\ & \sum_{1\le i\le n} |f(\varphi(\tilde{\tau}_i))|\,|\varphi'(\tilde{\tau}_i) - \varphi'(\tau_i)|\,\Delta t_i + \sum_{1\le i\le n} |f(\varphi(\tilde{\tau}_i)) - f(\varphi(\tau_i))|\,\varphi'(\tau_i)\Delta t_i \\
&+ \left|\sum_{1\le i\le n} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i - \int_a^b f(x)\,dx\right| \\
<\ & M\frac{\epsilon}{1+3M} + \sum_{1\le i\le n} \omega(f;\Delta_i)\Delta x_i + \frac{\epsilon}{3} \ <\ \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \ =\ \epsilon. \quad \square
\end{aligned}$$

例5.4.24. *(1)* $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$, 计算

$$I_{m,n} = \int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin^n x\,dx.$$

解:

$$\begin{aligned}
I_{m,n} &= \frac{1}{n+1}\int_0^{\pi/2} \cos^{m-1} x d \sin^{n+1} x \\
&= \frac{1}{n+1}\left[\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (m-1)\cos^{m-2} x(-\sin^{n+2} x)\,dx\right] \\
&= \frac{m-1}{n+1}\int_0^{\pi/2} \cos^{m-2} x \sin^n x(1-\cos^2 x)\,dx \ =\ \frac{m-1}{n+1}(I_{m-2,n} - I_{m,n}).
\end{aligned}$$

因此

$$I_{m,n} = \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}.$$

所以最后得到

$$I_{m,n} = \begin{cases} \frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}\frac{\pi}{2}, & m,n \text{ 都是偶数}, \\ \frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}, & m,n \text{ 至少有一个是奇数}. \end{cases}$$

(2) $f \in R([-a,a]) \Rightarrow$

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx, & f \text{ 是偶的}, \\ 0, & f \text{ 是奇的}. \end{cases}$$

(3) $f \in R([0,T])$, T 是周期 $\Rightarrow \forall\, a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$

证:

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x)\,dx$$

$$= -\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_0^a f(x+T)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx. \quad \square$$

(4) $f \in C((-\infty,+\infty))$ 且 T 是 f 的周期 $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt.$$

证: $\forall\, x > T, \exists\, n \in \mathbb{N}$ 满足 $(n-1)T < x \leq nT \Rightarrow$

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^{(n-1)T} f(t)\,dt + \int_{(n-1)T}^x f(t)\,dt$$

$$= (n-1)\int_0^T f(t)\,dt + \int_0^{x-(n-1)T} f(t)\,dt.$$

如果 $\int_0^T f(t)dt \geq 0$ 则

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \leq \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt + \frac{1}{x}\int_0^{x-(n-1)T} f(t)\,dt$$

且

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \geq \frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt + \frac{1}{x}\int_0^{x-(n-1)T} f(t)\,dt.$$

因此

$$\frac{1}{x}\int_0^{x-(n-1)T} f(t)\,dt - \frac{1}{nT}\int_0^T f(t)\,dt \leq \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt - \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

$$\leq \frac{1}{x}\int_0^{x-(n-1)T} f(t)\,dt.$$

令

$$m := \min_{[0,T]} f, \quad M := \max_{[0,T]} f.$$

则

$$m[x-(n-1)T] \leq \int_0^{x-(n-1)T} f(t)\,dt = f(\xi)[x-(n-1)T] \leq M[x-(n-1)T]$$

从而

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^{x-(n-1)T} f(t)\,dt = 0. \quad \square$$

§5.5 反常积分

§5.5.1 反常积分 I

定义5.5.1. 假设函数 $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ 满足对 $\forall A>a$ 都有 $f\in R([a,A])$. 如果极限

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$$

存在, 称

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx \tag{5.5.1}$$

是函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上的**反常积分**. 如果极限有限, 称反常积分**收敛**. 反之称反常积分**发散**.

类似地可以定义

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx := \lim_{A\to-\infty}\int_A^a f(x)dx. \tag{5.5.2}$$

如果极限存在且有限, 称反常积分收敛.

现在考虑函数 $f:(-\infty,+\infty)\to\mathbb{R}$. 如果 $\forall c\in\mathbb{R}$, 反常积分

$$\int_{-\infty}^c f(x)dx \quad 和 \quad \int_c^{+\infty} f(x()dx$$

都收敛, 则称反常积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx \tag{5.5.3}$$

收敛. 实际上, (5.5.3) 中只要对某个 c 成立即可.

性质5.5.2. *(1)* $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ 在任何 $[a,A]$ $(A>a)$ 上都可积, 则对 $\forall b>a$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛} \quad\Leftrightarrow\quad \int_b^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛}$$

且

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx.$$

(2) $f:(-\infty,+\infty)\to\mathbb{R}$ 在任何 $[-A,A]$ $(A>0)$ 上都可积, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛} \quad\Leftrightarrow\quad \exists c\in\mathbb{R} \text{ 使得 } \int_{-\infty}^c f(x)dx \text{ 和 } \int_c^{+\infty} f(x)dx \text{ 都收敛.}$$

证: (1) 显然.

(2) $\Rightarrow$: 根据定义. $\Leftarrow$: $\forall c'\neq c$ 我们得到

$$\int_{c'}^{+\infty} f(x)dx \text{ 和 } \int_{-\infty}^{c'} f(x)dx \text{ 都收敛.}$$

进一步

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \; = \; \int_{-\infty}^{c'} f(x)dx + \int_{c'}^{+\infty} f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{c'} f(x)dx + \int_{c'}^{+\infty} f(x)dx \; = \; \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx. \quad \square$$

例5.5.3. *(1)* 计算

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \quad (p \in \mathbb{R}).$$

解:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1, \\ +\infty, & p \le 1. \end{cases}$$

故反常积分只在 $p > 1$ 收敛. □

(2) 计算

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} \quad (p \in \mathbb{R}).$$

解:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^p}$$

所以反常积分只在 $p > 1$ 收敛. □

(3) 计算

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

解:

$$I = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi. \quad \square$$

(4) 计算

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-ax}dx = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-ax}dx = \begin{cases} \frac{1}{a}, & a > 0, \\ +\infty, & a \le 0. \end{cases} \quad \square$$

