基本分析讲义

李逸

东南大学丘成桐中心、东南大学数学学院

感谢
东南大学 19 级毓琇理科实验班(按姓氏拼音排序)
崔雪红、刘碧璇、秦靖雯
和
东南大学 20 级物理化学强基班(按姓氏拼音排序)
?、?、?

感谢下列同学指出讲义中的错误与不足 (按姓氏拼音排序)
陈昕、胡蓉、李嘉淇、李文哲、刘春辰、王晓波、王泽川
田国凯、孙茗欣、魏佳蓓、杨帆、杨欣、易英鹏
张凌枫、张明远、朱康华

初稿修订稿版次: 第1 版第15 次

再稿修订稿版次: 第2 版第2 次

二零二零年九月一日

目 录

第一章 序 15
1.1 前言 15
1.2 使用说明 16
1.3 符号和常用记号说明 18
1.4 作者声明 19
1.5 预备知识 I: 集合与映射 20
1.5.1 集合的任意并和交 22
1.5.2 集合的 Cartesian 乘积: I 23
1.5.3 映射 23
1.5.4 * 范畴 27
1.5.5 关系 30
1.5.6 集合的 Cartesian 乘积: II 34
1.5.7 有限集、可数集和不可数集 36
1.5.8 数学归纳法和* 递推定义 40
1.5.9 * 群、环、域、模、向量空间、代数初涉 44
1.5.10 自然数、有理数和实数的公理系统 68
1.5.11 复数和* 代数学基本定理 78
1.5.12 常用初等不等式 81
1.6 预备知识 II: 函数 84
1.6.1 几类特殊的函数 86
1.6.2 * 素数和素数基本定理 89
1.6.3 超越数 π 和 e 97
1.6.4 * 度量空间 97
1.6.5 * 泛函 100
1.6.6 * 测度 102
1.7 参考文献 104

第一部分 单变量理论 107

第二章 极限理论 I: 数列极限 109
2.1 数列 109
2.1.1 数列极限的定义 111
2.1.2 例题 112
2.2 收敛数列的性质 117
2.2.1 基本性质 117

2.2.2 收敛数列的代数运算/四则运算 120
2.2.3 无穷小和无穷大数列 122
2.2.4 Stolz 定理 124
2.2.5 无穷级数初涉 134
2.2.6 * 连分数和**Khintchin** 常数 137
2.3 数列收敛的判别法则 140
2.3.1 单调数列 140
2.3.2 三个重要的常数 π、e、和 γ 142
2.3.3 子列 154
2.3.4 Cauchy 数列 156
2.3.5 * Ramanujan 恒等式 164
2.3.6 * Cantor 集 168
2.3.7 * Logistic 差分方程和混沌 169
2.4 实数系统基本定理 173
2.4.1 确界原理 173
2.4.2 单调有界收敛定理 173
2.4.3 Cantor 闭区间套定理 173
2.4.4 Bolzano-Weierstrass 定理 174
2.4.5 Cauchy 收敛定理 174
2.4.6 Heine-Borel 有限覆盖定理 174
2.4.7 六大定理的等价性 174
2.5 习题 176
2.6 参考文献 183

第三章 极限理论 II: 函数极限 **187**
3.1 函数极限 187
3.1.1 函数极限的定义 188
3.1.2 函数极限的性质 191
3.1.3 两个重要的极限 192
3.1.4 Heine 定理 195
3.1.5 * Bohr - Mollerup - Artin 定理 196
3.2 函数的阶估计 198
3.2.1 无穷小 198
3.2.2 无穷大 202
3.2.3 等价替换 203
3.3 函数的连续和间断 207
3.3.1 连续函数 208
3.3.2 函数的间断点 212
3.3.3 连续函数的性质 213

3.3.4 一致连续 220
3.4 参考文献 227

第四章 导数理论 229
4.1 微分和导数 229
4.1.1 微分 229
4.1.2 导数 231
4.1.3 线性逼近 235
4.1.4 单侧导数 235
4.2 求导法则 238
4.2.1 导数的算术运算 238
4.2.2 反函数的求导 240
4.2.3 链式法则 242
4.2.4 隐函数的求导 244
4.2.5 参数化函数的求导 247
4.3 高阶导数 248
4.3.1 记号 249
4.3.2 算术运算 251
4.4 极值定理 255
4.4.1 极值 255
4.4.2 Fermat 引理 256
4.4.3 Darboux 定理 256
4.5 微分中值定理 257
4.5.1 Rolle 定理 258
4.5.2 Lagrange 定理 260
4.5.3 Cauchy 定理 262
4.6 L'Hospital 法则 266
4.6.1 $\frac{0}{0}$ 型 266
4.6.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型 268
4.6.3 其它型不定式 270
4.7 Taylor 公式 272
4.7.1 Peano 型余项 273
4.7.2 Lagrange 型余项 274
4.7.3 Cauchy 型余项 276
4.7.4 Taylor 级数 282
4.8 微分学的应用 284
4.8.1 单调函数和一阶导数 284
4.8.2 凸函数和一阶、二阶导数 286
4.8.3 极值和一阶、二阶导数 292

4.8.4 函数图像的渐近线 294
4.8.5 函数画图 295
4.8.6 近似计算 296
4.8.7 Newton 方法 297
4.9 参考文献 300

第五章　积分理论 303

5.1 不定积分 303
5.1.1 原函数和不定积分 303
5.1.2 基本不定积分表 I 304
5.2 不定积分的基本性质 305
5.2.1 不定积分的线性 305
5.2.2 变量替换 308
5.2.3 分部积分及基本不定积分表 II 310
5.2.4 有理函数的原函数 315
5.2.5 形如 $\int R(\sin x, \cos x)dx$ 的原函数 319
5.2.6 形如 $\int R(x, y(x))dx$ 的原函数 322
5.2.7 * 椭圆积分 328
5.2.8 * 超几何级数 335
5.3 定积分 338
5.3.1 Riemann 积分的定义 342
5.3.2 可积的必要条件 346
5.3.3 可积的充分条件 347
5.3.4 * Lebesgue 判别法则: 可积的充要条件 354
5.4 定积分的基本性质 357
5.4.1 基本性质 357
5.4.2 积分中值定理 359
5.4.3 微积分基本定理 369
5.4.4 Newton-Leibniz 公式 374
5.4.5 分部积分法 378
5.4.6 变量替换法 384
5.5 反常积分 387
5.5.1 反常积分 I 387
5.5.2 收敛判别法 401
5.5.3 反常积分 II: Cauchy 主值积分 420
5.5.4 * Euler 积分和 Γ 函数的刻画 422
5.5.5 Frullani 积分 425
5.5.6 * 对数积分和素数基本定理 426
5.5.7 * Dirichlet 核 427

5.6 定积分的应用 429
5.6.1 面积 429
5.6.2 弧长 430
5.6.3 曲率 431
5.6.4 体积 433
5.6.5 旋转曲面的表面积 434
5.6.6 * 椭圆积分的级数求解 434
5.7 定积分的近似计算 436
5.7.1 矩形法 436
5.7.2 梯形法 438
5.7.3 Simpson 法 439
5.7.4 其它近似算法 442
5.8 参考文献 442

第六章　级数理论 445

6.1 数项级数 445
6.1.1 数项级数 446
6.1.2 数项级数的 Cauchy 收敛 446
6.2 正项级数 451
6.2.1 上极限和下极限 452
6.2.2 正项级数判别法 455
6.2.3 当 $\lim_{n\to+\infty} a_n/a_{n+1} = 1$ 时的判别法 459
6.3 任意项级数 465
6.3.1 级数的绝对收敛和条件收敛 465
6.3.2 交错级数和 Leibniz 判别法 465
6.3.3 Abel 判别法和 Dirichlet 判别法 466
6.3.4 级数的乘法 468
6.3.5 级数的重排 473
6.4 * 无穷级数和无穷乘积 481
6.4.1 * 无穷乘积 481
6.4.2 * 无穷乘积的收敛 484
6.4.3 * 无穷乘积的绝对收敛和条件收敛 485
6.4.4 * Γ 函数的 Euler-Gauss 公式和 Weierstrass $\wp$ 函数简介 . 486
6.5 * 二重级数 496
6.5.1 * 二重级数的序收敛 497
6.5.2 * Carleman 不等式 499
6.5.3 * Hilbert 不等式和 Witten ζ 函数 501
6.5.4 * 二重级数的其它收敛 503
6.6 参考文献 503

第二部分 线性代数与常微分方程 507

第七章 矩阵和行列式 509

第八章 二次型和矩阵变换 511

第九章 常微分方程基本理论 513

第十章 常微分方程基本定理 515

第三部分 多变量理论 517

第十一章 多变量极限理论 519
11.1 Euclidean 空间及其子集 519
11.1.1 Euclidean 空间 $\mathbb{R}^n$ 519
11.1.2 $\mathbb{R}^n$ 中的点列收敛 525
11.1.3 $\mathbb{R}^n$ 中的有界集、开集和闭集 525
11.2 $\mathbb{R}^n$ 中的连续性 529
11.2.1 闭区域套定理、Bozalno-Weierstrass 定理和 Cauchy 收敛准则 529
11.2.2 紧致度量空间的刻画和道路连通集 532
11.2.3 * 基本群简介 537
11.3 多元函数的极限 538
11.3.1 向量值函数 538
11.3.2 多元函数的极限 539
11.3.3 二元函数的累次极限 543
11.4 多元函数的连续性 546
11.4.1 多元函数连续的定义及基本性质 546
11.4.2 向量值函数的极限和连续 549
11.4.3 向量值连续函数的三大定理 549
11.4.4 一致连续 551
11.5 参考文献 552

第十二章 多变量导数理论 555
12.1 多元函数的微分和偏导数 555
12.1.1 多元函数的微分 555
12.1.2 多元函数的偏导数 557
12.1.3 多元函数的方向导数 560
12.1.4 多元函数的高阶导数 562
12.1.5 多元函数的高阶微分 564

12.1.6 向量值函数的微分和偏导数 565
12.2 多元复合函数的求导法则 567
12.2.1 多元复合函数求偏导的链式法则 567
12.2.2 多元函数的一阶全微分的不变性 569
12.3 多元函数的微分中值定理和 Taylor 公式 570
12.3.1 多元函数的微分中值定理 570
12.3.2 多元函数的 Taylor 公式 572
12.4 隐函数定理 575
12.4.1 隐函数 576
12.4.2 隐函数定理 576
12.4.3 向量值隐函数定理 581
12.4.4 逆映射定理 583
12.5 偏导数的几何应用 585
12.5.1 空间曲线的切线和法平面 585
12.5.2 空间曲面的切平面和法线 588
12.6 无条件极值问题 591
12.6.1 多元函数的极值 592
12.6.2 多元函数的最值 598
12.6.3 最小二乘法 599
12.7 条件极值问题 600
12.7.1 条件极值和 Lagrange 函数 600
12.8 * 最优传输问题 605
12.8.1 * 最优传输问题的数学表述 605
12.8.2 * 最优传输的充要条件 607
12.9 参考文献 609

第十三章　多变量积分理论　611
13.1 重积分 611
13.1.1 可求面积区域 612
13.1.2 二重积分 615
13.1.3 n 重积分 617
13.1.4 重积分的基本性质 618
13.2 重积分的 Fubini 定理 620
13.2.1 矩形区域上的 Fubini 定理 620
13.2.2 x- 型区域和 y- 型区域上的 Fubini 定理 623
13.2.3 * Stieltjes 积分 627
13.3 重积分的变量替换 641
13.3.1 二重积分的变量替换 642
13.3.2 n 重积分的变量替换 647

13.4 反常二重积分 653
13.4.1 无界区域上的反常二重积分 653
13.4.2 无界函数的反常二重积分 655
13.4.3 Beta 函数 656
13.4.4 * Poisson 核、Hilbert 变换和 Riesz 变换 657
13.5 * 微分形式 658
13.5.1 * 微分形式和外积 659
13.5.2 * 上同调群 660
13.6 重积分的应用 662
13.6.1 曲面面积 663
13.6.2 * 极小曲面 665
13.6.3 $\mathbb{R}^n$ 中的 k 维曲面 667
13.7 第一型曲线积分和曲面积分 674
13.7.1 第一型曲线积分 674
13.7.2 第一型曲面积分 678
13.8 第二型曲线积分和曲面积分 681
13.8.1 第二型曲线积分 681
13.8.2 第二型曲面积分 685
13.9 Green 公式、Gauss 公式和Stokes 公式 690
13.9.1 Green 公式 691
13.9.2 曲线积分的路径无关性 697
13.9.3 Gauss 公式 702
13.9.4 Stokes 公式 704
13.9.5 * 流形上的Stokes 公式 707
13.9.6 Stokes 公式的历史 709
13.10 场论简介 711
13.10.1 向量场 711
13.10.2 数量场的等值面和梯度场 712
13.10.3 向量场的散度 712
13.10.4 向量场的旋度 713
13.10.5 管量场和有势场 713
13.10.6 Hamilton 四元数和Hamilton 算子 715
13.11 * 调和函数 717
13.11.1 * 平均值性质 718
13.11.2 * 基本解 724
13.11.3 * 内梯度估计和 Harnack 估计 731
13.11.4 * 能量方法 737
13.12 * Navier-Stokes 方程简介 741

13.12.1 * 有界区域上的流体 741
13.12.2 * 外面区域上的流体 741
13.12.3 * 无界区域上的流体 741
13.13 参考文献 741

第十四章 多变量级数理论 745

14.1 函数项级数和函数列 745
14.1.1 收敛域 745
14.1.2 函数列和函数项级数的基本问题与一致收敛 749
14.1.3 一致收敛的判别法 753
14.2 一致收敛级数的性质 762
14.2.1 连续性 762
14.2.2 可积性 765
14.2.3 可导性 767
14.2.4 常微分方程基本定理 770
14.3 幂级数 772
14.3.1 幂级数收敛域 773
14.3.2 幂级数基本性质 781
14.3.3 Taylor 级数再探和初等函数的幂级数展开 790
14.3.4 * Fibonacci 数列 801
14.4 * Tauberian 理论简介 804
14.4.1 * 发散级数 805
14.4.2 * 级数求和的一般定义 809
14.4.3 * 求和的正则性问题 812
14.4.4 * Tauberian 理论 813
14.4.5 * Sine 积分函数 814
14.5 参考文献 817

第十五章 含参变量积分 821

15.1 含参变量定积分 821
15.1.1 含参变量定积分的定义 822
15.1.2 含参变量定积分的基本性质 822
15.2 含参变量广义积分 829
15.2.1 含参变量广义积分的一致收敛 830
15.2.2 含参变量广义积分的一致收敛的判别法 832
15.2.3 含参变量广义积分的基本性质 839
15.3 * 二探 Euler 积分 848
15.3.1 * Ramanujan 不等式 852
15.3.2 * Gamma 函数和Riemann ζ- 函数 857

15.3.3 * Gamma 函数和Hausdorff 维数 859
15.4 * 三探 Γ, Ψ, Φ 函数和Mellin 变换 864
15.4.1 * $\mathbb{R}^+$ 上的调和函数 869
15.4.2 * Ψ 和 Φ 函数 884
15.4.3 * Γ 函数的 Euler 定义 893
15.4.4 * Euler 和 Weierstrass 乘积公式 895
15.4.5 * $\Gamma(z)$ 的渐近展开 898
15.5 * 模形式 908
15.5.1 * k 权模形式 909
15.5.2 * k 权 Eisenstein 级数和尖点形式 910
15.6 参考文献 912

第十六章 Fourier 级数 **915**
16.1 Fourier 级数展开 915
16.1.1 平方可积函数空间和正交函数系 915
16.1.2 2π 周期函数的 Fouorier 展开 917
16.1.3 正弦级数和余弦级数 919
16.1.4 任意周期函数的 Fourier 展开 920
16.1.5 任意区间上函数的 Fourier 展开 921
16.2 Fourier 级数的收敛判别法 924
16.2.1 Fourier 级数的唯一性 926
16.2.2 卷积 928
16.2.3 * 好核 931
16.2.4 Riemann 引理 936
16.2.5 Fourier 级数的逐点收敛定理 937
16.2.6 * Fourier 级数的一致收敛性 941
16.2.7 几个反例 944
16.2.8 * Gibbs 现象 947
16.3 $\mathbb{R}$ 上的 Fourier 变换 950
16.3.1 适度递减函数 951
16.3.2 Fourier 变换 952
16.3.3 * $\mathbb{R}$ 上的热核 959
16.3.4 Poisson 求和公式 961
16.3.5 * Theta 和 zeta 函数 963
16.3.6 * $\mathbb{S}^1$ 上的热核 963
16.3.7 * Heisenberg 不确定原理 965
16.4 Fourier 级数的性质 967
16.4.1 Fourier 级数的分析性质 967
16.4.2 Fourier 级数的平方逼近性质 968

16.5 * 等周不等式 973
16.5.1 弧长和面积 973
16.5.2 等周不等式 974
16.6 * 大筛法简介及在孪生素数猜想中的应用 976
16.6.1 * 大筛法的解析形式 977
16.6.2 * 大筛法的算术形式 985
16.6.3 * 大筛法的应用 988
16.7 参考文献 989

第四部分　数学分析后续：高等分析初步　993

第十七章　Fourier 分析　995

第十八章　实分析　997

第十九章　复分析　999

第二十章　泛函分析　1001

第五部分　数学分析后续：拓扑学初步　1003

第二十一章　范畴理论　1005

第二十二章　基本群　1007

第二十三章　微分流形　1009

第二十四章　代数拓扑　1011

第六部分　数学分析后续：微分几何学初步　1013

第二十五章　Riemann 流形　1015

第二十六章　复流形　1017

第二十七章　Riemann 曲面　1019

第二十八章　Einstein 方程　1021

第七部分　数学分析后续：Lie 群初步　1023

第二十九章　群论和 **Galois** 理论　1025

第三十章　拓扑群与 **Lie** 群　1027

第三十一章　$\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ 上的分析　1029

第三十二章　**Poincaré** 模型　1031

第八部分　数学分析后续：模形式初步　1033

第三十三章　模形式和 Eisenstein 级数　1035

第三十四章　Hecke 算子　1037

第三十五章　L 函数　1039

第三十六章　Galois 表示　1041

第九部分　数学分析后续: (待补充)　1043

第一章　序

心即理也. 天下又有心外之事, 心外之理乎? · · · 若只是温清之节、奉养之宜, 可一日二日讲之而尽, 用得甚学问思辨? 惟于温清时, 也只要此心纯乎天理之极: 奉养时, 也只要此心纯乎天理之极. 此则非有学问思辨之功, 将不免于毫厘千里之谬, 所以虽在圣人, 尤加「精一」之训. 若只是那些仪节求得是当, 便谓至善, 即如今扮戏子, 扮得许多温清奉养的仪节是当, 亦可谓之至善矣? —-《传习录》理学编卷一

§1.1　前言

数学分析是大学一年级的基础课程, 在不同的院系也常称为高等数学亦或冠以各种前缀的数学分析. 这门课程目前为止已有不少优秀的古今中外教材, 即有名家大师写的专著, 也有不少滥竽充数的所谓"教材". 有些知识点编书者没有搞懂, 却东抄西抄不加消化理解地乱写一气, 对学生很不负责任. 编写教材, 鄙人认为有以下几点需要注意:

其一, 参考优秀教材是不可避免地, 但是要有自己的特色和特点. 从而每本教材的选材其实体现了编书者的个人爱好和教学理念.

其二, 要有自己的特点和特色不是乱写胡写, 而是要编书者不仅教书要教的好而且科研也要做的好, 这样不仅可以告诉学生数学分析中哪些部分需要学习后续课程才能得到深刻理解和自我升华, 而且可以把最新最好的前沿数学以数学分析这种大一学生可以接受的方式让学生开阔学术眼界和提高学问品味.

其三, 要适当增加大一学生可以听懂的而又很重要的数学知识点, 这样可以把后续课程甚至研究生课程有机地联系起来.

其四, 标注所参考的文献, 而且最好写上原始出处, 便于学生阅读大师的原文和养成严谨的治学态度.

有鉴于此, 数学分析课程的所谓"改革"是不可避免地, 但是这改革却不是通常意义下的"教改". 这令我想起了李文忠公在前清光绪二十四年七月二十日[1]上的《裁并官职折》, 从中摘抄几句如下[2]:

· · · 近日臣工条奏, 多以裁汰冗员为言, 虽未必尽可准行, 而参酌情形, 实亦有亟当改革者. · · · 百度事务繁多, 度支岁入有常, 岂能徒供无用之冗费, 至碍当务之急需. · · · 惟归并之后, 事既更张, 有同新创; 其中头绪繁多, 一切事宜, 非仓猝所能遽定. 庶名虽改而实犹存, 不致冒昧从事, 致滋贻误, · · ·

[1]西元 1898 年 9 月 5 日, 这一年诞生了周恩来、彭德怀、刘少奇、叶企孙、朱自清等, 而俾斯麦、奕䜣、谭嗣同等去世.

[2]雷颐 著: 李鸿章与晚清四十年(增订版), 山西人民出版社, 2019.

要真正做到"改革"目前数学分析课程的教材和教法, 确实不是一件容易的事. 当然国内已经有同行前辈做了不少有益的尝试, 比如北京大学张筑生教授写的《数学分析新讲》, 清华大学陈天权教授写的《数学分析讲义》, 南京大学梅加强教授写的《数学分析》, 当然还有国内不少优秀的教材在这里就不一一举例说明.

本讲义部分内容是鄙人当初在上海交通大学时候给数学系大二学生和安泰经管学院大一新生 (非常感谢两个班级的学生) 上数学分析课的讲稿, 现在将这些讲稿和本次讲义融合而成目前的分析初稿.

本稿试图把上面提到的四点淋漓尽致地体现出来, 但是鉴于鄙人水平有限而不可能面面俱到, 笔误和纰漏在所难免, 烦请各位同仁与同学批评和斧正.

李逸
西元二零一九年六月
提笔于南京鸡笼山成贤街东南大学 DSW 斋内

牢骚太盛防肠断, 风物长宜放眼量. 莫道昆明池水浅, 观鱼胜过富春江. — 毛泽东, 《七律 · 和柳亚子先生》, 一九四九年四月二十九日.

且苟能发奋自立, 则家塾可读书, 即旷野之地, 热闹之场, 亦可读书, 负薪牧豕, 皆可读书. 苟不能发奋自立, 则家塾不宜读书, 即清净之乡, 神仙之境, 皆不能读书, 何必择地? 何必择时? 但自问立志之真不真耳. — 曾国藩, 《家书 · 与弟书》, 道光二十二年十月二十六日.

§1.2 使用说明

说明(2019): 由于东南大学首届理科实验班采用的教材是数学学院张福保、薛金美两位教授编写的《数学分析讲义》(或参考张福保、薛金美、潮小李三位教授编写的《数学分析讲义》, 科学出版社 2019 年出版), 所以本讲义中传统数学分析部分 (除了少数外) 的标题就按照张、薛书上的标题, 主要是为了方便学生. 其它小标题就按照作者的意愿来体现.

说明(2020): 本年度给东南大学首届强基计划班(物理和化学方向)上数学分析课, 虽然不是给数学方向学生上课, 但还是以国外著名大学数学系一年级本科生水平来要求自己和学生. 因此在2019年度讲义的基础上, 增加了不少新的内容(必读和选读均有, 比如复数、群环域初步、测度论初步、复变函数初

步、$\mathbb{R}^n$ 上Lebesgue 积分初步等), 也对原来表述模糊地方作了修改. 另外, 本年度上课没有固定教材, 以我这个讲义为主, 辅以些好的参考书.

习题说明: 从第2版开始, 在每章末附上习题. 市面上有很多关于数学分析的教材和习题参考书, 本讲义的所有习题, 如没有特别说明(如果习题是来源于论文, 则会在该习题做好脚注, 比如**注4.8.2** (8)), 均来自每章的参考文献和下列习题参考书:

- 华东师范大学数学科学学院 编:《数学分析》, 第五版(上、下册), 高等教育出版社, 2019.
- 陈纪修, 於崇华, 金鹿 编:《数学分析》, 第三版(上、下册), 高等教育出版社, 2019.
- 陈天权 编著:《数学分析讲义》, (第一、二、三册), 高等教育出版社, 2012.
- 常庚哲, 史济怀 编:《数学分析教程》, (上、下册), 高等教育出版社,2013.
- 崔国忠 主编; 石金娥, 郭从洲 副主编:《数学分析》, (一、二、三), 科学出版社, 2018.
- 邓建平 编:《微积分》, (I、II), 科学出版社, 2019.
- 杜其奎, 陈金如, 谢四清, 徐晓立 编著:《数学分析精读讲义》, (上、下册), 科学出版社, 2013.
- 费定晖, 周学圣 编演; 郭大钧, 邵品琮 主审:《吉米多维奇数学分析习题集题解》, 第四版(1、2、3、4、5、6), 山东科学技术出版社, 2018.
- 李傅山, 王培合 编著:《数学分析习题课讲义》, (1、2、3), 北京大学出版社, 2018.
- 林元渠, 方企勤 编:《数学分析解题指南》, 北京大学出版社, 2018.
- 梅加强 编著:《数学分析》, 第二版, 高等教育出版社, 2020.
- 上海交通大学数学系数学分析课程组 编:《大学数学数学分析》, (上、下册), 高等教育出版社, 2012.
- 孙兵, 毛京中 主编:《工科数学分析》, (上、下册), 机械工业出版社, 2019.
- 孙清华, 孙昊 编:《数学分析疑难分析与解题方法》, (上、下), 华中科技大学出版社, 2009.
- 徐森林, 薛春华 编著:《数学分析》, (第一、二、三册), 清华大学出版社, 2015.

- 杨世藩 编著:《数学分析技巧》, (上、下册), 科学出版社, 2016.
- 杨小远, 孙玉泉, 薛玉梅, 杨卓琴 编著:《工科数学分析教程》, 修订版(上、下册), 科学出版社,2015.
- 张福保, 薛星美, 潮小李 编:《数学分析讲义》, (第一、二、三册), 科学出版社, 2019.
- 张筑生 编著:《数学分析新讲》, (第一、二、三册), 北京大学出版社, 2014.
- 赵显曾 编著:《微积分教程》, (上、下册), 东南大学出版社, 2003.
- 周民强 编著:《数学分析习题演练》, 第二版(第一、二、三册), 科学出版社, 2018.
- 朱尧辰 编著:《数学分析例选通过范例学技巧》, 哈尔滨工业大学出版社, 2013.
- 朱尧辰 编著:《数学分析范例选解》, 第二版, 中国科学级数大学出版社, 2019.

目前本讲义暂时不会正式出版, 因为好的讲义需要时间积累和具体教学实践来打磨. 我会放在自己主页上供大家免费使用:

https://math.seu.edu.cn/ly/list.htm

说明: 目前的版本是已经把数学分析部分写完, 至于其它部分以后会陆续逐一添加.

§1.3 符号和常用记号说明

数域说明. $\mathbb{N}$ 表示为所有自然数之集合 (亦包含 0), 而 $\mathbb{N}^*$ 表示所有非零自然数之集合. 整数域, 有理数域, 实数域, 复数域分别表示为 $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$. 对给定的数域 $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$, 符号 $\mathbb{F}_+$ 或 $\mathbb{F}_{>0}$ 表示 $\mathbb{F}$ 中大于零的元素构成的集合, 同样地我们可以定义 $\mathbb{F}_{\geq 0}, \mathbb{F}_{>0}$ 或 $\mathbb{F}_{<0}$, 和 $\mathbb{F}_{\leq 0}$.

所有素数的集合记为 $\mathbb{P}$. 复数域 $\mathbb{C}$ 中的元素表示为 $z = x + \mathbf{i}y$, 其中 $\mathbf{i}$ 是虚根 $\sqrt{-1}$, $x = \mathrm{Re}(z)$ 和 $y = \mathrm{Im}(z)$ 分别为复数 z 的实部和虚部. z 的共轭记为 $\bar{z} = x - \mathbf{i}y$. 复数 z 的模记为 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$.

字体说明. 对流形或抽象的空间我们用拉丁大写字母的 “mathcal 型” 来表示, 比如 $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{X}$ 等. 抽象空间之间的映射用拉丁大写字母的 “mathbf 型” 来表示, 比如 $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$ 等. 泛函映射用拉丁大写字母的 “mathscr 型” 来表示, 比

如 $\mathscr{L}, \mathscr{I}, \mathscr{J}$ 等.

人名表示说明. 本讲义中出现的外国人名均采用相应的英文人名来标识, 比如Sobolev (索伯列夫), Euler (欧拉) 等. 华人人名均用中文来标识, 并在其后附上相应的英文. 比如, 著名数学大师丘成桐教授, 其英文为Shing-Tung Yau (按照英文惯例, 名在前, 姓在后). 从而依照这个说明, 应该写成丘成桐 (Shing-Tung Yau). 又比如著名的几何学家李伟光 (Peter Li), 郑绍远 (Shiu Yuen Cheng) 等. 由于港澳台 (亦包括 49 年之前的国人和侨居海外的华人) 人名的英文发音和汉语拼音发音不甚相似, 所以这些人名均采用上述之说明, 即中文加英文, 比如, 陈省身 (Shiing Shen Chern), 周炜良 (Wei-Liang Chow), 胡明复 (Minfu Tah Hu) 等. 而大陆的学者, 就直接写出对应的中文名字, 比如, 华罗庚, 苏步青, 冯康, 吴文俊等.

其它符号说明. 定理、性质、推论、引理、猜想、问题和重要内容用蓝色显示, 而人名用红色显示. 证明结束用符号 □ 来表示.

数学家和数学史部分内容取材于

https://baike.baidu.com,

https://en.wikipedia.org,

https://zh.wikipedia.org,

所以在参考文献中就不再列出这三个网站了. 再次感谢百度百科和维基百科!

* 表示较难的章节, 可在第二遍时仔细琢磨; 但是作者强烈鼓励读者按照顺序阅读下来, 你会发现数学乐趣.

§1.4 作者声明

本讲义是作者多年来教学与科研的心得和体会, 非常愿意与诸君分享. 在未正式出版之前, 诸位可在本人主页上免费下载.

讲义中不可避免的有纰漏和笔误, 请读者批评斧正, 这样可以让我更加的完善本讲义. 由于这是作者的第一本中文讲义, 如有语句不通顺的地方, 也请读者批评指正.

本人的常用联系邮箱如下:

yilicms@seu.edu.cn

yilicms@gmail.com

yilicms@163.com

最后以王阳明先生的名句, 也是本讲义的宗旨, 来结束这一节的内容:

知行合一.

§1.5 预备知识 I: 集合与映射

本节将中学里的集合和映射做了些适当的加深. 首先回顾下常用的记号:

- $\varnothing$: "空集"
- $\forall$: "任意"
- $\exists$: "存在"
- $\nexists$: "不存在"
- $\exists!$: "存在且唯一"
- $A \Rightarrow B$: "A 推出 B"
- $A \Leftrightarrow B$: "A 和 B 等价"
- $A := B$: "A 由 B 定义"
- $n!$: "自然数 n 的阶乘, 即 $1 \times 2 \times 3 \cdots \times n$"
- $(2n)!!$: "偶数 $2n$ 的双阶乘, 即 $2 \times 4 \times 6 \cdots \times 2n = 2^n n!$"
- $(2n+1)!!$: "奇数 $2n+1$ 的双阶乘, 即 $1 \times 3 \times 5 \cdots \times 2n+1$"
- $\binom{n}{k}$: "组合数 $n!/k!(n-k)!$, $0 \leq k \leq n$"
- $\lfloor x \rfloor$: "实数 x 的整数部分"
- $\langle x \rangle$: "实数 x 的小数部分, 即 $x - \lfloor x \rfloor$"

给定一个集合 A, 其**幂集 (power set)** 定义为

$$2^A := \{A \text{ 的所有子集}\}.$$

根据定义显然有 $A \in 2^A, \varnothing \in 2^A, \{x\} \in 2^A$ 对所有$x \in A$ 都成立, 故2^A 必不是空集. 又比如易证, $2^{\varnothing} = \{\varnothing\}, 2^{\{\varnothing\}} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, 和

$$2^{\{\clubsuit, \diamondsuit\}} = \{\varnothing, \{\clubsuit\}, \{\diamondsuit\}, \{\clubsuit, \diamondsuit\}\}.$$

给定集合 A 和 B, 定义如下几个集合运算:

- 集合 A 和 B 的**并** (**union**):

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

- 集合 A 和 B 的**交** (**intersection**):

$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

- 集合 A 关于 B 的**差集** (**complement of A in B**):

$$A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\}.$$

- 集合 A 和 B 的**对称差** (**symmetric complement**):

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

假设 A 是全集 I 的子集, 则 I 关于 A 的差集称为 A 的**余集** (**complement of A**) 并记为

$$\complement_I(A) := A^{\complement} = I \setminus A.$$

在高中时期, 我们知道如何用**文氏图** (**Venn diagrams**) 来表示集合间的关系. 请诸位用文氏图来表示集合A 和B 在全集I 中的对称差.

假设A, B, C 是全集I 中的集合, 根据定义立即得到

(i) (**交换律** (commutativity)) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

(ii) (**结合律** (associativity)) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(iii) (**分配律** (distributivity)) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(iv) $A \subseteq B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A$.

(v) (**De Morgan 法则** (De Morgan's law)) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

(vi) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$,$A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$.

(vii) $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$.

§1.5.1 集合的任意并和交

假设A 是非空集合, 对每个$\alpha \in \mathsf{A}$ 令A_α 是一集合. 称$\mathscr{A} := \{A_\alpha : \alpha \in \mathsf{A}\}$ 为**集族** (**family of sets**) 并称A 是这个集族的**指标集** (**index set**).

令X 是一集合且$\mathscr{A}$ 是由X 的子集所构成的集族. 我们定义集族$\mathscr{A}$ 的并和交:

(1) **并(union)**:

$$\bigcup_{\alpha\in\mathsf{A}} A_\alpha \equiv \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A := \{x : x \in A \text{ 存在某个 } A \in \mathscr{A}\}.$$

(2) **交(intersection)**:

$$\bigcap_{\alpha\in\mathsf{A}} A_\alpha \equiv \bigcap_{A\in\mathscr{A}} A := \{x : x \in A \text{ 对任意 } A \in \mathscr{A}\}.$$

当 $\mathscr{A} = \emptyset$ 是空集时, 定义 $\cup_{A\in\mathscr{A}} A := \emptyset$. 当$\mathsf{A} = \{1, \cdots, n\}$ 时, 我们此时把上述并和交记为$\cup_{1\le i\le n} A_i$ 和$\cap_{1\le i\le n} A_i$.

易证对任何集合X 都有

$$\bigcup_{A\in 2^X} A = X, \quad \bigcap_{A\in 2^X} = \emptyset.$$

假设$\mathscr{A} = \{A_\alpha | \alpha \in \mathsf{A}\}$ 和$\mathscr{B} = \{B_\beta | \beta \in \mathsf{B}\}$ 是由集合X 的子集所构成的集族, 则

(i) **(结合律) (associativity)**

$$\bigcap_{\alpha\in\mathsf{A}} A_\alpha \cap \bigcap_{\beta\in\mathsf{B}} B_\beta = \bigcap_{(\alpha,\beta)\in\mathsf{A}\times\mathsf{B}} A_\alpha \cap B_\beta, \quad \bigcup_{\alpha\in\mathsf{A}} \cup \bigcup_{\beta\in\mathsf{B}} B_\beta = \bigcup_{(\alpha,\beta)\in\mathsf{A}\times\mathsf{B}} A_\alpha \cup B_\beta.$$

(ii) **(分配律) (distributivity)**

$$\bigcap_{\alpha\in\mathsf{A}} A_\alpha \cup \bigcap_{\beta\in\mathsf{B}} B_\beta = \bigcap_{(\alpha,\beta)\in\mathsf{A}\times\mathsf{B}} A_\alpha \cup B_\beta, \quad \bigcup_{\alpha\in\mathsf{A}} A_\alpha \cap \bigcup_{\beta\in\mathsf{B}} B_\beta = \bigcup_{(\alpha,\beta)\in\mathsf{A}\times\mathsf{B}} A_\alpha \cap B_\beta.$$

(iii) **(De Morgan 法则) (De Morgan's laws)**

$$\left(\bigcap_{\alpha\in\mathsf{A}} A_\alpha\right)^{\mathsf{C}} = \bigcup_{\alpha\in\mathsf{A}} A_\alpha^{\mathsf{C}}, \quad \left(\bigcup_{\alpha\in\mathsf{A}} A_\alpha\right)^{\mathsf{C}} = \bigcap_{\alpha\in\mathsf{A}} A_\alpha^{\mathsf{C}}.$$

这里乘积$\mathsf{A} \times \mathsf{B}$ 的定义见下一节.

§1.5.2 集合的 Cartesian 乘积: I

假设 A, B 是两个给定的集合. 我们定义它们的笛卡尔乘积.

(1) **Cartesian 乘积(Cartesian product)**:

$$A \times B := \{(a,b) : a \in A \text{ 且 } b \in B\}.$$

这里的符号 (a,b) 表示 a 和 b 的有序对，其定义如下.

(2) **有序对(ordered pair)**:

$$(a,b) := \{\{a\},\{a,b\}\}.$$

这里 a 称为有序对的**第一坐标**而 b 称为有序对的**第二坐标**. 当 $a = b$ 时, $(a,b) = \{a\}$. 对$x = (a,b) \in A \times B$, 定义**投影映射**

$$\mathrm{pr}_1(x) = a, \quad \mathrm{pr}_2(x) = b.$$

如果$A = \{a,b\}$ 和$B = \{i,j,k\}$, 则得到

$$A \times B = \{(a,i),(b,i),(a,j),(b,j),(a,k),(b,k)\}.$$

易证$A \times B \neq B \times A$ 和

$$A \times B = \emptyset \iff A = \emptyset \text{ 或 } B = \emptyset.$$

两个集合的Cartesian 乘积可推广到n 个集合的Cartesian 乘积:

$$\prod_{1 \le i \le n} X_i \equiv X_1 \times \cdots \times X_n := (X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n.$$

如果$x \in X_1 \times \cdots \times X_n$, 我们用$(x^1, \cdots, x^n)$ 来记

$$(\cdots((x^1,x^2),x^3),\cdots,x^n)$$

并称$x^i := \mathrm{pr}_i(x)$ 是x 的**第i 个分量**. 当所有X_i 都等于X 时, 上述乘积记为X^n.

§1.5.3 映射

假设 C 和 D 是两个给定的集合.

(1) 一个**赋值法则(rule of assignment)** R 是指满足条件

$$(c,d) \in R \text{ 和 } (c,d') \in R \implies d = d'$$

的 $C \times D$ 的子集.

(2) 假设 R 是一个赋值法则. 令其**定义域(domain)** 和**像域(image set)** 如下

$$\begin{aligned}\mathbf{Dom}(R) &\equiv R\ \textbf{的定义域} &:=& \{c\in C:\exists\, d\in D \text{ 使得 } (c,d)\in R\},\\ \mathbf{Im}(R) &\equiv R\ \textbf{的像域} &:=& \{d\in D:\exists\, c\in C \text{ 使得 } (c,d)\in R\}.\end{aligned}$$

一个**映射(mapping)** f 是指一个二元对 (R,B), 其中 R 是一个赋值法则, B 是一个集合 (称为 f 的**值域(range)**), 满足 $\mathbf{Im}(R)\subseteq B$.

(1) f **的定义域** $\equiv \mathbf{Dom}(f) := \mathbf{Dom}(R)$.

(2) f **的像域** $\equiv \mathbf{Im}(f) := \mathbf{Im}(R)$.

(3) 我们引入记号:

$$f: A\longrightarrow B,\quad a\longmapsto f(a),$$

这里 A 是 f 的定义域, B 是 f 的值域（从而 $\mathbf{Im}(f)\subseteq B$）, $f(a)$ 是 B 中满足条件 $(a,f(a))\in R$ 的唯一元素.

(4) f 的**图(graph)**定义为

$$\mathbf{graph}(f) := \{(a,b)\in A\times B|b=f(a)\} = \{(a,f(a))|a\in A\}.$$

例1.5.1. (1) 假设 $C=D=\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, $R=\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{\geq 0}$, $B=R$. 此时 $A=\mathbb{R}$, $\mathbf{Im}(f)=\mathbb{R}_{\geq 0}$.

(2) 假设 $C=D=\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$, $R=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $B=R$. 此时 $A=\mathbb{R}$, $\mathbf{Im}(f)=\mathbb{R}$.

(3) **恒等映射(identity mapping)** $\mathbf{1}_A: A\to A$, $a\mapsto a$.

(4) **常值映射(constant mapping)** $f: A\to B$, $a\mapsto b$, 这里b 是事先给定的.

考虑两个映射 $f:A\to B$ 和 $g:B\to C$.

(1) 对任意给定的 A 的子集 A_0, 定义f **在** A_0 **上的限制(restriction)** 为映射

$$f|_{A_0} = f: A_0\longrightarrow B.$$

(2) f 和 g 的**复合(composition)**:

$$g\circ f: A\longrightarrow C,\quad a\longmapsto c,$$

这里 $f(a)=b$ 和 $g(b)=c$ 对某个 $b\in B$ 成立.

显然 $g\circ f$ 仅当 $\mathbf{Im}(f)\subseteq\mathbf{Dom}(g)$ 时有定义. 注意到 $f\circ g$ 和 $g\circ f$ 一般是不相等, 比如,

$$f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\quad f(x):=3x^2+2,\quad g(x):=5x.$$

则 $(f\circ g)(x)=75x^2+2$ 和 $(g\circ f)(x)=15x^2+10$.

给定映射 $f:A\to B$.

(1) f 是**单射(injective)** 如果

$$f(a)=f(a') \implies a=a'.$$

(2) f 是**满射(surjective)** 如果

$$\forall\, b\in B\ \exists\, a\in A \text{ 满足 } f(a)=b.$$

(3) f 是**双射(bijective)** 如果 f 既是单的又是满的.

(4) 若 f 是双射, 我们定义它的**逆映射(inverse)** f^{-1} 如下

$$f^{-1}(b)=a \iff f(a)=b.$$

引理1.5.2. *给定映射 $f:A\to B$. 如果存在 f 的***左逆(left inverse)** *$g:B\to A$(即 $g(f(a))=a$ 对所有 $a\in A$ 都成立) 和 f 的***右逆(right inverse)** *$h:B\to A$(即 $f(h(b))=b$ 对所有 $b\in B$ 都成立), 则 $g=h=f^{-1}$.*

给定映射 $f:A\to B$ 和子集 $A_0\subseteq A, B_0\subseteq B$.

(1) A_0 在 f 下的**像集(image)** $\equiv f(A_0):=\{f(a):a\in A_0\}$.

(2) B_0 在 f 下的**原像集(preimage)** $\equiv f^{-1}(B_0):=\{f(a):a\in A_0\}$. 特别地, 如果 $B=\{b\}$, 则符号 $f^{-1}(b):=f^{-1}(\{b\})$ 一般情形下不再是一个单元素集; 如果 f 本身是双射, 此时符号 $f^{-1}(b)$ 与之前的定义一样.

(3) 下列包含关系显然成立:

$$A_0\subseteq f^{-1}(f(A_0)),\quad B_0\supseteq f(f^{-1}(B_0)).$$

我们可以找到例子来说明上述包含关系可以严格取到, 即等号不一定成立:

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\quad x\longmapsto 3x^2+2$$

和 $A_0=[0,1], B_0=[0,5]$; 则得到

$$f^{-1}(f(A_0))=[-1,1]\supsetneqq A_0,\quad f(f^{-1}(B_0))=[2,5]\subsetneqq B_0.$$

如果在映射定义中 B 是一个数域, 那么我们把映射称为**函数**.

练习1.5.3. (1) 假设 $\{A_\lambda\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是全集 I 中的一族子集. 证明

$$\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right)^C = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha^C, \quad \left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right)^C = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha^C.$$

(2) 对任意集合 A, B, C, D, 证明

$$(A\times B)\cup(C\times D) = (A\cup C)\times(B\cup D),$$

$$(A\times B)\cap(C\times D) = (A\cap C)\times(B\cap D),$$

$$A\times(B\setminus C) = (A\times B)\setminus(A\times C),$$

$$(A\setminus B)\times(C\setminus D) = ((A\times C)\setminus(B\times C))\setminus(A\times D),$$

$$(A\times B)\setminus(C\times D) = (A\setminus C)\times(B\setminus D).$$

(3) 证明若 f 有左逆, 则 f 是单射; 若 f 有右逆, 则 f 是双射.
(4) 给出存在左逆但不存在右逆的映射的例子.
(5) 给定的映射可以有多个左逆或右逆吗?
(6) 证明**引理** 1.5.2.
(7) 下列 $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 中的子集是否可以写成 $A\times B$, $A, B\subset\mathbb{R}$:

- $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in\mathbb{Z},\ y\in\mathbb{R}\}$,
- $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in\mathbb{R},\ 0<y\le 1\}$,
- $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$.

(8) 假设 $f: A\to B$ 是映射, 且 $A_0, A_1\subset A$ 和 $B_0, B_1\subset B$. 证明

- $B_0\subset B_1 \Longrightarrow f^{-1}(B_0)\subset f^{-1}(B_1)$,
- $f^{-1}(B_0\cup B_1) = f^{-1}(B_0)\cup g^{-1}(B_1)$,
- $f^{-1}(B_0\cap B_1) = f^{-1}(B_0)\cap f^{-1}(B_1)$,
- $f^{-1}(B_0\setminus B_1) = f^{-1}(B_0)\setminus f^{-1}(B_1)$,
- $A_0\subset A_1 \Longrightarrow f(A_0)\subset f(A_1)$,
- $f(A_0\cup A_1) = f(A_0)\cup f(A_1)$,
- $f(A_0\cap A_1) \subset f(A_0)\cap f(A_1)$,
- $f(A_0\setminus A_1) \supset f(A_0)\setminus f(A_1)$.

(9) 假设$f: A\to B$ 是映射, 且$A_\alpha\subseteq X$ 和$B_\beta\subseteq Y$. 证明

- $f(\cup_{\alpha\in A}A_\alpha) = \cup_{\alpha\in A}f(A_\alpha)$,
- $f(\cap_{\alpha\in A}A_\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha\in A}f(A_\alpha)$,
- $f^{-1}(\cup_{\beta\in B}B_\beta) = \cup_{\beta\in B}f^{-1}(B_\beta)$,
- $f^{-1}(\cap_{\beta\in B}B_\beta) = \cap_{\beta\in B}f^{-1}(B_\beta)$.

§1.5.4 * 范畴

范畴(category) $\mathfrak{C}$ 由如下要素所构成:

1) $\mathfrak{C}$ 中的**对象(object)** 构成类 $\mathbf{Ob}(\mathfrak{C})$,
2) 对 $\mathbf{Ob}(\mathfrak{C})$ 中的任意对象 X, Y, 存在集合 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Y)$(称为 X 到 Y 的**态射(morphism)**),
3) 对 $\mathbf{Ob}(\mathfrak{C})$ 中的任意对象 X, Y, Z, 存在**复合映射(composition)**
$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Y)\times\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y,Z)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Z),\quad (f,g)\longmapsto g\circ f.$$

这些要素满足条件

(a) $(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$,

(b) 对任意 $X\in\mathbf{Ob}(\mathfrak{C})$ 存在 $\mathrm{id}_X\in\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,X)$ 使得
$$f\circ\mathrm{id}_X = f,\quad \mathrm{id}_X\circ g = g$$
对任意 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Y)$ 和 $g\in\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y,X)$ 都成立.

例1.5.4. 下面是一些经典的范畴.

(1) **Set**: 集合和映射

(2) **Vect**$_{\mathbb{R}}$: 实向量空间和实线性映射 (高等代数中)

(3) **Group**: 群和群同态 (抽象代数中)

(4) **Top**: 拓扑空间和连续映射 (拓扑学中)

(5) **Calabi-Yau 范畴**: 微分几何/代数几何 $\rightsquigarrow$ 同调镜像对称/SYZ 猜想.

范畴和如下定义的函子、自然变换最早是由Eilenberg 和MacLane 引入的[3].

假设 $\mathfrak{C}$ 是范畴.

[3]Eilenberg, Samuel; MacLane, Saunders. *Relations between homology and homotopy group of spaces*, Ann. of Math., (2)**46**(1945), 480 - 509.

(1) 通常把态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Y)$ 记作 $f: X \to Y$.

(2) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Y)$ 称为**同构(isomorphism)** 若存在 $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y,X)$ 满足

$$f \circ g = \mathrm{id}_Y \quad 和 \quad g \circ f = \mathrm{id}_X.$$

(3) $\mathfrak{C}'$ 称为 $\mathfrak{C}$ 的**子范畴(subcategory)** 如果 $\mathfrak{C}'$ 本身是范畴并满足下列条件

- $\mathbf{Ob}(\mathfrak{C}') \subseteq \mathbf{Ob}(\mathfrak{C})$,
- $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}'}(X,Y) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Y)$ 对任意 $X, Y \in \mathbf{Ob}(\mathfrak{C}')$ 都成立,
- $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}'}(X,X)$ 对每个 $X \in \mathbf{Ob}(\mathfrak{C}')$ 都成立.

称 $\mathfrak{C}'$ 是 $\mathfrak{C}$ 的**全子范畴(full subcategory)** 如果它本身是子范畴并且对任意二元组 (X,Y) 都有 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}'}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Y)$ 成立.

(4) **Top** 是 **Set** 的子范畴, 但不是全子范畴.

(5) $\mathfrak{C}$ 的**相反范畴(opposite category)** $\mathfrak{C}^\circ$ 定义如下:

$$\mathbf{Ob}(\mathfrak{C}^\circ) := \mathbf{Ob}(\mathfrak{C}), \quad \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^\circ}(X,Y) := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y,X).$$

(6) 令 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Y)$.

