第一次作业: 带$*$ 选做, 2020年10月16日上课前交

1. 教材习题**1.1**: $A1$, $C5$, $C6$.

2. 教材习题**1.2**: $A1$, $A3$.

3. 对平面$\mathbf{R}^2$ 中的两点(x_0, y_0) 和(x_1, y_1) 定义关系

$$(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \quad \text{如果} \quad y_0 - x_0^2 = y_1 - x_1^2.$$

证明$\sim$ 是$\mathbf{R}^2$ 上的等价关系.

4. 对平面$\mathbf{R}^2$ 中的两点(x_0, y_0) 和(x_1, y_1) 定义关系

$$(x_0, y_0) < (x_1, y_1) \ \text{如果} \ \left(y_0 - x_0^2 < y_1 - x_1^2\right) \text{或} \left(y_0 - x_0^2 = y_1 - x_1^2 \text{且} x_0 < x_1\right).$$

证明$<$ 是$\mathbf{R}^2$ 上的序关系.

5. 教材习题**1.1**: $A3$, $B4$, $C8$.

6. 教材习题**1.3**: $A2$, $B3$, $B4$, $B5$.

***7.** 若$\sim$ 是集合X 上的等价关系, 则可定义**等价类**

$$[x] := \{y \in X | y \sim x\}$$

和**商集**

$$X/\sim := \{[x] | x \in X\}.$$

由此得到**自然投射**

$$p_X : X \longrightarrow X/\sim, \quad x \longmapsto [x].$$

证明p 是满射.

现令$\sim$ 和$\approx$ 分别是集合X 和Y 上的等价关系. 假设存在映射$f : X \to Y$ 使得$f(x_1) \approx f(x_2)$ 对任何满足$x_1 \sim x_2$ 的$x_1, x_2 \in X$ 都成立. 证明存在唯一映射f_* 使得如下图

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle p_X}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p_Y} \\ X/\sim & \xrightarrow{f_*} & Y/\approx \end{array}$$

是交换的, 即, $p_Y \circ f = f_* \circ p_X$. 这里$p_X, p_Y$ 是自然投射.

*****7.** 考虑Fibonacci 数列

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \ (n \geq 2).$$

利用数学归纳法证明**Cassini 恒等式** (1680)

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

和**de Moivre 通项公式** (18 世纪初)

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \quad \alpha := \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \ \beta := \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$