(5) 计算

$$I = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{n} \left(\sum_{1\le k\le n} \frac{1}{3+\sin\frac{k\pi}{n}} \right).$$

解:

$$I \; = \; \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \cdot \frac{\pi}{n} \sum_{1\le k\le n} \frac{1}{3+\sin\frac{k\pi}{n}} \; = \; \int_0^{\pi} \frac{dx}{3+\sin x}$$

$$= \; 2\int_0^{+\infty} \frac{du}{3+2u+3u^2} \quad \left(u = \tan\frac{x}{2}\right) \; = \; \frac{2}{3}\int_0^{+\infty} \frac{d(u+\frac{1}{3})}{(u+\frac{1}{3})^2 + (\frac{2\sqrt{2}}{3})^2}$$

$$= \frac{2}{3}\frac{3}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{u+\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{2\sqrt{2}}\right). \quad \square$$

(6) 证明

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

证: 因为

$$\begin{aligned}
\int\frac{dx}{1+x^4} &= \int\frac{dx}{(1+x^2)^2-(\sqrt{2}x)^2}\\
&= \int\frac{dx}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}\\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\int\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)dx\\
&\quad +\frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}+\frac{1}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}\right]dx
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\arctan(\sqrt{2}x+1)+\arctan(\sqrt{2}x-1)\right]+C.$$

故

$$I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \quad \square$$

(7) 计算

$$I:=\int_0^{+\infty}e^{-bx}\sin(ax)dx,\quad J:=\int_0^{+\infty}e^{-bx}\cos(ax)dx,\quad a,b>0.$$

解: 分部积分得到

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-bx}}{-a}d\cos(ax)=\frac{-\cos(ax)}{ae^{bx}}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{b}{a}\cos(ax)e^{-bx}dx=\frac{1}{a}-\frac{b}{a}J$$

和

$$J=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-bx}}{a}d\sin(ax)=\frac{\sin(ax)}{ae^{bx}}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{b}{a}\sin(ax)e^{-bx}dx=\frac{b}{a}I.$$

从而得到

$$I=\frac{a}{a^2+b^2},\quad J=\frac{b}{a^2+b^2}. \quad \square$$

注5.5.4. (1) 有如下等价刻画

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx\ \text{收敛}\quad\Leftrightarrow\quad\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx\ \text{存在且有限}.$$

$$\Leftrightarrow\quad\left(\begin{array}{c}\forall\,\epsilon>0\,\exists\,A>0\,\forall\,A_1>A_2>A\ \text{有}\\ \left|\int_{A_2}^{A_1}f(x)dx\right|=\left|\int_A^{A_1}f(x)dx-\int_A^{A_2}f(x)dx\right|<\epsilon\end{array}\right)$$

(2) 类似地得到如下等价刻画

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx \text{ 收敛 } \Leftrightarrow \lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{a} f(x)dx \text{ 存在且有限.}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, A < 0\ \forall\, A_1 < A_2 < A \text{ 有} \\ \left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right| = \left|\int_{A_1}^{a} f(x)dx - \int_{A_2}^{a} f(x)dx\right| < \epsilon \end{array}\right)$$

(3) 有如下关系:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛 } \Rightarrow \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)dx$$

但是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛 } \not\Leftarrow \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)dx.$$

反例: $f(x) = \sin x,\ x \in (-\infty, +\infty)$.

例5.5.5. (1) **Poisson 积分**

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}dx = 2\pi,\quad 0 < r < 1. \tag{5.5.4}$$

证: 做变量替换 $t = \tan\frac{x}{2}$ 得到

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-r^2}{1-2r\frac{1-t^2}{1+t^2}+r^2}\frac{2dt}{1+t^2} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2(1-r^2)}{(1-r)^2+(1+r)^2t^2}dt \\ &= 2\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}t\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 2\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 2\pi. \quad \square \end{aligned}$$

(2) **Euler-Poisson 积分**

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{5.5.5}$$

证: 利用多变量积分理论得到

$$I^2 = \iint_{[0,+\infty]^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-r^2}rdr = \int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

第二个证明要利用Wallis 公式 (5.4.31). 考察函数

$$\varphi(x) := e^{-x^2} - (1-x^2) \quad\Rightarrow\quad \varphi'(x) = 2x(1-e^{-x^2}) > 0\ \ (x > 0).$$

因此

$$e^{-x^2} > 1 - x^2,\quad x > 0.$$

从而得到

$$e^{-nx^2} > (1-x^2)^n\ (0 < x < 1),$$

且
$$e^{x^2}>1+x^2,\quad e^{-x^2}<\frac{1}{1+x^2},\quad e^{-nx^2}<\frac{1}{(1+x^2)^n},\quad x>0.$$
特别地
$$\int_0^{+\infty}e^{-nx^2}dx<\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}=\int_0^{\pi/2}\cos^{2n-2}t\,dt=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2}$$
和
$$\int_0^{+\infty}e^{-nx^2}dx>\int_0^1 e^{-nx^2}dx>\int_0^1(1-x^2)^n dx=\int_0^1\cos^{2n+1}t\,dt=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$
根据
$$\int_0^{+\infty}e^{-nx^2}dx=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt,\quad t=\sqrt{n}x,$$
得到
$$n\left[\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right]^2<\left(\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\right)^2<n\left[\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\right]^2\frac{\pi^2}{4}.$$
例5.4.22 (2) 推出
$$\lim_{n\to+\infty}n\left[\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right]^2=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$
且
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\right]^2\frac{\pi^2}{4}&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2(2n+1)\cdot\frac{\pi^2}{4}\frac{n(2n)^2}{(2n+1)(2n-1)^2}\\&=\frac{1}{2}\frac{2}{\pi}\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi}{4}.\ \square\end{aligned}$$

定义5.5.6. *(1) 假设函数 $f(x)$ 定义在区间 $[a,b)$ 上且在 b 的任何领域内无界, 但是在任何闭子区间 $[a,b']\subset[a,b)$ 上可积. 称*
$$\int_a^b f(x)dx:=\lim_{b'\to b}\int_a^{b'}f(x)dx=\lim_{\eta\to0+}\int_a^{b-\eta}f(x)dx \tag{5.5.6}$$
为 f **在 $[a,b)$ 上的瑕积分**. *如果极限存在则称瑕积分***收敛**, *反之称为***发散**.