- f 是**单态射(monomorphism)** 如果对任意对象 $W \in \mathbf{Ob}(\mathfrak{C})$ 和任意态射 $g, g' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(W,X)$ 满足 $f \circ g = f \circ g'$, 都有 $g = g'$.

$$W \underset{g'}{\overset{g}{\longrightarrow}} X \overset{f}{\longrightarrow} Y$$

- f 是**满态射(epimorphism)** 如果对任意对象 $Z \in \mathbf{Ob}(\mathfrak{C})$ 和任意态射 $h, h' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y,Z)$ 满足 $h \circ f = h' \circ f$, 都有 $h = h'$.

$$X \overset{f}{\longrightarrow} Y \underset{h'}{\overset{h}{\longrightarrow}} Z$$

- f 是**双态射(bimorphism)** 如果它即是单的又是满的.

(7) $P \in \mathbf{Ob}(\mathfrak{C})$ 是**始的(initial)** 如果对任何 $Y \in \mathbf{Ob}(\mathfrak{C})$, 集合 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P,Y)$ 只包含一个元素. $Q \in \mathbf{Ob}(\mathfrak{C})$ 是**终的(final)** 如果对任何 $X \in \mathbf{Ob}(\mathfrak{C})$, 集合 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Q)$ 只包含一个元素.

练习1.5.5. (1) 证明两个始 (或终) 对象必同构.
*(2) 证明同构必是双的, 但反之则不一定成立.

范畴之间的**(共变) 函子((covariant) functor)** $F: \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ 由如下要素构成:

1) 映射 $F: \mathbf{Ob}(\mathfrak{C}) \to \mathbf{Ob}(\mathfrak{C}')$,

2) 对 $\mathbf{Ob}(\mathfrak{C})$ 中任意 X, Y 存在映射 $F: \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}'}(F(X), F(X'))$.

这些要素满足条件

a) $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$, 和

b) $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.

类似地, 定义**反变函子(contravariant functor)** $G: \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ 为函子 $G: \mathfrak{C}^{\circ} \to \mathfrak{C}'$.

例1.5.6. (1) **遗忘函子** $F: \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$. 即把拓扑空间 X 映成集合 X.

(2) **基本群函子** $\pi_1: \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Group}$, $(X, x) \mapsto \pi_1(X, x)$($X$ 在 x 的基本群). 这里 $\mathbf{Top}_*$ 表示由带基点的拓扑空间 (X, x) 所构成, 其中两个对象 (X, x) 和 (Y, y) 间的态射定义为保基点的连续映射.

(3) 任给 $X \in \mathbf{Ob}(\mathfrak{C})$, 定义

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, \cdot): \mathfrak{C} \longrightarrow \mathbf{Set}, \quad Z \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Z),$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\cdot, X): \mathfrak{C} \longrightarrow \mathbf{Set}, \quad Z \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Z, X).$$

则

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, \cdot) \text{ 是共变的而 } \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\cdot, X) \text{ 是反变的.}$$

考察两个函子 $F_1, F_2 : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$. 函子之间的**态射(morphism)** 或**自然变换(natural transformation)** $\theta: F_1 \to F_2$ 构成如下:

$$X \in \mathbf{Ob}(\mathfrak{C}) \Longrightarrow \theta(X) \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}'}(F_1(X), F_2(X)).$$

这些要素使得下面的图

$$\begin{array}{ccc} F_1(X) & \xrightarrow{\theta(X)} & F_2(X) \\ {\scriptstyle F_1(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_2(f)} \\ F_1(Y) & \xrightarrow[\theta(Y)]{} & F_2(Y) \end{array} \qquad F_2(f) \circ \theta(X) = \theta(Y) \circ F_1(f),$$

可交换, 即, $F_2(f) \circ \theta(X) = \theta(Y) \circ F_1(f)$, $\forall\, X, Y \in \mathbf{Ob}(\mathfrak{C})$, $\forall\, f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)$.

定义1.5.7. 给定范畴 $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'$, 定义新的范畴 $\mathbf{Func}(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}')$ 如下:

$$\mathbf{Ob}\left(\mathbf{Func}(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}')\right) := \{\text{函子 } F: \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'\}$$

和

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Func}(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}')}(F_1, F_2) := \{\text{态射 } \theta: F_1 \to F_2\}.$$

定义1.5.8. 假设 $\mathfrak{C}$ 是范畴. 称函子 $F:\mathfrak{C}\to\mathbf{Set}$ 是**可表的(representable)** 若存在对象 $X\in\mathbf{Ob}(\mathfrak{C})$ 使得 F 在 $\mathbf{Func}(\mathfrak{C},\mathbf{Set})$ 中和 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,\cdot)$ 同构.

注1.5.9. 如果 $F:\mathfrak{C}\to\mathbf{Set}$ 是可表的, 则 X 在同构意义下是唯一的并把它称为 F 的**表示(representative)**.

定义1.5.10. 称函子 $F:\mathfrak{C}\to\mathfrak{C}'$ 是**完全忠实的(fully faithful)** 如果对任意 $X,Y\in\mathbf{Ob}(\mathfrak{C})$, 映射 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Y)\to\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}'}(F(X),F(Y))$ 都是双的.

定理1.5.11. (Yoneda 引理) (1) 对任意 $X\in\mathbf{Ob}(\mathfrak{C})$ 和 $F\in\mathbf{Ob}(\mathfrak{C}^{\vee})$, 这里 $\mathfrak{C}^{\vee}:=\mathbf{Func}(\mathfrak{C}^{\circ},\mathbf{Set})$, 下面同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^{\vee}}(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X),F)\simeq F(X)$$

在 $\mathbf{Set}$ 中成立, 这里 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}:\mathfrak{C}\to\mathfrak{C}^{\vee}$ 是函子定义为 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X):=\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\cdot,X)$.

(2) $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}$ 是完全忠实函子.

证: (1) 对每个 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^{\vee}}(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X),F)$, 赋予 $\phi(f)\in F(X)$ 如下:

$$f(X):\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,X)\longrightarrow F(X),\quad \mathrm{id}_X\longmapsto\phi(f):=f(X)(\mathrm{id}_X).$$

反之, 对每个 $s\in F(X)$, 赋予 $\psi(s)\in\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^{\vee}}(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X),F)$ 如下:

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y,X)\xrightarrow{\ F\ }\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(F(X),F(Y))\xrightarrow{\ s\ }F(Y)$$

这里 $\psi(s)(Y):=s\circ F$. 故 ϕ 和 ψ 互为逆同态.

(2) 对任意 $X,Y\in\mathbf{Ob}(\mathfrak{C})$, 下列同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^{\vee}}(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X),\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y))\simeq\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\cdot,Y)(X)=\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Y)$$

推出 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}$ 是完全忠实的. □

§1.5.5 关系

集合 A 上的**关系(relation)** 是指 $A\times A$ 的子集 C. 如果 C 是 A 的关系, 则 $(x,y)\in C$ 记作 xCy.

集合 A 上的**等价关系(equivalence relation)** 是指 A 上的关系 C 并满足如下性质:

a) (**自反性(Reflexivity)**) $\forall\, x\in A\implies xCx$,

b) (**对称性(Symmetry)**) $xCy\implies yCx$,

c) (**传递性(Transitivity)**) xCy 和 $yCz\implies xCz$.

记号: 用 $\sim$ 来表示等价关系.

(1) $x \in A$ 的**等价类(equivalence class)**:

$$[x] := \{y \in A : y \sim x\} \ni x.$$

(2) 两个等价类要么不相交要么完全相等. 因此

$$A = \bigcup \{[x] : x \in A\}.$$

A 的所有等价类记为$X/\sim := \{[x] : x \in A\}$.

(3) 集合 A 的**剖分(partition)** 是指 A 的一些互不相交的非空子集构成的集族且这些子集的并是 A. 如果$\sim$ 是等价关系, 则$X/\sim$ 是一个剖分.

(4) 给定 A 的一个剖分 $\mathscr{D}$, 则存在 A 上的由该剖分诱导出来的等价关系 $\sim$.

实际上, 定义 A 上的关系 $\sim$ 为 $x \sim y$ 当且仅当 x, y 都属于 $\mathscr{D}$ 中的某个元素. 易证 $\sim$ 是 A 上的等价关系.

A 上的关系 C 称为**序关系(order relation)** 或**简单序(simple order)** 或**线性序(linear order)**, 如果它满足如下性质:

a) (**相容性(Comparability)**) $\forall\, x, y \in A$ 且 $x \neq y \Longrightarrow$ 要么 xCy 要么 yCx,

b) (**非自反性(Nonreflexivity)**) 不存在 $x \in A$ 使得 xCx 成立,

c) (**传递性(Transitivity)**) xCy 和 $yCz \Longrightarrow xCz$.

记号: 用 $<$ 表示序关系.

(1) 等价地说:

  a) $x \neq y \Longrightarrow$ 要么 $x < y$ 要么 $y < x$,

  b) $x < y \Longrightarrow x \neq y$,

  c) $x < y$ 和 $y < z \Longrightarrow x < z$.

(2) $x \leq y$ 是指 $x < y$ 或 $x = y$.

(3) 假设 $(X, <)$ 是**有序集(ordered set)**, 即 X 上存在一个序关系 $<$. 对 $a < b$, 定义 X 中的**开区间(open interval)** 为

$$(a, b) := \{x \in X : a < x < b\}.$$

如果 $(a, b) = \emptyset$, 称 a 是 b 的**直接前位点(immediate predecessor)** 而把 b 称为 a 的**直接后位点(immediate successor)**.

(4) 考察两个有序集 $(A, <_A)$ 和 $(B, <_B)$. 称 A 和 B 有相同的**序型(order type)** 如果集合之间存在保序的双射. 也就是说, 存在双射 $f: A \to B$ 满足

$$a_1 <_A a_2 \Longrightarrow f(a_1) <_B f(a_2).$$

比如, $((-1,1), <)$ 和 $(\mathbb{R}, <)$ 有相同的序型 $(x \mapsto \frac{x}{1-x^2})$; $(\{0\} \cup (1,2), <)$ 和 $([0,2), <)$ 有相同的序型 (考虑映射: $0 \mapsto 0$, 和 $x \mapsto x-1$ 若 $1 < x < 2$).

(5) 假设 $(A, <_A)$ 和 $(B, <_B)$ 是两个有序集. 定义 $A \times B$ 上的序关系 $<$ 如下:

$$(a_1, b_1) < (a_2, b_2)$$

若 $a_1 <_A a_2$ 或者若 $a_1 = a_2$ 但 $b_1 <_B b_2$. 这种序关系称为**字典序关系(dictionary order relation)**.

假设 $(A, <)$ 是有序集, A_0 是 A 的子集.

(1) b 是 A_0 的**最大数(largest element)** 如果 $b \in A_0$ 且 $x \leq b$ 对任何 $x \in A_0$ 都成立. a 是 A_0 的**最小数(smallest element)** 如果 $a \in A_0$ 且 $a \leq x$ 对任何 $x \in A_0$ 都成立.

(2) A_0 是**有上界的(bounded above)** 如果存在 $b \in A$ 使得 $x \leq b$ 对任意 $x \in A_0$ 都成立. 称 b 是 A_0 的一个**上界(upper bound)**. 令

$$\sup(A_0) := \ A_0 \text{ 的所有上界中的最小元}$$

为 A_0 的**最小上界(least upper bound)** 或者**上确界(supremum)**.

A_0 是**有下界的(bounded below)** 如果存在 $a \in A$ 使得 $a \leq x$ 对任意 $x \in A_0$ 都成立. 称 a 是 A_0 的一个**下界(lower bound)**. 令

$$\inf(A_0) := \ A_0 \text{ 的所有下界中的最大元}$$

为 A_0 的**最大下界(greatest lower bound)** 或者**下确界(infimum)**.

(3) 称有序集 $(A, <)$ 满足**最小上界性质(least upper bound property)** (或简记**LUBP**) 如果 A 的任何非空有上界子集 A_0 有最小上界. 类似地, $(A, <)$ 满足**最大下界性质(greatest lower bound property)** (或简记**GLBP**) 如果 A 的任何非空有下界子集 A_0 有最大下界.

注意到**LUBP** $\Leftrightarrow$ **GLBP**.

集合 $B := (-1,0) \cup (0,1)$ 不可能满足最小上界性质 (请验证!), 而集合 $\{n\cos(n\pi) : n \in \mathbb{N}\}$ 即没有上界也没有下界.

集合 A 上的关系 $\prec$ 称为**严格偏序(strict partial order)** 如果它满足下面性质:

1) **(非自反性(Nonreflexivity))** $a \prec a$ 不可能成立,

2) **(传递性(Transitivity))** $a \prec b$ 和 $b \prec c \Rightarrow a \prec c$.

平面 $\mathbb{R}^2$ 上存在自然的严格偏序 $\prec$:

$$(x_0, y_0) \prec (x_1, y_1) \iff y_0 = y_1 \text{ 且 } x_0 < x_1.$$

集合 A 上的关系 $\preceq$ 称为**偏序(partial order)** 如果它满足下面性质:

1) **(自反性(Reflexivity))** $a \preceq a$ 对任意$a \in A$ 都成立,

2) **(反对称性(Antisymmetry))** $a \preceq b$ 和$b \preceq a \Rightarrow a = b$,

3) **(传递性(Transitivity))** $a \preceq b$ 和 $b \preceq c \Rightarrow a \preceq c$.

如果$(A, \prec)$ 是严格偏序集, 定义$a \preceq b$ 如果$a \prec b$ 或者$a = b$. 则$\preceq$ 是A 上的偏序.

假设$\preceq$ 是A 上的偏序. 如果进一步有

$$\forall\, a, b \in A \implies a \preceq b \text{ 或 } b \preceq a,$$

则称$\preceq$ 是A 上的**全序(total order)**, 并称$(A, \preceq)$ 为**全序集(totally order set)**.

假设 $(A, \prec)$ 是**严格偏序集(strictly partially ordered set)**, 即 $\prec$ 是 A 上的一个严格偏序.

(1) 若 $B \subseteq A$, B 的**上界(upper bound)** 是 A 中的元素 c 使得对任何 $b \in B$, 要么 $b = c$ 要么 $b \prec c$.

(2) A 的**最大元(maximal element)** 是 A 中的元素 m 使得不存在 A 中的元素 a 满足 $m \prec a$.

(3) **Zorn 引理(Zorn's lemma)** (1935):

> 假设集合 A 上有一个严格偏序. 如果 A 的任何简单序子集在 A 中都有上界, 则 A 必有最大元.

Zorn 引理的一个简单应用如下: 考察集合 $A = \{a_n\}_{n \geq 1}$ 这里 $a_i \in \mathbb{R}$ 且 $|a_i| \leq M$ 对某个正数 M 成立. 从而 $(A, <)$ 是严格偏序集. 根据 Zorn 引理, A 有最大元.

一般地, 考察函数数列 $f(x,t)$, 这里 $|f(x,t)| \leq M$ 对任意 $x \in [0,1]$ 和 $t \in \mathbb{R}$ 都成立. 对每个 $x \in [0,1]$, 定义集合

$$A_x := \{f(x,t)\}_{t \in \mathbb{R}}.$$

则 A_x 有最大元 $f(x)$. 故得到映射

$$f:[0,1]\longrightarrow A:=\bigcup_{x\in[0,1]}A_x,\quad x\longmapsto f(x).$$

一个很自然的问题是研究函数 $f(x)$ 的性质.

§1.5.6 集合的 Cartesian 乘积: II

假设 $\mathscr{A}$ 是非空集族. $\mathscr{A}$ 的**指标映射(indexing function)** 是指从某个集合 J 到 $\mathscr{A}$ 的满射映射 f. 这个集合 J 称为**指标集(index set)**.

(1) $(\mathscr{A},f)$ 称为**集合的指标类(indexed family of sets)**.

(2) 给定 $\alpha\in J$, 把集合 $f(\alpha)\in\mathscr{A}$ 记作 A_α, 并把集合的指标类记作 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$.

(3) 定义

$$\begin{aligned}\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha &:= \{x:\exists\,\alpha\in J\text{ 使得 }x\in A_\alpha\},\\ \bigcap_{\alpha\in J}A_\alpha &:= \{x:\forall\,\alpha\in J,\ x\in A_\alpha\}.\end{aligned}$$

(4) 若 $J=\{1,\cdots,n\}$, 把 (3) 写成

$$\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha=\bigcup_{1\le i\le n}A_i,\quad \bigcap_{\alpha\in J}A_\alpha=\bigcap_{1\le i\le n}A_i.$$

(5) 若 $J=\mathbb{Z}_{\ge1}$, 把 (3) 写成

$$\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha=\bigcap_{i\ge1}A_i,\quad \bigcap_{\alpha\in J}A_\alpha=\bigcap_{i\ge1}A_i.$$

假设 $m\in\mathbb{N}$. 给定集合 X, 定义 X 的**m- 数组(m-tuple)** 为函数

$$\boldsymbol{x}:\{1,\cdots,m\}\longrightarrow X$$

对每个 $i\in\{1,\cdots,m\}$, 记

$$\boldsymbol{x}(i):=x_i,$$

并称为**$\boldsymbol{x}$ 的 i- 坐标(i-th coordinate of $\boldsymbol{x}$)**, 和 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_m)$.

(1) 假设 $\{A_1,\cdots,A_m\}$ 是由集合 $\{1,\cdots,m\}$ 作为指标集的集合类. 令

$$X:=A_1\cup\cdots\cup A_m.$$

定义这个指标类的**Cartesian 乘积(Cartesian product)**, 写作

$$\prod_{1\le i\le m} A_i,$$

为由 X 的满足 $x_i \in A_i, 1 \le i \le m$, 的所有 m- 数组 $(x_1, \cdots, x_m)$ 构成的集合.

注1.5.12. (1) $A \times B$ 现在有两种不同的定义:

$$\begin{aligned} A \times_1 B &:= \{(a,b) : a \in A \text{ 和 } b \in B\}, \\ A \times_2 B &:= \{\boldsymbol{x} : \{1,2\} \to A \cup B \text{ 满足 } \boldsymbol{x}(1) \in A \text{ 和 } \boldsymbol{x}(2) \in B\}. \end{aligned}$$

可以证明这两种定义实际上是等价的. 定义双射映射

$$f : A \times_1 B \longrightarrow A \times_2 B, \quad (a,b) \longmapsto f((a,b))$$

这里 $f((a,b))(1) = a$ 和 $f((a,b))(2) = b$. 由于 f 是双的, $A \times_1 B \cong A \times_2 B$.

(2) 对集合 A, B, C, 有三种互相等价的 Cartesian 乘积

$$A \times (B \times C), \quad (A \times B) \times C, \quad A \times B \times C.$$

特别地, 对每个 $m \ge 1$ 可定义 Cartesian 乘积 A^m.

给定集合 X, 定义 X 的**ω- 数组(ω-tuple)** 为映射

$$\boldsymbol{x} : \mathbb{Z}_{\ge 1} \longrightarrow X, \quad n \longmapsto x_n := \boldsymbol{x}(n),$$

并记作 $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n\ge 1}$. 假设 $\{A_i\}_{i\in\mathbb{Z}_{\ge 1}}$ 是指标集为正整数的集合类. 令

$$X := \bigcup_{i\in\mathbb{Z}_{\ge 1}} A_i.$$

$\{A_i\}_{i\in\mathbb{Z}_{\ge 1}}$ 的**Cartesian 乘积(Cartesian product)**, 记作

$$\prod_{i\in\mathbb{Z}_{\ge 1}} A_i,$$

定义为由 X 的满足 $x_i \in A_i$ 的所有 ω- 数组 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_{\ge 1}}$ 构成的集合.

一般地, 令 J 是指标集, X 是集合.

(1) X 的**J- 数组(J-tuple)** 是指映射

$$\boldsymbol{x} : J \longrightarrow X, \quad \alpha \longmapsto x_\alpha := \boldsymbol{x}(\alpha),$$

这里 x_α 称为**$\boldsymbol{x}$ 的 α- 坐标(α-coordinate of $\boldsymbol{x}$)**. 记 $\boldsymbol{x} = (x_\alpha)_{\alpha\in J}$.

(2) 引入

$$X^J := \{X \text{ 的 } J\text{- 数组}\}.$$

(3) 假设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是集合的指标类, $X := \cup_{\alpha\in J} A_\alpha$. $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 的**Cartesian 乘积(Cartesian product)**, 记作

$$\prod_{\alpha\in J} A_\alpha,$$

定义为由 X 的满足 $x_\alpha \in A_\alpha$ 的所有 J- 数组 $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ 构成的集合.

当 X_n 都是 $\mathbb{R}$, 得到

$$\mathbb{R}^\omega := \prod_{n\geq 1} X_n.$$

§1.5.7 有限集、可数集和不可数集

在这小节我们研究集合

$$\{0,1\}^\omega := \prod_{n\geq 1} X_n$$

这里 $X_n := \{0,1\}$.

定义1.5.13. 集合 A 称为**有限的(finite)**, 如果它要么是空集, 要么存在 A 和某个集合 $\{1,\cdots,n\}$ 之间的双射. 当 $A=\emptyset$ 时, 称 A 是**基数 0(cardinality 0)**, 否则称 A 是**基数 n(cardinality n)**.

引理1.5.14. *假设 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, A 是非空集合, $a_0\in A$. 存在 A 和 $\{1,\cdots,n+1\}$ 之间的双射 f 当且仅当存在 $A\setminus\{a_0\}$ 和 $\{1,\cdots,n\}$ 之间的双射 g.*

证: $\Leftarrow$: 定义映射 $f: A\to\{1,\cdots,n+1\}$ 为

$$f(a_0) := n+1, \quad f(x) := g(x)\ (x\neq a_0).$$

$\Rightarrow$: 若 $f(a_0)=n+1$, 则定义 $g := f|_{A\setminus\{a_0\}}$. 现在假设 $f(a_0)=m\in\{1,\cdots,n\}$, 令 $a_1\in A$ 为满足 $f(a_1)=n+1$ 的元素. 则必有 $a_1\neq a_0$. 定义映射 $h: A\setminus\{a_0\}\to\{1,\cdots,n\}$ 为 $h(a_1)=m$ 和 $h(x):=f(x)(x\neq a_1)$. □

定理1.5.15. *令 A 是集合, 并假设存在双射 $f: A\to\{1,\cdots,n\}$ (对某个 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$). 若 B 是 A 的真子集, 则不存在双射 $g: B\to\{1,\cdots,n\}$, 但是 (只要 $B\neq\emptyset$) 存在双射 $h: B\to\{1,\cdots,m\}$ (对某个 $m<n$).*

证: 不失一般性, 不妨假设 $B\neq\emptyset$. 我们利用数学归纳法证明这个定理. 当 $n=1$, $A=\{a\}$, $B=\emptyset$. 假设该定理对 n 成立. 令 $f: A\to\{1,\cdots,n+1\}$ 为双射, B 是 A 的非空真子集. 取 $a_0\in B$ 和 $a_1\in A\setminus B$. 根据**引理**1.5.14, 存在双射 $g: A\setminus\{a_0\}\to\{1,\cdots,n\}$. 由于 $B\setminus\{a_0\}$ 是 $A\setminus\{a_0\}$ 的真子集, 归纳假设推出不存在双射 $h: B\setminus\{a_0\}\to\{1,\cdots,n\}$, 且要么 $B\setminus\{a_0\}=\emptyset$ 要么存在双射 $k: B\setminus\{a_0\}\to\{1,\cdots,m\}$ (对某个 $m<n$). 再次应用**引理**1.5.14 得到定理对 $n+1$ 也成立. □

推论1.5.16. (1) 若 A 有限, 则不存在 A 与它真子集之间的双射.

(2) $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 不是有限集.

(3) 有限集 A 的基数由 A 唯一确定.

(4) 有限集的任何子集都是有限的. 如果 B 是有限集 A 的真子集, 则 B 的基数严格小于 A 的基数.

(5) $B \neq \emptyset \Rightarrow$ 下面断言等价:

(i) B 是有限的,

(ii) 存在满映射从某个 $\{1, \cdots, n\}$ 到 B,

(iii) 存在单映射从 B 到某个 $\{1, \cdots, n\}$.

(6) 有限集的有限并和有限 Cartesian 乘积都是有限的.

证: (1) 假设 B 是 A 的真子集且存在双射 $f : A \to B$. 因为 A 是有限的, 存在双射 $g : A \to \{1, \cdots, n\}$. 从而 $g \circ f^{-1} : B \to \{1, \cdots, n\}$ 是双射, 但这是不可能的!

(2) 定义映射 $f : \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{Z}_{\geq 1} \setminus \{1\}$ 为 $f(n) := n + 1$. 因为 $\mathbb{Z}_{\geq 1} \setminus \{1\}$ 是真子集且 f 是双的, 从 (1) 得到 $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 不可能是有限的.

(3) 假设 $f : A \to \{1, \cdots, n\}$ 和 $g : A \to \{1, \cdots, m\}$ 都是双的, 这里 $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. 故 $g \circ f^{-1} : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, m\}$ 是双的从而 $m = n$.

(4) 显然.

(5) $(i) \Rightarrow (ii)$: 显然. $(ii) \Rightarrow (iii)$: 假设 $f : \{1, \cdots, n\} \to B$ 是满的. 定义 $g : B \to \{1, \cdots, n\}$ 为

$$g(b) := f^{-1}(\{b\}) \text{ 中的最小元.}$$

若 $b \neq b'$, $f^{-1}(\{b\}) \cap f^{-1}(\{b'\}) = \emptyset$, 所以 g 是单的. $(iii) \Rightarrow (i)$: 假设 $g : B \to \{1, \cdots, n\}$ 是单的. 则存在某个 $m \leq n$ 使得 $g : B \to \{1, \cdots, m\}$ 是双的. 从而 B 是有限的.

(6) 假设 A 和 B 都是有限的而且都是非空的. 存在双射 $f : \{1, \cdots, m\} \to A$ 和 $g : \{1, \cdots, n\} \to B$, 对某些 m 和 n. 定义

$$h : \{1, \cdots, m+n\} \longrightarrow A \cup B, \quad i \longmapsto \begin{cases} f(i), & 1 \leq i \leq m, \\ g(i-m), & m+1 \leq i \leq m+n. \end{cases}$$

由于 h 是满的, 根据 (5) 得到 $A \cup B$ 是有限的. 归纳假设可证明有限集的有限并也是有限的.

从下列关系

$$A \times B := \bigcup_{a \in A} \{a\} \times B$$

得到 $A \times B$ 从而有限集的有限 Cartesian 乘积都是有限的. □

不巧的是, 有限集的无限 Cartesian 乘积是很复杂的. 我们需要以下定义.

定义1.5.17. (1) 集合 A 称为**无限的(infinite)** 如果他不是有限的. A 称为**无限可数的(countably infinite)** 如果存在双射 $f : A \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

(2) 集合 A 称为**可数的(countable)** 如果它要么是有限的要么是无限可数的. A 称为**不可数的(uncountable)** 如果它不是可数的.

有些书上把**定义**1.5.17 中的无限可数的称为可数的, 而把可数的称为**至多可数的(at most countable)**.

定理1.5.18. $B \neq \emptyset \Longrightarrow$ 下列断言等价:

(a) B 是可数的,

(b) 存在满映射 $f : \mathbb{Z}_{\geq 1} \to B$,

(c) 存在单映射 $g : B \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

证: $(a) \Rightarrow (b)$: 显然.

$(b) \Rightarrow (c)$: 令 $f : \mathbb{Z}_{\geq 1} \to B$ 是满的. 定义 $g : B \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 为 $g(b) := f^{-1}(\{b\})$ 中的最小元.

$(c) \Rightarrow (a)$: 令 $g : B \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 为单的. 则存在 B 与 $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 的某个子集之间的双射. 因此只要证明 $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 的每个子集都是可数的 (见**引理**1.5.19). □

引理1.5.19. 如果 C 是 $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 的无限子集, 则 C 是无限可数的.

证: 定义双射 $h : \mathbb{Z}_{\geq 1} \to C$ 如下. 记 $h(1)$ 为 C 中的最小元. 假设 $h(1), \cdots, h(n-1)$ 已经定义, 令

$$h(n) := C \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq n-1} h(i) \text{ 中的最小元.}$$

断言 1: h **是单的**. 若 $m < n$, 则 $h(m) \in h(\{1, \cdots, n-1\})$ 从而 $h(m) \neq h(n)$.

断言 2: h **是满的**. 取 $c \in C$. h 是单映射推出 $h(\mathbb{Z}_{\geq 1})$ 是无限的而且 $h(n) > c$ 对某个 $c \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 成立. 令

$$m := \mathbb{Z}_{\geq 1} \text{ 中满足 } h(m) \geq c \text{ 的最小元.}$$

对每个 $i = 1, \cdots, m-1$, 有 $h(i) < c$ 从而 $c \in C \setminus \cup_{1 \leq i \leq m-1} h(i)$. 根据 $h(m)$ 的定义, 必有 $h(m) \leq c$. 因此 $h(m) = c$. □

推论1.5.20. (1) 可数集的子集也是可数的.

(2) $\mathbb{Z}_{\geq 1} \times \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 是无限可数的.

证: (1) 假设 $A \subseteq B$ 且 B 是可数的. 根据**定理** 1.5.18, 存在单映射 $f: B \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$. 故 $f|_A : A \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 也是单的, 从而 A 是可数的.

(2) 因为 $\mathbb{Z}_{\geq 1} \times \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 是无限集, 只要构造单映射 $f: \mathbb{Z}_{\geq 1} \times \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$. 定义

$$f(n,m) := 2^n 3^m.$$

若 $f(n,m) = f(p,q)$, 则 $2^n 3^m = 2^p 3^q$. 若 $n < p$, 则 $3^m = 2^{p-n} 3^q$, 矛盾! 所以 $n = p$ 且 $m = q$. □

定理1.5.21. (1) 可数集的可数并是可数的.

(2) 可数集的有限 Cartesian 乘积是可数的.

(3) $\{0,1\}^\omega$ 是不可数的.

(4) 给定集合 A. 则不存在单映射 $f: 2^A \to A$ 和满映射 $g: A \to 2^A$.

(5) $2^{\mathbb{Z}_{\geq 1}}$ 是不可数的.

证: 观察到 (5) 可由 (4) 和**定理** 1.5.18 得到.

(1) 假设 $\{A_n\}_{n \in J}$ 是可数集的指标类, 这里指标集 J 要么是 $\{1, \cdots, N\}$ 要么是 $\mathbb{Z}_{\geq 1}$. 假设每个集合 $A_n \neq \emptyset$. 根据**定理** 1.5.18, 存在满映射 $f_n : \mathbb{Z}_{\geq 1} \to A_n$ 和 $g: \mathbb{Z}_{\geq 1} \to J$. 定义

$$h: \mathbb{Z}_{\geq 1} \times \mathbb{Z}_{\geq 1} \longrightarrow \bigcup_{n \in J} A_n, \quad (k,m) \longmapsto f_{g(k)}(m).$$

则 h 是满映射.

(2) 不失一般性, 只要证明两个可数集 A 和 B 的 Cartesian 乘积是可数的. 就像在 (1) 中一样, 存在满映射 $f: \mathbb{Z}_{\geq 1} \to A$ 和 $g: \mathbb{Z}_{\geq 1} \to B$. 定义 $h: \mathbb{Z}_{\geq 1} \times \mathbb{Z}_{\geq 1} \to A \times B$ 为 $h(m,n) := (f(m), g(n))$.

(3) 令 $X = \{0,1\}$. 对任意给定的映射 $g: \mathbb{Z}_{\geq 1} \to X^\omega$, 断言 g 不可能是满的. 记

$$g(n) := (x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \cdots, x_{nn}, \cdots), \quad x_{ij} \in \{0,1\}.$$

定义 $\boldsymbol{y} := (y_i)_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}}$ 为

$$y_n := \begin{cases} 0, & x_{nn} = 1, \\ 1 & x_{nn} = 0. \end{cases}$$

则 $\boldsymbol{y} \in X^\omega$ 但是 $\boldsymbol{y} \notin g(\mathbb{Z}_{\geq 1})$.

(4) 只要证明给定映射 $g: A \to 2^A$, g 不可能是满的 (因为单映射的存在性可以推出满映射的存在性). 定义

$$B := \{a \in A : a \in A \setminus g(a)\} \in 2^A.$$

假设 $g(a_0) = B$. 故

$$a_0 \in B \iff a_0 \in A \setminus g(a_0) \iff a_0 \in A \setminus B.$$

所以 g 不是满的. □

练习1.5.22. (1) 实数 x 称为**代数的(algebraic)** 如果它满足多项式方程（该多项式次数为正）

$$0 = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{Q}.$$

假设每个多项式方程只有有限多个根, 证明代数数集合是可数的.

(2) 一个实数称为**超越的(transcendental)** 如果它不是代数的. 假设 $\mathbb{R}$ 是不可数的, 证明超越数集合是不可数的（比如 e, π 都是超越数）.

练习1.5.23. 称两个集合 A 和 B 有**相同基数(have the same cardinality)** 如果 A 和 B 之间存在双射.

(1) 假设 $B \subseteq A$ 并假设存在双射 $f: A \to B$, 证明 A 和 B 有相同基数. [提示: 定义 $A_1 := A$, $B_1 := B$, 且对任意 $n \geq 2$, $A_n := f(A_{n-1})$, $B_n := f(B_{n-1})$. 则 $A_1 \supseteq B_1 \supseteq A_2 \supseteq B_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$. 令

$$h: A \longrightarrow B, \quad x \longmapsto \begin{cases} f(x), & \text{if } x \in A_n \setminus B_n \text{ 对某个 } n, \\ x, & \text{其它情形.} \end{cases}$$

则可完成证明.]

(2) **(Schroeder-Berstein 定理)** 如果存在单映射 $A \to B$ 和 $B \to A$, 则 A 和 B 有相同基数.

§1.5.8 数学归纳法和* 递推定义

最早使用数学归纳法可能是Euclid 在证明他的著名定理中, 即素数个数是无限多的. 数学归纳法的显示表达最早是Pascal 在其著作《Traité du triangle arithmétique》(1665)中给出的. 经过George Boole, Augustus de Morgan, Charles Sanders Peirce, Giuseppe Peano, Richard Dedekind 等数学家的贡献, 数学归纳法的现在形式出现在了19世纪.

第一数学归纳法或数学归纳法(mathematical induction principle)是说, 假设命题¥(n) 对$n = n_0$ 成立, 并且对每个$n \geq n_0$ 命题¥$(n+1)$ 可由¥(n) 证明, 则命题¥(n) 对所有$n \geq n_0$ 都成立.

第二数学归纳法是说, 假设命题¥(n) 对$n = n_0$ 成立, 并且对每个$n \geq n_0$ 命题¥$(n+1)$ 可由¥$(n_0), \cdots,$¥(n) 证明, 则命题¥(n) 对所有$n \geq n_0$ 都成立.

例1.5.24. 用数学归纳法证明:

- $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$, 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 和任意 $x \in \mathbb{R}$.
- **Bernoulli 不等式:** $(1+x)^n \geq 1 + nx$, 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 和任意 $x \geq -1$. 作为应用证明 $\sqrt[n]{2} - 1 < \frac{1}{n}$, $n > 1$.
- $n! \leq [(n+1)/2]^n$, 对任意 $n \in \mathbb{N}$.

- 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 有

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n+2}{\sqrt{6}}\right)^n, \quad n < \left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

- 对任意$n \in \mathbb{N}_*$ 有

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

- 证明对任何$n \in \mathbb{N}$, 7 可整除$1+2^{2^n}+2^{2^{n+1}}$.

- 著名的美国数学家M. I. Stake"利用数学归纳法给出"了Thomas Jefferson 的名言"人人生来皆平等"(all men are created equal) 的证明. 类似的版本比如Joel E. Cohen 给出的著名悖论"所有马都是同色的"(all horses are the same color). 证明上述名言等价于证明下面这个断言:

  假设 M 是全世界所有人构成的有限集且 $a,b \in M$, 则 a 和 b 必平等.

  证明: 如果M 只包含一个人, 则断言显然成立. 假设断言对所有由n 个人构成的集合都成立, 令M 是由$n+1$ 个人构成的集合并任取$a,b \in M$. 定义$M_a := M \setminus \{a\}$ 和$M_b := M \setminus \{b\}$. 取$c \in M_a \cap M_b$. 因为$a,c \in M_b$, 根据归纳假设a 和c 平等; 同理得到b 和c 也平等. 因此得到a 和b 平等. □

  你能发现错在什么地方吗?

定义1.5.25. 映射$\diamond : X \times X \to X$ 通常也称为集合X 上的**运算(operation)**. 此时我们把$\diamond(x,y)$ 记作$x \diamond y$. 对X 中的非空子集A 和B, 定义

$$A \diamond B := \diamond(A \times B) = \{a \diamond b : a \in A,\ b \in B\}.$$

X 中的非空子集A 称为**在运算$\diamond$ 下是封闭的(closed under the operation $\diamond$)**, 如果$A \diamond A \subseteq A$.

X 上的运算$\diamond$ 是**结合的(associative)** 如果

$$x \diamond (y \diamond z) = (x \diamond y) \diamond z, \quad x,y,z \in X.$$

此时我们上述就简记为$x \diamond y \diamond z$.

X 上的运算$\diamond$ 是**交换的(commutative)** 如果

$$x \diamond y = y \diamond x, \quad x,y \in X.$$

令$\diamond$ 是集合X 上的运算. 元素$e \in X$ 称为X 上的**单位元(identity element)** 如果

$$e \diamond x = x \diamond e = x, \quad x \in X.$$

例1.5.26. (1) 如果X 是集合, 则复合映射$\circ$ 是$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X,X)$ 上的运算.

(2) 集合并$\cup$ 和交$\cap$ 运算是集合X 的幂集2^X 上的结合和交换运算.

(3) Id_X 是$(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X,X),\circ)$ 上的单位元, $\varnothing$ 是$(2^X,\cup)$ 上的单位元, 而X 是$(2^X,\cap)$ 上的单位元.

(4) 当集合X 的元素至少有两个时, $(2^X\setminus\{\varnothing\},\cup)$ 没有单位元.

(5) $(X,\diamond)$ 最多只有一个单位元.

假设$\diamond$ 是集合Y 上的运算, X 是非空集合. 此时在$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X,Y)$ 定义**诱导运算(induced operation)** 如下:

$$(f\diamond g)(x):=f(x)\diamond g(x),\quad x\in X.$$

显然$(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X,Y),\diamond)$ 的结合性和交换性完全取决于$(Y,\diamond)$ 的结合性和交换性. 如果$(Y,\diamond)$ 有单位元e, 则常值映射$X\mapsto Y$, $x\mapsto e$, 是$(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X,Y),\diamond)$ 的单位元.

例1.5.27. 假设$\diamond$ 是集合X 上的结合运算. 则X 中的元素、括号和运算$\diamond$ 所组成的任何表达式, 都和括号的位置无关. 比如

$$(a_1\diamond a_2)\diamond(a_3\diamond a_4)=((a_1\diamond a_2)\diamond a_3)\diamond a_4=a_1\diamond(a_2\diamond(a_3\diamond a_4)).$$

证明的想法是把所有可能的表达式都写成某个标准形式. 受到a_1,a_2,a_3,a_4 的启发, 这个标准表达式可选为$((a_1\diamond a_2)\diamond a_3)\diamond a_4$. 对任意$n\geq 3$, 记$K_n$ 为某个长度为n 的表达式, 即, 包含n 个元素$a_1,\cdots,a_n\in X$, $n-1$ 和运算符号$\diamond$ 和若干个括号. 利用第二数学归纳法我们将证明

$$K_n=(\cdots(a_1\diamond a_2)\diamond a_3)\diamond\cdots)\diamond a_{n-1})\diamond a_n,\quad n\geq 3.$$

首先假设

$$K_k=(\cdots(a_1\diamond a_2)\diamond a_3)\diamond\cdots)\diamond a_{k-1})\diamond a_k$$

对所有长度为$k\in\{3,\cdots,n\}$ 的表达式K_k 都成立. 令K_{n+1} 为一个长度为$n+1$ 的表达式, 则存在$\ell,m\in\mathbb{N}$ 满足$\ell+m=n+1$ 和表达式K_ℓ,K_m 满足$K_{n+1}=K_\ell\diamond K_m$.

如果$m=1$, 则此时$\ell=n$ 和$K_m=a_{n+1}$. 根据归纳假设得到

$$K_\ell=(\cdots(a_1\diamond a_2)\diamond a_3)\cdots)\diamond a_n.$$

从而有$K_{n+1}=((\cdots(a_1\diamond a_2)\diamond a_3)\cdots)\diamond a_n)\diamond a_{n+1}$.

如果$m>1$, 则根据归纳假设K_m 可表示成$K_m=K_{m-1}\diamond a_{n+1}$ 故得到

$$K_{n+1}=K_\ell\diamond(K_{m-1}\diamond a_{n+1})=(K_\ell\diamond K_{m-1})\diamond a_{n+1}.$$

但是$K_\ell\diamond K_{m-1}$ 是长度为n 的表达式, 再次根据归纳假设得到

$$K_\ell\diamond K_{m-1}=(\cdots(a_1\diamond a_{12})\diamond a_3)\cdots)\diamond a_n.$$

最后得到$K_{n+1}=((\cdots(a_1\diamond a_2)\diamond a_3)\cdots)\diamond a_n)\diamond a_{n+1}$.

利用数学归纳法, 我们给出**递推定义(recursive definition)** 的证明.

定理1.5.28. *假设X 是非空集合, $a \in X$. 对每个$n \in \mathbb{N}_*$ 令$V_n : X^n \to X$ 是一映射. 则存在唯一的映射$f : \mathbb{N} \to X$ 满足如下性质:*

(i) $f(0) = a$,

(ii) $f(n+1) = V_{n+1}(f(0), f(1), \cdots, f(n))$, $n \in \mathbb{N}$.

证: 首先来证明唯一性. 假设$f, g : \mathbb{N} \to X$ 满足$f(0) = g(0) = a$ 和

$$f(n+1) = V_{n+1}(f(0), \cdots, f(n)), \quad g(n+1) = V_{n+1}(g(0), \cdots, g(n)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

接下来证明$f(n) = g(n)$ 对任何$n \in \mathbb{N}$ 都成立. $n = 0$ 时显然; 归纳假设$f(k) = g(k)$ 对所有$k \leq n$ 都成立. 那么立即得到$f(n+1) = g(n+1)$. 所以根据第二数学归纳法$f(n) = g(n)$ 对任意$n \in \mathbb{N}$ 都成立.

下面来证明映射$f : \mathbb{N} \to X$ 的存在性. 首先断言对每个$n \in \mathbb{N}$ 存在映射$f_n : \{0, 1, \cdots, n\} \to X$ 满足

$$f_n(0) = a, \quad f_n(k) = f_k(k), \quad f_n(k+1) = V_{k+1}(f_n(0), \cdots, f_n(k)), \quad 0 \leq k < n.$$

显然对$n = 0$ 成立, 这是因为不存在满足$0 \leq k < 0$ 的$k \in \mathbb{N}$. 假设满足条件的映射$f_n : \{0, 1, \cdots, n\} \to X$ 存在. 对$n+1$ 定义

$$f_{n+1}(k) := \begin{cases} f_n(k), & 0 \leq k \leq n, \\ V_{n+1}(f_n(0), \cdots, f_n(n)), & k = n+1. \end{cases}$$

此时

$$f_{n+1}(k) = f_n(k) = f_k(k), \quad k \in \mathbb{N}, \ 0 \leq k \leq n,$$

和

$$\begin{aligned} f_{n+1}(k+1) &= f_n(k+1) = V_{k+1}(f_n(0), \cdots, f_n(k)) \\ &= V_{k+1}(f_{n+1}(0), \cdots, f_{n+1}(k)), \quad 0 < k+1 \leq n. \end{aligned}$$

同时也有

$$f_{n+1}(n+1) = V_{n+1}(f_n(0), \cdots, f_n(n)) = V_{n+1}(f_{n+1}(0), \cdots, f_{n+1}(n)).$$

这样就完成了映射$f : \mathbb{N} \to X$ 的存在性.

最后定义映射$f : \mathbb{N} \to X$ 为

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow X, \quad f(n) := \begin{cases} a, & n = 0, \\ f_n(n), & n \in \mathbb{N}_*. \end{cases}$$

根据f_n 的构造得到

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f_{n+1}(n+1) = V_{n+1}(f_{n+1}(0), \cdots, f_{n+1}(n)) \\ &= V_{n+1}(f_0(0), \cdots, f_n(n)) = V_{n+1}(f(0), \cdots, f(n)). \quad \square \end{aligned}$$

例1.5.29. 令$\odot$ 是集合X 上的结合运算, 且对每个$k \in \mathbb{N}$ 取定$x_k \in X$. 对任意$n \in \mathbb{N}$ 归纳定义

$$\bigodot_{0\le k\le n} x_k := x_0 \odot x_1 \odot \cdots \odot x_n$$

如下. 对$n \in \mathbb{N}_*$, 令

$$V_n : X^n \longrightarrow X, \quad (y_0, \cdots, y_{n-1}) \longmapsto y_{n-1} \odot x_n.$$

根据Theorem 1.5.28 存在唯一映射$f : \mathbb{N} \to X$ 满足$f(0) = x_0$ 和

$$f(n) = V_n(f(0), \cdots, f(n-1)) = f(n-1) \odot x_n, \quad n \in \mathbb{N}_*.$$

从而定义$\bigodot_{0\le k\le n} x_k := f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. 即

$$\bigodot_{0\le k\le 0} x_k = x_0, \quad \bigodot_{0\le k\le n} x_k = \bigodot_{0\le k\le n-1} x_k \odot x_n, \quad n \in \mathbb{N}_*.$$

如果用常用符号“$+$”或“$\cdot$”来表示集合X 上的结合运算, 我们就把$+$ 和$\cdot$ 分别称为X 上的**加法运算(addition)** 和**乘法运算(multiplication)**. 此时相应的“**和(sum)**”与“**积(product)**”就用通常的记号来表示:

$$\sum_{0\le k\le n} x_k := x_0 + x_1 + \cdots + x_n, \quad \prod_{0\le k\le n} x_k := x_0 \cdot x_1 \cdot \cdots \cdot x_n.$$

不过要注意的是, 每项的次序是很重要的这是因为运算一般来说不一定是交换的.

§1.5.9 * 群、环、域、模、向量空间、代数初涉

本节主要参考Amann-Escher 的教材, Rotman, Sagan, Artin, Lang, Serre, 以及Atiyah 的书(见**参考文献** §1.7).

♠ **群.** 群论始于Abel[4] 关于五次多项式方程没有一般代数解, 和Galois[5]关于五次以上多项式方程没有一般代数解的**Galois 理论(Galois theory)**, 即这样

[4]Niels Henrik Abel, 1802年8月5日–1829年4月6日, 今挪威芬岛人, 挪威著名数学家. 1822年毕业于挪威奥斯陆大学, 后去德国、法国等地访学. 在巴黎期间染上肺结核, 于1829年4月6日病逝, 年仅27岁. 去世2天后, 柏林大学的教授聘书寄到. Abel 除了是群论的开创者之一外, 他还在椭圆函数、超椭圆函数等做出了巨大的贡献. Charles Hermite 认为“Abel has left mathematicians enough to keep them busy for five hundred years”, 另一位法国著名数学家Adrien-Marie Legendre 说道“What a head the young Norwrgian has!”为了纪念这位杰出的数学家, 挪威政府在2001年设立了Abel 奖.

[5]Évariste Galois, 1811年10月25日–1832年5月31日, 今法国法兰西岛大区上塞纳省皇后堡镇人, 法国著名数学家, 和Niels Henrik Abel 并称为群论的开创者. 1829年12月29日获得巴黎高等师范学校学位, 他的考官这样来评价他“This pupil is sometimes obscure in expressing his ideas, but he is intelligent and shows a remarkable spirit of reserach.”, 后在巴黎高师继续数学研究. 因和他人决斗中腹部中了3颗子弹, 几天后于1832年5月31日逝世. 在他去世前2天, 他写信给朋友Auguste Chevalier, 写道“Ask Jacobi or Gauss publicly to give their opinion, not as to the truth, but as to the importance of these theorems. Later there will be, I hope, some people who will find it to their advantage to decipher all this mess”.

的方程不能通过方程的系数经有限次四则运算和开平方运算来求根.

偶对$(G,\odot)$ 称为**群(group)** 如果G 是非空集合, $\odot$ 是运算, 且满足如下三个条件:

$(G1)$ $\odot$ 是结合的;

$(G2)$ $(G,\odot)$ 中有单位元e;

$(G3)$ 每个$g\in G$ 都存在**逆元(inverse)** $h\in G$ 使得$g\odot h=h\odot g=e$ 成立.

群$(G,\odot)$ 称为**可交换的(commutative)** 或者**Abelian (Abelian)** 如果$\odot$ 是G 上的交换运算. 如果G 中的元素个数有限, 则称G 是**有限的(finite)** 并把元素个数称为群G 的**阶(order)**, 并记作$|G|$.

首先来考察两个简单群, $(\mathbb{R},+)$ 和$(\mathbb{R}^*,\cdot)$, 其中$+$ 和$\cdot$ 是通常的加法和乘法. 有鉴于此, 有时候把群也记作$(G,+)$ 并称为**加法群(additive group)** 或者$(G,\cdot)$ 并称为**(multiplicative group)**.

根据**例1.5.26** (5), 群$(G,\odot)$ 的单位元是唯一的. 进一步可以证明每个$g\in G$ 有唯一的逆元$g^\flat$. 从而得到

$$(g^\flat)^\flat=g,\quad (g\odot h)^\flat=h^\flat\odot g^\flat,\quad g,h\in G. \tag{1.5.1}$$

如果$\odot=+$ 时, 把逆元记作$g^\flat=-g$; 如果$\odot=\cdot$ 时, 把逆元记作$g^\flat=g^{-1}$.

例1.5.30. (1) 当$G=\{e\}$ 是单点集时, $(G,\odot)$ 是Abelian 群, 称为**平凡群**, 此时唯一的运算满足$e\odot e=e$.

(2) 假设$G=\{a,b\}$ 是双点集, 如果$(G,\odot)$ 是Abelian 群则必有

$$a\odot a=a,\quad a\odot b=b,\quad b\odot a=b,\quad b\odot b=a.$$

(3) 令X 是非空集合且$(G,\odot)$ 是群. 记G^X 为$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X,G)$, 则$(G^X,\odot)$ 是群, 其中

$$(f\odot g)(x):=f(x)\odot g(x),\quad f,g\in G^X,\ x\in X.$$

(4) 给定m 个群$(G_1,\odot_1),\cdots,(G_m,\odot_m)$, 定义它们的**乘积(direct product)** 为

$$(G_1\times\cdots\times G_m,\odot),$$

其中

$$(g_1,\cdots,g_m)\odot(h_1,\cdots,h_m):=(g_1\odot_1 h_1,\cdots,g_m\odot_m h_m).$$

(5) 令X 是非空集合. X 的**置换(permutation)** 是双射$\alpha: X\to X$, 把X 上所有置换构成的集合记为$\mathfrak{S}_X$. 则易证$\mathfrak{S}_X:=(\mathfrak{S}_X,\circ)$ 是单位元为恒等映射的群, 且一般来说不是Abelian 的.

如果$X=\{1,\cdots,n\}$时, 把$\mathfrak{S}_X$ 记为$\mathfrak{S}_n$ 并称为**置换群(permutation group)**. 此时$\mathfrak{S}_n$ 中的元素个数为$|\mathfrak{S}_n|=n!$. 为了方便期间, 我们利用如下记号来表示置换群中的元素:

$$\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \cdots & \alpha(n) \end{pmatrix} \tag{1.5.2}$$

使用这个记号我们来验证下$\mathfrak{S}_n$ 一般不是Abelian 的:

$$\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ \beta=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ \alpha\circ\beta=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\neq\beta\circ\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

另外一种来表示置换群中元素的常用记号是**循环(cycles)**. 我们称$\alpha\in\mathfrak{S}_n$ 固定$i\in\{1,\cdots,n\}$ 若$\alpha(i)=i$; 否则的话, 称α 移动i.

- 假设$i_1,\cdots,i_r$ 是$\{1,\cdots,n\}$ 中的不同整数. 如果$\alpha\in\mathfrak{S}_n$ 固定剩余的$n-r$ 个整数且

$$\alpha(i_1)=i_2,\quad \alpha(i_2)=i_3,\quad \cdots,\quad \alpha(i_{r-1})=i_r,\quad \alpha(i_r)=i_1,$$

  则称α 是r**-循环(r-cycle)** 并记作$\alpha=(i_1\cdots i_r)$.

- 显然每个1-循环都等于恒等映射, 而2-循环仅仅是交换元素偶对的位置, 也称为**对换(transposition)**.

- 1815年, Cauchy 建立了置换群的计算. 比如在$\mathfrak{S}_5$ 中如果

$$\alpha=(12)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},\quad \beta=(13425)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

  则

$$\alpha\circ\beta=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}=(134)(25).$$

- 置换$\alpha,\beta\in\mathfrak{S}_n$ 称为**不相交的(disjoint)** 如果满足

$$\alpha(i)\neq i\ \Rightarrow\ \beta(i)=i\quad \text{和}\quad \beta(j).\neq j\ \Rightarrow\ \alpha(j)=j$$

  当然不排除如下这种情形: $\alpha(k)=k=\beta(k)$ 对某个k 成立.

  一组置换$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 称为不相交的若这组内每对置换都是不相交的.

- 置换$\alpha\in\mathfrak{S}_n$ 称为**偶/奇的(even/odd)** 如果其是偶数/奇数个对换的乘积. 比如$\alpha=(123)=(13)(12)$ 是偶置换. 更进一步, 如果$\alpha=\tau_1\cdots\tau_r$ 是r 个对换的乘积, 定义

$$\mathrm{sgn}(\alpha):=(-1)^r. \tag{1.5.3}$$

  易证对任何$\alpha,\beta\in\mathfrak{S}_n$ 得到

$$\mathrm{sgn}(\alpha\circ\beta)=\mathrm{sgn}(\alpha)\cdot\mathrm{sgn}(\beta). \tag{1.5.4}$$

定理1.5.31. *每个置换$\alpha \in \mathfrak{S}_n$ 要么是循环要么是若干个不相交循环的乘积.*

证明: 假设α 移动了k 个元素, 下面的证明是对k 利用数学归纳法. $k = 0$ 时显然成立, 这是因为此时α 是恒等映射即为1-循环. 如果$k \geq 1$, 令α 移动i_1. 定义

$$i_2 = \alpha(i_1), \quad i_3 = \alpha(i_2), \quad \cdots, \quad i_{r+1} = \alpha(i_r),$$

这里r 是最小的整数使得$i_{r+1} \in \{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$ (r 的存在性由n 的有限性保证). 我们断言$\alpha(i_r) = i_1$. 否则的话, $\alpha(i_r) = i_j$, $j \geq 2$; 此时$\alpha(i_{j-1}) = i_j$, 这和α 是双射矛盾. 因此得到r-循环$\sigma = (i_1 i_2 \cdots i_r)$. 如果$r = n$ 则α 就是循环σ. 如果$r < n$, 令Y 是包含剩余$n - r$ 个点的集合. 则$\alpha(Y) = Y$ 且σ 固定Y 中的点. 故得到$\alpha = \sigma \circ \alpha'$, 这里$\alpha'$ 是满足$\alpha'|_Y = \alpha|_Y$ 和固定$\{i_1, \cdots, i_r\}$ 的置换. 因为α' 比α 移动更少的点, 所以根据归纳假设α', 从而α, 是不相交循环的乘积. □

定理1.5.32. *每个置换$\alpha \in \mathfrak{S}_n$ 是若干个对换的乘积.*

证: 根据定理1.5.31, 我们只要说明每个循环都是若干个对换的乘积. 但这是显然的,

$$(1 \cdots r) = (1r) \cdots (13)(12). \quad \square$$

把$\mathfrak{S}_n$ 中所有偶置换的集合记为$\mathfrak{A}_n$, 称为n **阶交错群(alternating group of order** n**)**.

假设$(G, \odot)$ 是群, G 的非空子集H 称为G 的**子群(subgroup)**, 记为$H \leq G$, 如果

(SG_1) H 在运算$\odot$ 下是封闭的, 即, $H \odot H \subseteq H$,

(SG_2) $h^\flat \in H$ 对所有$h \in H$ 都成立.

此时也把群H 记作$(H, \odot)$. 由于H 是非空的, 所以存在$h \in H$ 使得G 的单位元e 满足$e = h^\flat \odot h \in H$.

例1.5.33. 假设$(G, \odot)$ 是群.

(1) 平凡子群$\{e\}$ 和G 都是G 的子群, 并且相对于包含运算, 它们分别是最小的和最大的子群.

(2) 如果$\{H_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是G 的一族子群, 则$\cap_{\alpha \in A} H_\alpha$ 也是G 的子群.

令N 是群G 的子群且$g \in G$. 分别称$g \odot N := \{g \odot n : n \in N\}$ 和$N \odot g := \{n \odot g : n \in N\}$ 为$g \in G$ 相对于N 的**左陪集(left coset) 右陪集(right coset)**. 若定义关系

$$g \sim h \iff g \in h \odot N, \tag{1.5.5}$$

则易证$\sim$ 是G 上的等价关系(请诸位自证). $\sim$ 对应的等价类$[\cdot]$ 满足

$$[g] = g \odot N, \quad g \in G. \tag{1.5.6}$$

所有等价类构成的集合$G/\sim$ 称为G **模N 左陪集的集合(set of left cosets of G modulo N)** 并记为G/N.

如果N 是**正规子群(normal subgroup)**, 记为$N \lhd G$, 即, 左右陪集相等

$$g \odot N = N \odot g, \quad g \in G, \tag{1.5.7}$$

此时称$g \odot N$ 是g **模N 的陪集(coset of g modulo N)**. 因为$N \odot N = N$, 所以

$$(g \odot N) \odot (h \odot N) = g \odot (N \odot h) \odot N = (g \odot h) \odot N, \quad g, h \in G,$$

从而得到G/N 上的运算, 也记为$\odot$,

$$(G/N) \times (G/N) \longrightarrow G/N, \quad ([g], [h]) \longmapsto [g \odot h]. \tag{1.5.8}$$

定理1.5.34. *假设N 是群G 的正规子群. 则$(G/N, \odot)$ 是群, 称为G* **模N 的商群(quotient group of G modulo N).**

证: 根据(1.5.7), $\odot$ 是G/N 上的结合运算. 因为

$$[e] \odot [g] = [e \odot g] = [g],$$

所以G/N 的恒等元是$[e] = e \odot N = N$. 对任意$g \in G$, 存在唯一的逆元$g^\flat$; 从而得到

$$[g^\flat] \odot [g] = [g^\flat \odot g] = [e] = [g \odot g^\flat] = [g] \odot [g^\flat].$$

故根据定义$(G/N, \odot)$ 是群. □

Abelian 群G 的任意子群N 都是正规的, 从而G/N 不仅是群而且是Abelian 群.

显然任何群G 的单位元e 和G 本身都是正规子群. 群G 称为**单的(simple)** 如果除了e 和G 外没有其它的正规子群. 群G 称为**有限单群(finite simple group)** 如果$|G|$ 是有限阶的且G 是单的. Thompson[6] 因在1963年证明了所有非Abelian 有限单群都是偶数阶的这个重要的结论(即William Burnside 猜想), 于1970年

[6]John Griggs Thompson, 1932年10月13日–至今, 美国堪萨斯州奥塔瓦人, 美国著名数学家. 1955年Yale University 学士, 1959年在Saunders Mac Lane 指导下获得University of Chicago 博士学位. 对有限单群的分类做出了重要的工作, 1965年Cole 奖, 1970年获得Fields 奖, 1982年Senior Berwick 奖, 1992年获得Wolf 奖, 2000年美国National Medal of Science, 2008年获得Abel 奖, 2013年De Morgan 奖.

获得Fields 奖. 有限单群分类定理[7]从1955年到2004年经过超过100名数学家的努力, 撰写了超过500篇的论文, 最终完成了分类.

高中我们学过指数函数$f(x)=e^x$, 其定义域为$\mathbb{R}$ 而值域为$\mathbb{R}^*$. 我们已经知道$\mathbb{R}$ 在通常加法运算$+$ 下构成群, 同时$\mathbb{R}^*$ 在通常乘法运算$\cdot$ 下也构成群. 这样指数函数可看成是两个群之间的映射.

下面我们把上述例子推广到一般群之间的映射. 令$(G,\odot)$ 和$(G',\odot')$ 是两个群. 映射$\varphi: G\to G'$ 称为**群同态(group homomorphism)** 如果

$$\varphi(g\odot h)=\varphi(g)\odot'\varphi(h),\quad g,h\in G. \tag{1.5.9}$$

群G 到其自身的群同态称为**群自同态(group endomorphism)**.

(1) 如果$e\in G$ 和$e'\in G'$ 是单位元且$\varphi: G\to G'$ 是群同态, 则

$$\varphi(e)=e' \quad 和 \quad (\varphi(g))^\flat=\varphi(g^\flat),\quad g\in G. \tag{1.5.10}$$

事实上,

$$e'\odot'\varphi(e)=\varphi(e)=\varphi(e\odot e)=\varphi(e)\odot'\varphi(e)$$

故$e'=\varphi(e)$. 对任意$g\in G$,

$$e'=\varphi(e)=\varphi(g^\flat\odot g)=\varphi(g^\flat)\odot\varphi(g)$$

即$(\varphi(g))^\flat=\varphi(g^\flat)$.

(2) 群同态$\varphi: G\to G'$ 的**核(kernel)** 定义为

$$\mathrm{Ker}(\varphi):=\varphi^{-1}(e')=\{g\in G:\varphi(g)=e'\}. \tag{1.5.11}$$

显然$\mathrm{Ker}(\varphi)$ 是G 的正规子群. 首先来证明$\mathrm{Ker}(\varphi)$ 是群. 对任意$g,h\in\mathrm{Ker}(\varphi)$ 有

$$\varphi(g\odot h)=\varphi(g)\odot'\varphi(h)=e'\odot'e'=e'.$$

故(SG_1) 成立. 因为$\varphi(g^\flat)=(\varphi(g))^\flat=(e')^\flat=e'$, (SG_2) 也满足, 故$\mathrm{Ker}(\varphi)$ 是群. 假设$h\in g\odot\mathrm{Ker}(\varphi)$ 则$h=g\odot n$, 其中$n\in G$ 满足$\varphi(n)=e'$. 因为

$$h=g\odot n=(g\odot n\odot g^\flat)\odot g$$

和

$$\varphi(g\odot n\odot g^\flat)=\varphi(g)\odot'\varphi(n)\odot'\varphi(g^\flat)=\varphi(g)\odot'e'\odot'(\varphi(g))^\flat=e',$$

所以$h\in\mathrm{Ker}(\varphi)\odot g$. 同理可证$\mathrm{Ker}(\varphi)\odot g\subseteq g\odot\mathrm{Ker}(\varphi)$.

[7]每个有限单群同构于下列群之一: 素数阶循环群、至少5阶的交错群、Lie 型群、26种散在群(sporadic groups)、Tits 群.

(3) 令$\varphi : G \to G'$ 是群同态并令$N := \mathrm{Ker}(\varphi)$. 则

$$g \odot N = \varphi^{-1}(\varphi(g)), \quad g \in G,$$

且

$$g \sim h \iff \varphi(g) = \varphi(h), \quad g, h \in G,$$

这里$\sim$ 是(1.5.5) 中的等价关系. 如果$h \in g \odot N$ 得到

$$\varphi(h) \in \varphi(g \odot N) = \varphi(g) \odot' \varphi(N) = \varphi(g) \odot' \{e'\} = \{\varphi(g)\}$$

和$h \in \varphi^{-1}(\varphi(g))$. 反之若$h \in \varphi^{-1}(\varphi(g))$ 则得到

$$\varphi(g^\flat \odot h) = \varphi(g^\flat) \odot' \varphi(h) = (\varphi(g))^\flat \odot' \varphi(g) = e'$$

和$g^\flat \odot h \in N$ 和$h = g \odot N$.

(4) 群同态$\varphi : G \to G'$ 是单的当且仅当它的核是平凡的, 即, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{e\}$.

(5) 群同态$\varphi : G \to G'$ 的像集$\mathrm{Im}(\varphi)$ 是G' 的子群.

(6) 群同态$\varphi : G \to G'$ 称为**群同构(group isomorphism)** 如果它是双射的. 此时称G 和G' 是**同构的(isomorphic)** 并记作$G \cong G'$. G 到其自身的同构, 即双射自同态, 称为G 的**群自同构(group automorphism)**.

例1.5.35. (1) *平凡映射$G \to G'$, $g \mapsto e'$, 是群同态.*

(2) *恒等映射$\mathrm{Id}_G : G \to G$ 是群自同构.*

(3) *群同态(群自同态)的复合是群同态(群自同态).*

(4) *令N 是群G 的正规子群. 则商映射*

$$p : G \longrightarrow G/N, \quad g \longmapsto g \odot N,$$

*是满的群同态, 称为*商同态**(quotient homomorphism)**, *且*$\mathrm{Ker}(p) = N$.

(5) *如果$\varphi : G \to G'$ 是群同构, 则$\varphi^{-1} : G' \to G$ 也是群同构.*

(6) *G 的所有群自同构构成了集合$\mathbf{Aut}(G)$. 根据(2) 和(5), $\mathbf{Aut}(G)$ 在映射复合下是群, 且是群$\mathfrak{S}_G$ 的子群.*

(7) *对每个$a \in G$, 映射$g \mapsto a \odot g \odot a^\flat$ 属于$\mathbf{Aut}(G)$.*

(8) *令$\varphi : G \to G'$ 为群同态. 则存在唯一群同态$\widetilde{\varphi} : G/\mathrm{Ker}(\varphi) \to G'$ 满足$\widetilde{\varphi}$ 是单的且下面的图*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & G' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \widetilde{\varphi}} \\ G/\mathrm{Ker}(\varphi) & =\!= & G/\mathrm{Ker}(\varphi) \end{array}$$

是可交换的.

(9) 假设$(G,\odot)$ 是群, G' 是非空集合, 且$\varphi: G\to G'$ 是双射. 定义G' 上的运算为

$$g'\odot' h' := \varphi^{-1}(g')\odot\varphi^{-1}(h'),\quad g',h'\in G'.$$

则$(G',\odot')$ 是群且此时$\varphi: G\to G'$ 是群同构. 运算$\odot'$ 称为G' **上通过φ 由$\odot$ 诱导的运算(operation on G' induced from $\odot$ vias φ).**

(10) 假设$(G,\odot)$ 是群且X 是非空集合. X 上的**群作用(group action)** 是映射

$$G\times X\longrightarrow X,\quad (g,x)\longmapsto g\cdot x \tag{1.5.12}$$

满足如下条件

(GA_1) $e\cdot x = x$ 对任何$x\in X$ 都成立, 且

(GA_2) $g\cdot(h\cdot x) = (g\odot h)\cdot x$ 对任何$g,h\in G$ 和$x\in X$ 都成立.

对每个$g\in G$, 映射$x\mapsto g\odot x$ 是X 上的双射. 对每个$x\in X$, $G\cdot x$ 称为x **的轨道(orbit of x)**. 定义$y\sim x$ 如果$y\in G\cdot x$. 易证$\sim$ 是X 上的等价关系.

令$(G,\odot)$ 是群且$a\in G$. **由a 生成的循环子群(cyclic subgroup generated by a)**, 记为$\langle a\rangle$, 是所有a 的幂构成的集合, 即

$$\langle a\rangle := \{a^n | n\in\mathbb{N}\},\quad a^0 := e. \tag{1.5.13}$$

我们把$|\langle a\rangle|$ 称为a 的**阶(order)**. G 称为**循环的(cyclic)** 如果存在$a\in G$ 满足$G = \langle a\rangle$.

定理1.5.36. *如果G 是群且$a\in G$ 的阶为m, 则m 是满足$a^m = 1$ 的最小正整数.*

证: 如果$a = 1$ 则$m = 1$. 如果$a\neq 1$, 由于a 的阶是有限的, 则存在正整数$k > 1$ 使得$1, a, \cdots, a^{k-1}$ 是G 中不同的元素且$a^k = a^i$, 这里$i\in\{0,\cdots,k-1\}$. 我们断言$a^k = 1 = a^0$. 如果$a^k = a^i$, $i\in\{1,\cdots,k-1\}$, 则$k-i\le k-1$ 和$a^{k-i} = 1$, 矛盾! 故$a^k = 1$.

最后证明$k = m$, 即证明$\langle a\rangle = \{1, a, \cdots, a^{k-1}\}$. 显然

$$\{1, a, \cdots, a^{k-1}\}\subset\langle a\rangle.$$

对任意a 的幂a^ℓ, 利用$\ell = qk + r$, $0\le r < k$, 得到

$$a^\ell = a^{qk}a^r = a^r$$

从而得到$a^\ell\in\{1, a, \cdots, a^{k-1}\}$. □

♠ **环.** Dedekind 在1871年定义了数域整数环的概念, 但是却没有给出一般环的定义. 在1892年给出1897年正式发表, Hilbert 给出了环的定义, 当时德

文叫“Zahlring”翻译成中文叫“数环”. Fraenkel 在1914年第一个给出了环的公理化定义, 但是他的公理化定义比现在的定义略微狭义(要求环含有乘法单位元). 在1921年, Noether 给出了如今环的公理化定义并发展了交换环理论的基础.

由非空集合R, 加法运算$+$ 和乘法运算$\cdot$ 所构成的三元组$(R,+,\cdot)$ 称为**环(ring)**, 又是也记成R, 如果

(R_1) $(R,+)$ 是Abelian 群,

(R_2) 乘法运算是结合的, 且

(R_3) 满足分配律

$$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c, \quad c\cdot(a+b) = c\cdot a + c\cdot b, \quad a,b,c\in R.$$

环$(R,+,\cdot)$ 称为**交换环(commutative ring)** 如果乘法运算是交换的. 此时分配律(R_3) 就归结到

$$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c, \quad a,b,c\in R. \tag{1.5.14}$$

如果存在相对于乘法的单位元1_R, 我们称环$(R,+,\cdot)$ 为**带单位元环(ring with unity)** 并把1_R 或0_R 称为R 的**单位元(unity)** 或者乘法单位元.

(1) 假设$(R,+,\cdot)$ 是环. 把加法群$(R,+)$ 的单位元记为0_R 或者0, 并称为环R 的**零元(zero)** 或者加法单位元.

(2) 易证0_R 和1_R 若存在必唯一. 如果1_R 和0_R 都存在则不一定相等, 比如有整数环$\mathbb{Z}$ 和有理数环$\mathbb{Q}$.

(3) 我们把加法群$(R,+)$ 中a 的逆元记为$-a$, 从而可以定义a 和b 的**差(difference)** 为

$$b-a := b+(-a).$$

(4) 对所有$a\in R$, 有

$$0\cdot a = a\cdot 0 = 0, \quad -0 = 0.$$

如果$a\neq 0$ 且存在某个$b\neq 0$ 使得$ab=0$ 或$ba=0$, 则称a 是R 的**零除子(zero divisor)**. 环R 称为**整环(integral domain)** 如果它是交换的且不存在零除子.

(5) 对任何$a,b\in R$ 有

$$a\cdot(-b) = (-a)\cdot b = -(ab) =: -ab, \quad (-a)\cdot(-b) = ab.$$

如果进一步R 是带单位元环, 则

$$(-1)\cdot a = -a, \quad a\in R.$$

(6) **平凡环(trivial ring)** 是只有一个元素0 的环; 显然平凡环是交换的且带有单位元$1 = 0$.

(7) 环$R = (R, +, \cdot)$ 的**理想(ideal)** 是指子集$\mathfrak{a}$ 满足条件

- $(\mathfrak{a}, +)$ 是$(R, +)$ 的加法子群, 从而也是Abelian 的, 和
- $R \cdot \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$, 即, $x \in R$ 和$y \in \mathfrak{a}$ 推出$x \cdot y \in \mathfrak{a}$.

此时根据**定理1.5.34** 得到商群$R/\mathfrak{a}$. 根据定义

$$(x + \mathfrak{a}) + (y + \mathfrak{a}) := (x + y) + \mathfrak{a},$$

得到$R/\mathfrak{a}$上的乘法结构使得$R/\mathfrak{a}$ 构成一个环, 称为**商环(quotient ring)**. 映射

$$\phi : R \longrightarrow R/\mathfrak{a}, \quad x \longmapsto x + \mathfrak{a}$$

给出了满的环同态(环同态定义见(1.5.15)).

- 如果$\bar{\mathfrak{a}}$ 是$R/\mathfrak{a}$ 的理想, 则$\phi^{-1}(\bar{\mathfrak{a}})$ 是R 上的理想.
- 令$\mathscr{I}(R/\mathfrak{a})$ 表示$R/\mathfrak{a}$ 上所有的理想, 而$\mathscr{I}(R, \mathfrak{a})$ 表示R 中包含$\mathfrak{a}$ 的理想. 则得到如下一一保序对应关系:

$$\mathscr{I}(R, \mathfrak{a}) \longleftrightarrow \mathscr{I}(R/\mathfrak{a}).$$

例1.5.37. (1) 令$R = (R, +, \cdot)$ 是环且X 是非空集合. 在集合R^X 上定义$+$ 和$\cdot$ 运算如下:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x), \quad x \in X, \quad f, g \in R^X.$$

则$(R^X, +, \cdot)$ 是环. 如果进一步R 是交换的, 则R^X 也是交换的. 如果R 是非平凡带单位元环且X 至少有两个元素, 则R^X 有零除子. 事实上, 假设$x, y \in X$ 满足$x \neq y$, 并取映射$f, g \in R^X$ 满足

$$f(x') = \begin{cases} 1, & x' = x, \\ 0, & x' \neq x, \end{cases} \quad g(y') = \begin{cases} 1, & y' = y, \\ 0, & y' \neq y. \end{cases}$$

则得到$f, g \neq 0$ 和$fg = 0$.

特别地, 对$m \geq 2$, 直积R^m 在运算

$$(a_1, \cdots, a_m) + (b_1, \cdots, b_m) := (a_1 + b_1, \cdots, a_m + b_m)$$

和

$$(a_1, \cdots, a_m) \cdot (b_1, \cdots, b_m) := (a_1 \cdot b_1, \cdots, a_m \cdot b_m)$$

是环, 称为**乘积环(product ring)**.

(2) 假设R 是环且S 是R 的非空子集. 称S 是R 的**子环(subring)** 如果

(SR_1) S 是$(R,+)$ 的子群, 且

(SR_2) $S\cdot S\subseteq S$.

注意到$(S,+,\cdot)$ 本身就是一个环.

平凡环$0=\{0\}$ 和R 本身都是R 的子环. 任何交换环的子环也是交换的.

(3) 如果R 是带单位元环而S 是R 的子环, 则S 不一定是带单位元环(这是因为1_R 不一定属于S). 比如, 令R 是非平凡带单位元环并定义集合

$$S:=\{g\in R^{\mathbb{N}}|g(n)=0\text{ 对除了有限个 }n\text{ 外都成立}\}.$$

则S 是$R^{\mathbb{N}}$ 的子环但是却没有单位元.

(4) 对任何集合X, $(2^X,\triangle,\cap)$ 是带单位元的交换环, 其中$\triangle$ 是两个集合的对称差.

假设$R=(R,+,\cdot)$ 和$R'=(R',+',\cdot')$ 是两个环. 映射$\varphi:R\to R'$ 称为**环同态(ring homomorphism)** 如果

$$\varphi(a+b)=\varphi(a)+'\varphi(b),\quad \varphi(a\cdot b)=\varphi(a)\cdot'\varphi(b),\quad a,b\in R. \tag{1.5.15}$$

如果进一步假设φ 是双射, 则称φ 是**环同构(ring isomorphism)** 同时称R 和R' 是**环同构的(ring isomorphic)**. R 到其自身的环同态称为**环自同态(ring endomorphism)**; 如果进一步φ 是环同构, 则称为**环自同构(ring automorphism)**.

(1) 显然环同态$\varphi:R\to R'$ 是群同态.

(2) 环同态$\varphi:R\to R'$ 的**核(kernel)**, 记为$\mathrm{Ker}(\varphi)$, 定义为

$$\mathrm{Ker}(\varphi):=\{a\in R|\varphi(a)=0\}=\varphi^{-1}(0).$$

易证$\mathrm{Ker}(\varphi)$ 是A 的理想, 像集$\mathrm{Im}(\varphi)=\varphi(R)$ 是R' 的子环, 因此φ 诱导出环同构$R/\mathrm{Ker}(\varphi)\cong\mathrm{Im}(\varphi)$. R 的所有单位构成了乘法Abelian 群.

(3) 对$a\in R$ 定义其**主理想(principal ideal)** 为$(a):=R\cdot a$. 则得到$R=(1)$ 和

$$a\text{ 是单位}\quad\Longleftrightarrow\quad (a)=R=(1).$$

零理想(zero ideal) (0) 通常记为0.

假设$R=(R,+,\cdot)$ 是带单位元的交换环.

(1) $a \in R$ 是**幂零的(nilpotent)** 若$a^n = 0$ 对某个$n \geq 1$ 成立. 显然幂零元必是零除子, 反之一般来说是不对的.

(2) $a \in R$ 称为R 的**单位(unit)** 若$a \cdot b = 1$ 对某个$b \in R$ 成立.

♠ **域.** Dedekind 在1871年引入域的概念, 德文叫"Körper"翻译成中文叫"体". 英文"field"是Moore 在1893年引入的. 第一个抽象环的清晰定义是Weber 在1893年给出的.

K 称为**域(field)** 如果下面条件满足:

(F_1) K 是带单位元的交换环,

(F_2) $0 \neq 1$, 和

(F_3) $K^\times := K \setminus \{0\}$ 相对于乘法是Abelian 群, 即, 所有非零元素都是单位.

称Abelian 群$K^\times$ 为K 的**乘法群(multiplicative group)**.

(1) 假设K 是域. 对任意$a \in K^\times$ 有$(a^{-1})^{-1} = a$ 从而得到域没有零除子. 对任给$a \in K^\times$ 和$b \in K$, 存在唯一的$x \in K$ 满足$ax = b$, 即**商(quotient)**

$$x = b \cdot a^{-1} =: \frac{b}{a} \equiv b/a.$$

商具有如下运算法则: 对$a, c \in K$ 和$b, d \in K^\times$ 得到

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow ad = bc$.
- $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$.
- $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.
- $\frac{a}{b} / \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}, c \neq 0$.

(2) 令K' 是域而$\varphi : K \to K'$ 是环同态且$\varphi \neq 0$. 则

$$\varphi(1_K) = 1_{K'}, \quad \varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}, \quad a \in K^\times.$$

例1.5.38. (1) *在集合$\{0, 1\}$ 上定义加法和乘法运算如下:*

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

则$\mathbb{F}_2 := (\{0, 1\}, +, \cdot)$ 是域.

性质1.5.39. *假设$R \neq 0$ 是带单位元的交换环. 则下列命题等价:*

(*i*) R 是域;

(*ii*) R 中唯一的理想是0 和R;

(*iii*) R 到另一个非零带单位元的交换环R' 的每个环同态都是单的.

证: $(i) \Rightarrow (ii)$: 假设$\mathfrak{a} \neq 0$ 是R 的理想. 则存在非零元$a \in R$ 使得a 是理想, 从而得到

$$\mathfrak{a} \supset (a) = (1) = R.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$: 令R' 是非零带单位元的交换环且$\varphi : R \to R'$ 是环同态. 故$\mathrm{Ker}(\varphi)$ 是R 中的理想, 所以(ii) 表明$\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$ 或者$\mathrm{Ker}(\varphi) = R$. 前者给出$\varphi$ 是单的; 后者给出φ 是满的, 和$R' \neq 0$ 矛盾.

$(iii) \Rightarrow (i)$: 假设$x \in R$ 不是单位. 则$(x) \neq R$ 故$R' := R/(x)$ 不是零环. 自然环同态$\varphi : R \to R'$ 的核是$\mathrm{Ker}(\varphi) = (x)$. 根据假设$(iii)$, 必有$0 = (x)$ 从而$x = 0$. □

♠ **带单位元环.** 假设R 是带单位元的交换环. 理想$\mathfrak{p} \in \mathscr{I}(R)$ 称为**素理想(prime ideal)** 如果

$$x \cdot y \in \mathfrak{p} \quad \Longrightarrow \quad x \in \mathfrak{p} \text{ 或 } y \in \mathfrak{p}.$$

理想$\mathfrak{m} \in \mathscr{I}(R)$ 称为**极大理想(maximal ideal)** 如果$\mathfrak{m} \neq (1)$ 且不存在理想$\mathfrak{a}$ 满足严格包含关系$\mathfrak{m} \subset \mathfrak{a} \subset (1)$. 则

$$\mathfrak{p} \text{ 是素理想} \quad \Longleftrightarrow \quad R/\mathfrak{p} \text{ 是整环},$$
$$\mathfrak{m} \text{ 是极大理想} \quad \Longleftrightarrow \quad A/\mathfrak{m} \text{ 是域}.$$

则最大理想必是素理想, 但反之不一定对. 零理想是素的当且仅当R 是整环. 分别令$\mathscr{P}(R)$ 和$\mathscr{M}(R)$ 为素理想集合和极大理想集合.

(1) 如果$\varphi : R \to R'$ 是环同态且$\mathfrak{p}' \in \mathscr{P}(R')$, 则$\mathfrak{p} := \varphi^{-1}(\mathfrak{p}') \in \mathscr{P}(R)$. 但是如果$\mathfrak{m}' \in \mathscr{M}(R')$, 则$\mathfrak{m} := \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ 不一定是R 中的极大理想, 比如$R = \mathbb{Z}$, $R' = \mathbb{Q}$ 和$\mathfrak{m} = 0$.

定理1.5.40. 令R 是带单位元的交换环. 如果$R \neq 0$, 则R 至少有一个极大理想.

(1) 如果$\mathfrak{a} \neq (1)$ 是R 的理想, 则存在R 的极大理想包含$\mathfrak{a}$.

(2) R 的每个非单位都包含在某个极大理想中.

证: 令$\Sigma := \mathscr{I}(R) \setminus R$. 包含关系$\subset$ 是Σ 上的关系, 并且显然是严格偏序的, 故$(\Sigma, \subset)$ 是严格偏序集. 为了应用Zorn 引理, 下证Σ 的每个简单序子集

在R中都有上界. 令$A=\{\mathfrak{a}_\alpha:\alpha\in\mathsf{A}\}$是简单序子集, 则根据定义对任意指标对$(\alpha,\beta)\in\mathsf{A}\times\mathsf{A}$有$\mathfrak{a}_\alpha\subset\mathfrak{a}_\beta$或者$\mathfrak{a}_\beta\subset\mathfrak{a}_\alpha$. 定义

$$\mathfrak{a}:=\bigcup_{\alpha\in\mathsf{A}}\mathfrak{a}_\alpha.$$

则$\mathfrak{a}\in\mathscr{I}(R)$且$\mathfrak{a}\neq(1)$ (这是因为$1\notin\mathfrak{a}_\alpha$对任何$\alpha\in\mathsf{A}$都成立), 所以$\mathfrak{a}\in\Sigma$且$\mathfrak{a}$是$A$的一个上界. 这样Zorn 引理就推出$\Sigma$有最大元, 即$R$至少有一个极大理想.

(1) 如果$\mathfrak{a}\neq(1)$, 则$R':=R/\mathfrak{a}\neq 0$. 根据(1) 得到R'至少有一个极大理想, 从而R至少有一个极大理想包含$\mathfrak{a}$.

(2) 立即由(1) 得到. □

有些带单位元的交换环, 比如域, 有且只有一个极大理想. 仅有一个极大理想$\mathfrak{m}$的带单位元的交换环R称为**局部环(local ring)**; 此时域$k:=R/\mathfrak{m}$称为R的**剩余域(residue field)**. 有有限个极大理想的带单位元的交换环R称为**半局部环(semi-local ring)**.

性质1.5.41. *(1) 令R是带单位元的交换环且$\mathfrak{m}\neq(1)$是R的理想. 如果每个$x\in R\setminus\mathfrak{m}$都是$R$的单位, 则$R$是局部环且$\mathfrak{m}$是其唯一的极大理想.*

(2) 令R是带单位元的交换环且$\mathfrak{m}$是R的极大理想. 如果$1+\mathfrak{m}$中的每个元素都是R的单位, 则R是局部环.

证: (1) 假设$\mathfrak{a}\neq(1)$是R的理想. 则$\mathfrak{a}$仅包含非单位, 所以根据假设得到$\mathfrak{a}\subset\mathfrak{m}$. 因此$\mathfrak{m}$是唯一的极大理想.

(2) 根据(1) 只要证明每个$x\in R\setminus\mathfrak{m}$都是$R$的单位. 由于$\mathfrak{m}$是极大理想, 则由$x$和$\mathfrak{m}$所生成的理想必是(1). 故存在$y\in R$和$t\in\mathfrak{m}$满足$1=xy+t$. 从而$xy=1-t\in 1+\mathfrak{m}$和$xy$是单位, 所以$x$也是单位. □

$\mathbb{Z}$中的每个理想是形如(m), $m\in\mathbb{N}$. 理想(m)是素理想当且仅当$m=0$或m是素数. 所有理想(p), p是素数, 都是极大理想, 这是因为$\mathbb{Z}/(p)=:\mathbb{Z}_p$是包含$p$个元素的域.

令R是带单位元的交换环. 称R是**主理想环(principal ideal domain)** 如果R是整环且每个理想都是主理想. 此时, 每个非零素理想都是极大理想. 假设$(x)\neq 0$是素理想且$(y)\supset(x)$是主理想, 则得到$x=yz$从而$yz\in(x)$. 但$y\notin(x)$, 我们得到$z\in(x)$, 即$z=tx$. 故$x=yz=ytx$和$yt=1$, 因为$x\neq 0$. 因此$(y)=(1)$, 即$(x)\neq 0$是极大理想.

给定带单位元的交换环R, 定义

$$\mathfrak{N} := \{R\text{ 的所有幂零元}\} = \bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathscr{P}(R)} \mathfrak{p}, \tag{1.5.16}$$

$$\mathfrak{R} := \bigcap_{\mathfrak{m}\in\mathscr{M}(R)} \mathfrak{m}. \tag{1.5.17}$$

下面定理给出$\mathfrak{N}$ 和$\mathfrak{R}$ 的等价刻画.

性质1.5.42. *假设R 是带单位元的交换环.*

(1) *$\mathfrak{N}$ 是R 的理想, 而$R/\mathfrak{N}$ 没有非零的幂零元.*

(2) *$\mathfrak{N}$ 是R 的所有素理想的交集, 从而$\mathfrak{R}$ 也是R 的理想.*

(3) *$x \in \mathfrak{R}$ 当且仅当对任何$y \in R$ 都成立$1 - xy$ 是R 中的单位.*

证: (1) 因为R 是交换的, 所以$\mathfrak{N}\cdot a\mathfrak{N}$ 对任何$a \in R$ 都成立. 下证$(\mathfrak{N}, +)$ 是加法群. 任取$zx, y \in \mathfrak{N}$, 则$x^m = 0 = y^n$. 根据二项式公式

$$(x+y)^{m+n-1} = \sum_{r+s=m+n-1} \frac{(m+n-1)!}{r!s!} x^r y^s = 0.$$

故$x + y \in \mathfrak{N}$.

令$x' = x + \mathfrak{N} \in R/\mathfrak{N}$. 则$(x')^n = x^n + \mathfrak{N}$. 如果$(x')^n = 0$, 得到$x^n \in \mathfrak{N}$ 和$(x^n)^k = 0$. 故$x \in \mathfrak{N}$ 和$x' = 0' \in R/\mathfrak{N}$.

(2) 暂时记$\mathfrak{N}'$ 是R 的所有素理想的交集. 如果$f \in R$ 是幂零的, 则对任何素理想$\mathfrak{p}$ 都有$f^n = 0 \in \mathfrak{p}$ 对某个$n \in \mathbb{N}_*$ 成立. 故$f \in \mathfrak{p}$ 从而$f \in \mathfrak{N}'$.

反之, 假设f 不是幂零的. 令

$$\Sigma := \{\mathfrak{a} \in \mathscr{I}(R) | n \in \mathbb{N}_* \implies f^n \notin \mathfrak{a}\}.$$

则$0 \in \Sigma$ 所以Σ 是非空的. 在包含关系下, $(\Sigma, \subset)$ 是严格偏序集; 从而根据Zorn 引理得到Σ 中的最大元$\mathfrak{p}$. 下面断言$\mathfrak{p}$ 是素理想. 假设$x, y \notin \mathfrak{p}$. 因为理想$\mathfrak{p} + (x)$ 和$\mathfrak{p} + (y)$ 严格包含$\mathfrak{p}$, 所以这两个理想都不属于Σ. 故得到

$$f^m \in \mathfrak{p} + (x), \quad f^n \in \mathfrak{p} + (y)$$

对某些$m, n \in \mathbb{N}_*$ 都成立. 所以得到$f^{m+n} \in \mathfrak{p} + (xy)$ 和理想$\mathfrak{p} + (xy) \notin \Sigma$. 这就表明$xy \notin \mathfrak{p}$ 从而说明$\mathfrak{p}$ 是素理想和$f \notin \mathfrak{p}$. 即$f \notin \mathfrak{N}'$.

(3) 假设$x \in \mathfrak{R}$ 但是$1 - xy$ 对某个$y \in R$ 不是单位. 根据**定理1.5.40** (2), 可知$1 - xy$ 包含在某个极大理想$\mathfrak{m}$ 内. 但是$x \in \mathfrak{R} \subset \mathfrak{m}$, 所以必有$1 \in \mathfrak{m}$, 矛盾! 因此对任何$y \in R$ 都有$1 - xy$ 都是R 中的单位.

反之, 假设$1 - xy$ 对任何$y \in R$ 都是单位. 如果$x \notin \mathfrak{R}$, 则存下某个极大理想$\mathfrak{m}$ 使得$x \notin \mathfrak{m}$. 此时$\mathfrak{m}$ 和x 生成理想$(1) = R$ 从而导致$1 = y + xy$, 这里$u \in \mathfrak{m}$

和$y \in R$. 即得到$1 - xy \in \mathfrak{m}$ 且不是单位. □

我们把$\mathfrak{N}$ 称为**幂零根(nilradical)** 而把$\mathfrak{R}$ 称为**Jacobson 根(Jacobson radical)**.

♠ **模.** 假设$R = (R, +, \cdot)$ 是带单位元的交换环. R-**模**(R-**module**) 是指偶对(M, μ), 这里$M = (M, \oplus)$ 是Abelian 加法群且

$$\mu : R \times M \longrightarrow M, \quad (a, x) \longmapsto \mu(a, x) = a \odot x$$

是满足如下条件的映射:

$$a \odot (x \oplus y) = (a \odot x) \oplus (b \odot y), \quad (a + b) \odot x = (a \odot x) \oplus (b \odot x)$$

和

$$(a \cdot b) \odot x = a \cdot (b \odot x), \quad 1 \odot x = x$$

对任何$a, b \in R$ 和$x, y \in M$ 都成立. 为了方便期间我们把R-模记为

$$M = (M, \oplus, \odot) = (M, \oplus, \odot, R, +, \cdot).$$

R 的任何理想都是R-模, 特别的R 本身就是A-模.

假设$M = (M, \oplus, \odot), M' = (M', \oplus', \odot')$ 是R-模. 映射$\varphi : M \to M'$ 称为R-**模同态**如果

$$\varphi(x \oplus y) = \varphi(x) \oplus' \varphi(y), \quad \varphi(a \odot x) = a \odot' \varphi(x) \tag{1.5.18}$$

对所有$a \in R$ 和$x, y \in M$ 都成立.

(1) R-模同态的复合也是R-模同态.

(2) M 到N 的所有R-模同态记为$\mathrm{Hom}_R(M, N)$, 下面我们来证明它是R-模. 定义$\widehat{\odot}$ 和$\widehat{\oplus}$ 为

$$(a \widehat{\odot} \varphi)(x) := a \odot' \varphi(x), \quad (\varphi \widehat{\oplus} \psi)(x) := \varphi(x) \oplus' \psi(x).$$

则易证$\mathrm{Hom}_R(M, N) = (\mathrm{Hom}_R(M, N), \widehat{\oplus}, \widehat{\odot})$ 是R-模.

(3) 从(2) 得到A-模同态

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R(M', M) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{Hom}_R(M, N), \mathrm{Hom}_R(M', N)\right), \\ u &\longmapsto \overline{u} : f \longmapsto f \circ u \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R(N, N') &\longrightarrow \mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{Hom}_R(M, N), \mathrm{Hom}_R(M, N')\right), \\ v &\longmapsto \overline{v} : f \longmapsto v \circ f. \end{aligned}$$

(4) 对任何R-模M 存在R-模同构$\mathrm{Hom}_R(R,M)\cong M$:

$$\mathrm{Hom}_R(R,M)\longrightarrow M,\quad f\longmapsto f(1)$$

和

$$M\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R,M),\quad x\longmapsto f_x:a\longmapsto a\odot x.$$

易证上述映射给出了R-模同构.

(5) $M=(M,\oplus,\odot,R,+,\cdot)$ 的**子模(submodule)** M' 是M 的加法子群且在$\odot$ 下是封闭的. 因为$(M,\oplus)$ 是Abelian 的, 则商群M/M' 是Abelian 加法群且存在如下的R-模结构,

$$R\times M/M'\longrightarrow M/M',\quad (a,x+M')\longmapsto a\odot x+M'. \tag{1.5.19}$$

则得到的商M/M' 称为M **关于**M' **的商模(quotient module of** M **by** M'**)**. 自然映射$M\to M/M'$ 是R-模同态.

假设$\varphi:M\to N$ 是R-模同态, 则

$$\mathrm{Ker}(\varphi):=\{x\in M|\varphi(x)=0\}$$

是M 的子模,

$$\mathrm{Im}(\varphi):=\varphi(M)$$

是N 的子模, 而

$$\mathrm{Coker}(\varphi):=N/\mathrm{Im}(\varphi)$$

是N 的商模. 特别地, 得到

$$M/\mathrm{Ker}(\varphi)\cong\mathrm{Im}(\varphi). \tag{1.5.20}$$

R-模和R-模同态序列

$$\cdots M_{i-1}\xrightarrow{\varphi_i}M_i\xrightarrow{\varphi_{i+1}}M_{i+1}\longrightarrow\cdots \tag{1.5.21}$$

称为**在M_i 处是正合的(exact at M_i)** 如果$\mathrm{Im}(\varphi_i)=\mathrm{Ker}(\varphi_{i+1})$; 序列是**正合的(exact)** 如果在每个M_i 处是正合的.

$$0\longrightarrow M'\xrightarrow{\varphi}M\text{ 是正合的}\iff\varphi\text{ 是单的} \tag{1.5.22}$$

$$M\xrightarrow{\psi}M''\longrightarrow 0\text{ 是正合的}\iff\psi\text{ 是满的} \tag{1.5.23}$$

$$0\longrightarrow M'\xrightarrow{\varphi}M\xrightarrow{\psi}M''\longrightarrow 0\text{ 是正合的}$$
$$\iff \tag{1.5.24}$$
$$\varphi\text{ 是单的, }\psi\text{ 是满的, 且 }M/\varphi(M')\cong M''.$$

形如(1.5.24) 的序列称为**短正合列(short exact sequence)**, 而我们把正合序列(1.5.21) 称为**长正合列(long exact sequence)**.

任何长正合列(1.5.21) 都可以分解成一些短正合列: 如果令

$$N_i := \mathrm{Im}(\varphi_i) = \mathrm{Ker}(\varphi_{i+1}),$$

则得到短正合列$0 \to N_i \to M_i \to N_{i+1} \to 0$.

定理1.5.43. (1) 令

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0 \tag{1.5.25}$$

为R-模和R-模同态序列. 则序列(1.5.25) 是正合的当且仅当对任何R-模N, 序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M'', N) \xrightarrow{\overline{v}} \mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\overline{u}} \mathrm{Hom}_R(M', N) \tag{1.5.26}$$

是正合的.

(2) 令

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N'' \tag{1.5.27}$$

为R-模和R-模同态序列. 则序列(1.5.27) 是正合的当且仅当对任何R-模M, 序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, N') \xrightarrow{\overline{u}} \mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\overline{v}} \mathrm{Hom}_R(M, N'') \tag{1.5.28}$$

是正合的.

(3) 令

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f'"'] & M \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "u'"'] & N \arrow[r, "v'"'] & N'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{1.5.29}$$

是关于R-模和R-模同态的交换图, 即$f \circ u = u' \circ f'$ 和$f'' \circ v = v' \circ f$ 成立, 且行序列是正合的. 则存在如下正合列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f') \xrightarrow{\overline{u}} \mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{\overline{v}} \mathrm{Ker}(f'') \xrightarrow{d} \\ \longrightarrow \mathrm{Coker}(f') \xrightarrow{\overline{u}'} \mathrm{Coker}(f) \xrightarrow{\overline{v}'} \mathrm{Coker}(f'') \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{1.5.30}$$

其中$\overline{u}, \overline{v}$ 是u, v 的限制, 而$\overline{u}', \overline{v}'$ 是由u', v' 所诱导的. 称映射d 为**边界同态(boundary homomorphism)**.

证: 下面只证(1), (2) 的证明类似. 先假设(1.5.25) 成立. 如果$\overline{v}(f) = 0$, 这里$f \in \mathrm{Hom}_R(M'', N)$, 则$f \circ v = 0$. 由于$v$ 是满射, 对任意$x'' \in M''$ 都存在$x \in M$ 使得$x'' = v(x)$ 成立. 因此得到

$$0 = (f \circ v)(x) = f(x'') \implies f = 0;$$

即$\overline{v}$ 是单射. 根据$v \circ u = 0$ 得到$\overline{u} \circ \overline{v} = 0$, 即$\mathrm{Im}(\overline{v}) \subset \mathrm{Ker}(\overline{u})$. 下证$\mathrm{Ker}(\overline{u}) \subset \mathrm{Im}(\overline{v})$. 对任意$g \in \mathrm{Ker}(\overline{u})$ 有$g \circ u = 0$. 为了证明$g \in \mathrm{Im}(\overline{v})$, 我们来定义映射$f \in \mathrm{Hom}_R(M'', N)$ 使得$g = f \circ v$. 对$x'' \in M''$ 存在$x \in M$ 满足$v(x) = x''$, 从而定义

$$f(x'') := g(x).$$

我们断言上述定义和$x \in M$ 的选取无关: 若存在另一个$\widetilde{x} \in M$ 满足$v(\widetilde{x}) = x''$, 则$\widetilde{x} - x \in \mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(u)$. 故$\widetilde{x} - x = u(x')$, $x' \in M'$. 但是$g \circ u = 0$ 得到$g(\widetilde{x}) - g(x) = (g \circ u)(x') = 0$. 因此$g(x) = (f \circ v)(x)$; 最后来说明这个等式对所有$x \in M$ 都成立. 对任意$x \in M$ 令$x'' := v(x)$; 根据f 的定义得到$f(x'') = g(x)$ 即$f \circ v = g$.