(2) 类似地, 如果函数 $f(x)$ 定义在区间 $(a,b]$ 上且在 a 的任何邻域内无界, 但是在任何闭子区间 $[a',b'\subset(a,b]$ 上可积, 定义瑕积分如下
$$\int_a^b f(x)dx:=\lim_{a'\to a+}\int_{a'}^b f(x)dx=\lim_{\eta\to0+}\int_{a+\eta}^b f(x)dx. \tag{5.5.7}$$
*如果极限存在则称瑕积分***收敛**, *反之称为***发散**.

(3) 如果函数 $f(x)$ 定义在区间 (a,b) 上但是在内点 $c\in(a,b)$ 的任何邻域内无界, 此时定义
$$\int_a^b f(x)dx:=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx. \tag{5.5.8}$$
称瑕积分 $\int_a^b f(x)$ **收敛** *如果瑕积分 $\int_a^c f(x)dx$ 和 $\int_c^b f(x)dx$ 都收敛.*

例5.5.7. (1) 计算
$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

解: 显然当 $p<1$ 时瑕积分收敛. □

(2) 计算
$$\int_{-1}^1 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx.$$

解: 根据定义得到
$$\int_{-1}^1 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx = \int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx + \int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx = \lim_{\epsilon\to0+}\int_{-1}^{-\epsilon}\frac{e^{1/x}}{x^2}dx + \lim_{\eta\to0+}\int_\eta^1 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$$
$$= \lim_{\epsilon\to0+}\left(-e^{1/x}\right)\Big|_{-1}^{-\epsilon} + \lim_{\eta\to0+}\left(-e^{1/x}\right)\Big|_\eta^1$$
$$= \frac{1}{e} - \lim_{\epsilon\to0+} e^{-1/\epsilon} - e + \lim_{\eta\to0+} e^{1/\eta} \quad = \quad +\infty. \ \square$$

(3) 计算
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

解: $\pi/2$. □

(4) 计算
$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad n \ge 1.$$

解:
$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{u\to1-}\int_0^u \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi/2}\sin^n t dt = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}, & n \text{ 偶数}, \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ 奇数}. \end{cases} \quad \square$$

定义5.5.8. (1) 假设函数 f 定义在 $[a,\infty)$ 上且 f 在 a 的任何领域内都无界. 称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **收敛**如果反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 和瑕积分 $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ 对 $\forall\, b>a$ 都收敛. 此时定义
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx. \tag{5.5.9}$$
显然上述值和 $b>a$ 的选取无关.

(2) 假设函数 f 定义在 $[a,+\infty)$ 上, $c>a$, 且 f 在 c 的任何领域内都无界. 定义
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx \tag{5.5.10}$$
如果上述两个积分都收敛.

假设函数 f 定义在区间 $[a,b)$ 上且 f 在 b 的任何领域内都无界. 做变量替换 $y := \frac{1}{b-x}$, $a \le x < b$, 得到

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{\eta\to 0+}\int_a^{b-\eta} f(x)dx \\ &= \lim_{\eta\to 0+}\int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\eta}} \frac{1}{y^2} f\left(b-\frac{1}{y}\right)dy = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \frac{1}{y^2} f\left(b-\frac{1}{y}\right)dy.\end{aligned}$$

这个说明瑕积分可化成无穷区间上的反常积分.

定理5.5.9. *(1)* **(线性)** *如果反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 和 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 都收敛, 则 $\forall$ $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 反常积分 $\int_a^{+\infty}[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx$ 也收敛, 且*

$$\int_a^{+\infty}[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx = \alpha\int_a^{+\infty} f(x)dx + \beta\int_a^{+\infty} g(x)dx. \tag{5.5.11}$$

(2) **(Newton-Leibniz 公式)** *$f\in C([a,+\infty))$, F 是 f 在 $[a,+\infty)$ 上的原函数 $\Rightarrow$ 如果极限*

$$F(+\infty) := \lim_{x\to+\infty} F(x)$$

存在 (有限或无线), 则

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty)-F(a). \tag{5.5.12}$$

*(3)***(分部积分法)** *$u,v\in C^1([a,+\infty)) \Rightarrow$ 如果极限 $\lim_{x\to+\infty} u(x)v(x)$ 存在, 则*

$$\int_a^{+\infty} u\,dv = uv\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} v\,du. \tag{5.5.13}$$

(4) **(变量替换法)** *$f\in C([a,b))$, $x=\varphi(t)\in C^1([\alpha,\beta)) \Rightarrow$*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \tag{5.5.14}$$

若 $\varphi((\alpha,\beta))\subset(a,b)$, $\varphi(\alpha)=a$, 且 $\varphi(\beta-)=b$.

例5.5.10. *(1)* 计算

$$I = \int_0^1 \ln x\,dx.$$

解: 利用分部积分得到

$$I = x\ln x\Big|_0^1 - \int_0^1 dx = 0-1 = -1. \quad \square$$

(2) 计算

$$I_n := \int_0^{+\infty} e^{-x}x^n dx, \quad n\ge 1.$$

解: 分部积分得到

$$
\begin{aligned}
I_n &= -\int_0^{+\infty} x^n de^{-x} = -x^n e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} nx^{n-1}e^{-x}dx \\
&= nI_{n-1} = \cdots = n!I_0 = n!. \quad \square
\end{aligned}
$$

(3) 计算**Euler 积分**

$$
I := \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx, \quad J := \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)dx. \tag{5.5.15}
$$

解: 分部积分得到

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/2} \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)dx \\
&= \frac{\pi}{2}\ln 2 + \int_0^{\pi/2} \ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)dx + \int_0^{\pi/2} \ln\left(\cos\frac{x}{2}\right)dx \\
&= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\pi/4} \ln(\sin x)dx + 2\int_0^{\pi/4} \ln(\cos x)dx.
\end{aligned}
$$

对第二个积分做变量替换 $t = \frac{\pi}{2} - x$ 得到

$$
\int_0^{\pi/4} \ln(\cos x)dx = \int_{\pi/2}^{\pi/4} -\ln(\sin x)dx
$$

从而得到

$$
I = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2I \quad \Rightarrow \quad I = -\frac{\pi}{2}\ln 2. \quad \square
$$

对 (5.5.15) 中第二个积分做变量替换 $u = \frac{\pi}{2} - x$ 就得到第一个积分.