反之假设(1.5.26) 对任何R-模N 成立. 先证v 是满射. 否则的话, 存在$x''_0 \in M''$ 满足$x''_0 \in M'' \setminus v(M)$. 定义映射

$$f : M'' \longrightarrow M''/v(M), \quad x'' \longmapsto x'' + v(M).$$

则显然有$f(x''_0) \neq 0$, 但是$(f \circ v)(x) = v(x) + v(M) = 0$ 对任何$x \in M$ 都成立. 这就和$\overline{v}$ 是单射相矛盾, 故v 是满射. 再证$\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$. 从$\overline{u} \circ \overline{v} = 0$ 推出

$$f \circ v \circ u = 0, \quad \forall f \in \mathrm{Hom}_R(M'', N).$$

特别地取$N = M''$ 和$f = \mathrm{Id}_{M''}$ 就得到$v \circ u = 0$. 最后证明$\mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Im}(u)$. 取$N := M/\mathrm{Im}(u)$ 并令$g \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ 为自然投射. 则$g \in \mathrm{Ker}(\overline{u}) = \mathrm{Im}(\overline{v})$, 故存在$f \in \mathrm{Hom}_R(M'', N)$ 满足

$$g = \overline{v}(f) = f \circ v.$$

因此$\mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(u)$.

(3) 定义

$$\overline{u}(x') := u(x') \quad x' \in \mathrm{Ker}(f') \quad 和 \quad \overline{v}(x) := v(x) \quad x \in \mathrm{Ker}(f).$$

根据$f \circ u = u' \circ f'$ 和$f'' \circ v = v' \circ f$, 上述映射的定义都是合理. 同样可定义

$$\overline{u}'(y' + \mathrm{Im}(f')) := u'(y') + \mathrm{Im}(f), \quad \overline{v}'(N + \mathrm{Im}(f)) := v'(y) + \mathrm{Im}(f'').$$

如果$\widetilde{y}' = y' + f'(x')$, 即$\widetilde{y}' + \mathrm{Im}(f') = \widetilde{y}' + \mathrm{Im}(f')$, 得到

$$\begin{aligned} \overline{u}'(\widetilde{y}' + \mathrm{Im}(f')) &= u'(\widetilde{y}') + \mathrm{Im}(f) \ u'(y' + f'(x')) + \mathrm{Im}(f) \\ &= u'(y') + f(u(x')) + \mathrm{Im}(f) = u'(y') + \mathrm{Im}(f). \end{aligned}$$

现在来定义映射$d : \mathrm{Ker}(f'') \to \mathrm{Coker}(f')$ 如下. 对任意$x'' \in \mathrm{Ker}(f'')$ 我们有$x'' = v(x)$, $x \in M$. 而又因为

$$0 = f''(x'') = f''(v(x)) = v'(f(x)),$$

所以得出$f(x) \in \mathrm{Ker}(v') = \mathrm{Im}(u')$ 从而$f(x) = u'(y')$ 对某个$y' \in N'$ 成立. 定义

$$d(x'') := y' + \mathrm{Im}(f').$$

下面验证d 的定义和$x \in M, y' \in N'$ 的选取无关. 假设存在另一组$(\widetilde{x}, \widetilde{y}') \in M \times N'$ 满足

$$x'' = v(\widetilde{x}), \quad f(\widetilde{x}) = u'(\widetilde{y}').$$

则$\widetilde{x} - x \in \mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(u)$ 和$\widetilde{x} - x = u(x')$ 对某个$x' \in M'$ 成立. 因此

$$f(\widetilde{x}) - f(x() = f(u(x')) = u'(f'(x')) \quad \Longrightarrow \quad u'(\widetilde{y}' - y' - f'(x')) = 0.$$

因为u' 是单的, 所以$\widetilde{y}' = y' + f'(x')$, 即$\widetilde{y}' + \mathrm{Im}(f') = y' + \mathrm{Im}(f')$. 故$d$ 的定义是合理的.

最后来证明(1.5.30) 是正合的. 显然$\overline{u}$ 是单的和$\overline{v}'$ 是满的.

$\mathrm{Ker}(\overline{v}) = \mathrm{Im}(\overline{u})$. 假设$x \in \mathrm{Ker}(\overline{v})$, 则$x \in \mathrm{Ker}(f)$ 和$0 = \overline{v}(x) = v(x)$. 根据$x \in \mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(u)$, 得到$x = u(x')$ 对某个$x' \in M'$ 成立. 因为u' 是单的且

$$u'(f'(x')) = f(u(x')) = f(x) = 0,$$

所以$f'(x') = 0$ 和$x' \in \mathrm{Ker}(f')$, 故$x \in \mathrm{Im}(\overline{u})$. 反之假设$x' \in \mathrm{Ker}(f')$, 则$x' \in M'$ 和$f'(x') = 0$. 因为$\overline{u}(x') = u(x')$ 和

$$f(\overline{u}(x')) = f(u(x')) = u'(f'(x')) = 0,$$

所以$\overline{v}(\overline{u}(x')) = v(\overline{u}(x')) = v(u(x')) = 0$. 剩下三个关系的证明作为练习见**练习1.5.44**. □

练习1.5.44. 证明**定理1.5.43** 中剩余的三个关系$\mathrm{Ker}(d) = \mathrm{Im}(\overline{v})$, $\mathrm{Ker}(\overline{u}') = \mathrm{Im}(d)$, 和$\mathrm{Ker}(\overline{v}') = \mathrm{Im}(\overline{u}')$.

♠ **向量空间.** 假设K 是给定的域. 则此时把K-模称为**K-向量空间(K-vector space)**. 为了记号上简便, 我们不加区别的把所有加法运算写成$+$ 而把所有的乘法运算写成$\cdot$. 这样一来, K-向量空间就是指三元组$V = (V, +, \cdot)$, 这里V 是非空集合, $+$ 是V 上的加法"内"运算, 而$\cdot$ 是"外"运算

$$K \times V \longrightarrow V, \quad (\lambda, v) \longmapsto \lambda \cdot v,$$

且满足如下公理:

(VS_1) $(V, +)$ 是Abelian 群;

(VS_2) 分配律成立

$$\lambda \cdot (v+w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w, \quad (\lambda+\mu)\cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v, \quad \lambda, \mu \in K, \quad v, w \in V;$$

(VS_3) 结合律成立

$$\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu)\cdot v, \quad \lambda, \mu \in K,\ v \in V.$$

V 是**实向量空间(real vector space)** 如果$K = \mathbb{R}$, 是**复向量空间(complex vector space)** 如果$K = \mathbb{C}$.

(1) V 中的元素称为**向量(vector)** 而把K 中的元素称为**标量(scalar)**. 简记$\lambda v := \lambda \cdot v$.

(2) $(V, +)$ 的单位元称为**零向量(zero vector)** 并记为$0_V = 0$. $v \in V$ 的加法逆元记为$-v$ 并定义

$$v - w := v + (-w), \quad v, w \in V.$$

另外易证

$$0v = 0, \quad (-\lambda)v = \lambda(-v) = -(\lambda v) =: -\lambda v, \quad \lambda \in K, \quad v \in V.$$

令V, W 是K-向量空间. 映射$\mathbf{T} : V \to W$ 称为**K-线性的(K-linear)** 如果

$$\mathbf{T}(\lambda v + \mu w) = \lambda \mathbf{T}(v) + \mu \mathbf{T}(w), \quad \lambda, \mu \in K, \quad v, w \in V. \tag{1.5.31}$$

V 到W 的所有K-线性映射, 或**向量空间同态(vector space homomorphism)**, 记为

$$\mathrm{Hom}_K(V, W),$$

而记$\mathrm{Hom}_K(V, V) =: \mathrm{End}_K(V)$ 并称其元素为**向量空间自同态(vector space endomorphism)**. 双射的向量空间同态$T \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ 称为**向量空间同构(vector space isomorphism)**. 双射的向量空间自同态$T \in \mathrm{End}_K(V)$ 称为**向量空间自同构(vector space automorphism)**, 此时把$\mathrm{End}_K(V)$ 记为$\mathrm{Aut}_K(V)$ 并称为**V 的自同构群(automorphism group of V)**. 如果存在向量空间自同构$V \to W$, 则称V 和W 是**向量空间同构的(vector space isomorphic)**, 并记为$V \cong W$.

(1) 向量空间同态$\mathbf{T} : V \to W$ 是群同态$\mathbf{T} : (V, +) \to (W, +)$. 即我们有

$$\mathbf{T}(0) = 0, \quad \mathbf{T}(-v) = -\mathbf{T}(v), \quad v \in V.$$

定义$\mathbf{T}$ 的核为

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{T}) := \{v \in V | \mathbf{T}(v) = 0\} = \mathbf{T}^{-1}(0). \tag{1.5.32}$$

因此$\mathbf{T}$ 是单的当且仅当$\mathrm{Ker}(\mathbf{T}) = \{0\}$.

(2) 假设U, V, W 是K-向量空间. 则得到

$$\mathbf{T} \circ \mathbf{S} \in \mathrm{Hom}_K(U, W), \quad \forall\, \mathbf{S} \in \mathrm{Hom}_K(U, V), \quad \mathbf{T} \in \mathrm{Hom}_K(V, W).$$

(3) 仅包含单个向量0 的**平凡向量空间(trivial vector space)** 记为0.

(4) K-向量空间V 的非空子集U 称为**子空间(subspace)** 如果下面成立:

(SS_1) U 是$(V, +)$ 的子群;

(SS_2) U 在乘法下是封闭的: $K \cdot U \subset U$.

即, U 是V 的子空间当且仅当U 在V 的两个运算下都是封闭的,

$$U + U \subset U, \quad K \cdot U \subset U.$$

(5) 假设V, W 是K-向量空间, $\mathbf{T} : V \to W$ 是K-线性映射. 则$\mathrm{Ker}(\mathbf{T})$ 和$\mathrm{Im}(\mathbf{T})$ 分别是V 和W 的子空间.

例1.5.45. (1) 令X 是非空集合, V 是K-向量空间. 则V^X 在下面运算

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x), \quad x \in X, \quad \lambda \in K, \quad f, g \in V^X,$$

下是K-向量空间. 特别地, 对每个$m \in \mathbb{N}_*$, K^m 在下面运算

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} := (x^1 + y^1, \cdots, x^m + y^m), \quad \lambda x := (\lambda x^1, \cdots, \lambda x^m)$$

下是K-向量空间, 这里$\lambda \in K$, $x = (x^1, \cdots, x^m), y = (y^1, \cdots, y^m) \in K^m$. 显然$K^1 = K$.

(2) 令$V_1, \cdots, V_m$ 都是K-向量空间. 则$V_1 \times \cdots \times V_m$ 在下面运算

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} := (v^1 + w^1, \cdots, v^m + w^m), \quad \lambda \boldsymbol{v} := (\lambda v^1, \cdots, \lambda v^m)$$

下是K-向量空间, 称为**乘积空间(product space)**, 这里$\boldsymbol{v} = (v^1, \cdots, v^m) \in V$, $\boldsymbol{w} = (w^1, \cdots, w^m) \in V$ 和$\lambda \in K$.

(3) 假设V, W 是K-向量空间. 则$\mathrm{Hom}_K(V, W)$ 是W^V 的子空间.

(4) 若U 是K-向量空间$V = (V, +, \cdot)$ 的子空间, 则$(V, +)/U$ 是Abelian 群且

$$K \times (V, +)/U \longrightarrow (V, +)/U, \quad (\lambda, x + U) \longmapsto \lambda x + U \tag{1.5.33}$$

是有定义的且满足(VS_2) 和(VS_2). 从而$(V, +)/U$ 是K-向量空间, 称为V **模U 的商空间(quotient space of V modulo U)** 并简记为V/U. 商同态

$$\pi : V \longrightarrow V/U, \quad x \longmapsto [x] := x + U \tag{1.5.34}$$

是K-线性映射.

(5) 如果$\mathbf{T} \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ 是K-向量空间V 和W 间的K-线性映射, 则存在唯一的K-线性映射

$$\widehat{\mathbf{T}} : V/\mathrm{Ker}(\mathbf{T}) \longrightarrow W$$

使得下面的图

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathbf{T}"] \arrow[d, "\pi"'] & W \\ V/\mathrm{Ker}(\mathbf{T}) \arrow[r, equal] & V/\mathrm{Ker}(\mathbf{T}) \arrow[u, "\widehat{\mathbf{T}}"'] \end{tikzcd}$$

可交换. 进一步, $\widehat{\mathbf{T}}$ 是单的和$\mathrm{Im}(\widehat{\mathbf{T}}) = \mathrm{Im}(\mathbf{T})$.

证: 定义$\widehat{\mathbf{T}}(x + \mathrm{Ker}(\mathbf{T})) := \mathbf{T}(x)$, 则得到$\widehat{\mathbf{T}} \circ \pi = \mathbf{T}$. 显然$\widehat{\mathbf{T}}$ 是K-线性的且$\mathrm{Im}(\widehat{\mathbf{T}}) = \mathrm{Im}(\mathbf{T})$.如果$\widehat{\mathbf{T}}(x) = \widehat{\mathbf{T}}(y)$, 则

$$\mathbf{T}(x) = \mathbf{T}(y) \quad \Longrightarrow \quad y - x \in \mathrm{Ker}(\mathbf{T})$$

和$x + \mathrm{Ker}(\mathbf{T}) = y + \mathrm{Ker}(\mathbf{T})$, 故$\widehat{\mathbf{T}}$ 是单的.

(6) 令$\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是K-向量空间V 的一族子空间. 则$\cap_{\alpha \in A} U_\alpha$ 是V 的子空间.

(7) 如果M 是K-向量空间V 的子集, 则

$$\mathrm{span}(M) := \bigcap \{U : U \text{ 是 } V \text{ 的子空间和 } U \supset M\}$$

是V 中包含M 的最小子空间, 称为**由M 所张成的子空间(subspace spanned by M)**.

(8) 如果U_1, U_2 是K-向量空间V 的子空间, 则$U_1 \times U_2$ 在加法运算下的像集是V 的子空间, 称为U_1 和U_2 的**和(sum)** 并记为$U_1 + U_2$. 称和是**直和(direct sum)** 如果$U_1 \cap U_2 = \{0\}$, 此时记为$U_1 \oplus U_2$.

(9) 如果U 是K-向量空间V 的子空间而$\mathbf{T} \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$, 则$\mathbf{T}|_U \in \mathrm{Hom}_K(U, W)$. 特别地, 当$V = W$ 时, U 称为**$\mathbf{T}$-不变的(invariant under T)** 如果$\mathbf{T}(U) \subset U$.

假设V 是K-向量空间而E 是非空集合. 则称E 是V **上的仿射空间(affine space over V)** 如果存在映射

$$+ : V \times E \longrightarrow E, \quad (v, P) \longmapsto P + v \tag{1.5.35}$$

满足如下条件:

(AS_1) $P + 0 = P, P \in E$;

(AS_2) $P + (v + w) = (P + v) + w, P \in E, v, w \in V$;

(AS_3) 对每对$(P, Q) \in E \times E$ 存在唯一的向量$v \in V$ 使得$Q = P + v$ 成立.

由(AS_3) 确定的唯一向量v 记为$\overline{PQ}$, 它满足

$$Q = P + \overline{PQ}.$$

根据(AS_1) 得到$\overline{PP}=0$, 而根据(AS_2) 映射

$$E\times E\longrightarrow V,\quad (P,Q)\longmapsto \overline{PQ} \tag{1.5.36}$$

满足

$$\overline{PQ}+\overline{QR}=\overline{PR},\quad P,Q,R\in E.$$

从而得到

$$\overline{PQ}=-\overline{QP},\quad P,Q\in E.$$

对每个$v\in V$, 映射

$$\tau_v: E\longrightarrow E,\quad P\longmapsto P+v \tag{1.5.37}$$

称为v **的平移(translation by v)**. 则所有平移在复合运算下构成了群.

假设V,W 是K-向量空间. 映射$\alpha: V\to W$ 称为**仿射的(affine)** 如果存在K-线性映射$\mathbf{A}: V\to W$ 满足

$$\alpha(v_1)-\alpha(v_2)=\mathbf{A}(v_1-v_2),\quad v_1,v_2\in V. \tag{1.5.38}$$

性质1.5.46. *$\alpha: V\to W$ 是仿射的当且仅当存在$w\in W$ 和K-线性映射$\mathbf{A}\in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ 满足*

$$\alpha(v)=w+\mathbf{A}(v),\quad v\in V. \tag{1.5.39}$$

进一步得到$\mathbf{A}$ 由α 所唯一确定, 反之α 由$\mathbf{A}$ 和$\alpha(0)$ 所唯一确定.

证: 假设$\alpha: V\to W$ 是仿射的. 则$\alpha(v)=\mathbf{A}(v)+\alpha(0)$. 反之, 假设(1.5.39) 成立则$\alpha(v_1)-\alpha(v_2)=\mathbf{A}(v_1)-\mathbf{A}(v_2)=\mathbf{A}(v_1-v_2)$. □

♠ **代数.** 假设X 为非空集合, K 是域. 则K^X 存在环结构

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\quad (fg)(x)=f(x)g(x),\quad f,g\in K^X,\quad x\in X,$$

和K-向量空间结构

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\quad (\lambda f)(x)=\lambda f(x),\quad f,g\in K^X,\quad x\in X,\quad \lambda\in K.$$

而且, 环乘和数乘在如下意义

$$(\lambda f)(\mu g)=(\lambda\mu)fg,\quad f,g\in K^X,\quad \lambda,\mu\in K$$

下是相容的.

K-向量空间$\mathcal{A}$ 和运算

$$\odot: \mathcal{A}\times\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A},\quad (a,b)\longmapsto a\odot b \tag{1.5.40}$$

称为**K-代数(K-algebra**, 如果满足下面条件

(A_1) $(\mathcal{A},+,\odot)$ 是环;

(A_2) 分配律成立:

$$(\lambda a+\mu b)\odot c=\lambda(a\odot c)+\mu(b\odot c),\quad a\odot(\lambda b+\mu c)=\lambda(a\odot b)+\mu(a\odot c)$$

对任意$a,b,c\in\mathcal{A}$ 和$\lambda,\mu\in K$ 成立.

一般来说, K-代数既不是交换的也不包含单位元.

例1.5.47. (1) 令X 是非空集合. 则K^X 是交换K-代数且包含单位元.

(2) 令V 是K-向量空间. 则$\mathrm{End}_K(V)$ 在环乘下是K-代数:

$$(\mathbf{A}\circ\mathbf{B})(x):=\mathbf{A}(\mathbf{B}(x)),\quad \mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathrm{End}_K(V),\quad x\in V.$$

而且$\mathbf{I}:=\mathrm{Id}_V$ 是$\mathrm{End}_K(V)$ 的单位元. 称$\mathrm{End}_K(V)$ 为V 的**K-自同态代数(endomorphism algebra of V)**, 但是其不一定是交换的.

§1.5.10 自然数、有理数和实数的公理系统

本节主要参考Amann-Escher 的教材, 以及Hardy 的书(见**参考文献** §1.7).

♣ **自然数.** 在1888年, Dedekind 在其著作《Was sind and was sollen die Zahlen?》给出了自然数系统的集合论基础. 在本小节我们在Peano 的自然数公理系统基础上, 构造出有理数、实数和复数.

自然数(natural numbers) 包含集合$\mathbb{N}$, 固定点$0\in\mathbb{N}$, 和映射$\nu:\mathbb{N}\to\mathbb{N}_*:=\mathbb{N}\setminus\{0\}$, 满足如下性质:

(N_0) ν 是单射;

(N_1) 如果$N\subset\mathbb{N}$ 是包含0 的子集且$\nu(n)\in N$ 对所有$n\in N$ 都成立, 则$N=\mathbb{N}$.

注1.5.48. (1) 对任意$n\in\mathbb{N}$, $\nu(n)$ 称为n **的后继(successor of n)** 而把ν 称为**后继函数(successor function)**. 易证$\nu:\mathbb{N}\to\mathbb{N}_*$ 是满的从而结合(N_0) 映射ν 是双的. 事实上, 令

$$N:=\{n\in\mathbb{N}|\text{存在 }n'\in\mathbb{N}\text{ 满足 }\nu(n')=n\}\cup\{0\}=\mathrm{Im}(\nu)\cup\{0\}.$$

对任意$n\in N$ 有$\nu(n)\in\mathrm{Im}(\nu)\subset N$. 根据$(N_1)$ 得到$N=\mathbb{N}$ 和$\mathrm{Im}(\nu)=\mathbb{N}_*$.

(2) 我们把$0,\nu(0),\nu(\nu(0)),\cdots$ 写成$0,1,2,\cdots$.

(3) 是否存在三元组$(\mathbb{N},0,\nu)$ 使得Peano 公理化成立, 即是否存在自然数的**模型(model)**? 这样的三元组有多少个? 为了回答这两个基本问题, 我们引入如下概念. 集合M 称为**无限系统(infinite system)** 如果存在单映射$f:M\to M$ 满足$f(M)\neq M$. 显然如果$\mathbb{N}$ 存在必是一个无限系统. Dedekind 证明了任何

无限系统包含自然数$(\mathbb{N},0,\nu)$, 因此自然数的存在性可归结于无限系统的存在性. 一个特殊的无限系统是所谓的**归纳集(inductive set)**, 即包含$\emptyset$ 的集合N 且对任意$z\in N$ 满足$z\cup\{z\}\in N$. 考虑集合

$$\mathbb{N}:=\bigcap\{m|m\text{ 是归纳集}\}$$

和映射$\nu:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, z\mapsto z\cup\{z\}$. 最后定义$0:=\emptyset$. 可以证明$\mathbb{N}$ 本身是归纳集且$(\mathbb{N},0,\nu)$ 满足Peano 公理化. 从而得到自然数的一个模型$(\mathbb{N},0,\nu)$.

如果$(\mathbb{N}',0',\nu')$ 是自然数的另一个模型, 则可以证明存在双射$\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}'$ 满足

$$\varphi(0)=0',\quad \varphi\circ\nu=\nu'\circ\varphi.$$

称φ 是$(\mathbb{N},0,\nu)$ 到$(\mathbb{N}',0',\nu')$ 的同构. 因此, 自然数在同构意义下是唯一的.

从Peano 公理化我们可以推出关于自然数$(\mathbb{N},0,\nu)$ 的算术性质.

定理1.5.49. $(\mathbb{N},0,\nu)$ 上存在加法运算$+$, 乘法运算$\cdot$ 和偏序$\leq$ 满足下面性质:

(1) 加法运算是结合的和交换的, 且有单位元0;

(2) 乘法运算是结合的和交换的, 且有单位元$1:=\nu(0)$;

(3) 分配律成立:

$$(\ell+m)\cdot n=\ell\cdot n+m\cdot n,\quad \ell,m,n\in\mathbb{N};$$

(4) $0\cdot n=0$ 且对任意$n\in\mathbb{N}$ 都有$\nu(n)=n+1$;

(5) $(\mathbb{N},\leq)$ 是全序集且$0=\min\mathbb{N}$;

(6) 对任何$n\in\mathbb{N}$ 不存在$k\in\mathbb{N}$ 满足$n<k<n+1$;

(7) 对所有$m,n\in\mathbb{N}$ 有

$$\begin{aligned} m\leq n &\iff \text{存在 } d\in\mathbb{N}\text{ 满足 } m+d=n,\\ m<n &\iff \text{存在 } d\in\mathbb{N}_*\text{ 满足 } m+d=n.\end{aligned}$$

元素d 是唯一的, 称为n 与m 的差, 并记为$d:=n-m$;

(8) 对所有$m,n\in\mathbb{N}$ 有

$$\begin{aligned} m\leq n &\iff m+\ell\leq n+\ell,\quad \forall\,\ell\in\mathbb{N},\\ m<n &\iff m+\ell<n+\ell,\quad \forall\,\ell\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

(9) 对所有$m,n\in\mathbb{N}_*$ 有$m\cdot n\in\mathbb{N}_*$;

(10) 对所有$m, n \in \mathbb{N}$ 有

$$
\begin{aligned}
m \le n &\iff m \cdot \ell \le n \cdot \ell, \quad \forall\, \ell \in \mathbb{N}_*, \\
m < n &\iff m \cdot \ell < n \cdot \ell, \quad \forall\, \ell \in \mathbb{N}_*.
\end{aligned}
$$

进一步, 满足上述性质的加法、数乘和偏序都是唯一的.

为了方便起见, 把$m \cdot n$ 记为mn. 上述定理表明$\mathbb{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot)$, 除了不存在加法逆元外, 是带单位元的交换环.

假设Z 是包含$\mathbb{N}$ 的环并假设Z 上的环运算限制到$\mathbb{N}$ 上给出了$\mathbb{N}$ 上的运算. 则对所有$(m, n) \in \mathbb{N}^2 := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 差$m - n$ 属于Z, 且

$$
m - n = m' - n' \iff m + n' = m' + n, \quad \forall\, (m', n') \in \mathbb{N}^2. \tag{1.5.41}
$$

对$m - n$ 和$m' - n'$ 定义和

$$
(m - n) + (m' - n') := (m + m') - (n + n') \tag{1.5.42}
$$

与积

$$
(m - n) \cdot (m' - n') := (mm' + nn') - (mn' + m'n). \tag{1.5.43}
$$

定理1.5.50. *存在满足性质*

(1) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, 和

(2) $\mathbb{Z}$ 上的环运算限制到$\mathbb{N}$ 上给出了$\mathbb{N}$ 上的运算,

且带单位元的最小整环$\mathbb{Z}$. 在同构意义下满足上述性质的环$\mathbb{Z}$ 是唯一的, 称为 **整数环(ring of integers)**.

证: 受(1.5.41) 启发, 在$\mathbb{N}^2$ 上定义等价关系如下

$$
(m, n) \sim (m', n') \iff m + n' = m' + n
$$

并令$\mathbb{Z} := \mathbb{N}^2 / \sim$. 根据定理1.5.49, $\sim$ 是等价关系. 在$\mathbb{Z}$ 上定义加法和乘法如下:

$$
\begin{aligned}
[(m, n)] + [(m', n')] &:= [(m + m', n + n')], \\
[(m, n)] \cdot [(m', n')] &:= [(m + m', n + n')].
\end{aligned}
$$

根据**定理1.5.49** 可知$\mathbb{Z} := (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ 是交换环且没有零除子. 显然$\mathbb{Z}$ 中的零元和单位元分别是$[(0, 0)]$ 和$[(1, 0)]$.

映射

$$
\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad m \longmapsto [(m, 0)] \tag{1.5.44}
$$

是单的且和$\mathbb{N}$与$\mathbb{Z}$上的加法、乘法运算是相容的

$$[(m,0)]+[(n,0)]=[(m+n,0)],\quad [(m,0)]\cdot[(n,0)]=[(m\cdot n,0)].$$

因此$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$, 且$\mathbb{Z}$上的运算限制在$\mathbb{N}$上给出了$\mathbb{N}$上的运算.

最后证明唯一性. 令$R\supset\mathbb{N}$是任意带单位元的交换环且没有零除子, 使得R上的运算限制到$\mathbb{N}$上给出了$\mathbb{N}$上的运算. 根据构造得到单射$\mathbb{Z}\to R$, 故$\mathbb{Z}$是最小的. 如果还有一个这样的最小整环$\mathbb{Z}'$, 则最小性推出$\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}'$. □

$\mathbb{Z}$中的元素称为**整数(integers)**, 并令

$$-\mathbb{N}_*:=\{-n|n\in\mathbb{N}_*\}$$

为负整数所构成的集合. 显然有$\mathbb{Z}=\mathbb{N}_*\cup\{0\}\cup-\mathbb{N}_*=\mathbb{N}\cup-\mathbb{N}_*$, 这是因为存在映射

$$\mathbb{N}_*\longrightarrow\mathbb{Z},\quad -n\longmapsto[(0,n)].$$

如果$[(m,0)]=[(0,n)]$, 则$m+n=0$从而得到$m=n=0$, 但这是不可能的! 因此$\mathbb{N}\cup-\mathbb{N}_*\subset\mathbb{Z}$. 反之, 由于$[(m,n)]=[(m,0)]+[(0,n)]$得到$\mathbb{Z}\subset\mathbb{N}\cup-\mathbb{N}_*$.

♣ **有理数.** 我们来构造"最小的"域$\mathbb{Q}\supset\mathbb{Z}$使得$\mathbb{Z}$是其子环. 定义$\mathbb{Z}_*:=\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

定理1.5.51. *在同构意义下, 存在唯一的最小域$\mathbb{Q}$使得$\mathbb{Z}$是其子环.*

证: 思路和证明**定理1.5.50**一样, 定义$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_*$上的等价关系

$$(a,b)\sim(a',b')\quad\Longleftrightarrow\quad ab'=a'b$$

并令$\mathbb{Q}:=(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_*)/\sim$. 定义$\mathbb{Q}$上的加法和乘法运算如下

$$[(a,b)]+[(a',b')]:=[(ab'+a'b,bb')],\quad [(a,b)]\cdot[(a',b')]:=[aa',bb'].$$

则易证$\mathbb{Q}:=(\mathbb{Q},+,\cdot)$是域. 映射

$$\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Q},\quad z\longmapsto[(z,1)] \tag{1.5.45}$$

是单的环同态, 从而可以把$\mathbb{Z}$作为$\mathbb{Q}$的子环. 最小性和唯一性的证明和上面定理类似. □

$\mathbb{Q}$中的元素称为**有理数(rational numbers)**, 并按照通常写法记为a/b. 易证

$$r\in\mathbb{Q}\quad\Longleftrightarrow\quad\exists\,(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}_*\text{ 满足 }r=\frac{p}{q}.$$

性质1.5.52. (1) 自然数集$\mathbb{N}$ 是良序的, 即$\mathbb{N}$ 的每个非空子集都有最小元.

(2) 任意$r \in \mathbb{Q}$ 都有唯一的表示$r = p_0/q_0$.

证: (1) 假设$A \subset \mathbb{N}$ 是非空子集但没有最小元. 令

$$B := \{n \in \mathbb{N} | n \text{ 是 } A \text{ 的下界}\}.$$

则$0 \in B$. 假设$n \in B$. 因为A 没有最小元, 所以$n \notin A$; 故对所有$a \in A$ 都有$a > n$. 这意味着$a \geq n+1$ 对所有$a \in A$ 都成立, 即$n+1 \in B$. 根据(N_1) 的都$B = \mathbb{N}$. 但是此时必有$A = \emptyset$, 因为如果$m \in A$ 则$m \in \mathbb{N} = B$ 从而m 是A 的下界; 而$m \in A$, 故m 是A 的最小元. 矛盾!

(2) 考虑$\mathbb{N}$ 中的子集

$$\left\{q \in \mathbb{N}_* : \exists\, p \in \mathbb{Z} \text{ 满足 } \frac{p}{q} = r\right\}.$$

因为$\mathbb{N}$ 是良序的, 所以上述子集存在唯一的最小元$q_0 := q_0(r)$. 最后令$p_0 := p_0(r) = rq_0(r)$. □

域K 和其上的序$\leq$ 称为**有序域(ordered field)** 如果满足下面性质:

(OF_0) $(K, \leq)$ 是全序的;

(OF_1) $x < y \Longrightarrow x + z < y + z, z \in K$;

(OF_2) $x, y > 0 \Longrightarrow xy > 0$.

这里的符号说明如下:

$$\begin{aligned} x \geq y &\iff y \leq x, \\ x < y &\iff x \leq y \text{ 且 } x \neq y, \\ x > y &\iff y < x. \end{aligned}$$

假设$(K, \leq)$ 是有序域. 这样的话, 对K 中的任意x, y 要么$x < y$, 要么$x = y$, 要么$x > y$ 三者择其一. 称$x \in K$ 为**正的(positive)** 如果$x > 0$, 为**负的(negative)** 如果$x < 0$. 定义**绝对值函数(absolute value function)** $|\cdot| : K \to K$ 和**符号函数(sign function)** $\mathrm{sgn} : K \to K$ 为

$$|x| := \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases} \qquad \mathrm{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

性质1.5.53. 假设$(K, \leq)$ 是有序域且$x, y, a, b, \epsilon \in K$.

(1) $x > y \Longleftrightarrow x - y > 0$;

(2) $x > y$ 和$a > b \Longrightarrow x + a > y + b$;

(3) $a > 0$ 和$x > y \Longrightarrow ax > ay$;

(4) $x > 0 \Longrightarrow -x > 0$; $x < 0 \Longrightarrow -x > 0$;

(5) 若$x > 0$, 则$xy > 0$ 如果$y > 0$, 和$xy < 0$ 如果$y < 0$;

(6) $a < 0$ 和$x > y \Longrightarrow ax < ay$;

(7) 对任何$x \in K_*$ 有$x^2 > 0$; 特别地$1 > 0$;

(8) $x > 0 \Longrightarrow x^{-1} > 0$;

(9) $x > y > 0 \Longrightarrow 0 < x^{-1} < y^{-1}$ 和$xy^{-1} > 1$;

(10) $x = |x|\text{sgn}(x)$ 和$|x| = x\text{sgn}(x)$;

(11) $|x| = |-x|$ 和$x \leq |x|$;

(12) $|xy| = |x||y|$;

(13) $|x| \geq 0$ 和$|x| = 0$ 当且仅当$x = 0$;

(14) $|x - a| < \epsilon \Longleftrightarrow a - \epsilon < x < a + \epsilon$;

(15) $|x + y| \leq |x| + |y|$;

(16) $|x - y| \geq ||x| - |y||$.

证: (1) – (7) 和(10) – (14) 显然成立. 对(8), 如果$x^{-1} \leq 0$ 则根据(5) 得到$1 = xx^{-1} \leq 0$, 这和(7) 相矛盾! 因此$x^{-1} > 0$.

(9) 假设$x > y > 0$. 则$x - y, x^{-1}, y^{-1} > 0$. 故

$$0 < (x - y)x^{-1}y^{-1} = y^{-1} - x^{-1} \quad \Longrightarrow \quad x^{-1} < y^{-1}$$

和

$$0 < (x - y)y^{-1} = xy^{-1} - 1 \quad \Longrightarrow \quad xy^{-1} > 1.$$

(15) 如果$x + y \geq 0$, 则根据(11) 得到

$$|x + y| = x + y \leq |x| + |y|.$$

如果$x + y < 0-$, 则$-(x + y) > 0$ 和

$$|x + y| = |-(x + y)| = |(-x) + (-y)| \leq |-x| + |-y| = |x| + |y|.$$

(16) 应用(15) 到$x = (x-y)+y$ 得到

$$|x| \le |x-y| + |y| \quad \Longrightarrow \quad |x| - |y| \le |x-y|.$$

把x 和y 位置换下得到$|y| - |x| \le |y-x| = |x-y|$. □

根据性质1.5.52 在$\mathbb{Q}$ 上定义序$\le$ 为

$$\frac{m}{n} \le \frac{m'}{n'} \quad \Longleftrightarrow \quad m'n - mn' \in \mathbb{N}, \quad m, m' \in \mathbb{Z}, \quad n, n' \in \mathbb{N}_*.$$

则易证$(\mathbb{Q}, \le)$ 是有序域且$\mathbb{Q}$ 的序关系限制到$\mathbb{N}$ 上就是$\mathbb{N}$ 上的序关系.

♣ **实数.** 全序集$(X, \le)$ 称为**序完备的(order complete)** 如果X 的每个非空有上界子集都有上确界.

性质1.5.54. *假设$(X, \le)$ 是全序集. 则下列命题等价:*

(1) *$(X, \le)$ 是序完备的;*

(2) *X 的每个非空有下界子集都有下确界;*

(3) *对满足条件$a \le b$, $(a, b) \in A \times B$, 的X 所有非空子集A, B, 存在$c \in X$ 使得$a \le c \le b$ 对任何$(a, b) \in A \times B$ 都成立.*

因此, 全序集是序完备的当且仅当每个非空有界子集都有上确界和下确界.

证: (1) $\Longrightarrow$ (2): 假设A 是X 的非空有下界子集, 令

$$B := \{x \in X | x \le a, \ \forall\, a \in A\}.$$

则B 是非空的且任何$a \in A$ 都是B 的上界. 根据假设$m := \sup B$ 存在, 从而有$m \le a$ 对任何$a \in A$ 都成立. 故根据B 的定义得到$m \in B$ 和$m = \max B = \inf A$.

(2) $\Longrightarrow$ (3): 假设A 和B 是X 的非空子集使得$a \le b$ 对任何$(a, b) \in A \times B$ 都成立. 每个$a \in A$ 都是B 的下界, 从而根据假设可知$c = \inf B$ 存在. 因此$a \le c \le b$ 对任何$a \in A$ 和$b \in B$ 都成立.

(3) $\Longrightarrow$ (1): 假设A 是X 的非空有上界子集, 令

$$B := \{b \in X | b \ge a, \ \forall\, a \in A\}.$$

则根据假设存在$c \in X$ 使得$a \le c \le b$ 对所有$a \in A$ 和$b \in B$ 都成立. 故$c = \min B = \sup A$. □

称(3) 为**Dedekind 分割性质(Dedekind cut property)**. 我们接下来给出Dedekind 关于实数的构造.

定理1.5.55. *在同构意义下, 存在唯一的序完备扩域$\mathbb{R}\supset\mathbb{Q}$. 这个扩域称为***实数域**.

证: 这里我们给出Dedekind 的原始证明, 而另一个证明, 归功于Cantor, 将在第二章给出. 令$\mathbb{R}\subset 2^{\mathbb{Q}}$ 为满足如下性质

(D_1) $R\neq\emptyset, R^{\complement}:=\mathbb{Q}\setminus R\neq\emptyset$,

(D_2) $R^{\complement}=\{x\in Q|x<r, \forall\, r\in R\}$,

(D_3) R 没有最小元,

的所有$R\subset\mathbb{Q}$ 构成的集合. 定义映射

$$\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{R},\quad r\longmapsto\{x\in\mathbb{Q}|x>r\}. \tag{1.5.46}$$

则(1.5.46) 是单的且可以把$\mathbb{Q}$ 看成$\mathbb{R}$ 的子集.

(1) $\mathbb{R}$ 是全序集. 定义$\mathbb{R}$ 上的序关系如下:

$$R\leq R' \quad\Longleftrightarrow\quad R\supseteq R'. \tag{1.5.47}$$

易证$\leq$ 是$\mathbb{R}$ 上的偏序. 为证$\leq$ 是全序的, 任取不同的元素$R, R'\in\mathbb{R}$. 则存在$r\in R$ 满足$r\in(R')^{\complement}$, 或者存在$r'\in R'$ 满足$r'\in R^{\complement}$. 对$r\in R$ 有$r<r'$ 对任何$r'\in R'$ 都成立, 从而$r'\in R$ (否则的话$r'\in R^{\complement}$ 推出$r'<r$ 对任何$r\in R$ 都成立, 矛盾) 只要$r'\in R'$; 即$R'\subseteq R$. 对$r'\in R^{\complement}$ 有$r'<r$ 对所有$r\in R$ 都成立, 从而$r\in R'$ 只要$r\in R$; 即$R\subseteq R'$.

(2) $\mathbb{R}$ 是序完备的. 根据**性质1.5.54** 只要说明$\mathbb{R}$ 的每个非空有下界子集$\mathcal{R}$ 都有下确界. 则存在$A\in\mathbb{R}$ 使得对任意$R\in\mathcal{R}$ 都有$R\subseteq A$. 令

$$S:=\bigcup_{R\in\mathcal{R}}R.$$

则$S\neq\emptyset$, $S\subseteq A$, 且$\emptyset\neq A^{\complement}\subseteq S^{\complement}$; 所以$S$ 满足(D_1). 因为

$$x\in S^{\complement}\Longleftrightarrow x\notin R,\quad\forall\, R\in\mathcal{R}\Longleftrightarrow x\in R^{\complement}\Longleftrightarrow x<r, \forall\, r\in R,$$

所以S 满足(D_2). 显然S 满足(D_3), 从而$S\in\mathbb{R}$ 且$S=\inf\mathcal{R}$.

(3) $\mathbb{R}$ 是Abelian 群. 定义$\mathbb{R}$ 上的加法如下

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\quad (R,S)\longmapsto R+S:=\{r+s|r\in R,\ s\in S\}.$$

因为$R, S\neq\emptyset$, 所以$R+S\neq\emptyset$. 我们断言

$$R^{\complement}+S^{\complement}\subseteq(R+S)^{\complement}.$$

取$r'\in R^{\complement}$ 和$s'\in S^{\complement}$, 但$r'+s'\in R+S$. 则得到$r'+s'=\widetilde{r}+\widetilde{s}$, 这里$\widetilde{r}\in R$ 和$\widetilde{s}\in S$. 根据定义得到$r'<\widetilde{r}$ 和$s'<\widetilde{s}$, 从而有

$$\widetilde{r}-r'>0,\quad \widetilde{s}-s'>0,\quad (\widetilde{r}-r')+(\widetilde{s}-s')=0.$$

上述矛盾表明$r'+s'\in(R+S)^{\complement}$. 因此$(R+S)^{\complement}\neq\emptyset$, 故$R+S$ 满足(D_1). 而显然$R+S$ 满足(D_2) 和(D_3). 因此$R+S\in\mathbb{R}$ 从而上述加法是有定义的. 根据$\mathbb{Q}$ 的性质得到$+$ 是结合的和交换的.

$(\mathbb{R},+)$ 的单位元为$O:=\{x\in\mathbb{Q}|x\geq 0\}$ 且$R\in\mathbb{R}$ 的加法逆元为$-R:=\{x\in\mathbb{Q}|x+r\geq 0,\ \forall\, r\in R\}$. 首先有$R+O\subseteq R$, 这是因为如果$r+x\in R+O$ 但$r+x\in R^{\complement}$, 则得到$r+x<\widetilde{r}$ 对所有$\widetilde{r}\in R$ 都成立. 特别地取$\widetilde{r}=r$ 得到$x<0$, 矛盾. 再证$R\subseteq R+O$; 从$r\in R$ 推出存在$\widetilde{r}\in R$ 满足$r\geq\widetilde{r}$, 故$r=\widetilde{r}+(r-\widetilde{r})\in R+O$. 显然$O\in\mathbb{R}$ 和$-R\in\mathbb{R}$. 为了证明$R+(-R)\subseteq O$, 任取$r\in R$ 和$x\in -R$, 并假设$r+x\in O^{\complement}$. 因此$r+x<\widetilde{r}$ 对任何$\widetilde{r}\in O$ 都成立, 即$r+x<\widetilde{r}$ 对任何$\widetilde{r}\geq 0$ 都成立. 另一方面, 从$r\in R$ 推出$r\geq r_0$ 对某个$r_0\in R$ 成立; 若取$\widetilde{r}:=r-r_0\in O$, 我们得到$r+x<r-r_0$ 即$x+r_0<0$, 这和$x\in -R$ 矛盾! 为了证明$O\subset R+(-R)$, 任取$r\in O$ 但$r\in(R+(-R))^{\complement}$. 则$r<\widetilde{r}+x$ 对任意$\widetilde{r}\in R$ 和$x\in -R$ 都成立. 从而$\widetilde{r}>r-x$ 和R 有最小元, 矛盾!

最后来证明$R>O$ 当且仅当$-R<O$. 首先假设$R>O$ 即$R\subset O$, 且$r\in O$. 为了证明$-R<O$ 只要说明$r\in -R$. 对任意$\widetilde{r}\in R$ 得到$\widetilde{r}\in O$, 因此$\widetilde{r}\geq 0$ 和$0\in -R$. 若$r\in(-R)^{\complement}$, 则有$r<x$ 对任意$x\in -R$ 都成立, 特别地得到$r<0$, 矛盾! 所以$r\in -R$. 反之, 假设$-R\supseteq O$ 并取$r\in R$. 由于$0\in O$ 得到$0\in -R$, 因此$0\leq 0+\widetilde{r}=\widetilde{r}$ 对任意$\widetilde{r}\in R$ 都成立. 所以$\widetilde{R}\subseteq O$, 即$R>O$.

(4) R 是包含$\mathbb{Q}$ 的有序域使得$\mathbb{Q}$ 是其子域且$\mathbb{R}$ 上的序关系限制到$\mathbb{Q}$ 上得到了$\mathbb{Q}$ 上的序关系. 定义$\mathbb{R}$ 上的乘法为

$$R\cdot R':=\{rr'\in\mathbb{Q}|r\in R,\ r'\in R'\},\quad \text{若 } R,R'\geq O$$

和

$$R\cdot R':=\begin{cases}-((-R)\cdot R'), & R<O,\ R'\geq O,\\ -(R\cdot(-R')), & R\geq O,\ R'<O,\\ (-R)\cdot(-R'), & R<O,\ R'<O.\end{cases}$$

作为练习易证$\mathbb{R}:=(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$ 是有序域.

(5) 唯一性. 令$\mathbb{S}$ 是另一个序完备的$\mathbb{Q}$ 扩域. 定义映射为

$$\mathbb{S}\longrightarrow\mathbb{R},\quad r\longmapsto\{x\in\mathbb{Q}|x>r\}.$$

可以证明这是递增的同构映射. 所以$\mathbb{R}$ 在同构意义下是唯一的. □

$\mathbb{R}$ 中的元素称为**实数(real numbers)**, 而$\mathbb{R}$ 上的序关系称为实数上的**自然关系(natural order)**. 这样就得到如下的序关系:

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}. \tag{1.5.48}$$

实数x 称为**正的(positive)** 或**负的(negative)** 如果$x>0$ 或$x<0$. 集合

$$\mathbb{R}_{+}:=\{x\in\mathbb{R}|x>0\}\quad 和\quad \mathbb{R}_{\geq 0}:=\{x\in\mathbb{R}|x\geq 0\}$$

分别称为正数集和非负数集. $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 中的元素称为**无理数(irrational numbers)**.

♣ **扩充实数.** 因为$\mathbb{R}$ 是全序的, 我们可以把实数可以看成**数轴线(number line)** 上的点, “x 在y 的左边” 表示$x<y$. 令

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}, \tag{1.5.49}$$

其中$\pm\infty\notin\mathbb{R}$ 是给定的符号. 若定义

$$-\infty < x < +\infty, \quad x\in\mathbb{R},$$

则$(\overline{\mathbb{R}},\le)$ 是全序集. 接下来我们把$\mathbb{R}$ 上的$+$ 和$\cdot$ 运算推广到$\overline{\mathbb{R}}$ 上来:

$$x+\infty \equiv x+(+\infty) := +\infty \quad x>-\infty, \quad x-\infty \equiv x+(-\infty) := -\infty \quad x<+\infty$$

和

$$x\cdot +\infty := \begin{cases} +\infty, & x>0, \\ -\infty, & x<0, \end{cases} \qquad x\cdot(-\infty) := \begin{cases} -\infty, & x>0, \\ +\infty, & x<0, \end{cases}$$

且对任何$x\in\mathbb{R}$ 定义

$$\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} := 0, \quad \frac{x}{0} := \begin{cases} +\infty, & x>0, \\ -\infty, & x<0. \end{cases}$$

除此之外, 我们还假设这些运算是交换的. 从而得到

$$+\infty+\infty = +\infty, \quad -\infty-\infty = -\infty, \quad +\infty\cdot+\infty = +\infty,$$

$$(-\infty\cdot(+\infty) = +\infty\cdot(-\infty) = -\infty, \quad (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty.$$

但是

$$+\infty-\infty, \quad 0\cdot(\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{+\infty}, \quad \frac{\pm\infty}{-\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{0}$$

都是没有定义的, 故$\overline{\mathbb{R}}$ 不是域.

性质1.5.56. (1) **(Archimedes)** *对每个$x\in\mathbb{R}$ 存在$n\in\mathbb{N}$ 使得$n>x$.*

(2) **(有理数在$\mathbb{R}$ 中稠密)** *对所有满足$a<b$ 的$a,b\in\mathbb{R}$ 存在$r\in\mathbb{Q}$ 满足$a<r<b$.*

(3) **(无理数在$\mathbb{R}$ 中稠密)** *对所有满足$a<b$ 的$a,b\in\mathbb{R}$ 存在$\xi\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 满足$a<\xi<b$.*

证: (1) 如果$x<0$ 则结论显然成立. 假设$x\ge 0$ 并令

$$A := \{n\in\mathbb{N} | n\le x\}.$$

则A 是非空的且有上界x. 根据Zorn 定理, $s:=\sup A\in\mathbb{R}$ 存在. 故存在$a\in A$ 满足$s-\frac{1}{2}<a$. 从而得到$s<n:=a+1$. 但此时根据s 地定义得到$n\notin A$ 和$n>x$.

(2) 因为$b-a>0$, 所以利用(1) 得到$n\in\mathbb{N}$ 满足$n>1/(b-a)>0$, 即$nb>na+1$. 再次利用(1) 可知存在$m_1,m_2\in\mathbb{N}$ 使得

$$m_1>na,\quad m_2>-na$$

成立, 即$-m_2<na<m_1$. 所以存在$m\in\mathbb{Z}$ 满足$m-1\le na<m$. 故

$$na<m\le 1+na<nb\quad\Longrightarrow\quad r:=m/n\in\mathbb{Q}.$$

(3) 根据(2) 存在$r_1,r_2\in\mathbb{Q}$ 满足$a<r_1<b$ 和$r_1<r_2<b$. 令

$$\xi:=r_1+\frac{r_2-r_1}{\sqrt{2}}.$$

则得到

$$r_1<\xi,\quad r_2-\xi=(r_2-r_1)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)>0.$$

即$a<r_1<\xi<r_2<b$. 如果$\xi\in\mathbb{Q}$, 必有$\sqrt{2}=(r_2-r_1)/(\xi-r_1)\in\mathbb{Q}$, 矛盾! □

§1.5.11 复数和* 代数学基本定理

本节主要参考Amann-Escher 的教材和Hardy 的书(见**参考文献** §1.7).