(4) 计算

$$
I = \int_0^{\pi} x\ln(\sin x)dx.
$$

解: 利用变量替换 $x = \frac{\pi}{2} - u$ 得到

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - u\right)\ln(\cos u)(-du) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - u\right)\ln(\cos u)du \\
&= \frac{\pi}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln(\cos u)du = \pi\int_0^{\pi/2} \ln(\cos u)du = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2. \quad \square
\end{aligned}
$$

(5) 假设

$$
\int_a^{+\infty} f(x)dx
$$

收敛且 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \in \mathbb{R} \Rightarrow A = 0$.

证: 否则的话不妨假设 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A > 0$. $\exists\,\Delta > \max\{a, 0\}$ 使得不等式

$$
f(x) > \frac{A}{2} > 0, \quad \forall\, x > \Delta,
$$

成立. 因此 $\forall\, b > a$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\Delta f(x)dx + \int_\Delta^b f(x)dx > \int_a^\Delta f(x)dx + \frac{A}{2}(b-\Delta) \to +\infty,$$

当 $b \to +\infty$. 这就产生了矛盾! □

(6) 假设函数 $f \in D([a,+\infty))$ 且反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad 和 \quad \int_a^{+\infty} f'(x)dx$$

都收敛 $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

证: $\forall\, b > a$ 有

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

所以得到

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f'(t)dt = \int_a^{+\infty} f'(t)dt < +\infty.$$

根据(5) 得到 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. □

(7) 计算

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}.$$

解: 利用变量替换 $y = 1/x$ 得到

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{dy}{(1+y^2)(1+y^{-\alpha})} + \int_1^{+\infty} \frac{dy}{(1+y^2)(1+y^\alpha)} \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan 1. \quad \square \end{aligned}$$

(8) 假如反常积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

收敛, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

证: 首先注意到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right)dx = \int_0^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right)dx + \int_{-\infty}^0 f\left(x - \frac{1}{x}\right)dx.$$

其次把第一个积分写成

$$\int_0^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right)dx = \int_0^1 f\left(x - \frac{1}{x}\right)dx + \int_1^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right)dx.$$

做变量替换 $t = x - 1/x$ 得到

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 f\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right)dt,\\
\int_1^{+\infty} f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} f(t)\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right)dt.
\end{aligned}$$

类似地可得到

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^0 f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx &= \int_{-\infty}^{-1} f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx + \int_{-\infty}^0 f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx,\\
\int_{-1}^0 f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} f(t)\left(1-\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right)dt,\\
\int_{-\infty}^{-1} f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 f(t)\left(1-\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right)dt.
\end{aligned}$$

相加得到最后结论. □

(9) 给定 $a, b > 0$ 并假设反常积分

$$\int_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx$$

收敛 $\Rightarrow$

$$\int_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{x^2+4ab}\right)dx.$$

证: 考虑变量替换 $t = ax - b/x$ 则得到

$$x = \frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{2a}, \quad dx = \frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{2a\sqrt{t^2+4ab}}dt.$$

故

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx &= \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\sqrt{t^2+4ab}\right)\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}dt\\
&= \frac{1}{2a}\left(\int_{-\infty}^0+\int_0^{+\infty}\right) f\left(\sqrt{t^2+4ab}\right)\frac{\sqrt{t^2+4ab}+t}{\sqrt{t^2+4ab}}dt\\
&= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{t^2+4ab}\right)dt. \quad \square
\end{aligned}$$

(10) 假设函数 f 定义在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上, 且 $\forall\, [a, b] \subset (-\infty, +\infty)$ 都有 $f \in R([a, b]) \Rightarrow$ 如果极限 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$ 和 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = B$ 都存在, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x+t)-f(x)]dx = (A-B)t, \quad t > 0.$$

证: 首先注意到

$$\int_a^b [f(x+t)-f(x)]dx = \int_b^{b+t} f(x)dx - \int_a^{a+t} f(x)dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_b^{b+t}[f(x)+A-A]dx - \int_a^{a+t}[f(x)+B-B]dx \\ &= (A-B)t + \int_b^{b+t}[f(x)-A]dx - \int_a^{a+t}[f(x)-B]dx. \end{aligned}$$

$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, X, -Y\ (X, Y > 0)$ 使得不等式

$$\int_b^{b+t}|f(x)-A|dx < \epsilon\ \ (b > X) \quad 且 \quad \int_a^{a+t}|f(x)-B|dx < \epsilon\ \ (a < -Y)$$

成立. 从而 $\forall\, a < -Y$ 和 $b > X$ 得到

$$\int_a^b [f(x+t)-f(x)]dx - (A-B)t \to 0$$

当 $a \to -\infty$ 和 $b \to +\infty$ 时. □

(11) 注意

$$f \in C([a, +\infty))\ 且\ \int_a^{+\infty} f(x)dx\ 收敛 \quad \not\Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

反例: 考察函数 $f(x) = x\cos(x^4)$. 则得到

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(x)dx &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\cos(x^4)dx^2 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\cos(x^2)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\cos t\cdot\frac{1}{2}t^{-1/2}dt = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt. \end{aligned}$$

利用下一小节的Abel-Dirichlet 判别法可证最后这个反常积分是收敛的.