在$\mathbb{R}^2$ 定义加法和乘法运算如下

$$+:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2,\quad ((x,y),(a,b))\longmapsto(x+a,y+b)\tag{1.5.50}$$

和

$$\times:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2,\quad ((x,y),(a,b))\longmapsto(xa-yb,xb+ya)).\tag{1.5.51}$$

令

$$\mathbb{C}:=(\mathbb{R}^2,+,\cdot).\tag{1.5.52}$$

则易证$\mathbb{C}$ 是域, 加法单位元是$(0,0)$, 乘法单位元是$(1,0)$, (x,y) 的加法逆元为$-(x,y)=(-x,-y)$, (x,y) 的乘法逆元为$(x,y)^{-1}=x/(x^2+y^2),-y/(x^2+y^2))$. 进一步易证

$$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C},\quad x\longmapsto(x,0)\tag{1.5.53}$$

是单的同态, 从而可以把$\mathbb{R}$ 看成是$\mathbb{C}$ 的子域. 因为

$$(0,1)^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-(1,0),$$

所以$\mathbf{i}:=(0,1)\in\mathbb{C}$ 是方程$z^2=-1_{\mathbb{C}}$ 的解. 这样就证明了在同构意义下, $\mathbb{C}$ 是使得方程$z^2=-1$ 可解的$\mathbb{R}$ 的最小扩域.

$\mathbb{C}$ 中的元素称为**复数(complex numbers)**, 且对任何$z=(x,y)\in\mathbb{C}$ 有

$$z=(x,0)+(0,1)\cdot(y,0)=(x,0)+\mathbf{i}(y,0)=x+\mathbf{i}y,\quad x,y\in\mathbb{R}. \tag{1.5.54}$$

称$\mathrm{Re}(z):=x$ 为z 的**实部(real part)** 而把$\mathrm{Im}(z):=y$ 称为z 的**虚部(imaginary part)**. 这样复数z 的**复共轭(complex conjugate)** 定义为

$$\overline{z}:=x-\mathbf{i}y=\mathrm{Re}(z)-\mathbf{i}\,\mathrm{Im}(z). \tag{1.5.55}$$

$z\in\mathbb{C}_*:=\mathbb{C}\setminus 0$ 称为**纯虚(pure imaginary)** 如果$\mathrm{Re}(z)=0$. 易证

$$\mathrm{Re}(z)=\frac{z+\overline{z}}{2},\quad \mathrm{Im}(z)=\frac{z-\overline{z}}{2\mathbf{i}},\quad \overline{\overline{z}}=z,\quad z\cdot\overline{z}=x^2+y^2\geq 0,\quad \forall z\in\mathbb{C}. \tag{1.5.56}$$

我们通常记$\mathbb{K}$ 为域$\mathbb{R}$ 或$\mathbb{C}$.

注1.5.57. (1) 如果$z=x+\mathbf{i}y, w=u+\mathbf{i}v\in\mathbb{C}$, 则

$$z+w=(x+u)+\mathbf{i}(y+v),\quad z\cdot w=(xu-yv)+\mathbf{i}(xv+yu),\quad \frac{1}{z}=\frac{x-\mathbf{i}y}{x^2+y^2}.$$

进一步

$$\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w},\quad \overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}.$$

(2) 令X 是非空集合且$f:X\to\mathbb{C}$ 是复值函数. 则

$$\mathrm{Re}(f),\ \mathrm{Im}(f):X\longrightarrow\mathbb{R},\quad x\longmapsto \mathrm{Re}(f(x)),\ \mathrm{Im}(f(x)) \tag{1.5.57}$$

定义了实值函数, 称为f 的**实部(real part)** 和**虚部(imaginary part)**. 从而得到

$$f=\mathrm{Re}(f)+\mathbf{i}\,\mathrm{Im}(f). \tag{1.5.58}$$

(3) 由于$\mathbf{i}^2=-1<0$, 域$\mathbb{C}$ 不是有序的.

(4) 定义实值函数

$$|\cdot|:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{R}_{\geq 0},\quad z\longmapsto |z|:=\sqrt{z\cdot\overline{z}}. \tag{1.5.59}$$

则对任意$z,w\in\mathbb{C}$ 得到

$$|z\cdot w|=|z|\cdot|w|,\quad |\mathrm{Re}(z)|,\ |\mathrm{Im}(z)|\leq|z|,\quad |\overline{z}|=|z|,\quad |z|=0\iff z=0$$

和

$$|z\pm|\leq|z|+|w|,\quad |z-w|\geq||z|-|w||,\quad z^{-1}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

复数$z=x+\mathbf{i}y\in\mathbb{C}$ 的**极坐标形式(polar form)** 为

$$z=r(\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta), \tag{1.5.60}$$

其中(r,θ) 是(x,y) 的极坐标. 因为(r,θ) 和$(r,\theta+2\pi)$ 表示同一个复数, 我们把所有这样的θ 的集合称为z 的**辐角(argument)** 并记为$\arg(z)$,

$$\arg(z)=\mathrm{Arg}(z)+2\pi\mathbb{Z}, \tag{1.5.61}$$

其中$\mathrm{Arg}(z)$ 称为$\arg(z)$ 的**主值(principal value)**. 如果定义

$$e^{\mathbf{i}\theta}:=\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta, \tag{1.5.62}$$

则得到复数z 的**指数形式(exponential form)**

$$z=re^{\mathbf{i}\theta}. \tag{1.5.63}$$

因为

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{i}\theta_1}e^{\mathbf{i}\theta_2} &= (\cos\theta_1+\mathbf{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2+\mathbf{i}\sin\theta_2)\\ &= (\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathbf{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)\\ &= \cos(\theta_1+\theta_2)+\mathbf{i}\sin(\theta_1+\theta_2) = e^{\mathbf{i}(\theta_1+\theta_2)}, \end{aligned}$$

所以得到**de Moivre 公式(de Moivre's formula)**

$$(\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+\mathbf{i}\sin(n\theta),\quad n\in\mathbb{Z}. \tag{1.5.64}$$

如果$z_1=r_1e^{\mathbf{i}\theta_1}$ 和$z_2=r_2e^{\mathbf{i}\theta_2}$, 则

$$\arg(z_1z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2),\quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg(z_1)-\arg(z_2).$$

回忆二次方程

$$az^2+bz+c=0,\quad z\in\mathbb{C}, \tag{1.5.65}$$

的解:

$$z_1,z_2=\begin{cases}\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}\in\mathbb{R}, & D\geq 0,\\ \frac{-b\pm\mathbf{i}\sqrt{-D}}{2a}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}, & D<0,\end{cases} \tag{1.5.66}$$

其中$D:=b^2-4ac$. 如果$D<0$, 则$z_2=\overline{z_1}$.

考虑三次方程

$$x^3+ax^2+bx+c=0. \tag{1.5.67}$$

做变换$y:=x+\frac{a}{3}$ 得到

$$y^3+py+q=0,\quad p:=b-\frac{a^2}{3},\quad q:=\frac{4}{27}a^3-\frac{b}{3}a+c. \tag{1.5.68}$$

选择$d,u,v\in\mathbb{C}$ 满足

$$d^2=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3,\quad u^3=-\frac{q}{2}+d,\quad v^3=-\frac{q}{2}-d. \tag{1.5.69}$$

因为$(-3uv/p)^3=1$, 选择u 和v 使得$3uv=-p$. 令$\xi\neq 1$ 满足$\xi^3=1$. 从而

$$y_1:=u+v,\quad y_2:=\xi u+\xi^2 v,\quad y_3:=\xi^2 u+\xi v \tag{1.5.70}$$

是方程(1.5.63) 的三个根.

Galois 理论告诉我们对一般五次以及五次以上的代数方程不存在一般的代数解, 但是下面定理告诉我们至少有一个复根.

定理1.5.58. (代数学基本定理) *任意复系数非常值多项式在$\mathbb{C}$ 内至少有一个复根. 作为推论得到任何一个非零的一元n 次复系数多项式都正好有n 个复根.*

Gauss 称他自己给出了七个不同的证明, 其中第一个证明是他在22岁时的博士论文中给出的. 目前有复分析证明、拓扑学证明、代数学证明等.

练习1.5.59. 证明**定理1.5.58** 中的推论.

但是对特殊的高次方程, 我们可以找到它们的显示解. 下面给出方程

$$z^n=a,\quad a\in\mathbb{C} \tag{1.5.71}$$

的复根表达式. 假设

$$a=\rho(\cos\phi+\mathbf{i}\sin\phi),\quad \rho>0,\ \phi\in[0,2\pi).$$

令$z=r(\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta)$, 则得到

$$r^n=\rho,\quad \cos(n\theta)=\cos\phi,\quad \sin(n\theta)=\sin\phi.$$

从而得到

$$r=\sqrt[n]{\rho},\quad \theta=\frac{\phi+2k\pi}{n},\quad 0\leq k\leq n-1. \tag{1.5.72}$$

即(1.5.71) 有且仅有n 个复根.

特别地, 方程$z^n=1$ 的n 个复根为

$$\omega_n^k,\quad 0\leq k\leq n-1,\quad \omega_n:=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathbf{i}\sin\frac{2\pi}{n}, \tag{1.5.73}$$

称为n **次单位根(n-th root of unity)**. 易证

$$\sum_{0\leq k\leq n-1}\omega_n^k=0. \tag{1.5.74}$$

§1.5.12 常用初等不等式

本节主要参考及Hardy-Littlewood-Pólya 的专著和匡继昌的书(见**参考文献** §1.7).

高中时候最重要的不等式之一是

$$(a \pm b)^2 \geq 0, \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}.$$

特别地对正数$x, y > 0$ 有

$$0 \leq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

上述不等式可推广到如下的调和、几何与算术平均值不等式.

定理1.5.60. *如果$x_1, \cdots, x_n > 0$,则*

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}. \tag{1.5.75}$$

证: (1) 对(1.5.75) 中的第二个不等式

$$x_1 \cdots x_n \leq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^n,$$

我们给出本质上归属于Cauchy 的证明. 当$n = 1, 2$ 时不等式显然成立. 当$n = 2^k$ 时, 递推得到

$$\begin{aligned} x_1 x_2 x_3 x_4 \cdots x_{2^k-1} x_{2^k} &\leq \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)^2 \cdots \left(\frac{x_{2^k-1} + x_{2^k}}{2}\right)^2 \\ &\leq \cdots \leq \left[\left(\frac{\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_3+x_4}{2} + \cdots + \frac{x_{2^k-1}+x_{2^k}}{2}}{2^{k-1}}\right)^{2^{k-1}}\right]^2 \\ &= \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^k}}{2^k}\right)^{2^k}. \end{aligned}$$

当$n \neq 2^k$ 时, 存在$\ell \in \mathbb{N}$ 满足$2^{\ell-1} < n < 2^\ell$. 若取

$$x := \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} = x_i, \quad n < i \leq 2^\ell,$$

则得到

$$\begin{aligned} x &= \left(x^n \cdot x^{2^\ell - n}\right)^{\frac{1}{2^\ell}} = \left(\prod_{1 \leq i \leq 2^\ell} x_i\right)^{\frac{1}{2^\ell}} \leq \frac{1}{2^\ell} \sum_{1 \leq i \leq 2^\ell} x_i \\ &= \frac{1}{2^\ell}\left[\sum_{1 \leq i \leq n} x_i + (2^\ell - n)x\right], \end{aligned}$$

移项得到$nx \leq \sum_{1 \leq i \leq n} x_i$.

(2) 根据(1) 得到

$$\frac{1}{x_1} \cdots \frac{1}{x_n} \leq \left(\frac{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n}\right)^n.$$

移项得到(1.5.75) 中的第一个不等式. □

定理1.5.60 可推广到加权形式:

$$x_1^{p_1}\cdots x_n^{p_n} \le \left(\frac{p_1x_1+\cdots+p_nx_n}{p_1+\cdots+p_n}\right)^{p_1+\cdots+p_n}, \tag{1.5.76}$$

其中$x_1,\cdots,x_n,p_1,\cdots,p_n>0$. 特别地, 得到**Young 不等式(Young's inequality)**

$$ab \le \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q},\quad a,b\ge 0,\ p,q>1\ 且\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{1.5.77}$$

这个不等式的定积分证明之后会给出.

定理1.5.61. (Hölder 不等式) *如果$x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n\ge 0$, $p,q>1$, 且满足$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则*

$$\sum_{1\le i\le n} x_iy_i \le \left(\sum_{1\le i\le n} x_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{1\le i\le n} y_i^q\right)^{1/q}. \tag{1.5.78}$$

证: 令

$$a_i := \frac{x_i}{(\sum_{1\le j\le n} x_j^p)^{1/p}},\quad b_i := \frac{y_i}{(\sum_{1\le j\le n} y_j^q)^{1/q}}.$$

则根据Young 不等式(1.5.77) 得到

$$\sum_{1\le i\le n} a_ib_i \le \sum_{1\le i\le n}\left(\frac{a_i^p}{p}+\frac{b_i^q}{q}\right) \le \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \quad \Box$$

不等式(1.5.78) 是Hölder 在1889年得到的, 其实Roger 早一年在1888年得到了(1.5.78). 因此有人提议应该把(1.5.78) 叫做Roger-Hölder 不等式, 但是我们还是沿用惯例称为Hölder 不等式.

最后一个重要的不等式就是Minkowski 不等式.

定理1.5.62. (Minkowski 不等式) *如果$x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n\ge 0$, 且$p\ge 1$, 则*

$$\left(\sum_{1\le i\le n}|x_i+y_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{1\le i\le n}|x_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{1\le i\le n}|y_i|^p\right)^{1/p}. \tag{1.5.79}$$

证: 利用(1.5.78) 得到

$$\sum_{1\le i\le n}|x_i+y_i|^p = \sum_{1\le i\le n}|x_i+y_i||x_i+y_i|^{p-1} \le \sum_{1\le i\le n}(|x_i|+|y_i|)\,|x_i+y_i|^{p-1}$$

$$\le \left(\sum_{1\le i\le n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{1\le i\le n}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}+\left(\sum_{1\le i\le n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{1\le i\le n}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

从而移项后得到(1.5.79). □

§1.6 预备知识 II: 函数

在函数概念还没有充分认识之前, 十七世纪引入的大多数函数是首先被当作曲线来看待, 比如 $\log x$, $\sin x$, a^x 等初等超越函数. 自 1665 年开始以来的其关于微积分的早期工作, Newton 使用 "fluent (流量)" 来表示变量间的关系. 函数概念最明显的定义是James Gregory 在其《Vera circuli et hyperbolae quadratura》(1667) 中所给出的. 在 1673 年的一篇手稿中, Leibniz 用 "函数" 来表示随着曲线上点变动而变动的量, 比如切线和法线的长度. Leibniz 同时也引入了 "常量"、"变量" 和 "参数". John Bernoulli 用 X 或 ξ 来表示 x 的一般函数, 但是到了 1718 年他改用 ϕx. 目前我们使用的函数记号 $f(x)$ 则是Euler 在 1734 年引入的.

函数概念的公式化是John Bernoulli 给出的. Euler 在其《Introductio in analysin infinitorum》(1748) 中, 把函数定义了由一个变量和一些常量通过任意方式形成的解析表达式; 这个定义就包含了多项式、幂级数、对数表达式和三角表达式等. Euler 也定义了多元函数, 引入了代数函数 (自变量上的运算只有代数运算, 即只包含四则运算的有理运算和包含开根号的无理运算) 的概念和超越函数 (即, 三角函数、对数函数、指数函数、变量的无理数次幂函数及某些用积分定义的函数) 的概念. Euler 区分了显函数与隐函数、单值函数与多值函数的区别.

十八世纪占统治地位的函数概念是指函数是由单个解析表达式所给出, 无论是有限的还是无限的. Euler 和Lagrange 容许函数在不同区域有不同的表达式, 但是Euler、D'Alembert 和Lagrange 却没有给出一个可以被广泛接受的函数的定义.

Gauss 在其早期工作中把函数定义为一个闭的 (有限解析的) 表达式, 而在谈到超几何级数 (参见 §5.2.8) $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ 作为 α,β,γ 和 z 的函数时, 他指出 "在这个情况下, 我们可以认为它是一个函数". Lagrange 在其《Mécanique analytique》(1811 - 1815) 的第二版中, 用函数来表示关于一个或多个变量的几乎任何类型的依赖关系. Lacroix 早在《Traité》(1797) 就已经引入了一个更加广泛的概念: 如果一个量其值依赖于一个或多个其它量, 我们就把它称为后者的函数, 而不管人们是否知道可以用何种必要的运算从后者来得到前者.

Fourier 在《Théorie analytique de la chaleur》(1822) 指出 "通常函数 $f(x)$ 表示相接一组值或纵坐标, 它们每个都是任意的". 实际上Fourier 只讨论了在有限区间上有有限个间断点的函数.

Cauchy 在《Cours d'analyse algébrique》(1821) 给出了变量的概念和函数的定义. Dirichlet 在《Über die darstellung ganz willkürlicher functionen duch sinus-und cosinusreihen》(1837) 中给出了 (单值) 函数的现在定义.

中学时期我们学过六类**初等函数 (elementary functions)**:

(1) **常值函数 (constant functions)**: $y = c$,

(2) **幂函数 (power functions)**: $y = x^a$, $a \neq 0$,

(3) **指数函数 (exponential functions)**: $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$,

(4) **对数函数 (logarithmic functions)**: $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$,

(5) **三角函数 (trigonometric functions)**: $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$,

(6) **反三角函数 (inverse trigonometric functions)**: $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$, $\cot^{-1} x$, $\sec^{-1} x$, $\csc^{-1} x$.

如果指数函数 $y = e^x$ 是以数 e 为底, 我们也采用记号 $y = \exp(x)$. 如果对数函数$y = \log_e x$ 是以数e 为底, 我们也采用记号$y = \ln x$.

这些初等函数中的幂函数、指数函数和对数函数满足下面的函数关系:

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}, \quad a^x \cdot b^x = (ab)^x, \quad \log_a x + \log_a y = \log_a (xy).$$

我们把三角函数恒等式罗列如下:

(1) 倒数关系:

$$\tan x \cdot \cot x = \sin x \cdot \csc x = \cos x \cdot \sec x = 1.$$

(2) 商关系:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

(3) 平方关系:

$$\sin^x + \cos^2 x = \sec^2 x - \tan^2 x = \csc^2 x - \cot^2 x = 1.$$

(4) 和差公式:

$$\begin{aligned}
\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \\
\cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y, \\
\tan(x \pm y) &= \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}, \\
\cot(x \pm y) &= \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot y \pm \cot x}.
\end{aligned}$$

(5) 和差化积公式:

$$\begin{aligned}
\sin x \pm \sin y &= 2\sin\frac{x\pm y}{2}\cos\frac{x\mp y}{2},\\
\cos x + \cos y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\\
\cos x - \cos y &= -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},\\
\tan x + \tan y &= \frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}.
\end{aligned}$$

(6) 积化和差公式:

$$\begin{aligned}
\cos x\sin y &= \frac{\sin(x+y)-\sin(x-y)}{2},\\
\sin x\cos y &= \frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2},\\
\cos x\cos y &= \frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2},\\
\sin x\sin y &= \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}.
\end{aligned}$$

(7) 二倍角公式:

$$\begin{aligned}
\sin 2x &= 2\sin x\cos x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x},\\
\cos 2x &= \cos^2 x-\sin^2 x = 2\cos^2 x-1\\
&= 1-2\sin^2 x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x},\\
\tan 2x &= \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}.
\end{aligned}$$

(8) 辅助角公式:

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta),\quad \tan\theta=\frac{b}{a}.$$

利用上述公式, 作为练习, 推导出三倍角、四倍角公式; 进一步利用de Moivre 公式(1.5.64) 推导出n 倍角公式.

§1.6.1 几类特殊的函数

我们也知道比如周期函数($f(x+T)=f(x)$), 有界函数($f(x)\ge m$, $f(x)\le M$, $|f(x)|\le K$), 奇/偶函数($f(-x)=\pm f(x)$), 单调函数($f(x)\lesseqgtr f(y)$, $x<y$), 反函数等常见的几类特殊函数.

例1.6.1. (1) **Dirichlet 函数**

$$D(x):=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

(2) 符号函数

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

(3) 取整函数

$$\lfloor x \rfloor := n \quad \text{如果 } n \leq x < n+1,$$

和小数函数

$$\langle x \rangle := x - \lfloor x \rfloor.$$

(4) 对任给正数x 定义

$$\pi(x) := \#\,(\text{素数} \;\leq\; x).$$

我们将在§1.6.2 给出该函数的估计.

(5) "因子数" 函数和 "因子k 次幂和" 函数

$$\tau(n) := \sum_{d|n} 1, \quad \sigma_k(n) := \sum_{d|n} d^k \quad (k \in \mathbb{C}).$$

显然$\sigma_1(n() = \tau(n)$.

(6) **Euler 函数**

$$\varphi(n) := \sum_{1 \leq h \leq n,\ (h,n)=1} 1.$$

(7) **Möbius 函数**

$$\mu(n) := \begin{cases} (-1)^r, & n = p_1 \cdots p_r \text{ 且 } p_1, \cdots, p_r \text{ 各异}, \\ 0, & \text{其它情形}. \end{cases}$$

(8) **Von Margoldt 函数**

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \ln p, & n = p^\alpha,\ \alpha \geq 1, \\ 0, & \text{其他情形}. \end{cases}$$

(9) **双曲函数 (hyperbolic functions)**:

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

(10) 证明下列定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数不是周期函数:

$$f(x) = \sin x + \sin(\sqrt{2}x).$$

[**提示:** 反证法, 从 $f(x+T) = f(x)$ 得到 $\sin(T/2) = 0 = \sin(T/\sqrt{2})$ 从而有 $2n\pi = \sqrt{2}m\pi$, 矛盾.]

(11) 假设 z 是单位圆上的点, 从而可记作 $z=\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta$. 利用二项式公式得到

$$z^n=(\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta)^n=\sum_{0\le k\le n}\binom{n}{k}\mathbf{i}^k\cos^{n-k}\theta\sin^k\theta.$$

由此证明恒等式

$$\cos(n\theta)=\sum_{0\le k\le\lfloor n/2\rfloor}(-1)^k\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}\theta\sin^{2k}\theta$$

和

$$\sin(n\theta)=\sum_{0\le k\le\lfloor (n-1)/2\rfloor}(-1)^k\binom{n}{2k+1}\cos^{n-2k-1}\theta\sin^{2k+1}\theta.$$

*(12) 假设 $f:X\to X$ 是集合 X 上的映射, 定义

$$f^1:=f,\quad f^2:=f\circ f,\quad\cdots,\quad f^n:=f\circ f^{n-1}\ (n\ge 2).$$

称序列 $\{f^n\}_{n\ge1}$ 为由 f 生成的**迭代序列(iterated sequence)**. 给定 $x_0\in X$, 称数列 $\{f^n(x_0)\}_{n\ge1}$ 为 x_0 的**轨道(orbit)**. 点 $x\in X$ 称为 f 的**不动点(fixed point)**如果 $f(x)=x$. 如果存在 $k\in\mathbb{N}^*$ 使得 $f^k(x)=x$ 成立, 则称 a 是 f 的**周期点(periodic point)**而把满足性质的最小正整数 k 称为 a 的**周期(period)**.

- 如果 $f(x):=x^k$, $x\in\mathbb{R}$ 和 $k\in\mathbb{N}^*$, 求 f^n.
- 如果 $f(x)=\frac{1}{1+x}$, $x>0$, 计算 f^2,f^3,f^4.
- 如果 $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{x}$, $x>0$, 求 $x_0=2$ 的轨道的前 10 项. 是否轨道越来越靠近 $\sqrt{2}$.
- 如果 $f(x)=1-|2x-1|$, $x\in[0,1]$, 证明 0 和 2/3 是不动点, 而 2/5 和 4/5 是周期为 2 的周期点.
- 如果 $f(x)$ 定义为

$$f(x):=\begin{cases}2x, & 0\le x\le\frac12,\\ 2(1-x), & \frac12\le x\le 1.\end{cases}$$

求一个周期为 3 的周期点并计算函数 $f^2(x)$ 的表达式.

注意到 $y=\sin x$ (或 $y=\sinh x$) 是常微分方程 $y''+y=0$ (或 $y''-y=0$) 的解, 且

$$\cosh x\ge 1,\quad 1+\sinh^2 x=\cosh^2 x.$$

§1.6.2 * 素数和素数基本定理

Euclid 早在几千年前就已经证明了素数有无穷多个. 令

$$p_1 < p_2 < \cdots < p_n < \cdots$$

为全体素数. 假设素数只有有限多个, 比如 $p_1 < p_2 < \cdots < p_N$. 那么我们考虑一个新的正整数 $a := p_1 \cdots p_N + 1$. 如果这个数 a 是素数, 则我们得到一个比 $p_1, \cdots, p_N$ 都要大的新的素数, 产生矛盾. 因此这个数 a 一定是合数. 根据素数分解定理, 至少有一个素数, 不妨假设为 p_1, 整除 a 从而整除 1, 矛盾! 从而素数一定有无穷多个.

接下来有两个很自然的问题.

1. 是否存在一个公式可以表示每个素数? 即, 是否存在素数的一般表达式? 答案是有的且有许多个! 但是没有一个公式是有意思的. 比如, 考察如下给出第 n 个素数的公式

$$p_n = 1 + \sum_{1 \le m \le 2^n} \left\lfloor \left\lfloor \frac{n}{1 + \pi(m)} \right\rfloor^{1/n} \right\rfloor.$$

这里 $\pi(x)$ 表示所有不超过 x 的素数的个数. $n = 2$ 时候, 根据上面这个公式我们得到

$$p_2 = 1 + \left\lfloor \left\lfloor \frac{2}{1 + \pi(1)} \right\rfloor^{1/2} \right\rfloor + \left\lfloor \left\lfloor \frac{2}{1 + \pi(2)} \right\rfloor^{1/2} \right\rfloor + 0 + 0 = 1 + 1 + 1 = 3.$$

但是这种公式没有任意意义, 原因是为了得到第 n 个素数的值, 我们必须预先知道 $\pi(1), \cdots, \pi(2^n)$ 的值.

2. 素数分布的形态. 从上面Euclid 的证明中我们可以发现

$$p_{k+1} \le p_1 \cdots p_k + 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

根据 $p_1 = 2$, 我们可以证明

$$p_k \le 2^{2^{k-1}}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.6.1}$$

事实上, 由数学归纳法得到

$$p_{k+1} \le \prod_{1 \le i \le k} p_i + 1 \le \prod_{1 \le i \le k} 2^{2^{i-1}} + 1 = 2^{2^k - 1} + 1 = 2^k.$$

推论1.6.2. 对任意 $x \ge 2$, 有

$$\pi(x) > \ln \ln x. \tag{1.6.2}$$

证明: 选择一个自然数 ℓ 使得不等式 $2^{2^{\ell-1}} \leq x < 2^{2^{\ell}}$ 成立. 根据 (1.6.1) 我们得到 $p_\ell \leq 2^{2^{\ell-1}}$ 从而 $\pi(x) \geq \ell$ 成立. 因为 $2^\ell > \ln x/\ln 2$ 和 $0 < \ln 2 < 1$, 我们得到

$$\pi(x) \geq \ell > \frac{\ln(\ln x/\ln 2)}{\ln 2} > \frac{\ln\ln x}{\ln 2} > \ln\ln x$$

成立. □

根据级数展开 (级数理论在 第六章)

$$2 \geq \frac{p}{p-1} = \left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}, \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n,$$

我们得到如下不等式 (积分理论在 第五章)

$$\begin{aligned}
2^{\pi(x)} &\geq \prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} = \prod_{p\leq x}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots\right) \\
&\geq \sum_{n\leq x}\frac{1}{n} \geq \int_1^{\lfloor x\rfloor+1}\frac{dt}{t} = \ln(\lfloor x\rfloor+1) > \ln x,
\end{aligned}$$

从而不等式 $\pi(x) > \ln\ln x/\ln 2 > \ln\ln x$ 对任意 $x \geq 2$ 都成立.

1896 年Poussion (1866 - 1962, 比利时) 和Hadamard (1865 - 1963, 法国) 分别独立证明了**素数定理**

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}. \tag{1.6.3}$$

早在 1762 年, Euler (1707 - 1783, 瑞士) 认为 $\pi(x)$ 逼近到 $x/\ln x$. 而在之后的 1792 年, 15 岁的Gauss (1777 - 1855, 德国) 也做出了同样的断言. 1798 年Legendre (1752 - 1833, 法国) 猜测出关于 $\pi(x)$ 的一个好的逼近: 存在两个常数 A 和 B 使得

$$\pi(x) \sim \frac{x}{A\ln x + B} \tag{1.6.4}$$

成立，并且在之后的 1808 年预测 $A = 1$ 和 $B = -1.08366$. Gauss 是第一个写出如下**对数积分**的定义

$$\mathbf{li}(x) := \mathbf{P.V.}\int_0^x \frac{dt}{\ln t} = \lim_{\epsilon\to 0+}\left(\int_0^{1-\epsilon} + \int_{1+\epsilon}^x\right)\frac{dt}{\ln t}, \quad x \geq 2, \tag{1.6.5}$$

这是 $\pi(x)$ 的一个很好的逼近. 上面定义的对数积分也可重新写成

$$\mathbf{li}(x) = \lim_{\epsilon\to 0+}\left(\int_0^{1-\epsilon} + \int_{1+\epsilon}^2\right)\frac{dt}{\ln t} + \mathbf{Li}(x), \tag{1.6.6}$$

这里

$$\mathbf{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\ln t} \tag{1.6.7}$$

是一个定积分 (定积分理论在 第五章). 令 $s := 2 - t$ 得到

$$\lim_{\epsilon\to 0+}\left(\int_0^{1-\epsilon}+\int_{1+\epsilon}^2\right)\frac{dt}{\ln t} = \lim_{\epsilon\to 0+}\left(\int_0^{1-\epsilon}\frac{dt}{\ln t}+\int_0^{1-\epsilon}\frac{ds}{\ln(2-s)}\right)$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0+}\left(\int_0^1\frac{du}{\ln(1-u)}+\int_\epsilon^1\frac{du}{\ln(1+u)}\right) = \int_0^1\left[\frac{1}{ln(1-u)}+\frac{2}{\ln(1+u)}\right]du.$$

根据

$$\lim_{u\to 0+}u^{1/2}\left[\frac{1}{\ln(1-u)}+\frac{1}{\ln(1+u)}\right] = \lim_{u\to 0+}u^{1/2} = 0,$$

我们发现上述积分 (反常积分理论在 第五章) 是有定义的而且 $\mathbf{li}(x)$ 对每个 $x \geq 2$ 都是有限的. 由分部积分得到

$$\mathbf{Li}(x) = \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2} + \int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t} = \frac{x}{\ln x} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right). \tag{1.6.8}$$

特别地, 素数定理可以重新陈述为

$$\mathbf{li}(x) \sim \mathbf{Li}(x) \sim \frac{x}{\ln x} \sim \pi(x), \tag{1.6.9}$$

当 $x \to +\infty$ 时. 由于

$$\mathbf{Li}(x) = \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{\ln^2 x} - \frac{2}{\ln 2} - \frac{2}{\ln^2 2} - 2\int_2^x \frac{dt}{\ln^3 t} = \frac{x}{\ln x}\left[1 + \frac{1}{\ln x} + O\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right)\right]$$

我们得到

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}\frac{1}{1-\frac{1}{\ln x}} = \frac{x}{\ln x - 1}, \quad x \to +\infty. \tag{1.6.10}$$

Chebyshev (1821 - 1894, 俄罗斯) 证明了如果函数 $\pi(x)/(x/\ln x)$ 当 $x \to +\infty$ 时存在极限 (极限理论在 第三章), 则极限一定等于 1. 1850 年, Chebyshev 证明了不等式

$$c_1\frac{x}{\ln x} \leq \pi(x) \leq c_2\frac{x}{\ln x} \tag{1.6.11}$$

对任何 $x \geq 10$ 都成立, 这里

$$c_1 := \ln\frac{2^{1/2}3^{1/3}5^{1/5}}{30^{1/30}} \approx 0.921292, \quad c_2 := \frac{6}{5}c_1 \approx 1.1055.$$

我们把不等式 (1.6.11) 称为**Chebyshev 不等式**.

定理1.6.3. **(Erdös)** 对任意 $x \geq 2$, 我们有

$$\frac{3\ln 2}{8}\frac{x}{\ln x} \leq \pi(x) \leq 6\ln 2\frac{x}{\ln x}. \tag{1.6.12}$$

证明: 首先我们来证明如下一个引理.

引理1.6.4. 令 p 是一个素数且令 $e_p(n!)$ 是 $n!$ 中素数分解中 p 出现的次数. 则

$$e_p(n!) = \sum_{k\geq 1}\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor. \tag{1.6.13}$$

首先注意到 (1.6.13) 中是对有限项进行求和. 举个例子来说明这个公式. 取 $p=2$ 和 $n=4$ 得到

$$e_2(4!)=e_2(24)=e_2(2^3\times 3)=3=2+1=\left\lfloor\frac{4}{2^1}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{4}{2^2}\right\rfloor.$$

证明: 假设公式 (1.6.13) 对 n 成立. 对 $n+1$ 根据素数分解定理我们可以写成 $n+1=p^u m$ 的形式, 其中 $p\nmid m$. 从而得到

$$e_p((n+1)!)=e_p(n!)+u=\sum_{1\le k\le u}\left(\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor+1\right)+\sum_{k>u}\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor.$$

但是因为

$$\left\lfloor\frac{n+1}{p^k}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor+1 \quad 若 \quad 1\le k\le u, \quad \left\lfloor\frac{n+1}{p^k}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor \quad 若 \quad k>u,$$

我们证明了 (1.6.13) 对 $n+1$ 也是成立. □

继续完成**定理 1.6.3** 的证明. 如果 $n>1$, 则

$$\prod_{n<p\le 2n} p\,\left|\,\binom{2n}{n},\quad \binom{2n}{n}\,\right|\,\prod_{p<2n} p^{r_p} \tag{1.6.14}$$

这个 r_p 是满足不等式 $p^{r_p}\le 2n<p^{r_p+1}$ 的唯一整数. 对任意 $p>2n$, p 出现在 $\binom{2n}{n}$ 中的指数等于

$$e_p\left(\binom{2n}{n}\right)=e_p((2n)!)-2e_p(n!)=\sum_{k\ge 1}\left(\left\lfloor\frac{2n}{p^k}\right\rfloor-2\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor\right).$$

对任何 $y>0$ 观察到

$$\lfloor 2y\rfloor-2\lfloor y\rfloor=1,\quad 若 \quad \frac{k}{2}\le y<\frac{k+1}{2}$$

其中 $k\ge 0$ 是某个整数. 更进一步, 当 $k>r_p$ 时, $p^k>2n$, 所以 $\lfloor 2n/p^k\rfloor=0$ 和 $\lfloor n/p^k\rfloor=0$ 对这样的 k 都成立. 所以

$$e_p\left(\binom{2n}{n}\right)\le\sum_{1\le k\le r_p}1=r_p$$

成立从而推出 (1.6.14). 而(1.6.14) 中第二个整除关系意味着

$$\binom{2n}{n}\le(2n)^{\pi(2n)}.$$

利用二项式展开 $(1+1)^{2n}=\sum_{0\le k\le 2n}\binom{2n}{k}$ 和不等式 $\binom{2n}{n}\ge\binom{2n}{k}$ 对任何 $k=0,1,\cdots,2n$ 都成立, 我们得到

$$\binom{2n}{n}>\frac{2^{2n}}{2n+1}>2^n,\quad n\ge 3.$$

(作为数学归纳法的练习, 请验真第二个不等式). 结合上面两个不等式得到

$$2^n < \frac{2^{2n}}{2n+1} < \binom{2n}{n} < (2n)^{\pi(2n)} \Longrightarrow \pi(2n) > \frac{\ln 2}{2}\frac{2n}{\ln(2n)}, \quad n \geq 3.$$

假设 $x \geq 8$, 令 n 是满足不等式 $2n \leq x < 2n+2$ 的唯一正整数. 显然 $n \geq 3$. 进一步我们有 $2n > x-2 \geq 3x/4$. 由于函数 $y \mapsto y/\ln y$ 对任意 $y \geq e$ 是递增, 我们得到对 $x \geq 8$

$$\pi(x) \geq \pi(2n) \geq \frac{\ln 2}{2}\frac{2n}{\ln(2n)} \geq \frac{\ln 2}{2}\frac{3x/4}{\ln(3x/4)} = \frac{3\ln 2}{8}\frac{x}{\ln x + \ln\frac{3}{4}} > \frac{3\ln 2}{8}\frac{x}{\ln x}.$$

这个不等式显然对 $x \in [2,8)$ 也成立. □

练习1.6.5. 证明不等式 (1.6.14).

接下来证明: 对任意 $x \geq 2$ 有

$$\pi(x) \leq 6\ln 2\frac{x}{\ln x}.$$

根据 (1.6.14) 得到 $\Pi_{n<p\leq 2n}p < (1+1)^{2n} = 2^{2n}$ 且

$$2n\ln 2 > \sum_{n<p\leq 2n} \ln p \geq \ln n[\pi(2n)-\pi(n)] = \pi(2n)\ln n - \pi(n)\left(\ln\frac{n}{2}+\ln 2\right).$$

利用 $\pi(n) \leq n$ 推出

$$\pi(2n)\ln n - \pi(n)\ln\frac{n}{2} < 2n\ln 2 + \pi(n)\ln 2 < (3\ln 2)n.$$

引入函数

$$f(n) := \pi(2n)\ln 2;$$

得到不等式

$$f(n) - f(n/2) < (3\ln 2)n.$$

取 $n = 2^i$ $(2 \leq i \leq k)$ 得到

$$f(2^i) - f(2^{i-1}) < (3\ln 2)2^i.$$

故

$$\pi(2^{k+1})\ln(2^k) < 3\ln 2\sum_{2\leq i\leq k} 2^i + \pi(4)\ln 2 < 3\ln 2\sum_{1\leq i\leq k} 2^i < (3\ln 2)2^{k+1}$$

从而

$$\pi(2^{k+1}) < (6\ln 2)\frac{2^k}{\ln(2^k)}.$$

给定 $x \geq 2$, 选择正整数 $k \geq 1$ 使得 $2^k \leq x < 2^{k+1}$ 成立. 若 $x \geq 4$, 则 $k \geq 2$ 和 $2^k \geq 4 > e$. 即 $2^k/\ln(2^k) \leq x/\ln x$ 只要 $x \geq 4$. 综上所述

$$\pi(x) \leq \pi(2^{k+1}) < 6\ln 2\frac{2^k}{\ln(2^k)} < (6\ln 2)\frac{x}{\ln x}. \quad \square$$

所谓的Bertrand 假设 是指:

(1) 1845 年Joseph Bertrand 证明了只要 $n \leq 6 \cdot 10^6$, 区间 $[n, 2n]$ 内至少有一个素数.

(2) Bertrand 猜测 (1) 对任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 也成立.

(3) 1850 年Chebyshev 证明了 (2).

定理1.6.6. *对每个 $n \in \mathbb{N}$, 存在素数 p 满足 $n < p \leq 2n$.*

证: 下面证明属于Erdös.

步骤 1: 对每个 $n \in \mathbb{N}$,

$$\prod_{p \leq n} p < 4^n.$$

不失一般性, 不妨假设 $n \geq 3$ 且结论对每个 $k-1, \cdots, n-1$ 都成立. 若 n 是偶数, 则

$$\prod_{p \leq n} p = \prod_{p \leq n-1} p.$$

因此只要假设 n 是奇数. 记 $n = 2m+1$ 并观察到

$$\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \,\Big|\, \binom{2m+1}{m+1}, \quad \binom{2m+1}{m+1} \leq \frac{2^{2m+1}}{2} = 4^m.$$

所以

$$\prod_{p \leq 2m+1} p = \left(\prod_{p \leq m+1} p\right)\left(\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p\right) \leq 4^{m+1} \cdot 4^m = 4^{2m+1}.$$

步骤 2: 若 $n \geq 3$, p 是素数且 $\frac{2}{3}n < p \leq n$, 则

$$p \nmid \binom{2n}{n}.$$

实际上, $p > \frac{2}{3}n \geq 2$. 因为 $3p > 2n$, p 和 $2p$ 是 p 的 $\leq 2n$ 的唯一两个倍数. 从而 $p^2 \parallel (2n)!$. 由于

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2},$$

推出 $\binom{2n}{n}$ 不可能是 p 的倍数.

步骤 3: 假设 $n\geq 4$ 且结论对某个 n 不成立（从而在区间 $[n,2n]$ 内不存在任何素数）. 在这一步, 将证明 $n<512$. 根据**步骤 2**, 整除 $\binom{2n}{n}$ 的每个素数 p 必须 $\leq\frac{2}{3}n$. 令 $p^{\alpha}\parallel\binom{2n}{n}$. 则

$$\alpha\leq r_p\quad\text{和}\quad p^{r_p}\leq 2n<p^{r_p+1}.$$

如果 $\alpha\geq 2$, 则 $p^2\leq p^{\alpha}\leq 2n$ 和 $p\leq\sqrt{2n}$, 从而

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n}&=\prod_{p\mid\binom{2n}{n}}p=\left(\prod_{p\parallel\binom{2n}{n},\ \alpha=1}p^{\alpha}\right)\left(\prod_{p\parallel\binom{2n}{n},\ \alpha\geq 2}p^{\alpha}\right)\\&\leq\prod_{p\leq 2n/3}p\cdot\prod_{p\leq\sqrt{2n}}p^{r_p}\ \leq\ 4^{2n/3}\cdot(2n)^{\sqrt{2n}}.\end{aligned}$$

利用 $\binom{2n}{n}\geq 2^{2n}/(2n+1)$ 得到

$$4^{2n/3}(2n)^{\sqrt{2n}}\geq\frac{4^n}{2n+1}\Rightarrow 4^{n/3}\leq(2n)^{\sqrt{2n}+2}\Rightarrow\frac{\ln 2}{3}(2n)<(\sqrt{2n}+2)\ln(2n).$$

引入 $y:=\sqrt{2n}$, 推出不等式

$$\frac{\ln 2}{3}y^2-2(y+2)\ln y<0.$$

考察函数 $f(y):=\frac{\ln 2}{3}y^2-2(y+2)\ln y$ 这里 $y\geq 0$. 从

$$f'(y)=\frac{2\ln 2}{3}y-2\ln y-2\frac{y+2}{y},\quad f''(y)=\frac{2}{3}\ln 2-\frac{2}{y}+\frac{4}{y^2}>\frac{2}{3}\ln 2-\frac{2}{y},$$

我们看到当 $y>32$ 时, $f''(y)>0$. 但是 $f'(32)=\frac{64}{3}\ln 2-2\ln(32)-2.2>0$, 得到 $f'(y)>0$ 对任何 $y\geq 32$ 都成立. 特别地, $f(y)\geq f(32)$ 对任何 $y\geq 32$ 都成立. 由于

$$f(32)=2^{10}\frac{\ln 2}{3}-340\times\ln 2=\frac{1024-1020}{3}\ln 2=\frac{4}{3}\ln 2>0,$$

不等式 $f(y)>0$ 对任意 $y\geq 32$ 都成立. 这个矛盾推出 $y<32$ 或 $n<512$.

对每个 $n=1,\cdots,511$, 区间 $[n,2n]$ 总是包含一个素数. 从而**步骤 3** 中的假设不成立. □

下面我们来简单介绍下孪生素数猜想.

(1) 从colorblue**定理 1.6.6** 得到

$$p_{n+1}-p_n\leq p_n.\tag{1.6.15}$$

猜想1.6.7. (Gramer, 1936) 证明

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{p_{n+1}-p_n}{(\ln p_n)^2}\le 1. \tag{1.6.16}$$

$\limsup$ / $\liminf$ 之后会定义.

(2) Baker-Haman-Pintz (2001) 证明了

$$p_{n+1}-p_n<p_n^{0.525},\quad n\gg 1. \tag{1.6.17}$$

(4) 若 p 和 $p+2$ 都是素数, 称 $(p,p+2)$ 是**孪生素数对(twin primes)**.

猜想1.6.8. (孪生素数猜想)(twin prime conjecture) *存在无穷多个正整数 n 使得 $p_{n+1}-p_n=2$. 等价地*

$$\liminf_{n\to\infty}(p_{n+1}-p_n)=2. \tag{1.6.18}$$

(4) Goldston-Pintz-Yildrim (2009-2010) 证明了

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{p_{n+1}-p_n}{\ln p_n}=0,\quad \liminf_{n\to\infty}\frac{p_{n+1}-p_n}{\sqrt{\ln p_n}(\ln\ln p_n)^2}<\infty. \tag{1.6.19}$$

定理1.6.9. (张益唐(Yitang Zhang), 2013)

$$\liminf_{n\to\infty}(p_{n+1}-p_n)\le 7\times 10^7. \tag{1.6.20}$$

陶哲轩(Terence Tao)[8] 创建了Polymath Project 来优化张益唐[9]的结果中的界. 在2014 年, 这个计划成功的把7000 万降到了246. 2013 年11 月, 英国青年数学家James Maynard[10] 给出了**定理1.6.9** 的另一个不同证明并把上界7000 万降到了600.

假设 $b_1<\cdots<b_k$ 为一列正整数. 对每个素数 p, 引入

$$\nu_{b_1,\cdots,b_l}(p):=\#\{b_i\ (\mathrm{mod}\ p):1\le i\le k\}. \tag{1.6.21}$$

当 $k=2$, $(b_1,b_2)=(0,2)$, 得到

$$\nu_{0,2}(p)=\#\{0\ (\mathrm{mod}\ p),\ 2\ (\mathrm{mod}\ p)\}=\begin{cases}1, & p=2,\\ 2, & p\ge 3.\end{cases}\Longrightarrow \nu_{0,2}(p)<p.$$

[8]https://en.wikipedia.org/wiki/TerenceTao 或者https://baike.baidu.com/item/陶哲轩

[9]https://en.wikipedia.org/wiki/YitangZhang 或者https://baike.baidu.com/item/张益唐

[10]James Maynard, 1987 年6 月10 日出生, 英国英格兰埃塞克斯郡切尔姆斯福德人, 英国青年数学家. 2009 年获得剑桥大学硕士, 2013 年获得牛津大学博士. 2013 年给出了张益唐关于孪生素数猜想结果的另一个证明, 2014 年独立于陶哲轩等证明了Erd"os 猜想, 2019 年和Dimitris Koukoulopoulos 一起证明了Duffin-Schaeffer 猜想. 2014 年获得Ramanujan 奖, 2015 年获得Whitehead 奖, 2016年获得欧洲数学会奖, 2020 年获得Cole 奖.

猜想1.6.10. (Dickson, 1904) *若 $\nu_{b_1,\cdots,b_k}(p) < p$ 对所有素数 p 都成立, 则存在无穷多个正整数 n 使得 $n+b_1,\cdots,n+b_k$ 都是素数.*

显然**猜想 1.6.10** 可推出**猜想 1.6.8**.

猜想1.6.11. (Hardy-Littlewood, 1923) *对任意 $x, y \geq 1$, 证明*

$$\pi(x+y) \leq \pi(x) + \pi(y). \tag{1.6.22}$$

Hensley-Richards (1972) 证明了**猜想 1.6.10** 和**猜想 1.6.11** 是不相容的. 人们相信**猜想 1.6.10** 是对的, 而**猜想 1.6.11** 是错误的.

§1.6.3 超越数 π 和 e

接下来我们会证明

$$\begin{aligned} e &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}, \\ \frac{\pi^2}{6} &= \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}, \\ n! &\sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}, \quad n\to\infty. \quad (\text{Stirling}) \end{aligned} \tag{1.6.23}$$

第一个参见 (2.3.3), 第二个参见 (2.3.2), 最后一个参见 (5.4.32). 实际上, 我们将会给出 $n!$ 更加精细的渐进展开 (参见 (5.4.34)、(15.4.165) 和 (15.4.167)).

实际上, 常数e 是Euler 最早利用$(1+1/n)^n$ 的极限而定义出来的. 在中学时期, 我们是事先承认e 的存在但却没有给出任何数学上的定义. 常数π 的历史可参阅§2.1.

其次, 极限$\lim_{n\to\infty}$, 无穷求和$\sum_{n\geq 0}$ 以及渐进符号$\sim$ 将都会在后面的章节中陆续给出定义并研究其性质.

§1.6.4 * 度量空间

度量空间的一般定义是Maurice Fréchet 在其 1906 年的博士论文中引入的. 当时他称之为 $\mathscr{E}$ 类.

考察 n 维 Euclidean 空间 $\mathbb{R}^n$, 通常的距离函数 $d_{\mathbb{R}^n}$ 定义为

$$d_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := \left(\sum_{1\leq i\leq n}(x^i-y^i)^2\right)^{1/2}, \quad \boldsymbol{x}=(x^1,\cdots,x^n), \quad \boldsymbol{y}=(y^1,\cdots,y^n).$$

在中学时期我们早已知道

- $d_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \geq 0$ 且 $d_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$,

- $d_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = d_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$,
- $d_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \le d_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + d_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$.

定义1.6.12. **度量空间(metric space)** 是指二元组 (X,d), 其中 X 是非空集合, d 是 X 上的**度量 (metric)**. 换句话说, 映射 $d: X\times X \to \overline{\mathbb{R}} := \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$ 满足

(1) **(非负性)(Nonnegativity)** $d(x,y)\ge 0$ 且 $d(x,y) = d(y,x)$,

(2) **(对称性)(Symmetry)** $d(x,y) = d(y,x)$,

(3) **(三角不等式)(Triangle inequality)** $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$.

称 d 是**有限的(finite)** 如果 d 的像集包含在 $\mathbb{R}$ 内.