(12) 注意

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx\ 收敛 \quad \not\Rightarrow \quad \int_1^{+\infty} f^3(x)dx\ 和\ \int_1^{+\infty}\frac{|f(x)|}{x^2}dx\ 收敛.$$

反例: 考察函数

$$f(x) = \begin{cases} n, & n \le xc \le n + \frac{1}{n^3}, \\ 0, & 其它情形. \end{cases}$$

和函数 $f(x) = x^2\sin(x^4)$. □

(13) 假设函数 f 定义在 $[0, +\infty)$ 上, $0 < f < 1$, 且

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx\ 收敛, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

则反常积分

$$I := \int_0^{+\infty}\ln[1-f(x)]\ 收敛.$$

证: 利用Taylor 展开得到

$$\ln(1-t)=\ln(1-t)-\ln(1-0)=\frac{-1}{1-\theta t}(t-0)=\frac{-t}{1-\theta t}$$

从而

$$|\ln(1-t)|=\frac{t}{1-\theta t}<\frac{t}{1-t},\quad 0<\theta<1.$$

$\exists M>0$ 使得不等式 $1-f(x)>\frac{1}{2}$ 对任意 $x>M$ 都成立. 因此得到

$$\int_M^{+\infty}|\ln[1-f(x)]|\,dx\le\int_M^{+\infty}\frac{f(x)\,dx}{1-f(x)}\le 2\int_M^{+\infty}f(x)\,dx<+\infty.\quad\square$$

(14) 证明

$$I(s):=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{x}{s}-\frac{1}{x}}}{x}dx\sim\ln s$$

当 $s\to+\infty$ 时.

证: 因为 $x/s=1/x\Rightarrow x=\sqrt{s}$ 把积分分成两部分

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\sqrt{s}}\frac{e^{-\frac{x}{s}-\frac{1}{x}}}{x}dx+\int_{\sqrt{s}}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{x}{s}-\frac{1}{x}}}{x}dx\\
&= \int_{\sqrt{s}}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{t}{s}-\frac{1}{t}}}{t}dt+\int_{\sqrt{s}}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{x}{s}-\frac{1}{x}}}{x}dx\quad\left(x:=\frac{s}{t},\ e^{-1/x}=1+O(s^{-1/2})\right)\\
&= 2\int_{\sqrt{s}}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{x}{s}-\frac{1}{x}}}{x}dx\ =\ 2\left[1+O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)\right]\int_{\sqrt{s}}^{+\infty}\frac{e^{-x/s}}{x}dx\\
&= 2\left[1+O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)\right]\int_{s^{-1/2}}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt\ =\ 2\left[1+O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)\right]\left[\frac{\ln s}{2}+\int_{s^{-1/2}}^{+\infty}e^{-t}\ln t\,dt\right]\\
&= \ln s+o(1)\ \ (s\to+\infty).\quad\square
\end{aligned}$$

(15) 计算

$$I=\int_0^1\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx.$$

解: $\forall\,0<\epsilon<1$ 考察定积分

$$I_\epsilon:=\int_\epsilon^1\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx.$$

分部积分得到

$$\begin{aligned}
I_\epsilon &= -\int_\epsilon^1\ln x\,d\left(\frac{1}{1+x}\right)\ =\ -\left[\frac{\ln x}{1+x}\bigg|_\epsilon^1-\int_\epsilon^1\frac{dx}{x(1+x)}\right]\\
&= \frac{\ln\epsilon}{1+\epsilon}+\ln\frac{x}{x+1}\bigg|_\epsilon^1\ =\ \frac{\ln\epsilon}{1+\epsilon}-\ln 2-\ln\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\\
&= -\frac{\epsilon\ln\epsilon}{1+\epsilon}-\ln 2+\ln(1+\epsilon)\ \ \to\ \ -\ln 2
\end{aligned}$$

当 $\epsilon \to 0$ 时. □

(16) 计算

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}, \quad a > 1.$$

解: 先做变量替换 $x = \sin\theta$ 得到

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\theta \, d\theta}{(a-\sin\theta)\cos\theta} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{a-\sin\theta}.$$

再做变量替换 $t = \tan\theta/2$ 得到

$$\begin{aligned} I &= 2\int_{-1}^{1} \frac{dt}{at^2-2t+a} = \frac{2}{a}\int_{-1}^{1} \frac{dt}{(t-\frac{1}{a})^2+1-(\frac{1}{a})^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \arctan \frac{a}{\sqrt{a^2-1}} \left(t-\frac{1}{a}\right)\Big|_{-1}^{1} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \left(\arctan\sqrt{\frac{a-1}{a+1}} + \arctan\sqrt{\frac{a+1}{a-1}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}. \quad \square$$

(17) 计算

$$I_n = \int_0^1 x^n(1-x)^p dx, \quad p > -1.$$

解: 注意到

$$I_0 = \int_0^1 (1-x)^p dx = \frac{1}{p+1}.$$

对一般的 n 有

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 t^p(1-t)^n dt = \int_0^1 t^p \sum_{0\le k\le n} \binom{n}{k}(-1)^k t^k dt \\ &= \sum_{0\le k\le n} \binom{n}{k}(-1)^k \frac{1}{p+k+1}. \end{aligned}$$

另一方面定义

$$I_{n,p} := \int_0^1 x^n(1-x)^p dx.$$

则得到

$$\begin{aligned} I_{n,p} &= \frac{-1}{p+1}\int_0^1 x^n d\left((1-x)^{p+1}\right) \\ &= \frac{n}{p+1}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{p+1}dx = \frac{n}{p+1} I_{n-1,p+1}. \end{aligned}$$

因此

$$I_n = I_{n,p} = \frac{n!}{(p+1)\cdots(p+n)} I_{0,p+n} = \frac{n!}{(p+1)\cdots(p+n+1)}.$$

作为一个副产品得到如下的组合恒等式

$$\sum_{0\le k\le n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{p+k+1}=\frac{n!}{(p+1)\cdots(p+n+1)}. \tag{5.5.16}$$

§5.5.2 收敛判别法

因为

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx=\int_{-a}^{+\infty} f(-t)\,dt \quad (t=-x)$$

及

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx+\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

所以对无穷区间上的反常积分的收敛性，只要考虑 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 的收敛性即可.

(I) 反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 的收敛性.

定理5.5.11. 给定函数 $f:[a,+\infty)\to[0,+\infty)$, 即函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上非负.

(1) **(有界判别法)**

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ 收敛} \quad\Leftrightarrow\quad I(A):=\int_a^A f(x)\,dx \text{ 有界}.$$

(2) **(比较判别法 1)** 如果 $0\le f(x)\le K\varphi(x)$ $(K>0)$, 则

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ 发散} &\quad\Rightarrow\quad \int_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx \text{ 发散},\\ \int_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx \text{ 收敛} &\quad\Rightarrow\quad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ 收敛}.\end{aligned}$$

(3) **(比较判别法 2 或比较判别法的极限形式)** 如果 $\varphi:[a,+\infty)\to[0,+\infty)$ 且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=K\ge 0,$$

则

(a) $\underline{0<K<+\infty}$:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ 收敛} \quad\Leftrightarrow\quad \int_a^{\infty}\varphi(x)\,dx \text{ 收敛};$$

(b) $\underline{K=0}$:

$$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx \text{ 收敛} \quad\Rightarrow\quad \int_a^{\infty} f(x)\,dx \text{ 收敛};$$

(c) $\underline{K=+\infty}$:

$$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx \text{ 发散} \quad\Rightarrow\quad \int_a^{\infty} f(x)\,dx \text{ 发散}.$$

(4) **(Canchy 判别法 1)** 如果 $a>0$ 则

$$f(x)\le\frac{K}{x^p}\ (K>0,\ p>1)\quad\Rightarrow\quad\int_a^{+\infty}f(x)dx\ \text{收敛},$$
$$f(x)\ge\frac{K}{x^p}\ (K>0,\ p\le 1)\quad\Rightarrow\quad\int_a^{+\infty}f(x)dx\ \text{发散}.$$

(5) **(Canchy 判别法 2 或 Cauchy 判别法的极限形式)** 如果 $a>0$ 且

$$\lim_{x\to+\infty}x^pf(x)=K\ge 0,$$

则

(a) $0\le K<+\infty$ 且 $p>1$:
$$\int_a^\infty f(x)dx\ \text{收敛};$$

(b) $0<K\le+\infty$ 且 $p\le 1$:
$$\int_a^\infty f(x)dx\ \text{发散}.$$

证: (1) 利用单调函数极限存在的充要条件.

(2) 这是因为

$$I(A)\le K\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx\ \text{有界}\quad\Rightarrow\quad\int_a^{+\infty}f(x)dx\ \text{收敛}.$$

(3) 如果 $0<K<+\infty\Rightarrow\frac{K}{2}\varphi(x)\le f(x)\le\frac{3K}{2}\varphi(x),\ \forall\ x>a'>a$. 如果 $K=0\Rightarrow f(x)\le\varphi(x),\ \forall\ x>a'>a$. 如果 $K=+\infty\Rightarrow f(x)\ge\varphi(x),\ \forall\ x>a'>a$.

(4) 在(2) 中取 $\varphi(x)=1/x^p$.

(5) 在(3) 中取 $\varphi(x)=1/x^p$. □

§5.5.3 反常积分 II

to add Cauchy principal value.

§5.5.4 Euler 积分

Euler 积分包括**Gamma 函数和Beta 函数**. 首先我们引入 Gamma 函数

$$\Gamma(s):=\int_0^\infty x^{s-1}e^xdx,\quad s\in\mathbb{R}. \tag{5.5.17}$$

在未证明反常积分收敛性之前, 根据定义显然有

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_1^\infty=1. \tag{5.5.18}$$

下面我们来证明 $\Gamma(s)$ 仅在 $s>0$ 时收敛. 事实上, 把 $\Gamma(s)$ 分解如下

$$\Gamma(s)=\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx+\int_1^{\infty}x^{s-1}e^{-x}dx=:I_1+I_2.$$

当 $x\to 0$ 时, 由于 $x^{1-s}(x^{s-1}e^{-x})\to 1$, 我们得到 I_1 收敛仅当 $1-s<1$. 对 I_2, 当 $x\to\infty$ 时, $x^2(x^{s-1}e^{-x})\to 0$, 从而 I_1 对任意 $s\in\mathbb{R}$ 都收敛. 因此 $\Gamma(s)$ 仅当 $s>0$ 时候收敛.

根据分部积分, 我们马上得到递推公式

$$\Gamma(1+s)=s\Gamma(s),\quad s>0. \tag{5.5.19}$$

特别地,

$$\Gamma(1+n)=n!. \tag{5.5.20}$$

其次, 我们引入**Beta 函数**

$$B(a,b):=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx,\quad a,b\in\mathbb{R}. \tag{5.5.21}$$

§5.5.5 Froullani 积分

对任意 $a,b>0$, 函数 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 的**Froullani 积分**定义为

$$\mathbf{F}_{a,b}(f):=\int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx. \tag{5.5.22}$$

定理5.5.12. *假设 $f\in C[0,\infty)$.*

(1) 如果极限 $f(\infty):=\lim_{x\to\infty}f(x)$ 存在且有限, 则

$$\mathbf{F}_{a,b}(f)=[f(0)-f(\infty)]\ln\frac{b}{a}. \tag{5.5.23}$$

(2) 如果极限 $\lim_{x\to\infty}f(x)$ 不存在但是反常积分

$$\int_A^{\infty}\frac{f(x)}{x}dx$$

对某个 $A>0$ 收敛, 则

$$\mathbf{F}_{a,b}(f)=f(0)\ln\frac{b}{a}. \tag{5.5.24}$$

证明: 对任给一个闭区间 $[\alpha,\beta]\subseteq(0,\infty)$, 我们得到

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx &= \int_{a\alpha}^{a\beta}\frac{f(t)}{t}dt-\int_{b\alpha}^{b\beta}\frac{f(t)}{t}dt\\ =\int_{a\alpha}^{b\alpha}\frac{f(t)}{t}dt-\int_{a\beta}^{b\beta}\frac{f(t)}{t}dt &= f(\xi)\int_{a\alpha}^{b\alpha}\frac{dt}{t}-f(\eta)\int_{a\beta}^{b\beta}\frac{dt}{t}\end{aligned}$$

其中 $\xi \in [a\alpha, b\alpha]$ 和 $\eta \in [a\beta, b\beta]$.