任意度量空间诱导出某个集合上的有限度量. 实际上, 假设 (X,d) 是度量空间, 取一点 $x\in X$. 定义

$$[x]_d := \{y\in X : d(x,y)\neq\infty\}.$$

则 $y\in[x]_d \Leftrightarrow y\sim_d x$ 是等价关系. 从而 d 是 $[x]_d$ 上的有限度量.

定义1.6.13. 度量空间之间的映射 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 称为**等距的 (isometric)** 若

$$d_Y(f(x_1),f(x_2)) = d_X(x_1,x_2), \quad x_1,x_2\in X. \tag{1.6.24}$$

距离保持的双射称为**等距映射 (isometry)**, 两个度量空间是**等距的**如果它们之间存在一个等距映射.

例1.6.14. (1) 在任意非空集合 X 上, 可以定义**平凡度量(trivial metric)**

$$d_{\mathbb{R}}(x,y) := \begin{cases} 0, & x=y, \\ 1 & x\neq y. \end{cases} \tag{1.6.25}$$

(2) 令 $X=\mathbb{R}$. 存在两个有用的距离:

$$d(x,y) := |x-y|, \quad d_{\ln}(x,y) := \ln(1+|x-y|). \tag{1.6.26}$$

第二个距离会出现在微分几何和复代数几何中.

(3) 任给两个距离空间 (X,d_X) 和 (Y,d_Y), 定义 Cartesian 乘积 $X\times Y$ 上的**乘积度量(product metric)**为

$$d_{X\times Y}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := (d_X(x_1,x_2)+d_Y(y_1,y_2))^{1/2}. \tag{1.6.27}$$

(4) $X=\mathbb{R}^n$:

$$d_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := \left(\sum_{1\le i\le n}(x^i-y^i)^2\right)^{1/2}.$$

(5) 给定距离空间 (X,d) 和常数 $\lambda>0$, 定义

$$d_{\lambda}(x,y):=\lambda d(x,y). \tag{1.6.28}$$

(6) 若 (X,d) 是度量空间且 $Y\subseteq X$ 是子集, 则 $(Y,d_Y:=d|_X)$ 本身也是度量空间.

假设 (X,d) 是度量空间.

(1) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 称为**Cauchy 数列(Cauchy sequence)** 如果 $d(x_n,x_m)\to 0$ 当 $n,m\to\infty$. 即, 任给 $\epsilon>0$, 存在 $n_0\in\mathbb{N}$ 使得 $d(x_n,x_m)<\epsilon$ 对任意 $n,m\geq n_0$ 都成立.

(2) 度量空间 (X,d) 是**完备的 (complete)** 如果任意 Cauchy 数列都有位于 X 内的极限. 显然极限存在必唯一.

(3) $(\mathbb{R}\setminus 0,d_{\mathbb{R}}|_{\mathbb{R}\setminus 0})$ 是不完备的.

(4) 对 $\delta>0$, 定义 $A\subseteq X$ 的**δ- 领域(δ-neighborhood)** 为

$$A_{\delta}:=\{x\in X:d(x,A)<\delta\}$$

其中 $d(x,A):=\inf\{d(x,a):a\in A\}$.

(5) 两个集合 $A,B\subseteq X$ 间的**Hausdorff 距离(Hausdorff distance)** 定义为

$$d^X_{\mathbf{H}}(A,B):=\inf\{\delta>0:A\subseteq B_{\delta}\text{ 且 }B\subseteq A_{\delta}\}. \tag{1.6.29}$$

给定两个度量空间 (X,d_X) 和 (Y,d_Y), 它们之间的**Gromov-Hausdorff 距离(Gromov-Hausdorff distance)** 定义为

$$d_{\mathbf{GH}}((X,d_X),(Y,d_Y)):=\inf\left\{d^Z_{\mathbf{H}}(f(X),g(Y)):\begin{array}{c}(Z,d_Z)\text{ 度量空间且}\\ f:X\hookrightarrow Z,\ g:Y\hookrightarrow Z\\ \text{等距嵌入}\end{array}\right\}, \tag{1.6.30}$$

这里**等距嵌入(isometric embedding)** 是指映射 $(X,d_X)\to(f(X),d_Z|_{f(X)})$ 和 $(Y,d_Y)\to(g(Y),d_Z|_{g(Y)})$ 都是等距的.

接下来定义度量空间列的收敛. 度量空间列 $\{(X_n,d_n)\}_{n\geq 1}$ 在**Gromov-Hausdorff 意义下收敛(convergence in the sense of Gromov-Hausdorff)** 到度量空间 (X,d), 记作 $(X_n,d_n)\to_{\mathbf{GH}}(X,d)$, 如果

$$\lim_{n\to\infty}d_{\mathbf{GH}}((x_n,d_n),(X,d))=0. \tag{1.6.31}$$

比如, 一列半径趋于 0 的 $\mathbb{R}^3$ 中的圆柱体在 Gromov-Hausdorff 意义下收敛到 $\mathbb{R}^3$ 中的一条直线.

这个概念主要用来研究和处理"奇异空间", 特别的是在研究 Ricci 流中 (Hamilton 最早引入该流来研究**Poincaré 猜想**, 即任何简单闭三维流形同胚于 $\mathbb{S}^3$). Poincaré 猜想最后被Perelman 解决, 当然很多数学家补全了详细的证明.

§1.6.5 * 泛函

泛函的抽象理论开始于Volterra 关于变分法的工作. 而"泛函"的名称是Hadamard 引入的. 在建立函数空间和泛函抽象理论中, 第一个最重要的工作是Maurice Fréchet 所给出的.

考察二次多项式函数

$$f(x) := x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

易证 f 连续, $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f(0) = 0$, 且 $f'(0) = 0$.

令 $\mathcal{X}$ 表示 $\mathbb{R}$ 上所有函数构成的集合并考虑映射

$$\mathscr{F} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto f(0)^2.$$

显然 $\sup_{f\in\mathcal{X}} \mathscr{F}(f) = \min_{f\in\mathcal{X}} \mathscr{F}(f) = \mathscr{F}(0) = 0$. 接下来一个很自然的

问题: 如何定义 $\mathscr{F}$ 的"导数"?

在回答这个问题之前, 我们先把上述集合 $\mathcal{X}$ 推广到一般情形.

定义1.6.15. $\mathbb{R}$ 上的**向量空间(vector space)** 是集合 $\mathcal{X}$, 里面的元素用 $x, y, z, \cdots$ (称为**向量(vector)**) 来表示, 其上附带加法 $(+)$ 和数乘 $(\cdot)$ 两种运算, 并满足如下性质

(1) $x + y \in \mathcal{X}, \forall\, x, y \in \mathcal{X}$,

(2) $a \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{X} \Longrightarrow a \cdot x \in \mathcal{X}$,

(3) $x, y \in \mathcal{X} \Longrightarrow x + y = y + x$,

(4) $x, y, z \in \mathcal{X} \Longrightarrow (x + y) + z = x + (y + z)$,

(5) $\exists\, 0 \in \mathcal{X}$ (**零向量(zero vector)**) 使得 $x + 0 = x, \forall\, x \in \mathcal{X}$,

(6) $\forall x \in \mathcal{X}, \exists - x \in \mathcal{X}$ 使得 $x + (-x) = 0$,

(7) $\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathcal{X} \Longrightarrow a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x$,

(8) $\forall\, a \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathcal{X} \Longrightarrow a\cdot(x+y) = a\cdot x + a\cdot y$,

(9) $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{X} \Longrightarrow (a+b)\cdot x = a\cdot x + b\cdot x$,

(10) $\forall x \in \mathcal{X}, 1\cdot x = x$.

换句话说, $(X, +, \cdot)$ 是向量空间如果 $(X, +)$ 是 Abelian 群且 $(X, +, \cdot)$ 是左 $\mathbb{R}$-模.

例1.6.16. (1) $\mathbb{R}^n$ 是向量空间.

(2) 任给区间 $I \subset \mathbb{R}$, 定义

$$\mathcal{X} := \{I \text{ 上的实值函数}\}.$$

令

$$(\phi + \psi)(x) := \phi(x) + \psi(x), \quad (a\cdot\phi)(x) := a\cdot\phi(x).$$

则 $(\mathcal{X}, +, \cdot)$ 是向量空间.

(3) 令

$$\mathcal{X}' := \{f \in \mathcal{X} : f(0) - f(1) = 1\}$$

这里 $\mathcal{X}$ 是 (2) 中的向量空间 (取 $I = [0, 1]$). 则 $(\mathcal{X}', +, \cdot)$ 不是向量空间 (**提示:** 考虑函数 $f(x) = 1 - x$ 和 $g(x) = 1 - x^2$).

定义1.6.17. $\mathcal{X}$ 上的**泛函 (functional)** $\mathscr{F}$ 是向量空间 $\mathcal{X}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射.

例1.6.18. (泛函的例子) (1) $\mathscr{F}(\boldsymbol{x}) := (x^2)^2 - (x^1)^2$ 这里 $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$.

(2) $\mathcal{X} = C([0, \pi/2])$ 定义为 $[0, \pi/2]$ 上连续函数构成的向量空间, 令

$$\mathscr{F}(\phi) := \int_0^{\pi/2} \left[2\phi(x)^3 + 9(\sin x)\phi(x)^2 + 12(\sin^2 x)\phi(x) - \cos x\right] dx.$$

(3) $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$, 且

$$\mathscr{F}(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & \boldsymbol{x} \neq 0, \\ 0, & \boldsymbol{x} = 0. \end{cases}$$

定义1.6.19. 给定泛函 $\mathscr{F} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$. $\mathscr{F}$ **在** $x \in \mathcal{D} \subseteq \mathcal{X}$ **的 Gâteaux 变分(Gâteaux variation)** 定义为

$$\eth\mathscr{F}(x; h) := \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\mathscr{F}(x + \epsilon h) - \mathscr{F}(x)}{\epsilon}. \tag{1.6.32}$$

例1.6.20. (1) $\mathscr{F}(\boldsymbol{x}) := (x^2)^2 - (x^1)^2$, 这里 $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2)$,

$$\eth\mathscr{F}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{h}) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{[(x^2 + \epsilon h^2)^2 - (x^1 + \epsilon h^1)^2] - (x^2)^2 - (x^1)^2}{\epsilon} = 2(x^2h^2 - x^1h^1).$$

(2) 取例 1.6.18 (2) 中的 $\mathscr{F}$, 则

$$\eth\mathscr{F}(\phi; \phi) = \int_0^{\pi/2} \left[6\phi(x)^2\psi(x) + 18\sin x\phi(x)\psi(x) + 12\sin^2 x\psi(x)\right] dx.$$

(3) 取例 1.6.18 (3) 中的 $\mathscr{F}$, 则

$$\partial\mathscr{F}(\mathbf{0};\boldsymbol{h})=\begin{cases}(h^2)^2/(h^1)^2, & h^1\neq 0,\\ 0, & h^1=0.\end{cases}$$

§1.6.6 * 测度

我们在小学就知道长方形面积为长乘以宽, 正方形面积是边长的平方. 而三角形的面积是底乘高的一半. 那么一个很自然的问题是如何定义和求出一般图形或区域的面积, 使得当该图形是长方形、正方形或三角形时就是通常意义下的面积公式? 在本小节我们简单介绍下“长度”、“面积”和“体积”的自然推广, 即测度.

假设X 是非空集合而$\mathcal{A}$ 是由X 的一些子集所构成的集合. 称$\mathcal{A}$ 是X 上的**σ-代数(σ-algebra over X)** 如果满足如如下性质:

(1) $X\in\mathcal{A}$,

(2) $A\in\mathcal{A}\Longrightarrow A^{\mathsf{C}}=X\setminus A\in\mathcal{A}$, 和

(3) $A_i\in\mathcal{A}, i\in\mathbb{N}\Longrightarrow\cup_{i\in\mathbb{N}}A_i\in\mathcal{A}$.

根据定义立即得到, 如果$\mathcal{A}$ 是σ-代数, $A_i\in\mathcal{A}, i\in\mathbb{N}$, 则下列集合

$$\emptyset,\quad A_0\setminus A_1,\quad \bigcup_{0\le i\le m}A_i,\quad \bigcap_{0\le i\le m}A_i,\quad \bigcap_{i\in\mathbb{N}}A_i$$

都属于$\mathcal{A}$.

练习1.6.21. 如果在X 上的σ-代数$\mathcal{A}$ 上定义运算

$$A+B:=A\triangle B,\quad A\cdot B:=A\cap B,\quad A,B\in\mathcal{A},$$

证明$(\mathcal{A},+,\cdot)$ 构成一个交换环, 并求零元和单位元.

例1.6.22. 假设X 是非空集合.

(1) $\{\emptyset,X\}$ 和2^X 都是X 上的σ-代数.

(2) $\{A\subset X|A$ 或 A^{C} 是可数的$\}$ 是X 上的σ-代数.

(3) 当X 是有限时, $\{A\subset X|A$ 或 A^{C} 是有限的$\}$ 是X 上的σ-代数.

(4) 如果A 是非空指标集且对每个$\alpha\in A$, $\mathcal{A}_\alpha$ 是X 上的σ-代数, 则$\cap_{\alpha\in A}\mathcal{A}_\alpha$ 是X 上的σ-代数.

(5) 令Y 是另一个非空集合且$f: X \to Y$ 是映射. 如果$\mathcal{A}$ 是X 上的σ-代数, 则

$$f_*(\mathcal{A}) := \{B \subset Y | f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

是Y 上的σ-代数, 称为$\mathcal{A}$ **在f 下的像(image of $\mathcal{A}$ under f)**. 如果$\mathcal{B}$ 是Y 上的σ-代数, 则

$$f^{-1}(\mathcal{B}) := \{f^{-1}(B) | B \in \mathcal{B}\}$$

是X 上的σ-代数, 称为$\mathcal{B}$ **在f 下的逆像(inverse image of $\mathcal{B}$ under f)**.

(6) 令$\mathcal{A}$是X 上的σ-代数. 称子集$\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ 是$\mathcal{A}$ 的**σ-子代数(σ-subalgebra of $\mathcal{A}$)** 如果$\mathcal{S}$ 本身也是X 上的σ-代数.

对任何非空子集$\mathcal{S} \subset 2^X$ 都存在唯一一个包含$\mathcal{S}$ 的最小σ-代数:

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) := \bigcap \{\mathcal{A} \subset 2^X | \mathcal{A} \supset \mathcal{S} \text{ 且 } \mathcal{A} \text{ 是 } X \text{ 上的 } \sigma\text{-代数}\}. \tag{1.6.33}$$

根据**例1.6.22** 上述定义是有意义的.

练习1.6.23. 证明$\mathcal{A}(\mathcal{S})$ 是唯一一个包含$\mathcal{S}$ 的最小σ-代数.

假设X 是非空集合且$\mathcal{S} \subset 2^X$ 满足条件$\emptyset \in \mathcal{S}$. 映射$\mu: \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ 称为**σ-次可加的(σ-subadditive)** 如果对满足$\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{S}$ 的每个不交集合序列$\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ 都有

$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \le \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i). \tag{1.6.34}$$

如果(1.6.34) 取等号, 则称μ 是**σ-可加的(σ-additive)**.

练习1.6.24. 证明映射

$$\mu: 2^X \longrightarrow [0, +\infty], \quad A \longmapsto \mu(A) := \begin{cases} 1, & A \neq \emptyset, \\ 0, & A = \emptyset. \end{cases}$$

是σ-次可加的, 且是σ-可加的当且仅当X 只包含一个元素.

称三元组$(X, \mathcal{A}, \mu)$ 为**测度空间(measure space)**, μ 为**测度(measure)**, 如果$\mathcal{A}$ 是X 上的σ-代数, $\mu: \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ 是σ-次可加的. 当$\mu(X) = 1$ 时称μ 为**概率测度(probability measure)**, 而把$(X, \mathcal{A}, \mu)$ 称为**概率空间(probability space)**. 在概率论中, 概率空间往往也表示称$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

例1.6.25. 假设X 是非空集合.

(1) 对固定的$a \in X$ 定义

$$\delta_a(A) := \begin{cases} 1, & a \in A, \\ 0, & a \notin A. \end{cases}$$

则$\delta_a: 2^X \to [0, +\infty]$ 是概率测度, 称为a **处的Dirac 测度(Dirac measure at a)**.

(2) 定义

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & A = \emptyset, \\ +\infty, & A \neq \emptyset. \end{cases}$$

则$(X, 2^X, \mu)$ 是测度空间.

(3) 如果$(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是测度空间, 则对任何$A \in \mathcal{A}$, $(A, \mathcal{A}|_A, \mu \llcorner A)$ 也是测度空间. 其中$\mu \llcorner A$ 定义为

$$(\mu \llcorner A)(B) := \mu(A \cap B), \quad B \in \mathcal{A}, \tag{1.6.35}$$

和$\mathcal{A}|_A := \{A \cap B | B \in \mathcal{A}\}$.

给定概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 和一组$\mathcal{F}$ 的σ-子代数$\{\mathcal{F}_i\}_{i \in \mathsf{A}}$. 称$\mathcal{F}_i$ 是**互相$\mathbb{P}$-独立地(mutually $\mathbb{P}$-independent)** 如果对A 中每个有限集$\{i_1, \cdots, i_n\}$ 和每个元素$A_{i_\alpha} \in \mathcal{F}_{i_\alpha}$, $1 \leq \alpha \leq n$, 有

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leq \alpha \leq n} A_{i_\alpha}\right) = \prod_{1 \leq \alpha \leq n} \mathbb{P}(A_{i_\alpha}). \tag{1.6.36}$$

特别地, 称$A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathsf{A}$, 是**$\mathbb{P}$-独立地($\mathbb{P}$-independent)** 如果σ-子代数

$$\mathcal{F}_i := \{\emptyset, A_i, A_i^{\mathsf{C}}, \Omega\}, \quad i \in \mathsf{A},$$

是互相$\mathbb{P}$-独立地.

练习1.6.26. 证明A_1 和A_2 是$\mathbb{P}$-独立地当且仅当$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)$. 请问$A_1, A_2, A_3$ 是$\mathbb{P}$-独立地是否等价于

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)?$$

§1.7 参考文献

1. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis I*, Translated from the 1988 German original by Gary Brookfield, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. xiv+426 pp. ISBN: 3-7643-7153-6

2. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis II*, Translated from the 1999 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. xii+400 pp. ISBN: 978-3-7643-7472-3; 3-7643-7472-3

3. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis III*, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. xii+468 pp. ISBN: 978-3-7643-7479-2; 3-7643-7479-2

4. Evans, Lawrence C,; Gariepy, Ronald F. *Measure theory and fine properties of functions*, Revised edition, Textbooks in Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 2015. xiv+299 pp. ISBN: 978-1-4822-4238-6

5. Iwaniec, Henryk; Kowalski, Emmanuel. *Analytic number theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. xii+615 pp. ISBN: 0-8218-3633-1

6. Kashiwara, Masaki; Schapira, Pierre. *Categories and sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer-Verlag, Berlin, 2006. x+497 pp. ISBN: 978-3-504-27949-5; 3-540-27949-0

7. Kashiwara, Masaki; Schapira, Pierre. *Sheaves on manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer-Verlag, Berlin, 1990. x+512 pp. ISBN: 3-540-51861-4

8. Munkres, James R. *Topology*, Second edition, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000. xvi+537 pp. ISBN: 0-13-181629-2

9. Robinson, R. Clark. *An introduction to dynamical systems - continuous and discrete*, Second Edition, Pure and Applied Undergraduate Texts, **19**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012. xx+733 pp. ISBN: 978-0-8218-9135-3

10. Stroock, Daniel W. *Probability theory. An analytic view*, Second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2011. xxii+527 pp. ISBN: 978-0-521-13250-3

11. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis I*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+574 pp. ISBN: 3-540-40386-8

12. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis II*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xvi+681 pp. ISBN: 3-540-40633-6

13. 常庚哲, 史济怀 编: **数学分析教程** (上、下册), 高等教育出版社, 2003.

14. 陈天权 编著: **数学分析讲义** (第一、二、三册), 北京大学出版社, 2009.

15. 邓建平 编: **微积分 I 和 II**, 科学出版社, 2019.

16. Hardy 著(张明尧 译): **纯数学教程**(第9版), 人民邮电出版社, 2020.

17. Hardy, Littlewood, Pólya 著(越民义 译): **不等式**(第2版), 人民邮电出版社, 2020.
18. 吉米多维奇 著 (李荣涑, 李植 译): **数学分析习题集** (根据 2010 年俄文版翻译), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.
19. Kline, Morris 著 (张理京, 张炎热, 江泽涵等 译): **古今数学思想** (第一、二、三册), 上海科学技术出版社, 2014.
20. 匡继昌 著: **常用不等式**(第四版), 山东科学技术出版社, 2012.
21. 黎景辉, 赵春来 著: **模曲线导引** (第二版), 北京大学出版社, 2014.
22. 李傅山, 王培合 编著: **数学分析习题课讲义** (1、2、3), 北京大学出版社, 2018.
23. 李忠 著: **迭代、混沌、分形**, 科学出版社, 2007.
24. 林源渠, 方企勤 编: **数学分析解题指南**, 北京大学出版社, 2003.
25. 梅加强 编著: **数学分析**, 高等教育出版社, 2015.
26. 裴礼文 编著: **数学分析中的典型问题与方法** (第二版), 高等教育出版社, 2015.
27. 汪林 著: **数学分析中的问题和反例**, 现代数学基础 **56**, 高等教育出版社, 2015.
28. Weir, D. Maurice; Hass, R. Joel; Giordano, R. Frank. *Thomas' calculus*, Eleventh Edition, (影印版, 上、下册), 高等教育出版社, 2016.
29. 徐森林, 薛春华 编著: **数学分析**, 清华出版社, 2005.
30. 杨小远, 孙玉泉, 薛玉梅, 杨卓琴 编著: **工科数学分析教程** (上、下册), 科学出版社, 2011.
31. 张福保, 薛金美, 潮小李 主编: **数学分析讲义**, 科学出版社, 2019.
32. 张筑生 编著: **数学分析新讲** (第一、二、三册), 北京大学出版社, 1990.
33. 周民强 编著: **数学分析习题演练** (第一、二、三册), 科学出版社, 2018.
34. 朱尧辰 编著: **数学分析例选通过范例学技巧**, 哈尔滨工业大学出版社, 2013.

第一部分

单变量理论

第二章 极限理论 I: 数列极限

圣人亦是学知, 众人亦是生知.—-《传习录》理学编卷二

§2.1 数列

假设 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 是函数. 它的像集是由一些离散的点所构成的:

$$f(0),\quad f(1),\quad f(2),\quad f(3),\quad \cdots.$$

为了方便期间, 我们把上述离散点的集合记作 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 其中 $a_n := f(n)$, 并称为**数列(sequence)**. 一般地, 一个数列就是某个函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 的像集.

在例 **1.6.1** 第**10** 题中, 函数在每一点的轨道就是一个数列.

易证半径为 r 的圆的内接正 n 边形的周长为

$$a_n := n\cdot 2r\sin\frac{2\pi}{2n} = 2nr\sin\frac{\pi}{n} = 2\pi r\cdot\frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n}.$$

随着 n 的增大, a_n 趋于圆的周长 $2\pi r$, 从而得到 $[\sin(\pi/n)]/(\pi/n)$ 趋于 1; 反之如果可以证明 $[\sin(\pi/n)]/(\pi/n)$ 趋于 1, 则内接正 n 边形的周长 a_n 趋于 $2\pi r$.

上述把圆分割称正多边形的方法称为**割圆术**, 是我国三国时代数学家刘徽[1]首创的. 在此之前, 圆周率采用 $\pi=3$, 东汉科学家张衡[2]采用 $\pi=\frac{736}{232}=3.172$ 和 $\pi=\sqrt{10}=3.16$, 三国天文学家王蕃[3]采用 $\pi=\frac{142}{45}=3.156$.

刘徽分割圆为正 192 边形得到圆周率 $\pi=\frac{157}{50}\approx 3.14$ 并得到**刘徽圆周率不等式**

$$3.141024 < \pi < 3.142704.$$

刘徽认为 3.14 数值偏小, 后来继续分割圆到正 1536 边形得到圆周率 $\pi=\frac{3927}{1250}\approx 3.1416$ (**徽率**).

---

[1] 约 225 年 - 约 295 年, 三国时代魏国数学家. 刘徽为《九章算术》做注, 在 263 年成书, 其中他提出用割圆术来计算圆周率的方法. 刘徽后撰《重差》, 唐初之后失传仅存一卷, 因其第一题是关于测量海岛高度和距离的问题, 又称作《海岛算经》.

[2] 78 年 - 139 年, 字平子, 今河南省南阳市南召县人, 东汉科学家. 张衡出身于南阳大族, 少好学不倦, 通晓五经, 不分日夜. 115 年, 张衡始任太史令 (相当于现在的中国科学院国家天文台台长), 期间制作了浑天仪和地动仪. 130 年前后, 张衡推算出圆周率, 他认为立方体及其内接球体积之比是 8 : 5 由此推出圆周率是 10 的平方根. 1970 年国际天文学界用张衡名字为月球背面一座环形山命名; 1971 年以他名字命名了小行星 1802; 2002 年中国天文学会首次颁发“张衡特殊贡献奖”.

[3] 228 年 - 266 年, 字永元, 今安徽省合肥市庐江县人, 三国时代吴国人. 通晓天文和数学, 以博学多才著称.

南北朝数学家祖冲之[4]继续用刘徽的割圆术分割圆为正 12288 边形得到圆周率 $\pi = 3.1415926$. 除此之外还得到了**祖冲之圆周率不等式**

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927.$$

祖冲之把 $\frac{22}{7} \approx 3.142857$ 和 $\frac{355}{113} \approx 3.1415929$ 分别称为圆周率的**约率**和**密率**.

希腊数学家Archimedes (阿基米德)[5] 利用内接正多边形和外接正多边形得到**Archimedes 圆周率不等式**

$$\frac{223}{71} \approx 3.140845 < \pi < \frac{22}{7} \approx 3.142857.$$

注意到割圆术只用到内接正多边形.

第三个关于数列的例子是考虑余弦函数,

$$f(x) := \cos x.$$

取定 $a_0 := 1$ 并定义数列

$$a_1 := f(a_0), \quad a_2 := f(a_1), \quad \cdots, \quad a_n := f(a_{n-1}).$$

前几个数值如下:

$$a_1 = 0.5403023\cdots, \quad a_2 = 0.8575532\cdots, \quad a_3 = 0.6542898\cdots,$$

$$a_4 = 0.7934804\cdots, \quad a_5 = 0.7013688\cdots, \quad a_6 = 0.7639597\cdots,$$

$$a_7 = 0.7221024\cdots, \quad a_8 = 0.7504178\cdots, \quad a_9 = 0.7314040\cdots.$$

从这 9 个数字我们发现当 n 很大时 a_n 应该在 0.73 附近; 实际上在下章我们将证明这个数列最后趋于 a_∞, 而这个数 a_∞ 满足方程 $\cos a_\infty = a_\infty$, 即是函数 $f(x)$ 的一个不动点.

最后一个关于数列的例子是高中时候学过的等差数列和等比数列

$$a_n = a + (n-1)d, \quad b_n := bq^{n-1}, \quad n \geq 1,$$

这里 a, b 分别是等差数列和等比数列的首项, d 是公差, q 是公比. 比如取

$$a = d = 1, \quad b = q = 2,$$

得到

$$a_n = n, \quad b_n = 2^n, \quad n \geq 1.$$

显然随着 n 的增大 a_n, b_n 变得越来越大最后趋于无穷大.

[4]429 年 - 500 年, 字文远, 今河北省保定市涞水县人, 南北朝刘宋时代数学家. 464 年开始编制《大明历》, 计算了圆周率. 著有《缀术》, 汇集了与其子祖暅的数学研究成果.《缀术》在唐代被收入《算经十书》, 成为唐代国子监算学课本, 当时学习《缀术》需要四年时间.

[5]公元前 287 年 - 公元前 212 年, 今意大利西西里岛叙拉古人, 希腊时代数学家. 著有《方法论》、《浮体论》、《球与圆柱论》、《平面图形的平衡或其重心》、《杠杆论》、《抛物线求积》、《螺线论》等.

§2.1.1 数列极限的定义

在本小节我们首先给出“随着 n 的增大 a_n 趋于某值或变得越来越大”的精确含义.

定义2.1.1. 给定数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

(1) $a \in \mathbb{R}$ 称为 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的**极限(limit)**, 如果对任给 $\epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得不等式

$$|a_n - a| < \epsilon$$

对任意 $n > N$ 都成立. 此时我们记作

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a$$

或 $a_n \to a$. 把上述定义简记为

$$a_n \to a \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N}\, \forall\, n > N \;\Rightarrow\; |a_n - a| < \epsilon) \tag{2.1.1}$$

之后我们将会证明数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的极限若存在必唯一.

(2) 称数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是**收敛的(convergent)** 如果存在 $a \in \mathbb{R}$ 使得 $a_n \to a$ 成立. 否则的话, 我们称数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是**发散的(divergent)**. 即对任意 $a \in \mathbb{R}$ 都有 a_n 不收敛到 a, 或简记为 $a_n \nrightarrow a$. 根据(2.1.1) 得到

$$a_n \nrightarrow a \quad \Longleftrightarrow \quad (\exists\, \epsilon_0 > 0\, \forall\, N \in \mathbb{N}\, \exists\, n_0 > N \;\Rightarrow\; |a_{n_0} - a| \geq \epsilon_0) \tag{2.1.2}$$

之后我们将会证明收敛数列必有界.

(3) 称数列$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是**有界的(bounded)** 如果存在$M \geq 0$ 使得$|a_n| \leq M$ 对任何$n \in \mathbb{N}$ 都成立. 否则的话, 我们称数列$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是**无界的(unbounded)**.

在上述定义中, 我们要注意“2”个 $\forall$ 和“1”个 $\exists$: ϵ 是任意的正数, 但是一旦找到便是固定的数了. 在证明极限时候, 目标是去寻找“N”使得不等式对任意的 $n > N$ 都成立.

在几乎所有求极限中, N 是 ϵ 和 a 的函数, 并随着 ϵ 的变小而变大. 因为在极限定义中, 我们考虑的是当 n 很大时数列的变化, 所以有时候我们可以预先让 n 取得较大, 这样就比较容易求出所需要的 N. 具体步骤可参考下面的例子.

在上述定义中, “2”个 $<$ 其实可以改为 $\leq$, 这个修改不影响定义本身. 另外, $< \epsilon$ 可以改为 $< 10\epsilon$, $\leq 13\epsilon$ 等, 原因在于 ϵ 本身是任意的.

上述关于数列的定义有时候也称为“ϵ-N”定义. 注意到有时候数列的首项下标是 1, 但这不影响数列极限的定义和其它将证的性质.

定义 (2.1.1) 和 (2.1.2) 可平行推广到复数列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, 只要把绝对值换成复数的模即可. 换言之

$$z_n \to z \iff (\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N}\, \forall\, n > N \Rightarrow |z_n - z| < \epsilon) \tag{2.1.3}$$

和

$$z_n \nrightarrow z \iff (\exists\, \epsilon_0 > 0\, \forall\, N \in \mathbb{N}\, \exists\, n_0 > N \Rightarrow |z_{n_0} - z| \geq \epsilon_0) \tag{2.1.4}$$

根据复数 z_n 的表达式 $z_n = x_n + \mathbf{i}y_n$ 和复数 z 的表达式 $z = x + \mathbf{i}y$, 则得到

$$|z_n - z| = |(x_n - x) + \mathbf{i}(y_n - y)| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2}$$

从而推出不等式

$$|x_n - x|, |y_n - y| \leq |z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y|.$$

这就表明复数列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到 z 当且仅当实部构成的数列 $\{\mathrm{Re}(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和虚部构成的数列 $\{\mathrm{Im}(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 分别收敛到 $\mathrm{Re}(z)$ 和 $\mathrm{Im}(z)$.

该结论说明研究复数列的极限可归结为研究实数列的极限. 因此下面我们仅局限于对实数列展开讨论, 但会有时候用到些复数列的结果 (这个会随用随提). 至于复数列以及复数级数将会在复变函数中详细展开.

§2.1.2 例题

这一小节我们来练习"ϵ-N"语言来求证数列的极限. 到目前为止, 只能用定义来证明数列的极限; 此时我们是默认数列是收敛的, 然后来证明该数列的极限就是所给的数. 在§2.3 中我们将考察数列收敛的一些判别法则, 特别是**定理2.3.15**.

例2.1.2. *用ϵ-N 证明如下极限:*

(1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

(2) $|q| < 1$ 且 $q \in \mathbb{C} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.

(3) $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.

(4) $a \geq 1 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

(5) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

证: (1) 根据定义对任何$\epsilon > 0$ 我们需要找到$N \in \mathbb{N}$ 使得$|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$ 对任意$n > N$ 都成立. 此时显然取$n > 1/\epsilon$, 即可取$N := 1 + \lfloor 1/\epsilon \rfloor$.

(2) 如果 $q = 0$, 每个 q^n 均为零故结论成立. 从而我们可以假设 $0 < |q| < 1$. 此时

$$|q^n - 0| < \epsilon \iff |q|^n < \epsilon \iff n > \frac{\ln \epsilon}{\ln |q|}.$$

那么对任何$\epsilon > 0$存在$N = \lfloor \ln\epsilon / \ln|q| \rfloor + 1$使得

$$|q^n - 0| < \epsilon$$

对任意$n > N$都成立.

(3) 观察到

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

我们可以取 $N = \lfloor 1/4\epsilon^2 \rfloor + 1$.

(4) 不失一般性, 假设 $a > 1$. 因此 $\sqrt[n]{a} > 1$ 且可写成 $\sqrt[n]{a} = 1 + y_n$. 由于 $y_n > 0$ 得到

$$a = (1 + y_n) = 1 + ny_n + \frac{n(n-1)}{2} y_n^2 + \cdots + y_n^n > 1 + ny_n.$$

上述不等式可重新写成

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = |y_n| < \frac{a-1}{n} \longrightarrow 0.$$

这样我们找到 N 只要 $N > (a-1)/\epsilon$.

(5) 类似 (3), 令 $\sqrt[n]{n} = 1 + y_n$, 其中 $y_n > 0$. 同理得到

$$n = (1 + y_n)^n = 1 + ny_n + \frac{n(n-1)}{2} y_n^2 + \cdots + y_n^n > 1 + \frac{n(n-1)}{2} y_n^2.$$

和 (3) 唯一区别是, 在这里二项式展开中我们取第一项和第三项. 原因是右边已经出现了 n, 如果在二项式展开中我们只取前面两项, 那么很明显 y_n 的绝对值被 $(n-1)/n$ 所控制. 但是 $(n-1)/n$ 不可能趋于零. 最后得到

$$|\sqrt[n]{n} - 1| = |y_n| < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \longrightarrow 0.$$

这里只要 $N > 1 + 2/\epsilon^2$. □

在**例 2.1.2** 第 (1) 个例题中, $|q| < 1$ 得到实数列 $\{q^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛. 但是使得该实数列收敛的 q 值还有 $q = 1$, 此时恒有 $q^n \equiv 1$. 但当 $q = -1$ 时, 有 $q^n = (-1)^n$ 是发散的 (见下面例题); 而当 $|q| > 1$ 时实数列 $\{q^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是发散的 (可直接利用定义证明, 或运用**定理 2.2.1**). 所以实数列 $\{q^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛当且仅当 $q \in (-1, 1]$.

现在考虑复数列 $\{q^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 其中 $q \in \mathbb{C}$. 和实数列情形一样, 当 $|q| > 1$ 发散而当 $|q| < 1$ 时收敛. 和实数列唯一区别的地方是 $|q| = 1$ 情形, 此时 q 不仅可以取 ± 1 而且可以取单位圆上的任意值. 不妨令 $q = \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta$ 从而

得到 $q^n = \cos(n\theta) + \mathbf{i}\sin(n\theta)$, 其中 $\theta \in [0, 2\pi)$. 如果 $\theta = 0$, 则 $q = 1$ 从而数列 $\{q^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛; 如果 $\theta \in (0, 2\pi)$, 我们断言数列 $\{q^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 发散, 即断言此时数列 $\{\cos(n\theta)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\{\sin(n\theta)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 均发散 (根据三角函数性质不妨假设 $\theta \in (0, \pi)$). 假设 $\sin(n\theta) \to a \in \mathbb{R}$, 则得到 $\cos^2(n\theta) \to 1 - a^2$. 另一方面, 根据倍角公式

$$\sin(2n\theta) = 2\sin(n\theta)\cos(n\theta)$$

和定理 2.3.9, 得到

$$a^2 = 4a^2(1 - a^2) \quad \Longrightarrow \quad a = 0 \text{ 或 } a^2 = \frac{3}{4}.$$

下面我们来导出矛盾.

- 如果 $\sin(n\theta) \to 0$, 则得到

  $$n\theta = k_n\pi + \epsilon_n, \quad k_n \in \mathbb{Z}, \quad \epsilon_n \to 0.$$

  从 $(n+1)\theta = k_{n+1}\pi + \epsilon_{n+1}$ 得到

  $$\theta = (k_{n+1} - k_n)\pi + \epsilon_{n+1} - \epsilon_n.$$

  当 n 充分大时, $\epsilon_{n+1} - \epsilon_n \in (-1, 1)$, 并结合假设条件 $0 < \theta < \pi$, 必有 $k_{n+1} - k_n = 0$ 或 1, 但这是不可能的: $k_{n+1} - k_n = 0$ 推出 $\theta = \epsilon_{n+1} - \epsilon_n \to 0$, 而 $k_{n+1} - k_n = 1$ 推出 $\theta = \pi + \epsilon_{n+1} - \epsilon_n \to \pi$. 这就说明 $\sin(n\theta) \nrightarrow 0$.

- 如果 $\sin(n\theta) \to \sqrt{3}/2$, 则得到

  $$n\theta = 2k_n\pi + \frac{\pi}{3} + \epsilon_n, \quad k_n \in \mathbb{Z}, \quad \epsilon_n \to 0.$$

  根据 $(n+1)\theta = 2k_{n+1}\pi + \frac{\pi}{3} + \epsilon_{n+1}$ 得到

  $$\theta = 2(k_{n+1} - k_n)\pi + \epsilon_{n+1} - \epsilon_n.$$

  和第一种情形的论证一样, 必有 $k_{n+1} - k_n = 0$, 但这是不可能的: $k_{n+1} - k_n = 0$ 推出 $\theta = \epsilon_{n+1} - \epsilon_n \to 0$. 这就说明 $\sin(n\theta) \nrightarrow \sqrt{3}/2$.

- 类似可证 $\sin(n\theta) \nrightarrow -\sqrt{3}/2$.

上述冗长的论断证明了数列 $\{\cos(n\theta)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\{\sin(n\theta)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 均发散.

下面我们来考察两个发散数列的例子.

例2.1.3. (1) 证明数列 $\{(-1)^{n-1}\}_{n\geq 1}$ 发散.

(2) 证明数列 $\{\sin n\}_{n\geq 1}$ 发散.

证: (1) 首先证明 $(-1)^{n-1}\nrightarrow 1$. 取 $\epsilon_0=1$, 对任意 $N\in\mathbb{N}$ 存在 $n_0=2N>N$ 满足

$$|a_{n_0}-a|=|(-1)^{n-1}-1|=|-2|=2>1=\epsilon_0.$$

接下来对任意 $a\neq 1$, 证明 $(-1)^{n-1}\nrightarrow a$. 取 $\epsilon_0=|a-1|/2$, 对任意 $N\in\mathbb{N}$, 存在 $n_0=2N+1$ 满足 $|a_{n_0}-a|=|1-a|>\epsilon_0$.

(2) 由于 $|\sin n|\leq 1$, 我们只要证明对任意 $A\in[-1,1]$ 都有 $\sin n\nrightarrow A$. 不失一般性, 假设 $0\leq A\leq 1$. 存在 $\epsilon_0=\sqrt{2}/2$, 对任意 $N\in\mathbb{N}$, 存在 $n_0=\lfloor(2N\pi-\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{4}\rfloor$ 满足 $\sin n_0<-\sqrt{2}/2$ 且 $|\sin n_0-A|\geq\sqrt{2}/2=\epsilon_0$.

另一种证明方法如下. 假设 $\lim_{n\to\infty}\sin n=a$ 存在, 则根据三角函数恒等式

$$2\sin 1\cos n=\sin(n+1)-\sin(n-1)$$

得到 $\lim_{n\to\infty}\cos n=0$. 从而

$$\sin(2n)=2\sin n\cos n\to 0,\quad n\to\infty.$$

即 $a=0$. 但是另一方面, 根据 $1=\sin^2 n+\cos^2 n$, 导出矛盾 $0=1$. 因此数列 $\{\sin n\}_{n\geq 1}$ 发散. □

注2.1.4. (1) 例 2.1.2 告诉我们

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0\quad\not\Rightarrow\quad\lim_{n\to\infty}a_n\text{ 存在}.$$

(2) 例 2.1.3 告诉我们

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\text{ 有界}\quad\not\Rightarrow\quad\lim_{n\to\infty}a_n\text{ 存在}.$$

在定理2.2.1中我们将证明数列收敛必有界, 从而有界性是数列收敛的必要条件. 同样地, 利用定理2.2.5得到注2.1.4 (1) 的逆命题是对的, 即$\lim_{n\to\infty}a_n$存在推出$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$.

例2.1.5. 如果 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ 存在, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=a.$$

证: 对任意 $\epsilon>0$, 存在 $N_0\in\mathbb{N}$ 使得 $|a_n-a|<\epsilon/2$ 对任意 $n>N_0$ 都成立. 注意到

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-a\right| &= \left|\frac{a_1+\cdots+a_n-na}{n}\right|\\ = & \left|\frac{a_1+\cdots+a_{N_0}-N_0a}{n}+\frac{(a_{N_0+1}-a)+\cdots+(a_N-a)}{n}\right|\\ \leq & \frac{|a_1+\cdots+a_{N_0}-N_0a|}{n}+\frac{|a_{N_0+1}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n}\end{aligned}$$

$$\leq \frac{n-N_0}{n}\frac{\epsilon}{2}+\frac{|a_1+\cdots+a_{N_0}-N_0a|}{n}.$$

只要取

$$N>\max\left\{N_0,\frac{|a_1+\cdots+a_{N_0}-N_0a|}{\epsilon/2}\right\}.$$

我们得到

$$\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-a\right|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.\ \square$$

例2.1.6. 任意实数都是某个有理数列的极限.

证: 任给一个实数 $a\in\mathbb{R}$. 定义 $a_n:=\lfloor na\rfloor/n$. 因为

$$na-1<\lfloor na\rfloor\leq na,$$

我们得到

$$a-\frac{1}{n}<\frac{\lfloor na\rfloor}{n}<a$$

或者

$$|a_n-a|=\left|\frac{\lfloor na\rfloor}{n}-a\right|<\frac{1}{n}\longrightarrow 0.\ \square$$

根据无理数的稠密性和**例2.1.6** 得到任意实数都是某个无理数列的极限.

例2.1.7. 对任给实数a 都有$\lim_{n\to\infty}a^n/n!=0$.

证: 由于 $a\in\mathbb{R}$ 是一个给定的实数, 所以可以找到 $N_0\in\mathbb{N}$ 使得 $|a|\leq N_0$ 成立. 观察到下面的不等式

$$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|=\frac{|a|^n}{n!}=\frac{|a|^{N_0}}{N_0!}\times\frac{|a|}{N_0+1}\times\cdots\times\frac{|a|}{n}\leq\frac{|a|^{N_0}}{N_0!}\times\frac{|a|}{n},\quad n\geq N_0.$$

对任意 $\epsilon>0$ 存在 $N>\max\{N_0,|a|^{N_0+1}/N_0!\epsilon\}$, 不等式 $|a^n/n!|<\epsilon$ 对任意 $n>N$ 都成立. $\square$

例2.1.8. 证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^2-3}=3$.

证: 根据极限定义考虑差

$$\left|\frac{3n^2}{n^2-3}-3\right|=\left|\frac{9}{n^2-3}\right|=\frac{9}{|n^2-3}|=\frac{9}{(n+\sqrt{3})(n-\sqrt{3})}<\frac{9}{n}$$

只要 $n\geq 3$. 因此当 $n>\max\{3,9/\epsilon\}$ 时候, 得到 $|3n^2/(n^2-3)-3|<\epsilon$. $\square$

上面的例子告诉我们, 在用ϵ-N 证明数列极限时, 有时候可事先要求n 超过某数从而为找到ϵ 带来简便.

例2.1.9. $\lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1}=\frac{3}{2}$.

证: 简单计算得到

$$\left|\frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{3}{4\sqrt{n}-2}.$$

如果事先假定$n \geq 4$ 则得到

$$\left|\frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1}-\frac{3}{2}\right| \leq \frac{3}{3\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

所以只要$n > \max\{4, 1/\epsilon^2\}$ 就有

$$\left|\frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1}-\frac{3}{2}\right| < \epsilon$$

成立. 当然我们也可以直接使用不等式放缩技巧得到

$$\left|\frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1}-\frac{3}{2}\right| \leq \frac{3}{3\sqrt{n}} \leq \frac{5}{4\sqrt{n}-2\sqrt{n}} = \frac{5}{2\sqrt{n}} < \frac{3}{\sqrt{n}}.$$

此时只要$n > 9/\epsilon^2$ 即可. □

例2.1.10. 如果 $a_n := 0.3\cdots3$ (n 个 3) 证明 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.\dot{3} = \frac{1}{3}$.

证: 只要注意到

$$\begin{aligned} |a_n - 0.\dot{3}| &= \left|0.\underbrace{33\cdots33}_{n} - 0.\underbrace{33\cdots33}_{n}33\cdots\right| = \left|0.\underbrace{00\cdots00}_{n}33\cdots\right| \\ &< 0.\underbrace{00\cdots0}_{n-1}1 = \frac{1}{10^n}. \quad \square \end{aligned}$$

§2.2 收敛数列的性质

首先来看一个简单的收敛数列$\{a_n = 1/n\}_{n\geq 1}$. 在**例2.1.2** 中我们已经证明了$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. 显然这个数列满足

$$0 < a_n \leq 1, \quad a_n > a_{n+1}.$$

所以极限只能有一个, 而且$\{1/n\}_{n\geq 1}$ 是个有界数列.

一个自然的问题是其它收敛数列是否也具有极限唯一性和数列本身有界性. 本节主要来回答这两个问题, 并得到了收敛数列的其它重要性质.

§2.2.1 基本性质

在**定义 2.1.1** 中我们留下了二个没有给出证明的断言, 即数列极限存在必唯一和收敛数列必有界. 在这小节我们给出这二个断言的证明.

定理2.2.1. (1) **(唯一性)** $a_n \to a$, $a_n \to b$ 都存在$\Longrightarrow a = b$.

(2) **(有界性)** $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 收敛 $\Longrightarrow$ $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 有界.

(3) **(保序性)** $a_n \to a$, $b_n \to b$, $a < b \Longrightarrow$ 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $a_n < b_n$ 对任意任意 $n \geq N$ 都成立.

(4) $a_n \to a, b < a < c \Longrightarrow$ 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $b < a_n < c$ 对任意 $n > N$ 都成立.

(5) **(保号性)** $a_n \to a, b_n \to b, a_n \le b_n$ (对任意 $n > N$) $\Longrightarrow a \le b$.

(6) $a_n \to a$ 存在$\Longrightarrow |a_n| \to |a|$.

证: (1) 任给 $\epsilon > 0$, 存在 $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ 使得

$$|a_n - a| < \epsilon, \quad n > N_1 \quad 和 \quad |b_n - b| < \epsilon, \quad n > N_2$$

都成立. 从而

$$|a - b| \le |a_n - b + |a_n - a| < 2\epsilon, \quad n > \max\{N_1, N_2\}.$$

根据 ϵ 的任意性, 我们必须有 $a = b$ 成立.

(2) 取 $\epsilon = 1$, 存在 $N_1 \in \mathbb{N}$ 使得 $a - 1 < a_n < a + 1$ 对任何 $n > N_1$ 都成立. 因此对任意 $n \ge 1$,

$$\min\{a_1, \cdots, a_N, a - 1\} \le a_n \le \max\{a_1, \cdots, a_N, a + 1\}.$$

(3) 取 $\epsilon = \frac{b-a}{2} > 0$, 存在 $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ 使得

$$|a_n - a| < \frac{b-a}{2}, \quad n > N_1 \quad 和 \quad |b_n - b| < \frac{b-a}{2}, \quad n > N_2$$

都成立. 从而

$$a_n < \frac{b-a}{2} + a = \frac{b+a}{2} < b_n, \quad n > \max(N_1, N_2).$$

(4) 在 (3) 中令 $b_n \equiv b$, 我们可以找到 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $b = b_n < a_n$ $(n > N)$ 成立.

(5) 若 $\lim_{n\to\infty} b_n = b < a = \lim_{n\to\infty} a_n$ 成立, 则根据 (3) 我们得到 $b_n < a_n$ 对所有 $n > N$ 都成立.

(6) $a_n \to a$ 意味着对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $|a_n - a| < \epsilon$ 对任意 $n > N$ 都成立. 从而 $||a_n| - |a|| \le |a_n - a| < \epsilon$. $\square$

注2.2.2. (1) $\{a_n\}_{n\ge1}$ 有界 $\not\Rightarrow$ $\{a_n\}_{n\ge1}$ 收敛. 比如, $a_n = (-1)^n$.

(2) $a_n \to a$, $b_n \to b$, $a_n < b_n \not\Rightarrow a < b$. 比如, $a_n = 1/n$, $b_n = 2/n$, 但是 $a = b = 0$.

(3) $\{|a_n|\}_{n\ge1}$ 收敛 $\not\Rightarrow$ $\{a_n\}_{n\ge1}$ 收敛. 比如 $a_n = (-1)^{n-1}$.