(1) 令 $\alpha \to 0+$ 和 $\beta \to \infty$, 我们得到

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{a,b}(f) &= \lim_{\alpha\to 0+,\ \beta\to\infty}\int_\alpha^\beta \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx \\ &= \left[\lim_{\xi\to 0+} f(\xi) - \lim_{\eta\to\infty} f(\eta)\right]\ln\frac{b}{a} = [f(0)-f(\infty)]\ln\frac{b}{a}.\end{aligned}$$

(2) 在这种情形, 注意到

$$\lim_{\beta\to\infty}\int_{a\beta}^{b\beta}\frac{f(t)}{t}dt = 0.$$

所以

$$\mathbf{F}_{a,b}(f) = \lim_{a\to 0+}\int_{a\alpha}^{b\alpha}\frac{f(t)}{t}dt = f(0)\ln\frac{b}{a}. \quad \square$$

例5.5.13. 令 $a, b > 0$, 计算下列反常积分

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx, \quad \int_0^\infty \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}dx, \quad \int_0^\infty \frac{b\sin(ax)-a\sin(bx)}{x^2}dx.$$

对第一个积分, 取 $f(x) = e^{-x}$ 从而得到 $\mathbf{F}_{a,b}(f) = [f(0)-f(\infty)]\ln\frac{b}{a} = \ln\frac{b}{a}$.

§5.5.6 对数积分和素数基本定理

Gauss 引入的**对数积分**定义如下

$$\mathbf{li}(x) := \mathbf{P.V.}\int_0^x \frac{dt}{\ln t} = \lim_{\epsilon\downarrow 0+}\left(\int_0^{1-\epsilon} + \int_{1+\epsilon}^x\right)\frac{dt}{\ln t}, \quad c \geq 2. \tag{5.5.25}$$

如上的积分可以写为

$$\mathbf{li}(x) = \lim_{\epsilon\to 0+}\left(\int_0^{1-\epsilon} + \int_{1+\epsilon}^2\right)\frac{dt}{\ln t} + \mathbf{Li}(x), \tag{5.5.26}$$

其中

$$\mathbf{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\ln t} \tag{5.5.27}$$

是一个定积分. 为了证明 $\mathbf{li}(x)$ 中的第一部分是良定的, 令 $s = 2-t$ 得到

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0+}\left(\int_0^{1-\epsilon} + \int_{1+\epsilon}^2\right)\frac{dt}{\ln t} &= \lim_{\epsilon\to 0+}\left(\int_0^{1-\epsilon}\frac{dt}{\ln t} + \int_0^{1-\epsilon}\frac{ds}{\ln(2-s)}\right) \\ &= \lim_{\epsilon\to 0+}\left(\int_\epsilon^1 \frac{du}{\ln(1-u)} + \int_\epsilon^1\frac{du}{\ln(1+u)}\right) \\ &= \int_0^1\left[\frac{1}{\ln(1-u)} + \frac{1}{\ln(1+u)}\right]du.\end{aligned}$$

根据

$$\begin{aligned}\lim_{u\to 0+} u^{1/2}\left[\ln\frac{1}{(1-u)}+\frac{1}{\ln(1+u)}\right] &= \lim_{u\to 0+}\frac{u^{-1/2}}{2}[-(1-u)+(1+u)] \\ &= \lim_{u\to 0+} u^{1/2} = 0,\end{aligned}$$

我们发现上述反常积分是收敛的, 从而 $\mathbf{li}(x)$ 对任意 $x\geq 2$ 都是有限的.

分部积分马上得到

$$\mathbf{Li}(x)=\frac{x}{\ln x}-\frac{2}{\ln 2}+\int_2^x\frac{dt}{\ln^2 t}=\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right). \tag{5.5.28}$$

著名的**素数分布定理**是说如下的渐进关系

$$\pi(x)\sim\frac{x}{\ln x}\sim\mathbf{Li}(x)\sim\mathbf{li}(x) \tag{5.5.29}$$

当 $x\to\infty$ 时成立, 这里函数 $\pi(x)$ 表示不超过 x 的所有素数之和. 在 1850 年, 俄国数学家Chebyshev 证明了不等式

$$c_1\frac{x}{\ln x}\leq\pi(x)\leq c_2\frac{x}{\ln x} \tag{5.5.30}$$

对所有 $x\geq 10$ 都成立, 这里

$$c_1:=\ln\frac{2^{1/2}3^{1/3}5^{1/5}}{30^{1/30}}\approx 0.921292 \quad 和 \quad c_2:=\frac{6}{5}c_1\approx 1.1055 \tag{5.5.31}$$

是两个接近于 1 的常数.

§5.5.7 Dirichlet 核

对任意 $x\in\mathbb{R}$, 令 $\omega:=e^{\mathrm{i}x}$. **Dirichlet 核**定义为

$$D_N(x):=\sum_{-N\leq n\leq N}\omega^n,\quad N\in\mathbb{N}. \tag{5.5.32}$$

根据定义我们计算得到

$$\begin{aligned}D_N(x) &= \sum_{0\leq n\leq N}\omega^n+\sum_{-N\leq n\leq -1}\omega^n = \frac{1-\omega^{N+1}}{1-\omega}+\frac{\omega^{-N}-1}{1-\omega} \\ &= \frac{\omega^{-N}-\omega^{N+1}}{1-\omega} = \frac{\sin[(N+\frac{1}{2})x]}{\sin\frac{1}{2}x}.\end{aligned} \tag{5.5.33}$$

另一方面, 根据 $D_N(x)$ 的原始定义得到如下恒等式

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_N(x)dx=1 \tag{5.5.34}$$

对任意 $N\in\mathbb{N}$ 都成立. 然而, 我们可以证明如下关于 $|D_N(x)|$ 积分的下界

$$L_N:=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_N(x)|dx\geq\frac{4}{\pi^2}\ln N+\frac{4}{\pi^2}\left(\gamma+\frac{1}{2N+1}\right) \tag{5.5.35}$$

其中 $\gamma := \lim_{N\to\infty} a_N$ 是Euler 常数, 这里 $a_N := \sum_{1\le k\le N}\frac{1}{k} - \ln N$. 为了得到下界, 我们首先把 L_N 写成

$$L_N = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin[(N+\frac{1}{2})x]}{\sin\frac{1}{2}x}\right|dx.$$

对任意 $x\in[0,\pi/2]$, 我们有 $\frac{2}{\pi}x \le \sin x \le x$. 从而

$$\begin{aligned}
L_N &\ge \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin[(N+\frac{1}{2})x]|}{|x|}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{N\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin\theta|}{\theta}d\theta \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{0\le k\le N-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin\theta|}{\theta}d\theta + \int_{N\pi}^{N\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin\theta|}{\theta}d\theta \\
&\ge \frac{2}{\pi}\sum_{0\le k\le N-1}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin\theta|d\theta + \frac{2}{\pi(2N+1)}\int_{N\pi}^{N\pi+\frac{\pi}{2}}|\sin\theta|d\theta \\
&= \frac{4}{\pi^2}\sum_{1\le k\le N}\frac{1}{k} + \frac{4}{\pi^2}\frac{1}{2N+1} \ge \frac{4}{\pi^2}\ln N + \frac{4}{\pi^2}\left(\gamma + \frac{1}{2N+1}\right).
\end{aligned}$$

进一步我们可以得到 L_N 一个上界

$$L_N \le \frac{2}{\pi}\ln N + 2\left(\frac{1}{\pi} + \int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta}{\theta}d\theta\right). \tag{5.5.36}$$

事实上,

$$\begin{aligned}
L_N &\le \int_0^{\pi}\frac{|\sin[(N+\frac{1}{2})x]|}{|x|}dx = \int_0^{N\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin\theta|}{\theta}d\theta \\
&\le \sum_{1\le k\le N-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin\theta|}{\theta}d\theta + \int_0^{\pi}\frac{\sin\theta}{\theta}d\theta + \int_{N\pi}^{N\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin\theta|}{\theta}d\theta \\
&\le \sum_{1\le k\le N-1}\frac{2}{k\pi} + \frac{2}{N\pi} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{\theta}d\theta = \frac{2}{\pi}\sum_{1\le k\le N}\frac{1}{k} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{\theta}d\theta \\
&\le \frac{2}{\pi}(\ln N + 1) + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{\theta}d\theta = \frac{2}{\pi}\ln N + 2\left(\frac{1}{\pi} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{\theta}d\theta\right).
\end{aligned}$$

结合上述两个不等式, 我们粗略地得到（舍去那些常数因子）

$$L_N \approx \ln N \tag{5.5.37}$$

当 $N\to\infty$. 更进一步的精细计算我们可以断言

$$L_N = \frac{4}{\pi^2}\ln N + O(1), \quad N\to\infty, \tag{5.5.38}$$

即存在一个常数 $C>0$ 使得不等式

$$\left|L_N - \frac{4}{\pi^2}\ln N\right| \le C \tag{5.5.39}$$

当 $N\to\infty$ 时成立.

§5.6 定积分的应用

§5.7 参考文献

1. Koblitz, Neal. *Introduction to elliptic curves and modular forms*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics **97**, Springer-Verlag, New York, 1993. x+248 pp. ISBN: 0-387-97966-2

2. 布鲁斯 ·C. 伯恩特（Bruce C. Berndt）主编: **拉玛努金笔记**（第 2, 3, 4 卷）, 哈尔滨工业大学出版社, 2019.

3. 徐森林, 薛春华编著: **数学分析**, 清华出版社, 2005.

4. 张福保, 薛金美, 潮小李 主编: **数学分析讲义**, 科学出版社, 2019.

5. 梅加强 编著: **数学分析**, 高等教育出版社, 2015.

6. 邓建平 编: **微积分 I 和 II**, 科学出版社, 2019.

7. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis I*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+574 pp. ISBN: 3-540-40386-8

8. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis II*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xvi+681 pp. ISBN: 3-540-40633-6

9. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis I*, Translated from the 1988 German original by Gary Brookfield, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. xiv+426 pp. ISBN: 3-7643-7153-6

10. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis II*, Translated from the 1999 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. xii+400 pp. ISBN: 978-3-7643-7472-3; 3-7643-7472-3

11. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis III*, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. xii+468 pp. ISBN: 978-3-7643-7479-2; 3-7643-7479-2

12. 菲赫金哥尔茨 著 (徐献瑜, 冷生明, 梁文骐 译; 郭思旭 校): **微积分学教程** (第一、二、三卷), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.

13. 吉米多维奇 著 (李荣涷, 李植 译): **数学分析习题集** (根据 2010 年俄文版翻译), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.

14. 汪林 著: **数学分析中的问题和反例**, 现代数学基础 **56**, 高等教育出版社, 2015.

15. 裴礼文 编著: **数学分析中的典型问题与方法** (第二版), 高等教育出版社, 2015.

16. 朱尧辰 编著: **数学分析例选通过范例学技巧**, 哈尔滨工业大学出版社, 2013.

17. 周民强 编著: **数学分析习题演练** (第一、二、三册), 科学出版社, 2018.

第六章　级数理论

第二部分

线性代数与常微分方程

第七章　矩阵和行列式

第八章　二次型和矩阵变换

第九章　常微分方程基本理论

第十章　常微分方程基本定理

第三部分

多变量理论

第十一章　多变量极限理论

第十二章　多变量导数理论

第十三章　多变量积分理论

第十四章　多变量级数理论

第四部分

数学分析后续：高等分析初步

第十五章　Fourier 分析

第十六章　实分析

第十七章　复分析

第十八章　泛函分析

第五部分

数学分析后续：拓扑学初步

第十九章　范畴理论

第二十章　基本群

第二十一章　微分流形

第二十二章　代数拓扑

第六部分

数学分析后续：微分几何学初步

第二十三章　Riemann 流形

第二十四章　复流形

第二十五章　Riemann 曲面

第二十六章　Einstein 方程

第七部分

数学分析后续：Lie 群初步

第二十七章　群论和 Galois 理论

第二十八章　拓扑群与 Lie 群

第二十九章　$\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ 上的分析

第三十章　Poincaré 模型

第八部分

数学分析后续：模形式初步

第三十一章　模形式和 Eisenstein 级数

第三十二章　Hecke 算子

第三十三章 L 函数

第三十四章　Galois 表示

第九部分

数学分析后续：（待补充）