定理2.2.3. (夹逼定理) (Sandwich's theorem) 如果不等式 $x_n \le y_n \le z_n$ 对所有 $n \ge N_0$ 都成立, 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$, 则 $\lim_{n\to\infty} y_n = a$.

证: 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ 使得

$$|x_n - a| < \epsilon, \quad |z_n - a| < \epsilon$$

成立. 从而

$$a - \epsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \epsilon$$

对任意 $n > \max\{N_0, N_1, N_2\}$ 都成立. 故 $y_n \to a$. □

例2.2.4. (1) $a_1, \cdots, a_k > 0 \Longrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + \cdots + a_k^n} = \max\{a_1, \cdots, a_k\}. \tag{2.2.1}$$

(2) 证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt[n]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} = 1. \tag{2.2.2}$$

(3) 求极限

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

证: (1) 不失一般性, 假设 $\max\{a_1, \cdots, a_k\} = a_1$. 则得到

$$a_1 < \sqrt[n]{a_1^n + \cdots + a_k^n} \le \sqrt[n]{k a_1^n} = (\sqrt[n]{k}) a_1 \to a_1.$$

最后一步利用了**例** 2.1.2 (3).

(2) 实际上有下列不等式

$$\frac{1 + 1 + \cdots + 1}{n} \le \frac{1 + \sqrt[n]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} \le \frac{\sqrt[n]{n} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n}$$

从而推出 $1 \le (1 + \sqrt[n]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n})/n \le \sqrt[n]{n} \to 1$. 最后一步利用**例** 2.1.2 (4).

(3) 回忆下阶乘:

$$\begin{aligned} n! &= 1 \times 2 \times 3 \cdots \times n, \\ (2n)!! &= 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n, \\ (2n-1)!! &= 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1), \\ (2n)! &= (2n)!! \cdot (2n-1)!!. \end{aligned}$$

对每个 $k \in \mathbb{N}$ 有

$$\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1}$$

成立.

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \prod_{1\le k\le n} \frac{2k-1}{2k} < \prod_{1\le k\le n} \frac{2k}{2k+1} = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n}{3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}$$

$$= \frac{1}{\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times2n}} \times \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}} \times \frac{1}{2n+1}$$

推出

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

从而极限为 0. □

§2.2.2 收敛数列的代数运算/四则运算

假设给定两个数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 我们可以很自然地问数列 $a_n \pm b_n$, a_nb_n, a_n/b_n (对充分大的 n 有 $b_n \neq 0$) 的收敛性.

定理2.2.5. (四则运算) *假设 $a_n \to a$ 和$b_n \to b$ 都收敛且$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 那么有*

$$\alpha a_n \pm \beta b_n \to \alpha a \pm \beta b, \quad a_nb_n \to ab, \quad \frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}\ (b \neq 0). \tag{2.2.3}$$

证: (1) $b_b \to b$ 推出 $-b_n \to -b$. 故只要证明 $\alpha a_n + \beta b_n \to \alpha a + \beta b$ 即可. 但这个极限可有下列不等式给出

$$0 \leq |(\alpha a_n + \beta b_n) - (\alpha a + \beta b)| \leq |\alpha||a_n - a| + |\beta||b_n - b| \to 0.$$

(2) $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都收敛推出存在两个正数 M_1, M_2 使得 $|a_n| \leq M_1$ 和 $|b_n| \leq M_2$ 成立. 下列计算

$$0 \leq |a_nb_n - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \leq M_1|b_n - b| + M_2|a_n - a| \to 0$$

得到 $a_nb_n \to ab$.

(3) $b_n \to b$ 推出 $|b_n| \to |b|$. 根据假设条件 $|b| > 0$, 由定理 2.2.1 (3) 得到不等式 $|b_n| > |b|/2$ 对充分大的 n 成立. 下列计算

$$0 \leq \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{b(a_n - a) - a(b_n - b)}{b_nb}\right|$$

$$\leq \quad \frac{|b||a_n - a| + |a||b_n - b|}{|b_n||b|} \quad \leq \quad \frac{2}{|b|^2}\left(|b||a_n - a| + |a||b_n - b|\right) \quad \to \quad 0$$

得到 $a_n/b_n \to a/b$. □

注2.2.6. (1) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ *存在*$\not\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n$ *存在或* $\lim_{n\to\infty} b_n$ *存在. 比如,* $a_n = (-1)^{n-1}$, $b_n = (-1)^n$.

(2) $\lim_{n\to\infty} a_nb_n$ *存在*$\not\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n$ *存在或* $\lim_{n\to\infty} b_n$ *存在. 比如,* $a_n = b_n = (-1)^{n-1}$.

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n$ *存在*$\not\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n$ *存在或* $\lim_{n\to\infty} b_n$ *存在. 比如,* $a_n = (-1)^n$, $b_n = n$.

例2.2.7. (1) 对所有 $a>0$ 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1. \tag{2.2.4}$$

(2) 对所有 $q>1$ 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_q n}{n}=0. \tag{2.2.5}$$

(3) 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$$

证: (1) **例** 2.1.2 推出 (2.2.4) 对所有 $a\ge 1$ 都成立. 当 $0<a<1$ 时, 有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=\frac{1}{1}=1.$$

(2) 实际上根据 $q>1$ 得到

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1<q^{\epsilon}\quad\Longrightarrow\quad\sqrt[n]{n}<q^{\epsilon},\quad n>N.$$

故只要

$$\frac{\log_q n}{n}<\epsilon,\quad\forall n>N\quad\Longrightarrow\quad\frac{\log_q n}{n}\to 0.$$

(3) 令 $a_n=1/\sqrt[n]{n!}$. 因为 $n!=1\times 2\times\cdots\times n$ 得到

$$\begin{aligned}(n!)^2 &= (1\times 2\times\cdots\times n)\times[n\times(n-1)\times\cdots\times 2\times 1]\\ &= [1\times n][2\times(n-1)]\cdots[k\times(n-k+1)]\times\cdots\times[n\times 1].\end{aligned}$$

对任意 $1\le k\le n$ 有不等式 $(k-1)(n-k)\ge 0$ 成立, 从而 $k(n-k+1)\ge n$ 成立. 带入上述恒等式得到

$$(n!)^2\ge n^n\quad\Longrightarrow\quad n!\ge n^{n/2}\quad\Longrightarrow\quad\sqrt[n]{n!}\ge\sqrt{n}.$$

这表明 $a_n\le 1/\sqrt{n}$ 从而推出 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. □

最后我们把一些重要的数列极限罗列如下:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,\quad\lim_{n\to\infty}q^n=0\quad(|q|<1),\quad\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0\quad(a\in\mathbb{R}),$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\quad(a>0),\quad\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0,$$

具体证明分别参见**例 2.1.2**, **例 2.1.7**, (2.2.4), 和(2.2.5).

§2.2.3 无穷小和无穷大数列

根据之前内容知道若极限 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 存在, 则数列 $b_n := a_n - a$ 的极限也存在且满足 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. 由此可以引入如下概念.

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 称为**无穷小数列(infinitely small sequence)**, 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. 即无穷小数列就是极限为 0 的数列. 无穷小数列具有如下基本性质:

(1) $a_n \to a \Longleftrightarrow a_n - a \to 0 \Longleftrightarrow a_n = a + \alpha_n$ 且 $\alpha_n \to 0$.

(2) $a_n \to 0 \Longleftrightarrow |a_n| \to 0$.

(3) $a_n \to 0, b_n \to 0 \Longrightarrow a_n + b_n, a_n - b_n, a_n b_n \to 0$.

(4) $a_n \to 0, b_n \to 0 \not\Rightarrow a_n/b_n \to 0$. 比如下面的反例,

$$\left\{\begin{array}{l} a_n = \frac{1}{n}, \\ b_n = \frac{1}{n}, \end{array}\right. \quad \frac{a_n}{b_n} \equiv 1, \quad \left\{\begin{array}{l} a_n = \frac{1}{n}, \\ b_n = \frac{1}{n^2}, \end{array}\right. \quad \frac{a_n}{b_n} = n, \quad \left\{\begin{array}{l} a_n = \frac{1}{n^2}, \\ b_n = \frac{1}{n}, \end{array}\right. \quad \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n}.$$

(5) $a_n \to 0, |b_n| \le M \Longrightarrow a_n b_n \to 0$.

在平面上考察以 $(0,1)$ 为圆心 1 为半径的圆 C. 显然 C 和 x 轴交于原点 $(0,0)$. 取点 $P = (0,2)$, 这是 C 和 y 轴的交点. 任取 x 轴上的点 Q, 作直线 PQ 交 C 于 R 点. 随着点 Q 跑遍整个 x 轴, 我们发现点 R 跑遍整个圆 C 除了 P 点. 因此可以想象

$$\mathbb{R} \cup \{\infty\} \quad \Longleftrightarrow \quad C \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{S}^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

这种观点很自然的把 ∞ 点等同于 $(0,2)$ 点.

数列 $\{a_n\}_{n\ge1}$ 称为**无穷大数列(infinitely large sequence)**, 若对任意 $C > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$|a_n| \ge C \quad \text{对任何} \quad n > N$$

都成立.

记号: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ 或 $a_n \to \infty$.

与无穷小数列不同的是, $a_n \to \infty$ 最典型的方式是 a_n 趋于正无穷大和趋于负无穷大. 但是要注意的是, $a_n \to \infty$ 除了上述两种典型的方式外, 趋于方式还可以不断地跳跃, 比如数列 $(-1)^n n$.

(1) 定义

$$\begin{array}{c} \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \\ \text{或 } a_n \to +\infty \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} \{a_n\}_{n\ge1} \text{ 是无穷大数列} \\ \text{且 } a_n > 0,\ n \ge N_0. \end{array}$$

(2) 定义

$$\begin{array}{c}\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \\ \text{或 } a_n \to -\infty\end{array} \iff \begin{array}{c}\{a_n\}_{n\ge 1} \text{ 是无穷大数列} \\ \text{且 } a_n < 0,\ n \ge N_0.\end{array}$$

(3) $a_n \to +\infty$ 或者$a_n \to -\infty \Longrightarrow a_n \to \infty$. 但是反之不一定对, 比如 $a_n = (-1)^n n$.

(4) $a_n, b_n \to \pm\infty \Longrightarrow a_n + b_n \to \pm\infty$.

(5) $a_n \to \pm\infty, b_n \to \mp\infty \Longrightarrow a_n - b_n \to \pm\infty$.

(6) $a_n \to \infty, |b_n| \ge M > 0 \Longrightarrow a_n b_n \to \infty$.

(7) $a_n, b_n \to \pm\infty \Longrightarrow a_n b_n \to \pm\infty$.

(8) $a_n \to \pm\infty, b_n \to \mp\infty \Longrightarrow a_n b_n \to -\infty$.

(9) $a_n \to 0, a_n \neq 0 \Longrightarrow 1/a_n \to \infty$.

这里要提醒大家的是, 无穷大数列和无界数列即有区别又有联系. 根据定义, 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是无界的, 则对任意 $M > 0$ 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \ge N$ 时有 $|a_n| \ge M$. 特别地, 我们得到子集 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 $|a_{n_k}| \ge k$. 换句话说, 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是无界的如果可以找到一个无限数列, 包含在原来数列中但未必是原数列本身, 使得它自己是无穷大的. 而无穷大数列是指某项之后的所有项都要大于预先设定的正数, 故无穷大数列一定是无界数列, 但反之则不一定成立.

例2.2.8. (1) $|q| > 1 \Longrightarrow q^n \to \infty$. 实际上,

$$|q^n| = |q|^n \ge |q|^{\frac{\ln C}{\ln|q|}} = C$$

只要 $n \ge N > \ln C/\ln|q|$.

(2) $a_n := \sum_{1\le k\le n} 1/(\sqrt{n} + \sqrt{k}) \to +\infty$. 实际上,

$$a_n > \frac{n}{2\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{2} \to +\infty.$$

(3) 令

$$a_n := \frac{x_0 n^k + x_1 n^{k-1} + \cdots + x_{k-1} n + x_k}{y_0 n^\ell + y_1 n^{\ell-1} + \cdots + y_{\ell-1} n + y_\ell}, \quad (k, \ell \in \mathbb{N},\ x_0 y_0 \neq 0).$$

由于

$$a_n = n^{k-\ell} \frac{x_0 + \frac{x_1}{n} + \cdots + \frac{x_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{x_k}{n^k}}{y_0 + \frac{y_1}{n} + \cdots + \frac{y_{\ell-1}}{n^{\ell-1}} + \frac{y_\ell}{n^\ell}},$$

得到

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} 0, & k<\ell, \\ x_0/y_0, & k=\ell, \\ \infty, & k>\ell. \end{cases}$$

(4) $a_n = \sqrt[n]{n!} \to +\infty$. 观察到

$$(n!)^2 = (1\cdot n)[2\cdot(n-1)]\cdots[k(n-k)]\cdot(n\cdot 1) = \prod_{1\le k\le n}[k(n-k+1)] \ge n^2$$

这是因为不等式 $(k-1)(n-k)\ge 0$ $(1\le k\le n)$ 可推出 $k(n-k+1)\ge n$ 成立.

(5) $\{n\cos(n\pi)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是无穷大数列, 但 $\{n\cos(n\pi/2)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是无界数列而不是无穷大数列.

(6) $2^n + \ln n \to +\infty$ 和 $n/\cos n \to \infty$.

§2.2.4 Stolz 定理

这个定理主要是来处理 "∞/∞" 型或 "$0/0$" 型极限. 假设数列 $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ 都是无穷小, 那么定理 2.2.5 中最后一个结论 (即数列的商) 就不一定成立. 如果数列 $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$ 都是无穷大, 我们可以把商 a_n/b_n 转化成两个无穷小数列的商:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1/b_n}{1/a_n}$$

这里 $1/b_n \to 0$ 和 $1/a_n \to 0$ 是无穷小数列.

因此 "∞/∞" 型或 "$0/0$" 型极限本质上是一回事情. 但是针对这两种情形, Stolz 定理的内容还是有一些细微的差异.

定理2.2.9. (Stolz 定理 I: "∞/∞" 型) 给定两个数列 $\{x_n\}_{n\ge 1}$ 和 $\{y_n\}_{n\ge 1}$. 如果

$$y_n < y_{n+1}, \quad y_n \to +\infty, \quad 和 \quad \lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a\ (是实数或\ \pm\infty),$$

那么有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a. \tag{2.2.6}$$

证: 情形 1: $a = 0$. 对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $N_1 \in \mathbb{N}$ 使得

$$|x_n - x_{n-1}| < \epsilon(y_n - y_{n-1}), \quad \forall\, n > N_1.$$

特别地, 得到

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x_{n-1}}{y_n}\right| < \epsilon\left(1 - \frac{y_{n-1}}{y_n}\right).$$

上述不等式中, x_n/y_n 是我们希望的, 但是其余项都不是我们希望的. 为了舍去这些额外项, 当 $n > N_1$ 利用三角不等式得到

$$|x_n - x_{N_1}| \le \sum_{N_1+1\le i\le n}|x_i - x_{i-1}| \le \sum_{N_1+1\le i\le n}\epsilon(y_i - y_{i-1}) = \epsilon(y_n - y_{N_1});$$

即
$$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{x_{N_1}}{y_n}\right|\le\epsilon\left(1-\frac{y_{N_1}}{y_n}\right)<\epsilon.$$
但是当 $y_n\to+\infty$ 时存在 $N_2\in\mathbb{N}$ 使得 $|x_{N_1}/y_n|<\epsilon$ 对任意 $n>N_2$ 都成立. 最后把这些带入得到
$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right|\le\epsilon+\epsilon=2\epsilon$$
只要 $n>N=\max\{N_1,N_2\}$.

情形 2: $a\neq 0$. 基本想法是构造新的数列把**情形 2**归结到**情形 1**, 从而可应用**情形 1**的结果. 令
$$\widetilde{x}_n:=x_n-ay_n.$$
简单计算得到
$$\frac{\widetilde{x}_n-\widetilde{x}_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\frac{(x_n-ay_n)-(x_{n-1}-ay_{n-1})}{y_n-y_{n-1}}=\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}-a\to 0.$$
根据**情形 1**的结论得到 $\widetilde{x}_n/y_n\to 0$ 或 $x_n/y_0\to a$.

情形 3: $a=+\infty$. 存在 $N_1\in\mathbb{N}$ 使得 $x_n-x_{n-1}>y_n-y_{n-1}>0$ 对任意 $n>N_1$ 都成立. 更进一步
$$x_n-x_{N_1}=\sum_{N_1+i\le i\le n}(x_i-x_{i-1})>\sum_{N_1+1\le i\le n}(y_i-y_{i-1})=y_n-y_{N_1}.$$
让 $n\to+\infty$ 得到 $x_n\to+\infty$. 根据**情形 1**,
$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=\frac{1}{+\infty}=0.$$

情形 4: $a=-\infty$. 观察到
$$\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}\to-\infty\Longleftrightarrow\frac{(-x_n)-(-x_{n-1})}{y_n-y_{n-1}}\to+\infty.$$
此时可应用**情形 3**的结论得到. □

实际应用中, 如果商 $a_n=x_n/y_n$ 中分母 y_n 单调递增且趋于 $+\infty$, 那么我们马上想到是不是可以应用**定理 2.2.9**. 如果真的要应用这个定理, 还需要保证另一个条件
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a$$
是否存在.

定理2.2.10. (Stolz 定理 II: “$0/0$” 型) 给定两个数列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 和 $\{y_n\}_{n\geq 1}$. 如果

$$x_n \to 0, \quad y_n > y_{n+1}, \quad y_n \to 0, \quad 和 \quad \lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} = a\ (是实数或\ \pm\infty)$$

那么有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} = a. \tag{2.2.7}$$

证: 情形 1: $a \in \mathbb{R}$. 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$a - \epsilon < \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+}} < a + \epsilon, \quad \forall n > N,$$

成立, 或

$$(a-\epsilon)(y_n - y_{n+1}) < x_n - x_{n+1} < (a+\epsilon)(y_n - y_{n+1}), \quad \forall n > N.$$

特别地,

$$(a-\epsilon)(y_n - y_{n+p}) < x_n - x_{n+p} < (a+\epsilon)(y_n - y_{n+p}), \quad \forall n > N \text{ 和 } p \geq 1.$$

令 $p \to +\infty$ 得到

$$(a-\epsilon)y_n \leq x_n \leq (a+\epsilon)y_n \Longrightarrow \left|\frac{x_n}{y_n} - a\right| \leq \epsilon.$$

情形 2: $a = +\infty$. 给定 $C > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $x_n - x_{n+1} > C(y_n - y_{n+1})$ 成立, 从而 $x_n - x_{n+p} > C(y_n - y_{n+p})$ 对任意 $n > N$ 和 $p \geq 1$ 也成立. 让 $p \to +\infty$ 得到 $x_n/y_n \geq C$.

情形 3: $a = -\infty$. 此时证明和定理 2.2.9 **情形 4** 的证明类同. □

请注意**定理 2.2.10** 和**定理 2.2.9** 中假设条件的细微差别.

例2.2.11. (1) $a_n \to a \Longrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \frac{a}{2}.$$

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 或 $\pm\infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) = a$.

(3) $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = \ell \Longrightarrow$ 求 $\lim_{n\to\infty} a_n/n$ 和 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{1\leq i\leq n} a_i$.

(4) $a_n \leq a_{n+1}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) = a \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a$.

(5) $a_n = s_n - s_{n-1}$, $\sigma_n = \frac{1}{n+1}(s_0 + \cdots + s_n)$, $na_n \to 0$, σ_n 收敛 $\Longrightarrow s_n$ 也收敛且

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\sigma_n.$$

证: (1) 令 $y_n := a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n$ 和 $y_n := n^2$. 根据定理 2.2.9,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{n^2 - (n-1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{2n-1} = \frac{a}{2}.$$

(2) 令 $x_n = a_1 + \cdots + a_n$ 和 y_n. 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

(3) 令 $x_n := a_n$ 和 $y_n = n$. 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{n - (n-1)} = \lim_{n\to\infty} (a_n - a_{n-1}) = \ell.$$

对第二个极限, 令 $x'_n := a_1 + \cdots + a_n$ 和 $y'_n = n^2$. 从而

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x'_n}{y'_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x'_n - x'_{n-1}}{y'_n - y'_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^2 - (n-1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2n-1} = \frac{\ell}{2}.$$

(4) 由 $a_n \le a_{n+1}$ 得到 $\sigma_n := \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) \le na_n/n = a_n$. 另一方面, 对所有 $m > n$,

$$\sigma_m = \frac{1}{m}\left(\sum_{1\le i\le n} a_i + \sum_{n+1\le i\le m} a_i\right) \ge \frac{1}{m}\sum_{1\le i\le n} a_i + \frac{m-n}{m} a_n.$$

根据夹逼定理得到 $a_n \to a$.

(5) 观察到

$$s_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{1\le i\le n} i a_i.$$

故

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{1\le i\le n} i a_i = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{1\le i\le n} i a_i - \sum_{1\le i\le n-1} i a_i}{(n+1) - n} = \lim_{n\to\infty} n a_n = 0. \quad \square$$

(6) 根据 (3), 知道 $a_n \to a \Longrightarrow \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) \to a$. 但是, 反之不一定成立. 比如数列 $\{(-1)^n\}_{n\ge1}$.

例2.2.12. (1) $k \in \mathbb{Z}_+ \Longrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}.$$

(2) $\lim_{n\to\infty} n(a_n - a) = b, k \in \mathbb{Z}_+ \Longrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_1 + 2^k a_2 + \cdots + n^k a_n}{n^{k+1}} - \frac{a}{k+1}\right) = \frac{b}{k} + \frac{a}{2}.$$

证: (1) 利用定理 2.2.9 得到

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(k+1)(1^k + \cdots + n^k) - n^{k+1}}{(k+1)n^k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{[(k+1)(1^k + \cdots + n^k) - n^{k+1}] - [(k+1)(1^k + \cdots + (n-1)^k) - (n-1)^{k+1}]}{(k+1)n^k - (k+1)(n-1)^k}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(k+1)n^k-[n^{k+1}-(n-1)^{k+1}]}{(k+1)[n^k-(n-1)^k]} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}k(k+1)n^k+\cdots}{k(k+1)n^k+\cdots} = \frac{1}{2}.$$

(2) 观察到

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_1+2^ka_2+\cdots+n^ka_n}{n^{k+1}}-\frac{a}{k+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(k+1)\sum_{1\le i\le n} i^ka_i-an^{k+1}}{(k+1)n^k} = \lim_{n\to\infty}\frac{(k+1)n^ka_n-a(n^{k+1}-(n-1)^{k+1})}{(k+1)[n^k-(n-1)^k]}$$

和

$$\begin{aligned} n^{k+1}-(n-1)^{k+1} &= (n-1+1)^{k+1}-(n-1)^{k+1} \\ &= (k+1)(n-1)^k+\frac{k(k+1)}{2}(n-1)^{k-1}+\cdots. \end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_1+2^ka_2+\cdots+n^ka_n}{n^{k+1}}-\frac{a}{k+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(k+1)a_nn^k-(k+1)a(n-1)^k-\frac{ak(k+1)}{2}(n-1)^{k-1}+\cdots}{(k+1)[k(n-1)^{k-1}+\cdots]}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(k+1)n^k(a_n-a)+(k+1)a[n^k-(n-1)^k]-\frac{k(k+1)a}{2}(n-1)^{k-1}+\cdots}{(k+1)[k(n-1)^k+\cdots]}$$

$$= \frac{b}{k}+a-\frac{a}{2} = \frac{b}{k}+\frac{a}{2}.$$

定理2.2.13. (Toeplitz 定理) 假设 $p_{n0}+p_{n1}+\cdots+p_{nn}=1$ 对所有 $n\in\mathbb{N}$ 都成立, 且每个 $p_{ij}\ge 0$. 令

$$y_n := \sum_{0\le i\le n} p_{ni}x_i, \quad n\in\mathbb{N}.$$

那么下列论断等价:

(1) $x_n\to a \Longrightarrow y_n\to a$,

(2) 对每个 $m\in\mathbb{N}$ 都有 $p_{nm}\to 0$.

证: (1) $\Longrightarrow$ (2): 取 $x_n=\delta_{nm}$ 得到 $x_n\to 0$ 和 $y_n=p_{nm}$ $(n\ge m)$. 故

$$\lim_{n\to\infty} p_{nm} = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

(2) $\Longleftarrow$ (1): 假设 $x_n\to a$. 则存在 $M>0$ 使得 $|x_n-a|\le M$ 对所有 $n\in\mathbb{Z}_+$ 都成立. 对任意 $\epsilon>0$, 存在 $N^*\in\mathbb{N}$ 使得 $|x_n-a|<\epsilon/2$ 对所有 $n>N^*$ 都成立. 但是根据极限 $\lim_{n\to\infty} p_{ni}=0$, 我们得到存在 $N_i>N^*$ 使得如下不等式

$$0\le p_{ni}\le\frac{\epsilon}{2N^*M}, \quad 任意\ n>N_i$$

成立. 令 $N := \max_{0\le i\le N^*} N_i$. 得到

$$\begin{aligned}|y_n - a| &= \left|\sum_{0\le i\le n} p_{ni}x_i - \sum_{0\le i\le n} p_{ni}a\right| \\ &\le \sum_{0\le i\le N^*} p_{ni}|x_i - a| + \sum_{N^*+1\le i\le n} p_{ni}|x_i - a| \\ &< MN^*\frac{\epsilon}{2N^*M} + \frac{\epsilon}{2}\sum_{N^*+1\le i\le n} p_{ni} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \quad \square\end{aligned}$$

例2.2.14. (1) $b_n > 0$, $b_0 + b_1 + \cdots + b_n \to \infty$, $a_n/b_n \to s \Longrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{b_0 + b_1 + \cdots + b_n} = s.$$

(2) $p_k > 0$, $\frac{p_n}{p_0+p_1+\cdots+p_n} \to 0$, $s_n \to s \Longrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{0\le i\le n} s_i p_{n-i}}{\sum_{0\le i\le n} p_i} = s.$$

(3) $p_k, q_k > 0$, $\frac{p_n}{p_0+\cdots+p_n} \to 0$, $\frac{q_n}{q_0+\cdots+q_n} \to 0 \Longrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{\sum_{0\le i\le n} r_i} = 0.$$

这里 $r_n := \sum_{0\le i\le n} p_i q_{n-i}$.

证: (1) 令 $x_n := a_n/b_n$, $p_{nm} := b_m/\sum_{0\le i\le n} b_i$, 和 $y_n := \sum_{0\le i\le n} p_{ni}x_i$. 则

$$\lim_{n\to\infty} p_{nm} = 0, \quad \sum_{0\le i\le n} p_{ni} = 1, \quad p_{nm} \ge 0.$$

根据定理 2.2.13, 得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{0\le i\le n} a_i}{\sum_{0\le i\le n} b_i} = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n = s.$$

(2) 令 $p_{nm} := p_{n-m}/\sum_{0\le i\le n} p_i$, 这里 $0 \le m \le n$ 且 $n = 1, 2, \cdots$, 和

$$x_n := s_n, \quad y_n := \sum_{0\le i\le n} p_{ni}x_i = \frac{\sum_{0\le i\le n} s_i p_{n-i}}{\sum_{0\le i\le n} p_i}.$$

(3) 令

$$P_n := \sum_{0\le i\le n} p_i, \quad Q_n := \sum_{0\le i\le n} q_n, \quad R_n := \sum_{0\le i\le n} r_i,$$

和

$$p_{nm} := \frac{p_{n-m}Q_m}{\sum_{0\le i\le n} p_i Q_{n-i}}, \quad x_n := \frac{q_n}{Q_n}, \quad y_n := \sum_{0\le i\le n} p_{ni}x_i. \quad \square$$

例2.2.15. (1) 证明

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n+2}{\sqrt{6}}\right)^n. \tag{2.2.8}$$

(2) 证明

$$n < \left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n. \tag{2.2.9}$$

证: (1) 在**例** 2.2.8 (4) 中我们已经证明了不等式

$$(n!)^2 = \prod_{1\le k\le n}[k(n-k+1)] \ge n^n$$

从而

$$n! > n^{n/2} = (\sqrt{n})^n.$$

不等式 (2.2.8) 给出了 $n!$ 的一个比 $(\sqrt{n})^n$ 更好的下界估计. 利用数学归纳法, 假设 $k! > (k/3)^k$ 成立. 由于

$$(k+1)! = (k+1)k! > (k+1)\left(\frac{k}{3}\right)^k,$$

为了归纳证明 $(k+1)! > ((k+1)/3)^{k+1}$ 只要证明

$$(k+1)\left(\frac{k}{3}\right)^k > \left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1}$$

或

$$3k^k > (k+1)^k \Longleftrightarrow \left(1+\frac{1}{k}\right)^k < 3.$$

但是根据二项式展开得到

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k &= 1+1+\sum_{2\le i\le k}\frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)}{i!}\frac{1}{k^i}\\ &< 2+\sum_{2\le i\le k}\frac{1}{i!} < 2+\sum_{2\le i\le k}\frac{1}{i(i-1)} < 3.\end{aligned}$$

利用数学归纳法证明上界, 假设 $k! < ((k+2)/\sqrt{6})^k$ 成立. 根据 $(k+1)! = (k+1)k! < (k+1)((k+2)/\sqrt{6})^k$, 只要证明

$$(k+1)\left(\frac{k+2}{\sqrt{6}}\right)^k < \left(\frac{k+3}{\sqrt{6}}\right)^{k+1}.$$

实际上,

$$\begin{aligned}\left(\frac{k+3}{\sqrt{6}}\right)^{k+1} &= \left(\frac{k+2}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{k+1} > \left(\frac{k+2}{\sqrt{6}}\right)^{k+1} + (k+1)\left(\frac{k+2}{\sqrt{6}}\right)^k\frac{1}{\sqrt{6}}\\ &+ \frac{(k+1)k}{2}\left(\frac{k+2}{\sqrt{6}}\right)^{k-1}\frac{1}{(\sqrt{6})^2} + \frac{(k+1)k(k-1)}{6}\left(\frac{k+2}{\sqrt{6}}\right)^{k-2}\frac{1}{(\sqrt{6})^3}\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{k+2}{\sqrt{6}}\right)^k \left[\frac{k+2}{\sqrt{6}} + \frac{k+1}{\sqrt{6}} + \frac{k(k+1)}{2\sqrt{6}(k+2)} + \frac{(k+1)k(k-1)}{6\sqrt{6}(k+2)^2}\right]$$
$$= \left(\frac{k+2}{\sqrt{6}}\right)^k \frac{16k^3+75k^2+125k+72}{6\sqrt{6}(k+2)^2}.$$

现在断言

$$\frac{16k^3+75k^2+125k+72}{6\sqrt{6}(k+2)^2} > k+1 \Leftrightarrow 16k^3+75k^2+125k+72 > 6\sqrt{6}(k^3+5k^2+8k+4)$$

对任何 k 都成立. 但是这个不等式可以有下列观察得到: $16 > 6\sqrt{6}, 75 > 30\sqrt{6}$, $125 > 48\sqrt{6}$, 和 $72 > 24\sqrt{6}$.

(2) 这个可以有二项式展开得到:

$$\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 1 + n\cdot\frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2 + \cdots > \frac{n(n-1)}{2}\frac{4}{n} = 2(n-1).$$

当 $n \geq 2$, 得到 $2(n-1) \geq n$. □

目前为止求极限的方法可归纳为如下几点:

(1) 用"ϵ-N" 语言(不过要是先知道或判断出极限),

(2) 用夹逼定理,

(3) 用 Stolz 定理,

(4) 单调有界数列必有极限(之后我们会证明这个结论) 告诉我们什么样的数列会有极限,

(4) Cauchy 收敛准则给出数列是否收敛的充分必要条件(之后我们会证明这个结论).

数列另一个重要来源是所谓的"**递推定义 (recursive definition)**", 即

$$a_{n+1} := f(a_n), \quad n \geq 1,$$

这里首项 a_1 和函数 $f(x)$ 是预先给定的.

例2.2.16. 令 $x_1 = a$, $x_2 = b$, 和 $x_n = (x_{n-1} + x_{n-2})/2$. 求 $\lim_{n\to\infty} x_n$.

证: 观察到

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n + x_{n-1}}{2} - x_n = \frac{x_{n-1} - x_n}{2} = \cdots = \frac{x_2 - x_1}{(-2)^{n-1}} = \frac{b-a}{(-2)^{n-1}}$$

和

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sum_{1\le m\le n}(x_{m+1}-x_m)+x_1 = (b-a)\sum_{1\le m\le n}\frac{1}{(-2)^{m-1}}+a \\ &= (b-a)\frac{1-(-1/2)^{n-1}}{1-(-1/2)}+a \to \frac{2}{3}(b-a)+a = \frac{2b+a}{3}. \quad \square \end{aligned}$$

例2.2.17. (1) 假设 $\lambda\in\mathbb{R}$ 且 $|\lambda|<1$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a \iff \lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-\lambda a_n)=(1-\lambda)a.$$

(2) 证明

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a \iff \lim_{n\to\infty}(4a_{n+2}-4a_{n+1}+a_n)=a.$$

证: (1) “$\Rightarrow$”显然成立. 现在假设 $a_{n+1}-\lambda a_n\to(1-\lambda)a$. 令

$$x_n := a_{n+1}-\lambda a_n.$$

故

$$\frac{a_{n+1}}{\lambda^{n+1}}=\frac{a_n}{\lambda^n}+\frac{x_n}{\lambda^{n+1}}$$

从而

$$a_n=\lambda^n\left(a_0+\sum_{1\le k\le n}\frac{x_{k-1}}{\lambda^k}\right), \quad n\in\mathbb{Z}_+$$

成立. 如果 $0<\lambda<1$, 得到 $\lambda^n\to 0$ 从而利用定理 2.2.9 得到

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}a_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{a_0+\sum_{1\le k\le n}\frac{x_{k-1}}{\lambda^k}}{(\frac{1}{\lambda})^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x_n}{\lambda^{n+1}}}{(\frac{1}{\lambda})^{n+1}-(\frac{1}{\lambda})^n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{1-\lambda} = \frac{(1-\lambda)a}{1-\lambda} = a. \end{aligned}$$

若 $\lambda=0$, 结论是明显的. 如果 $-1<\lambda<0$, 考察偶数项

$$a_{2n}=\lambda^{2n}\left(a_0+\sum_{1\le k\le 2n}\frac{x_{k-1}}{\lambda^k}\right).$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\frac{1}{1-\lambda^2}\lim_{n\to\infty}(x_{2n+1}+\lambda x_{2n})=a.$$

类似地

$$-a_{2n+1}=(-\lambda)^{2n+1}\left(a_0+\sum_{1\le k\le 2n+1}\frac{x_{k-1}}{\lambda^k}\right)$$

和

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}=-\frac{1}{\lambda^2-1}\lim_{n\to\infty}(x_{2n+2}+\lambda x_{2n+1})=a.$$

根据定理 2.3.9, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

(2) 假设 $4a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n \to a$. 观察到

$$4a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n = 4\left(a_{n+2} - a_{n+1} + \frac{1}{4}a_n\right)$$

$$= 4\left[\left(a_{n+2} - \frac{1}{2}a_{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n\right)\right] := 4\left(y_{n+1} - \frac{1}{2}y_n\right).$$

因此得到

$$y_{n+1} - \frac{1}{2}y_n \to \frac{1}{4}a = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\frac{a}{2}.$$

根据 (1), 推出

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{a}{2} \quad or \quad a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n \to \left(1 - \frac{1}{2}\right)a.$$

再次利用 (1) 得到 $a_n \to a$. □

例2.2.18. 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^m}{a^n}$$

这里 $a > 1$, $m \in \mathbb{Z}_+$.

解: 如果 $m = 1$ 则利用定理 2.2.9 得到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-(n-1)}{a^n - a^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^{n-1}(a-1)} = 0.$$

对一般的 m 利用收敛数列的四则运算法则有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^m}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^m - (n-1)^m}{a^n - a^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{m(n-1)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2!}(n-1)^{m-2} + \cdots}{a^{n-1}(a-1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a-1} \sum_{1\le k\le m} \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} \frac{(n-1)^{m-k}}{a^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{a-1} \sum_{1\le k\le m} \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{(a-1)k!} \lim_{n\to\infty} \frac{n^{m-k}}{a^n}.$$

根据归纳假设, 这个极限等于0. □

实际上利用 Heine 定理 (**定理 3.1.14**) 和函数极限 (**第三章**) 的性质, 得到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^m}{a^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^m}{a^x} = \frac{m}{\ln a} \lim_{x\to\infty} \frac{x^{m-1}}{a^x} = \cdots = \frac{m!}{(\ln a)^m} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{a^x} = 0.$$

例2.2.19. 定义

$$a_{n+1} := \sin a_n, \quad n \in \mathbb{N} \text{ 和 } 0 < a_0 < \pi.$$

证明

$$a_n \text{ 递增且 } \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

更进一步

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{3/n}} = 1.$$

证: $a_1 = \sin a_0 \in (0, \pi)$. 一般情形下可证明 $0 < a_n < \pi$. 因为 $\sin x < x$ 对任意 $x \in (0, \pi)$ 成立, 得到 $a_{n+1} < a_n$. 根据定理 2.3.1, 极限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在, 比如说是 $\alpha \in [0, \pi)$. 故 $\alpha = \sin\alpha$ 从而 $\alpha = 0$.

根据定理 2.2.9,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{na_n^2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a_n^2}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2}}{(n+1) - n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sin^2 a_n} - \frac{1}{a_n^2}\right) = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

这里我们利用了一个未加证明的结果:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{3}}{x^4} = \frac{1}{3}$$

和 $\sin^2 x \sim (x - \frac{x^3}{6} + o(x^4))^2 \sim x^2 - \frac{x^4}{3} + \cdots$. 这些会在**第三章**、**第四章**中给出证明. □

§2.2.5 无穷级数初涉

数列另一个重要的来源就是所谓的"部分和". 回顾下高中时候学过的等比数列

$$a_n = aq^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

这里 $q > 0$. 这个数列的前 n 项和为

$$S_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{1\leq k\leq n} aq^{k-1} = \begin{cases} an, & q = 1, \\ \frac{a(1-q^n)}{1-q}, & q \neq 1. \end{cases}$$

数列 $\{S_n\}_{n\geq 1}$ 显然仅当 $|q| < 1$ 收敛.

我们注意到在上面定义 S_n 中, 任意调换项的次序或者随意添加括号都不会改变和的值, 原因是此时 S_n 是有限项之和. 但考虑无穷多项"相加"时, 能否随意调换项的位置和随意添加括号呢?

首先要回答的是无穷多项如何进行"相加". 我们带着这个疑问来研究下面这个发散数列:

$$a_n = (-1)^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

前 6 项和为

$$S_6 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 = 0.$$

为了更好的研究无穷多项是如何进行“相加”, 对 S_6 进行重新组合, 但就像上面说的那样此时并不会改变 S_6 的值:

$$S_6 = (1-1) + (1-1) + (1-1),$$

$$S_6 = 1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1),$$

$$S_6 = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1).$$

如果上述三种相加方式继续下去就得到

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots = (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots,$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots = 1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \cdots,$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots).$$

简单计算就得到上面三个无穷项求和的值分别为

$$0, \quad 1, \quad \frac{1}{2}.$$

这就导出了矛盾: 同一个无穷项求和却得出不同的值. 究其原因乃是“求和”的定义不同, 同时又说明了在无穷项求和中不能随意添加括号.

那么如何定义“求和”? 如果有许多种不同的“求和”定义, 选用那种合适呢? 在孩提时候, 家人掰着手指头教我们数数, $1, 2, 3, 4, \cdots$, 这种按照既定顺序逐次递进的方式是最原始的也是最自然的. 这个“孩提时候”的想法应用到我们无穷项“求和”上来, 就得到如下关于“求和”的定义. 当然这是一种“求和”的定义, 在§**14.4.2** 我们将引入无穷项求和的一般定义.

定义2.2.20. (Cauchy) 给定数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$, 我们把形式和

$$\sum_{n\geq 1} a_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{2.2.10}$$

称为**无穷级数 (infinite series)** 或者**数项级数 (numerical series)**, 也称为**级数 (series)**, 并把 a_n 称为无穷级数的**通项 (general form)**.

级数 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 的**部分和 (partial sum)** 是数列 $\{S_n\}_{n\geq 1}$, 其中

$$S_n := a_1 + \cdots + a_n, \quad n \geq 1. \tag{2.2.11}$$

称级数 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 是**收敛的 (convergent)**, 如果极限 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在, 并把极限值定义为级数的**和 (sum)**,

$$\sum_{n\geq 1} a_n = S := \lim_{n\to\infty} S_n. \tag{2.2.12}$$

如果数列 $\{S_n\}_{n\geq 1}$ 发散, 称级数 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 是**发散的 (divergent)**.

在定义 (2.2.12) 中首项是 a_1, 但是下标从 1 开始还是从 0 开始并不影响级数的敛散性, 只会影响收敛级数的和.

例2.2.21. (1) 级数 $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}$ 是发散的. 级数 $\sum_{n\geq 1} n$ 也是发散的.

(2) **(几何级数(geometric series))** $\sum_{n\geq 1} aq^{n-1}$ 仅当 $|q|<1$ 时收敛. 特别地得到

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n}=1.$$

(3) 求如下级数的和:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)},\quad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(4n-3)(4n+1)},\quad \sum_{n\geq 1}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right).$$

证: (1) 根据定义得到

$$S_n=\begin{cases}1, & n\text{ 是奇数},\\ -1, & n\text{ 是偶数}.\end{cases}$$

从而数列 $\{S_n\}_{n\geq 1}$ 发散. 第二个级数发散是显然的, 因为部分和为 $S_n=n(n+1)/2$

(2) 先求部分和

$$S_n=\sum_{1\leq k\leq n} aq^{k-1}=\begin{cases}an, & q=1,\\ a\frac{1-q^n}{1-q}, & q\neq 1.\end{cases}$$

利用**例 2.1.2** 得到仅当 $|q|<1$ 时级数收敛且和为

$$\sum_{n\geq 1} aq^{n-1}=\frac{a}{1-q}.$$

若取 $a=q=1/2$ 就得到等式.

(3) 由于

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},\quad \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right]$$

和

$$\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)-\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right),$$

得到三个级数的部分和分别为

$$S_n=1-\frac{1}{n+1},\quad S_n=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right),\quad S_n=1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

令 $n\to+\infty$ 得分别得到和为 $1, 1/4$, 和 $1-\sqrt{2}$. □

利用定理 2.2.5 得到收敛级数的几个初等性质.

性质2.2.22. (1) **(收敛级数的代数性质)** 假设级数 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 和 $\sum_{n\geq 1} b_n$ 都收敛，则对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 级数 $\sum_{n\geq 1}(\alpha a_n + \beta b_n)$ 也收敛且满足

$$\sum_{n\geq 1}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n\geq 1} a_n + \beta \sum_{n\geq 1} b_n. \tag{2.2.13}$$

(2) **(收敛级数的必要条件)** 如果级数 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 收敛则必有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{2.2.14}$$

证: (2.2.14) 可由 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 得到. □

注2.2.23. (1) 等式 (2.2.12) 对发散级数不一定成立. 比如考虑发散级数 $\sum_{n\geq 1} n$. 如果 $\alpha = 1$, 则 (2.2.12) 成立; 如果 $\alpha = 0$, 则 (2.2.12) 不成立, 原因是 $0 \cdot \infty$ 无意义.

(2) 满足 (2.2.14) 的级数不一定时收敛的, 比如级数 $\sum_{n\geq 1} 1/n$, 这是因为前 n 项和 $> \ln n$, 参见**定义 2.3.6** 上面一段推导.

判断级数收敛的方法我们将在**第六章** 中详细展开.

§2.2.6 * 连分数和Khintchin 常数

在**例 2.3.3** 我们将证明递推定义的数列

$$a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}, \quad n \geq 1, \quad a_1 = 1,$$

收敛到 $(\sqrt{5}-1)/2$. 如果我们把数列的每项写出来就得到

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{1+1}, \quad a_3 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}, \quad a_4 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}, \quad \cdots.$$

这是连分数的特殊情形.

Bombelli 在其著作《Algebra》(1572) 第一次使用连分数来逼近平方根. 为了逼近 $\sqrt{2}$, 他令

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{y},$$

并由此得到

$$y = 1 + \sqrt{2} \quad \text{和} \quad y = 2 + \frac{1}{y}.$$

把最后一个等式带入一开始关于 y 的定义得到

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{y}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{y}}}.$$

如此下去Bombelli 得到了

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\cdots}}}}.$$

Wallis 在其著作《Opera mathemtica》(1695) 中引入了“连分数”这个概念, 并给出了计算连分数渐进式的一般方法, 引理 2.2.25.

定义2.2.24. 连分数 (continued fraction) 是指如下展开式

$$a_0+\frac{b_1}{a_1+\frac{b_2}{a_2+\frac{b_3}{a_3+\cdots}}}, \tag{2.2.15}$$

这里 a_n 和 b_n 是任意复数, 但是通常取为整数. 称数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 为连分数的**部分分子 (partial numerators)**, 数列 $\{b_n\}_{n\geq 1}$ 为连分数的**部分分母 (partial denominators)**, 而把 a_0 称为连分数的**整数部分 (integer part)**.

我们把连分数 (2.2.15) 写成

$$a_0+\frac{b_1|}{|a_1}+\frac{b_2|}{|a_2}+\frac{b_3|}{|a_3}+\cdots=a_0+\frac{b_1}{a_1+}\frac{b_2}{a_2+}\frac{b_3}{a_3+}\cdots=\left[a_0;\frac{b_n}{a_n}\right]_{n\geq 1}. \tag{2.2.16}$$

连分数的部分和记为

$$\frac{P_n}{Q_n}:=\left[a_0;\frac{b_k}{a_k}\right]_{1\leq k\leq n}, \tag{2.2.17}$$

也称为**渐进式 (convergents)**.

Euler 在他第一篇关于连分数的论文《De fractionibus continuis》(1737) 中给出了一些有趣的结果, 比如每个有理数可以表示成有限连分数形式. 由此Euler 得到了著名的关于常数 e 的连分数表达式

$$e-1=1+\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{6+}\cdots.$$

– 然而这个公式早在 1714 年出现在Cotes 的一篇论文中, 和另一个公式

$$\frac{e+1}{e-1}=2+\frac{1}{6+}\frac{1}{10+}\frac{1}{14+}\cdots.$$

连分数理论基础是Euler 在其《Introductio in analysin infinitorum》(1748) 中所奠定的, 其中一个结果就是下面的性质 2.2.26. Euler 关于连分数的工作被他和Lagrange 共同的同事Johann Heinrich Lambert, 用来证明如下结论 (1761): 如果 x 是不等于 0 的无理数, 那么 e^x 和 $\tan x$ 都不可能是有理数. 作为直接推论, 因为 $\tan\frac{\pi}{4}=1$, 就得到了 π 不是有理数 (一个简单证明可参见定理 2.3.8). 实际上Lambert 证明了 $\tan x$ 的连分式展开的收敛性.

Lagrange 在 1767 年利用连分数来寻找方程无理根的近似解, 而在 1776 年利用连分式给出了微分方程的近似解.

引理2.2.25. 如果定义

$$P_{-1}=1,\quad Q_{-1}=0,\quad P_0=a_0,\quad Q_0=1,$$

则对任意 $n\geq 1$ 有

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{a_nP_{n-1}+b_nP_{n-2}}{a_nQ_{n-1}+b_nQ_{n-2}},\quad \frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}=(-1)^{n+1}\frac{b_1\cdots b_n}{Q_{n-1}Q_n}. \tag{2.2.18}$$

证: 利用数学归纳法, 请诸位证明之. □

性质2.2.26. 任何连分数都可以表示成级数.

一个很自然的问题是既然连分数可以表示成级数, 那什么时候级数收敛呢? 即, 什么时候 (2.2.17) 有极限? 首先给出连分数收敛的定义: 称 (2.2.16) **收敛 (converges)** 如果数列 (2.2.17) 收敛; **绝对收敛 (absolutely converges)** 如果数列 $\{|P_n/Q_n|\}_{n\geq 1}$ 收敛. 著名的**Śleszyński-Pringsheim 定理**告诉我们

定理2.2.27. (Śleszyński, 1889; Pringsheim, 1898) 如果 $a_0,a_n,b_n\in\mathbb{R}$ 并且不等式 $|b_n|\geq|a_n|+1$ 对任意 $n\geq 1$ 都成立, 则连分数 (2.2.17) 绝对收敛到 a_0+A, 这里实数 A 满足 $0<|A|<1$.

如果在连分数 (2.2.16) 中所有的 $b_n=1$, 此时我们把这样的连分数称为**单连分数 (simple continued fraction)**. 如果连分数(2.2.15) 是单的, 则记成

$$[a_0;a_1;a_2;\cdots].$$

比如

$$\begin{aligned}\sqrt{2}&=[1;2;2;2;\cdots],\\ \pi&=[3;7;15;1;292;1;1;1;2;1;3;\cdots].\end{aligned}$$

在π 的连分数展开中, 取前三阶近似得到

$$\pi\approx[3;7]=\frac{22}{7},\quad \pi\approx[3;7;15]=\frac{333}{106},\quad \pi\approx[3;7;15;1]=\frac{355}{113}.$$

这就得到了祖冲之所定义的约率22/7 和密率355/113.

对单连分数Van Vleck 给出了充要条件来判断其敛散性.

定理2.2.28. (Edward Burr Van Vleck, 1901) 假设在单连分数 $[a_0;1/a_n]_{n\geq 1}$ 中系数 $a_n>0$, 则其收敛当且仅当 $\sum_{n\geq 1}a_n=+\infty$.

比如连分数

$$1+\frac{1}{1+}\frac{1}{1/2+}\frac{1}{1/3+}\frac{1}{1/4+}\cdots$$

是收敛的, 因为级数 $\sum_{n\geq 1} 1/n$ 发散.

无穷级数和连分数的其它详尽性质, 可参阅高建福的专著《无穷级数与连分数》(中国科学技术大学出版社, 2007) 和Lorentzen 的专著《Contioned fractions: convergence theory》(Atlantic Press, 2008).

作为结束, 我们来简单介绍下神秘的Khinchin 常数. 1936 年前苏联数学家Khinchin[6] 证明了对几乎所有的实数x, 有如下的单连分数表达式

$$x = [a_0; a_1; a_2; \cdots]$$

而且系数$a_1, \cdots, a_n$ 的几何平均数构成的数列存在极限K, 且该极限与x 无关, 称为**辛钦常数(Khinchin's constant)**. 即

$$K = \lim_{n\to\infty}\left(\prod_{1\leq i\leq n} a_i\right)^{1/n}, \quad x = [a_0; a_1; a_2; \cdots].$$

可以证明

$$K = \prod_{n\geq 1}\left[1 + \frac{1}{n(n+2)}\right]^{\log_2 n} \approx 2.6854520010\cdots. \tag{2.2.19}$$

不符合上述条件的实数包括有理数、实系数二次方程的解(比如$(1+\sqrt{5})/2$), 以及自然对数的底e.

问题2.2.29. *Khinchin 常数K 是有理数, 是代数无理数, 还是超越数.*

这个问题目前仍旧未被解决.

§2.3 数列收敛的判别法则

最重要判别法则是 Cauchy 法则, 因为它给出了数列是否收敛的充分必要条件. 但是不足之处是实际操作不佳, 因此寻找效果较好的判别法则是一个重要的任务. 第一个非常重要的充分条件是单调有界.

§2.3.1 单调数列

数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 称为**(单调) 递增(increasing)**(或**递减(decreasing)**) 如果 $a_n \leq a_{n+1}$(或 $a_n \geq a_{n+1}$) 对任意 $n = 1, 2, \cdots$ 都成立. 因为数列极限是研究 n 充分大时的性质, 所以在研究单调数列的极限时, 可以把"对任意 $n = 1, 2, \cdots$ 都成立"换成只要"对充分大的 n 都成立".

单调递增或单调递减的数列统称**单调数列(monotone sequences)**.

[6] Aleksandr Yakovlevich Khinchin, 1894年7月19日-1959年11月18日, 今俄罗斯卡卢加州孔德罗沃人, 前苏联数学家. 前苏联概率论学派的重要奠基人之一, 博士导师是著名数学家Nikolai Luzin, 而另一位著名数学家Alexander Gelfond 是他的博士生. 1939年当选为苏联科学院院士, 1940年获得苏联国家奖.

定理2.3.1. 假设数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 单调. 下列断言等价

$$\{a_n\}_{n\geq 1} \text{ 收敛} \quad \Longleftrightarrow \quad \{a_n\}_{n\geq 1} \text{ 有界}. \tag{2.3.1}$$

即, 单调递增数列若有上界则必收敛, 和单调递减数列若有下界则必收敛.

证: $\Longrightarrow$: 显然.

$\Longleftarrow$: 不失一般性, 不妨假设 $a_n \leq a_{n+1}$. 令 $E := \{a_n : n = 1, 2, \cdots\}$. 如果 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 有界, 根据**Zorn 引理**, 上确界 $a := \sup E$ 存在且 $a_n \leq a$.

对任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $a - \epsilon < a_N \leq a$ 成立, 否则的话, $a - \epsilon$ 将是 E 的一个上界. 由于 a_n 递增, 得到 $a - \epsilon < a_n \leq a$ 对所有 $n > N$ 都成立. □

例2.3.2. (1) 若 $a_1 := \sqrt{2}$ 和 $a_{n+1} := \sqrt{2 + a_n}$, 求 $\lim_{n\to\infty} a_n$.

(2) 若 $a_1 > 0$ 和 $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$ $(n \geq 1)$, 求 $\lim_{n\to\infty} a_n$.

(3) 若 $a_1 = \sqrt{2}$ 和 $a_{n+1} = \sqrt{3 + 2a_n}$ $(n \geq 1)$, 求 $\lim_{n\to\infty} a_n$.

(4) 若 $a_1 > 0$ 和 $a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{1+a_n}$ $(n \geq 1)$, 求 $\lim_{n\to\infty} a_n$.

解: (1) 观察到

- 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 则 "$a = \sqrt{2+a}$" $\Longrightarrow (a-2)(a+1) = 0 \Longrightarrow a = 2$.
- $a_2 = \sqrt{2 + a_1} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > a_1$, $a_2 < \sqrt{2+2} = 2$; $a_3 = \sqrt{2 + a_2} > \sqrt{2a_2} > a_2$.

一般地我们断言

$$\sqrt{2} \leq a_n < 2 \quad \text{和} \quad a_{n+1} > a_n.$$

实际上, $\sqrt{2} \leq a_n < 2$ 推出 $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2+2} = 2$, 而 $a_{n+1} > a_n$ 推出 $a_{n+2} = \sqrt{2 + a_{n+1}} > \sqrt{2a_{n+1}} > a_{n+1}$. 因此 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 单调递增且有界从而得到 $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

(2) 对任意 $n \geq 1$, 有 $a_n > 0$ 并且

$$a_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) - 1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_n} - \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)^2 \geq 0.$$

另一方面,

$$a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(a_n + a_n) = a_n.$$

从而 $a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots \geq 1$ 表明 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 存在且 $a \geq 1$. 解方程 $a = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$ 并注意到 a 的有界性, 得到 $a = 1$.

(3) 和 (1) 一样可证明 $0 < a_n < 3$ 且 $a_{n+1} > a_n$. 从而极限 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 存在且满足方程 $a = \sqrt{3 + 2a}$, 故得到 $a = 3$.

(4) 和 (2) 一样可证明 $1 < a_n < 2$ 对任意 $n \geq 2$ 都成立. 计算得到

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{(1+a_n)(1+a_{n-1})}$$

从而表明 $a_{n+1} - a_n$ 不变号, 故数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 单调. 所以极限 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 存在且满足方程 $a - 1 = a/(1+a)$, 得到 $a = (1+\sqrt{5})/2$. □

例2.3.3. 若 $a_1 = 1$ 和 $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$ $(n \geq 1)$, 求 $\lim_{n\to\infty} a_n$.

证: 观察到

$$a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{2}{3}, \quad a_4 = \frac{3}{5}, \quad a_5 = \frac{5}{8}, \quad \cdots.$$

断言 $\{a_{2n}\}_{n\geq 1}$ 递增但 $\{a_{2n-1}\}_{n\geq 1}$ 递减, 且 $\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1$. 事实上明显的不等式 $\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1$ 推出 $a_{n+1} \geq \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ 和 $a_{n+1} \leq \frac{1}{1+0} = 1$. 更进一步

$$a_{2n+2} = \frac{1}{1+a_{2n+1}} \geq \frac{1}{1+a_{2n-1}} = a_{2n}, \quad a_{2n+1} = \frac{1}{1+a_{2n}} \leq \frac{1}{1+a_{2n-2}} = a_{2n-1}.$$

令 $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = A$ 和 $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = B$ 得到 $B = 1/(1+A)$ 且 $A = 1/(1+B)$, 从而有 $A = B = (\sqrt{5}-1)/2$. 即 $a_n \to (\sqrt{5}-1)/2$. □

§2.3.2 三个重要的常数 π、e、和 γ

高中时知道常数 $\pi = 3.1415926\cdots$ 和 $e = 2.7182818284590\cdots$. 在§**2.1** 一开头我们简单叙述了求 π 近似值的历史, 特别是我国古代杰出的数学家刘徽和祖冲之.

A. 常数 π. 圆周率 π 这个数学记号来自希腊语"$\pi\epsilon\rho\iota\mu\epsilon\rho o\zeta$"的首字母, 其原始定义是圆的周长与直径的比值, 这是一个常数. 十六世纪和十七世纪, π 的计算开始改用无穷级数的计算方法. 第一个用无穷级数计算 π 的是印度天文学家Nilakantha Somayaji, 他在其著作《系统汇编》用梵语诗记载了这个级数, 但是没有给出证明. 欧洲首个发现用无穷乘积 (具体定义见§**6.4**) 来计算 π 的是法国科学家Viéte (韦达)[7], 他在 1593 年发现了 (证明参见 (6.4.6))

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots.$$

欧洲第二个用无穷乘积来表示圆周率是Wallis[8] 在 1655 年发现的 (证明参见 (5.4.31))

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots.$$

[7]François Viéte, 1540 年 - 1603 年 12 月 13 日, 今法国卢瓦尔河地区大区旺代省丰特奈 - 勒孔特人, 十六世纪法国最有影响的数学家之一. 他是第一个有意识地、系统地使用符号的人. 他不仅用字母表示未知量和未知量的乘幂, 而且用来表示一般的系数. 他发现了代数方程根与系数关系的Viéte 定理. Viéte最早明确给出有关圆周率的无穷乘积.

[8]John Wallis, 1616 年 11 月 23 日 - 1703 年 10 月 28 日, 英国数学家, Savilian 几何学教授 (1649). 他奠定了幂的表示法, 并将指数的定义从正整数扩充至有理数.

Gregory[9] 在 1671 年和Leibniz[10] 在 1674 年发现了如下公式 (证明参见**例 14.3.10** 第 5 题)

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots=\sum_{n\ge 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

但是这个级数收敛速度非常慢, John Machin 利用这个级数得到了快速收敛的公式:

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}.$$

Euler 关于 π 的级数公式见 (2.3.2). Gauss 提出了如下称之为**Gauss-Legendre 算法**:

$$a_0:=1,\quad b_0:=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad p_0:=1,$$

和

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\quad b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n},\quad t_{n+1}=t_n-p_n(a_n-a_{n+1})^2,\quad p_{n+1}=2p_n,$$

则得到 π 的估计值为

$$\pi\approx\frac{(a_n+b_n)^2}{4t_n}.$$

Ramanujan 得到了收敛速度非常快的级数公式

$$\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{n\ge 0}\frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}.$$

1987 年Chudnovsky 兄弟得到了收敛速度更加快的级数公式

$$\frac{1}{\pi}=\frac{12}{640320^{3/2}}\sum_{n\ge 0}\frac{(6n)!(13591409+545140124n)}{(3n)!(n!)^3(-640320)^{3n}}.$$

另一个有趣的级数公式是Simon[11] 在 1995 年发现的

$$\pi=\sum_{n\ge 0}\frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1}-\frac{2}{8n+4}-\frac{1}{8n+5}-\frac{1}{8n+6}\right).$$

---

[9]James Gregory, 1638 年 11 月 - 1675 年 10 月, 今英国苏格兰阿伯丁人, 苏格兰数学家. 1665 年到意大利 Universitas Studii Paduani (帕多瓦大学) 研究数学和天文, 他是最早注意到级数的敛散性.

[10]Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646 年 7 月 1 日 - 1716 年 11 月 14 日, 今德国莱比锡人, 德国哲学家和数学家, 被称为十七世纪的Aristotle (亚里士多德). 和Newton 分别独立发明了微积分, 创立了广泛被使用的数学符号. 他在 1679 年提出了位相分析学 (analysis situs), 即拓扑学. Leibniz 和Descartes (笛卡尔) 、Spinoza 被誉为十七世纪三位最伟大的理性主义哲学家. 2006 年 7 月 1 日, 在Leibniz 诞辰 360 周年之际, 德国 Universität Hannover (汉诺威大学) 改名为 Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover (汉诺威莱布尼茨大学).

[11]Plouffe Simon, 1956 年 6 月 11 日 - 至今, 加拿大魁北克人, 加拿大数学家.

注意到Weierstrass[12] 在 1841 年用积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

来定义 π.

下面的结论最早由Euler 得到, 然而当时的证明方法是不严格的.

定理2.3.4. (Euler, 1734) *常数 π 可以由下面级数得到:*

$$\sum_{n\ge 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{2.3.2}$$

证: (1) 第一个证明是John Scholes 给出.

断言 1: 对任意 $m \in \mathbb{N}$ 都有

$$\cot^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \cdots + \cot^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right) = \frac{2m(2m-1)}{6}.$$

回顾下复数恒等式

$$\cos(nx) + \mathbf{i}\sin(nx) = e^{\mathbf{i}nx} = (e^{\mathbf{i}x})^n = (\cos x + \mathbf{i}\sin x)^n.$$

比较两边的虚数部分得到

$$\sin(nx) = \binom{n}{1}\sin x \cos^{n-1} x - \binom{n}{3}\sin^3 x \cos^{n-3} x \pm \cdots.$$

令 $n := 2m+1$ 和 $x = \frac{r\pi}{2m+1}$ $(1 \le r \le m)$ 就推出

$$0 = \sin(nx) = \binom{n}{1}\sin x \cos^{n-1} x - \binom{n}{3}\sin^3 x \cos^{n-3} x \pm \cdots.$$

两边同除以 $\sin^n x$ $(0 < x < \frac{\pi}{2})$ 得到

$$\begin{aligned} 0 &= \binom{n}{1}\cot^{n-1} x - \binom{n}{3}\cot^{n-3} x \pm \cdots \\ &= \binom{2m+1}{1}\cot^{2m} x - \binom{2m+1}{3}\cot^{2m-2} x \pm \cdots. \end{aligned}$$

[12]Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815 年 10 月 31 日 - 1897 年 2 月 19 日, 今德国威斯特伐利亚地区奥斯登费尔特人, 德国数学家, 柏林科学院院士、巴黎科学院院士、英国皇家学会会员, 被称为现代分析之父. 首次引入一致收敛的概念, 并由此阐明了函数项级数的逐项微分和逐项积分定理. 1872 年, 他给出了第一个处处连续但处处不可微的例子. Hilbert 对他的评价是: "Weierstrass 以其酷爱批判的精神和深邃的洞察力, 为数学分析建立了坚实的基础. 通过澄清极小、极大、函数、导数等概念, 他排除了在微积分中仍在出现的各种错误提法, 扫清了关于无穷大、无穷小等各种混乱观念, 决定性地克服了源于无穷大、无穷小朦胧思想的困难. 今天, 分析学能达到这样和谐可靠和完美的程度本质上应归功于 Weierstrass 的科学活动". Weierstrass 培养了大批著名的数学家, 比如Engel, Frobenius, Fuchs, Hensel, Hölder, Hurwitz, Klein, Killing, Kovalevskaya, Lie, Minkowski, Mittag-Leffler, Runge, Schwarz, Stolz 等.

定义多项式如下

$$P(t) := \binom{2m+1}{1}t^m - \binom{2m+1}{3}t^{m-1} \pm \cdots + (-1)^m\binom{2m+1}{2m+1}.$$

此多项式有 m 个不同的根

$$a_r := \cot^2\left(\frac{r\pi}{2m+1}\right), \quad 1 \le r \le m.$$

所以

$$P(t) = \binom{2m+1}{1}\prod_{1\le r\le m}\left[t - \cot^2\left(\frac{r\pi}{2m+1}\right)\right].$$

特别地我们得到

$$\sum_{1\le r\le m} a_r = \frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}} = \frac{2m(2m-1)}{6}.$$

断言 2: 对任意 $m \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$ 有

$$\sum_{1\le r\le m}\csc^2\left(\frac{r\pi}{2m+1}\right) = \frac{2m(2m+2)}{6}.$$

事实上

$$\begin{aligned}\sum_{1\le r\le m}\csc^2\left(\frac{r\pi}{2m+1}\right) &= \sum_{1\le r\le m}\frac{1}{\sin^2(\frac{r\pi}{2m+1})}\\ = \sum_{1\le r\le m}\left[1+\cot^2\left(\frac{r\pi}{2m+1}\right)\right] &= m + \frac{2m(2m-1)}{6}.\end{aligned}$$

在区间 $(0,\pi/2)$ 内, 下列不等式成立:

$$0 < \sin y < y < \tan y, \quad 0 < \cot y < \frac{1}{y} < \csc y, \quad 0 < \cot^2 y < \frac{1}{y^2} < \csc^2 y.$$

作为推论得到

$$\frac{2m(2m-1)}{6} < \sum_{1\le r\le m}\left(\frac{2m+1}{r\pi}\right)^2 < \frac{2m(2m+2)}{6}.$$

等价地

$$\frac{\pi^2}{6}\frac{2m}{2m+1}\frac{2m-1}{2m+1} < \sum_{1\le r\le m}\frac{1}{r^2} < \frac{\pi^2}{6}\frac{2m}{2m+1}\frac{2m+2}{2m+1}.$$

最后令 $m \to \infty$ 推出 $\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^2} = \pi^2/6$.

(2) 第二个证明由Beukers-Calabi-Kolk 给出. 注意到

$$\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^2} = \sum_{n\ge0}\frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n\ge1}\frac{1}{(2n)^2}.$$

故
$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\Longleftrightarrow\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$
引入二重积分
$$J:=\iint_{[0,1]\times[0,1]}\frac{dxdy}{1-x^2-y^2}=\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^2}.$$
做变量替换
$$u=\cos^{-1}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}},\quad v:=\cos^{-1}\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2y^2}},$$
从而 $x=\sin u/\cos v$, $y=\sin v/\cos u$, 且
$$J=\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2-u}dudv=\frac{\pi^2}{8}.\ \square$$

常数 π 还有其它有趣的表达形式:
$$\pi=24\arctan\frac{1}{8}+8\arctan\frac{1}{57}+4\arctan\frac{1}{239}.$$

1655 年除了Wallis发现了 π 的无穷乘积表达式外, Brouncker 不加证明地给出了 π 的连分数表达式
$$\frac{4}{\pi}=1+\frac{1}{2+}\frac{9}{2+}\frac{25}{2+}\frac{49}{2+}\cdots.$$
Lambert 在 1768 年给出了 π 的另一个连分数表达式
$$\pi=3+\frac{1}{7+}\frac{1}{15+}\frac{1}{1+}\frac{1}{292+}\cdots.$$
Euler 在《Introductio analysin infinitorium》(1748) 又找到了 π 的几个连分数表达式
$$\begin{aligned}\pi&=3+\frac{1}{6+}\frac{9}{6+}\frac{25}{6+}\frac{49}{6+}\cdots,\\ \frac{\pi}{2}&=1+\frac{2}{3+}\frac{1\cdot 3}{4+}\frac{3\cdot 5}{4+}\frac{5\cdot 7}{4+}\cdots,\\ \frac{\pi}{2}&=1+\frac{1}{1+}\frac{1\cdot 2}{1+}\frac{2\cdot 3}{1+}\frac{3\cdot 4}{1+}\cdots.\end{aligned}$$

B. 常数 e. 在论文中第一次提到常数 e 是Napier[13] 在 1614 年出版的对数著作《奇妙的对数表的描述》附录中的一张表. 第一次使用常数 e 是Leibniz 在

[13] John Napeir, 1550 年 - 1617 年, 今英国爱丁堡梅奇斯顿镇人, 苏格兰数学家、神学家, 对数的发明者.

1690 年给Huygens 的通信 (当时用 b 表示). Euler 在 1727 年开始用 e 来表示这个常数, 所以也叫 Euler 数, 并在 1736 年在其著作《力学》中第一次正式见刊出现, 即 (2.3.3) 中的定义.

为了从数列和级数角度研究常数 e 首先定义如下三个数列

$$a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad e_n := 1+\sum_{1\le k\le n}\frac{1}{k!} \equiv \sum_{0\le k\le n}\frac{1}{k!}.$$

断言 1: 对每个 n, 有

$$a_n < a_{n+1}, \quad b_n > b_{n+1}.$$

证: 对每个 n,

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{0\le k\le n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = 1+\sum_{1\le k\le n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{k!}\frac{1}{n^k} \\ &= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\ &< 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) \\ &\quad +\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right) = a_{n+1}. \end{aligned}$$

故数列 $\{a_n\}_{n\ge1}$ 单调递增. 对 b_n 有

$$\begin{aligned} \frac{b_{n-1}}{b_n} &= \frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} = \left(\frac{1+\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \\ &= \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n\frac{1}{1+\frac{1}{n}} > \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{n}} > \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1. \end{aligned}$$

故数列 $\{b_n\}_{n\ge1}$ 单调递减. □

断言 2: 如下两个极限

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n := e \tag{2.3.3}$$

存在且相等.

证: 由于

$$a_n < 1+1+\sum_{2\le k\le n}\frac{1}{k!} \le 2+\sum_{2\le k\le n}\frac{1}{k(k-1)} = 3-\frac{1}{n} < 3,$$

根据定理 2.3.1 和断言 1 知道极限 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ 和 $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ 都存在. 因为 $b_n = (1+\frac{1}{n})a_n$, 利用收敛数列的四则运算得到 $B = 1\times A = A$. □

断言 3: 对任意 $n \in \mathbb{Z}_+$ 有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < e < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{2.3.4}$$

断言 4: (Newton, 1669) 极限

$$\lim_{n\to\infty} e_n = e \tag{2.3.5}$$

存在.

证: 观察到 $e_n < e_{n+1}$ 和

$$\begin{aligned} a_n &= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\ &> 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right). \end{aligned}$$

令 $n \to \infty$ 得到

$$e \geq 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!} = e_k.$$

另一方面, $a_n < e_n$. 所以 $\lim_{n\to\infty} e_n = e$. □

利用上述三个数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$, $\{b_n\}_{n\geq 1}$ 和$\{e_n\}_{n\geq 0}$ 的性质, 我们有如下有用的推论.

例2.3.5. (1) 对任意 $n \geq 1$ 都有如下不等式成立

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}. \tag{2.3.6}$$

(2) 证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}. \tag{2.3.7}$$

(3) 证明

$$0 < e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}, \quad \forall\, n \geq 1.$$

(4) **(Brothers - Knox, 1998)**[14] 证明

$$e = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+2)^{n+2}}{(n+1)^{n+1}} - \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\right].$$

证: (1) 对任意 $k \geq 1$ 都有

$$\left(\frac{k+1}{k}\right)^k < e < \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1}.$$

[14] Brothers, Harlan J.; Knox. John A. *New closed-form approximations to the logarithmic constant e*, Math. Intelligencer, **20**(1998), no. 4, 25 - 29.

所以

$$\frac{(n+1)^n}{n!}=\prod_{1\le k\le n}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k<e^n<\prod_{1\le k\le n}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1}=\frac{(n+1)^{n+1}}{n!}.$$

(2) 根据 (1) 得到

$$\frac{n+1}{e}<\sqrt[n]{n!}<\frac{n+1}{e}\sqrt[n]{n+1}$$

且

$$\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{e}<\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}<\frac{n+1}{n}\cdot\sqrt[n]{n+1}\cdot\frac{1}{e}.$$

令 $n\to\infty$ 推出 (2.3.7).

(3) 根据 (2.3.4) 和 (2.3.3) 中的证明, 得到

$$\begin{aligned}0\ <\ e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ &<\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]\\&=\ \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ <\ \frac{3}{n}.\end{aligned}$$

(4) 根据 (2.3.4) 得到

$$\begin{aligned}\frac{(n+2)^{n+2}}{(n+1)^{n+1}}-\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}&=(n+2)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}-(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\&\ge(n+2)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\frac{(n+2)^{n+2}}{(n+1)^{n+1}}-\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}&=(n+1)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}-n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\\&\le(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

两边令 $n\to\infty$ 得到结论. □

根据 (2.3.7) 得到(严格证明会在后面章节给出)

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\sim\frac{1}{e}\quad\Longrightarrow\quad n!\sim n^ne^{-n}$$

当 n 很大时成立. 这里符号 “$a_n\sim b_n$” 表示$\lim_{n\to\infty}a_n/b_n=1$.

除了已经证明了的 e 的表达式

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\sum_{n\ge1}\frac{1}{n!}=2.718281828459045\cdots,$$

外, Brothers 在 2004 年发现了收敛速度更加快的级数表达式[15]

$$e=\sum_{n\geq 0}\frac{2n+2}{(2n+1)!}.$$

Euler 在《Introductio analysin infinitorium》(1748) 发现了 e 的连分数

$$e=2+\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{6+}\cdots$$

和

$$e=2+\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{2}{3+}\frac{3}{4+}\frac{4}{5+}\frac{5}{6+}\frac{6}{7+}\frac{7}{8+}\cdots.$$

根据定理 2.2.27 或定理 2.2.28 上述两连分数都是收敛的.

Catalan 在 1873 年给出了 e 的无穷乘积表达式

$$\frac{e}{2}=\left(\frac{4}{3}\right)^{1/2}\left(\frac{6}{5}\frac{8}{7}\right)^{1/4}\left(\frac{10}{9}\frac{12}{11}\frac{14}{13}\frac{16}{15}\right)^{1/8}\cdots.$$

Pippenger 在 1980 年给出了 e 的另一个无穷乘积表达式[16]

$$\frac{e}{2}=\left(\frac{2}{1}\right)^{1/2}\left(\frac{2}{3}\frac{4}{3}\right)^{1/4}\left(\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7}\frac{8}{7}\right)^{1/8}\left(\frac{8}{9}\frac{10}{9}\frac{10}{11}\frac{12}{11}\frac{12}{13}\frac{14}{13}\frac{14}{15}\frac{16}{15}\right)^{1/16}\cdots.$$

Sebah 和Gourdon 在 2001 年给出了 e 的"递推定义"的无穷乘积公式[17]

$$e=\prod_{n\geq 1}\frac{a_n+1}{a_n}=\frac{2}{1}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{65}{64}\cdot\frac{326}{325}\cdots,$$

这里 $a_1=1$ 和 $a_{n+1}=(n+1)(a_n+1)$.

令 A_n 表示 $1,\cdots,n$ 的算术平均而令 G_n 表示其几何平均, 即

$$A_n=\frac{1+\cdots+n}{n}=\frac{n(n+1)}{2n},\quad G_n=\sqrt[n]{1\cdots n}.$$

利用 Stirling 公式 (参见 (5.4.32)) 得到

$$\frac{A_n}{G_n}=\frac{n+1}{2(n!)^{1/n}}\sim\frac{n+1}{2(n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n})^{1/n}}=\frac{e}{2}\cdot\frac{n+1}{(2\pi n)^{1/2n}}\to\frac{e}{2}.$$

Lionnais 在 1983 年证明了

$$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{p_i\leq n}p_i\right)^{1/n}=e,$$

---

[15]Brothers, Harlan J. *Improving the convergence of Newton's series approximation for e*, College Math. J., **35**(2004), no. 1, 34-39.

[16]Pippenger, Nicholas. *An infinite product for e*, Amer. Math. Monthly, **87**(1980), no. 5, 391.

[17]参见: http://numbers.computation.free.fr/Constants/E/e.html

这里 p_i 是第 i 个素数.

Cloitre 观察到如下关于 π 和 e 的关系. 令

$$a_1 = b_1 = 0, \quad a_2 = b_2 = 1,$$

并递推定义数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 和 $\{b_n\}_{n\geq 1}$ 如下:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{1}{n}a_n, \quad b_{n+2} = \frac{1}{n}b_{n+1} + b_n.$$

则得到

$$e = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{a_n}, \quad \pi = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{b_n^2}.$$

最后我们对一开始定义的 $a_n = (1+1/n)^n$ 做些注记. Brede 在 2005 年证明了如下渐进展开式

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k\geq 0}\frac{u_k}{n^k}, \quad u_k := e\sum_{0\leq i\leq k}\frac{S_1(k+i,i)}{(k+i)!}\sum_{0\leq j\leq k-i}\frac{(-1)^j}{j!}$$

这里 S_1 表示**第一类 Stirling 数**, 它由

$$x(x-1)\cdots(x-v+1) = \sum_{0\leq n\leq v}S_1(v,n)x^n$$

所生成的.

C. 常数 γ. 给定正数 $p>0$ 并令

$$S_n := \sum_{1\leq k\leq n}\frac{1}{k^p}, \quad n\in\mathbb{Z}_+.$$

则 $S_n < S_{n+1}$, 且

$$\begin{aligned} S_n &\leq S_{2^n-1} \\ &= 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)}_{<2^{-(p-1)}} + \underbrace{\left(\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{7^p}\right)}_{<4^{-(p-1)}=2^{-2(p-1)}} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{(n-1)p}}+\cdots+\frac{1}{(2^n-1)^p}\right)}_{<2^{-(n-1)(p-1)}} \\ &< \frac{1}{1-\frac{1}{2^{p-1}}} = \frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1}. \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}S_n \text{ 对任意 } p>1 \text{ 都存在.}$$

当 $p=1$, 根据**定理 2.2.9** 得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\ln n-\ln(n-1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\ln(1+\frac{1}{n-1})}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\ln(1+\frac{1}{n})}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(1+\frac{1}{n-1})} = 1,$$

这是因为 (利用 (2.3.4))

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

作为推论得到

$$S_n \ge 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \to +\infty, \quad 若\ 0 < p \le 1.$$

特别地

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \sim \ln n \quad \text{as } n\to\infty.$$

由此我们来定义数列 $\{a_n\}_{n\ge 1}$ 如下:

$$a_n := \sum_{1\le k\le n}\frac{1}{k} - \ln n. \tag{2.3.8}$$

从而

$$a_n > a_{n+1} > 0, \quad \lim_{n\to\infty} a_n\ 存在.$$

事实上

$$a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n > \ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}-\ln n = \ln\frac{n+1}{n} > 0$$

和

$$a_{n+1}-a_n = \frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n = \frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0.$$

因此我们可以引入如下常数.

定义2.3.6. Euler 常数 γ 定义为

$$\gamma := \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{1\le k\le n}\frac{1}{k}-\ln n\right). \tag{2.3.9}$$

根据 (2.3.9) 可以来证明如下极限

$$\ln 2 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right). \tag{2.3.10}$$

事实上,

$$\sum_{1\le k\le n}\frac{1}{n+k} = a_{2n}-a_n+\ln 2 \longrightarrow \ln 2.$$

猜想2.3.7. γ 是无理数, 即, $\gamma \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

一个更进一步的猜想是说 γ 是超越数. a 是**超越数 (transcendental number)** 如果对任意整系数多项式 $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 都不可能有 $P(a) = 0$ 成立. 超越数的存在最早由Liouville 在 1844 年证明的, 他所给的数是

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n, \quad a_n := \frac{1}{10!} + \frac{1}{10^2!} + \cdots + \frac{1}{10^n!}.$$

不是超越数的数称为**代数数 (algebraic number)**.

定理2.3.8. (1) **(Liouville, 1840)** *e 是无理数.*

(2) *π 是无理数.*

证: (1) 回忆无穷级数

$$e = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{0\leq k\leq n} \frac{1}{k!}.$$

假设 $e = a/b$ 是有理数, 其中 $a, b > 0$. 则

$$n!be = n!a, \quad \text{任意 } n \in \mathbb{N}.$$

另一方面,

$$\begin{aligned} bn!e &= bn!\left[\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)+\left(\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots\right)\right] \\ &= bn!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) \\ &+ b\underbrace{\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots\right)}_{\frac{1}{n+1}<???<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots=\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

当 n 充分大时, 右边第二项不再是整数. 这个矛盾说明 e 不是有理数.

(2) 这里几乎最简单的证明是属于Niven (1946) 的. 假设 $\pi = a/b$ 是有理数. 引入多项式

$$f(x) := \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}, \quad F(x) := f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x).$$

但是简单计算表明

$$\mathbb{Z} \ni F(\pi) + F(0) = \int_0^\pi f(x)\sin x\, dx$$

这里被积函数满足 $0 < f(x)\sin x < \frac{\pi^n a^n}{n!} < 1$ (当 n 充分大时). □

1873 年法国数学家Hermite 证明了 e 是超越数. 之后, 1882 年德国数学家Lindeman 证明了 π 也是超越数. 著名的**Hilbert 23 个问题**(Hilbert 在 1900 年的国际数学家大会上提出) 中的第 7 题就是问: **如果 a 是不等于 0 和 1 的代数数, b 是无理代数数, 则 a^b 是超越数**. 这个猜想现已被Gelfond (1929) 和Schneider/Siegel (1935) 分别独立证明. 作为直接推论得到 $2^{\sqrt{2}}$, $2^{\sqrt{-2}}$, $\mathbf{i}^{\sqrt{2}}$, e^π $(= (-1)^{-\mathbf{i}})$ 都是超越数.

§2.3.3 子列

给定数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 和严格递增函数 $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$. 数列 $\{a_{\varphi(k)}\}_{k\geq 1}$ 称为 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 的**子列(subsequence)** 并记作 $\{a_{n_k}\}_{k\geq 1}$.

根据定义立即可知任何数列就是其本身的一个子列.

定理2.3.9. (1) 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 则对任意子列 $\{a_{n_k}\}_{k\geq 1}$ 都有 $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

(2) $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 收敛 $\Longrightarrow$ 每个子列收敛.

(3) $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 中存在发散的子列 $\Longrightarrow$ $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 发散.

(4) $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 中存在两个极限不等的收敛子列 $\Longrightarrow$ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 发散.

(5) $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\{a_{2n-1}\}_{n\geq 1}$ 和 $\{a_{2n}\}_{n\geq 1}$ 都收敛且有相同的极限.

证: (1) - (4) 可以根据定义得到. 对 (5), 假设 $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = a$. 对任意$\epsilon > 0$ 存在$N \in \mathbb{N}$ 使得

$$|b_n - a| < \epsilon, \quad |c_n - a| < \epsilon, \quad b_n := a_{2n},\ c_n := a_{2n-1}.$$

对 a_n, 当 $n = 2k$ 时, 则 $|a_n - a| < \epsilon$ $(n > 2N)$; 当 $n = 2k-1$ 时, 则 $|a_n - a| < \epsilon$ $(n > 2N-1)$. □

例2.3.10. (1) **(Fibonacci 数列, 其它性质参见§14.3.4)** 令

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}\ (n \geq 2) \quad \Longrightarrow \quad \text{求} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

解: 引入辅助数列

$$b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

则

$$b_n = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{b_{n-1}}.$$

在例 2.3.3 中已经证明了如下不等式

$$b_{2n-1} < b_{2n+1}, \quad b_{2n} > b_{2n+2}, \quad 1 \leq b_n \leq 2.$$

因此得到

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \quad \lim_{n\to\infty}(b_n - 1) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_{n-1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618.$$

数列 a_n 的显示表达式为

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

这个可以用数学归纳法证明或直接推导如下. 假设可以写成

$$a_n - \alpha a_{n-1} = \beta(a_{n-1} - \alpha a_{n-2}).$$

从而必须有

$$\alpha+\beta=1,\quad \alpha\beta=-1$$

所以 $(\alpha,\beta)=((1+\sqrt{5})/2,(1-\sqrt{5})/2)$ 或 $((1-\sqrt{5})/2,(1+\sqrt{5})/2)$. 根据

$$\begin{aligned} a_n-\frac{1+\sqrt{5}}{2}a_{n-1} &= \frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(a_{n-1}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}a_{n-2}\right), \\ a_n-\frac{1-\sqrt{5}}{2}a_{n-1} &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(a_{n-1}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}a_{n-2}\right) \end{aligned}$$

最后得到

$$\begin{aligned} a_n-\frac{1-\sqrt{5}}{2}a_{n-1} &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(a_2-\frac{1-\sqrt{5}}{2}a_1\right), \\ a_n-\frac{1+\sqrt{5}}{2}a_{n-1} &= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(a_2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}a_1\right). \end{aligned}$$

消去 a_{n-1} 得到 a_n 的表达式. $\square$

(2) 证明极限

$$\ln 2=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right]. \tag{2.3.11}$$

证: 考虑数列

$$b_n:=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=\sum_{1\le k\le n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

简单计算得到

$$b_{2n}=\sum_{1\le k\le 2n}\frac{1}{k}-\sum_{1\le k\le n}\frac{1}{k}=\ln 2+a_{2n}-a_n,$$

这里数列 $\{a_n\}_{n\ge1}$ 的定义见 (2.3.8). 根据 (2.3.9) 得到 $a_{2n}\to\ln 2$. 另一方面从 $a_{2n-1}=a_{2n}+\frac{1}{2n}$ 得到 $a_{2n-1}\to\ln 2$. 定理 2.3.9 告诉我们必有 $a_n\to\ln 2$. $\square$

在定理2.2.1 (2) 我们证明了收敛数列必有界, 并在**注2.2.2** 中给出了有界数列不一定收敛的例子. 进一步可问, 有界数列能给出多少收敛性的信息? 下面定理告诉我们, 有界数列至少包含一个收敛的子列.

定理2.3.11. (Bolzano-Weierstrass 定理) 每个有界数列至少有一个收敛的子列.

证: 假设数列 $\{a_n\}_{n\ge1}$ 有界, 即, $a_n\in[a,b]$ 对某个闭区间 $[a,b]$ 和所有 $n\ge1$ 成立. 区间对分得到两个子区间 $[a,\frac{a+b}{2}]$ 和 $[\frac{a+b}{2},b]$, 这两个子区间中至

少有一个包含无穷多个 a_n, 不妨记为 $[a_1, b_1]$. 取一点 $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$. 这个对分过程继续下去, 得到一列闭区间

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_k, b_k] \supset \cdots$$

满足

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \to 0 \quad 和 \quad \exists x_{n_k} \in [a_k, b_k].$$

但是 a_n 增减而 b_n 递减, 根据单调有界数列必有极限得到 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 和 $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ 都存在. 除此之外, 还有如下性质

$$0 \le b - a \le b_n - a_n \to 0.$$

因而

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$$

且 $c \in [a_k, b_k]$ 对每个 k 都成立. 由 $|x_{n_k} - 1| \le b_k - a_k$ 得到 $\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = c$. □

对无界数列, 我们有平行于**定理2.3.11** 的结果, 即无界数列至少包含一个无界的子列.

定理2.3.12. *每个无界数列都有一个无界的子列.*

证: 假设数列 $\{a_n\}_{n\ge1}$ 是无界的. 则存在 n_1 满足 $|a_{n_1}| > 1$. 从而存在 $n_2 > n_1$ 满足 $|a_{n_2}| > 2$. 一直下去就得到子列 $\{n_k\}_{k\ge1}$ 使得 $|a_{n_k}| \ge k$ 成立. □

§2.3.4 Cauchy 数列

数列 $\{a_n\}_{n\ge1}$ 称为**Cauchy 数列 (Cauchy sequence)** 如果对任意 $\epsilon > 0$ 都存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $|a_n - a_m| < \epsilon$ 对任何 $n, m \ge N$ 都成立. 即

$$\{a_n\}_{n\ge1} \text{ 是 Cauchy 数列} \iff \left(\begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N}\, \forall\, n, m \ge N \\ \text{都有 } |a_n - a_m| < \epsilon \text{ 成立} \end{array} \right)$$

另一方面, 数列 $\{a_n\}_{n\ge1}$ **不是 Cauchy 的 (not Cauchy)** 如果存在 $\epsilon_0 > 0$ 对任意 $N \in \mathbb{N}$ 存在 $n_0, m_0 \ge N$ 满足 $|a_{n_0} - a_{m_0}| \ge \epsilon_0$. 即

$$\{a_n\}_{n\ge1} \text{ 不是 Cauchy 数列} \iff \left(\begin{array}{c} \exists\, \epsilon_0 > 0\, \forall\, N \in \mathbb{N}\, \exists\, n_0, m_0 \ge N \\ \text{满足 } |a_{n_0} - a_{m_0}| \ge \epsilon_0 \end{array} \right)$$

例2.3.13. (1) $\{a_n\}_{n\ge1}$ 不是 Cauchy 数列, 这里 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.
(2) $\{a_n\}_{n\ge1}$ 是 Cauchy 数列, 这里 $a_n = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

证: (1) 对任意 $n \ge 1$ 有

$$a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \ge \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

(2) 对任意 $n \geq 1$ 有

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} > \frac{1}{2}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}.$$

故对任意$m > n$,

$$a_m - a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{m\sqrt{m}} < \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{m}} < \frac{2}{\sqrt{n}}. \ \square$$

注2.3.14. Cauchy 数列必有界. 这是因为存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $|a_m - a_n| < 1$ 对任意 $m, n \geq N$ 都成立.

定理2.3.15. (Cauchy 判别法则) 数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 是Cauchy 数列.

证: $\Longrightarrow$: 假设极限 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 存在. 则对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $N \in \mathbb{N}$ 满足

$$|a_n - a| < \epsilon, \quad \forall\, n > N.$$

故

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < 2\epsilon$$

对任何 $n, m > N$ 都成立.

$\Longleftarrow$: 易证存在 $N_0 \in \mathbb{N}$ 使得不等式 $|a_n - a_{N_0+1}| < 1$ 对任意 $n > N_0$ 都成立. 特别地, 数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 有界. 根据定理 2.3.11, 存在子列 $\{a_{n_k}\}_{k\geq 1}$ 使得 $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

根据Cauchy 数列的定义, 对任意$\epsilon > 0$ 存在$N_1 \in \mathbb{N}$ 只要$n, m > N$ 就有

$$|a_n - a_m| < \epsilon.$$

对这个$\epsilon > 0$ 存在$N_2 \in \mathbb{N}$ 只要$n_k > N_2$ 不等式$|a_{n_k} - a| < \epsilon$ 就成立. 从而只要$n, n_k > N := \max\{N_1, N_2\}$ 就得到

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \epsilon + |a_{n_k} - a| < 2\epsilon.$$

因此$\lim_{n\to\infty} a_n = a$. $\square$

注2.3.16. 上述定理对一般的度量空间不一定成立. 比如,

$$x_0 = 2, \quad x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \in \mathbb{Q}.$$

则 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 是 $\mathbb{Q}$ 中的Cauchy 数列, 但是 $x_n \to \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

注2.3.17. 之前已经定义过, 度量空间是完备的如果任意Cauchy 数列都是收敛的. 因此 $\mathbb{R}$ 是完备的, 但是 $\mathbb{Q}$ 不完备.

注2.3.18. Riemannian 流形的"完备性"可以用每个测地线是否可以无限延长来刻画.

接下来我们来研习有些难度的数列例题.

例2.3.19. 假设数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ 满足条件 $a_n > 0$, $\sqrt{a_1} \geq \sqrt{a_0}+1$, 且

$$\left|a_{n+1} - \frac{a_n^2}{a_{n-1}}\right| \leq 1, \quad \forall\, n \geq 1.$$

证明极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \theta \geq 1$$

存在而且数列 $\{a_n/\theta^n\}_{n\geq 1}$ 收敛.

证: 这是一个抽象的数列, 我们可以考虑利用Cauchy 收敛法则证明. 首先注意到

$$\left|a_2 - \frac{a_1^2}{a_0}\right| \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{a_2}{a_1} - \frac{a_1}{a_0}\right| \leq \frac{1}{a_1}$$

根据不等式

$$\frac{a_1}{a_0} \geq \frac{(1+\sqrt{a_0})^2}{a_0} = 1 + \frac{2}{\sqrt{a_0}} + \frac{1}{a_0} > 1 + \frac{1}{\sqrt{a_0}}$$

得到

$$\frac{a_2}{a_1} \geq \frac{a_1}{a_0} - \frac{1}{a_1} \geq \left(1 + \frac{2}{\sqrt{a_0}} + \frac{1}{a_0}\right) - \frac{1}{a_0} > 1 + \frac{1}{\sqrt{a_0}}.$$

对 $n=3$ 类似地可以从

$$\left|\frac{a_3}{a_2} - \frac{a_2}{a_1}\right| \leq \frac{1}{a_2} \quad 和 \quad \left|\frac{a_3}{a_2} - \frac{a_1}{a_0}\right| \leq \left|\frac{a_3}{a_2} - \frac{a_2}{a_1}\right| + \left|\frac{a_2}{a_1} - \frac{a_1}{a_0}\right|$$

得到

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_3}{a_2} - \frac{a_1}{a_0}\right| &\leq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} < \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{a_0}}}\left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1}\right) \\
&< \frac{1}{a_0}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{a_0}}} + \frac{1}{(1+\frac{1}{\sqrt{a_0}})^2}\right] < \frac{1}{a_0}\frac{(1+\frac{1}{\sqrt{a_0}})^{-1}}{1-(1+\frac{1}{\sqrt{a_0}})^{-1}} \\
&= \frac{1}{a_0}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{a_0}}} = \frac{1}{\sqrt{a_0}}.
\end{aligned}$$

特别地, 得到不等式

$$\frac{a_3}{a_2} > \frac{a_1}{a_0} - \frac{1}{\sqrt{a_0}} > \frac{(1+\sqrt{a_0})^2}{a_0} - \frac{1}{\sqrt{a_0}} > 1 + \frac{1}{\sqrt{a_0}}.$$

一般地, 从上述不等式我们断言

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 + \frac{1}{\sqrt{a_0}} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

实际上, 假设上述断言对任何 $n \le m$ 都成立, 且令 $\alpha = 1 + \frac{1}{\sqrt{a_0}} > 1$. 从而得到

$$a_k > \alpha a_{k-1} > \cdots > \alpha^k a_0, \quad \forall\, 1 \le k \le m+1.$$

对 $n = m+1$, 得到

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} - \frac{a_1}{a_0}\right| &\le \sum_{1\le k\le m+1} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k} - \frac{a_k}{a_{k-1}}\right| \le \sum_{1\le k\le m+1} \frac{1}{a_k} \\ &\le \frac{1}{a_0}\sum_{1\le k\le m+1}\frac{1}{\alpha^k} < \frac{1}{a_0(\alpha-1)} < \frac{1}{\sqrt{a_0}}.\end{aligned}$$

从而

$$\frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} > \frac{a_1}{a_0} - \frac{1}{\sqrt{a_0}} > 1 + \frac{1}{\sqrt{a_0}}.$$

为了应用 Cauchy 判别准则, 对任意 $p > q$ 得到

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{p+1}}{a_p} - \frac{a_{q+1}}{a_q}\right| &\le \sum_{q+1\le k\le p} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k} - \frac{a_k}{a_{k-1}}\right| \le \sum_{q+1\le k\le p} \frac{1}{a_k} \\ &\le \frac{1}{a_q}\sum_{1\le k\le p-q}\frac{1}{\alpha^k} < \frac{\sqrt{a_0}}{a_q}.\end{aligned}$$

当 $n \to \infty$ 时, 由上述断言得到

$$a_n > \left(1 + \frac{1}{\sqrt{a_0}}\right)^n a_0 \to +\infty$$

从而发现数列 $\{a_{n+1}/a_n\}_{n\ge1}$ 收敛到某个实数 $\theta > 1$.

令 $p \to \infty$ 在下列不等式

$$\left|\frac{a_{p+1}}{a_p} - \frac{a_{q+1}}{a_q}\right| < \frac{\sqrt{a_0}}{a_q}$$

推出

$$\left|\frac{a_{q+1}}{a_q} - \theta\right| \le \frac{\sqrt{a_0}}{a_q}.$$

从而对任意 $p > q$ 我们得到

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_p}{\theta^p} - \frac{a_q}{\theta^q}\right| &\le \sum_{1\le k\le p-q} \left|\frac{a_{q+k}}{\theta^{q+k}} - \frac{a_{q+k-1}}{\theta^{q+k-1}}\right| \le \sum_{1\le k\le p-q} \frac{\sqrt{a_0}}{\theta^{q+k}} = \frac{\sqrt{a_0}}{\theta^q}\sum_{1\le k\le p-q}\frac{1}{\theta^k} \\ &\le \frac{\sqrt{a_0}}{\theta^q}\frac{\theta^{-1}}{1-\theta^{-1}} = \frac{\sqrt{a_0}}{\theta^q}\frac{1}{\theta-1} \to 0\end{aligned}$$

当 $q \to \infty$. 因此数列 $\{a_n/\theta^n\}_{n\ge1}$ 是Cauchy 数列从而收敛. □

例2.3.20. 定义数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ 如下:

$$a_0=1,\quad a_1=2,\quad a_2=3$$

和

$$\begin{vmatrix} 1 & a_n & a_{n-1} \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-3} \end{vmatrix}=1,\quad \forall\, n\geq 3.$$

求 a_n 的通项并证明极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$ 存在.

证: 对行列式做初等变换: 首先第一行减去第二行, 然后第二行减去第三行. 从而得到

$$\begin{aligned} 1 &= \begin{vmatrix} 1 & a_n & a_{n-1} \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_n-a_{n-1} & a_{n-1}-a_{n-2} \\ 1 & a_{n-1}-a_{n-2} & a_{n-2}-a_{n-3} \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-3} \end{vmatrix} \\ &= (a_n-a_{n-1})(a_{n-2}-a_{n-3})-(a_{n-1}-a_{n-2})^2,\quad n\geq 3. \end{aligned}$$

利用这个递推计算得到

$$a_3=5,\quad a_4=10,\quad a_5=23,\quad \cdots.$$

回到**例 2.3.10**, 考虑Fibonacci 数列 $\{F_n\}_{n\geq 1}$:

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\quad (n\geq 3),\quad F_1=F_2=1.$$

F_n 的显示表达式如下

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n),\quad \alpha:=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad \beta:=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

利用这个通项公式马上可以得到下面的恒等式(请验证 !):

$$F_{n+1}^2=F_nF_{n+2}+(-1)^n,\quad n\geq 1.$$

为了避免繁琐的计算, 我们利用数学归纳法来证明上述这个断言. 假设 $F_{n+1}^2=F_nF_{n+2}+(-1)^n$. 因此

$$\begin{aligned} F_{n+2}^2 &= (F_n+F_{n+1})^2=F_{n+1}^2+F_n^2+2F_nF_{n+1}=F_{n+1}^2+F_n(F_n+F_{n+1})+F_nF_{n+1} \\ &= F_{n+1}^2+F_nF_{n+2}+F_nF_{n+1}+F_{n+1}F_{n+2}-F_{n+1}F_{n+2} \\ &= F_{n+1}(F_{n+1}+F_{n+2})-(F_{n+1}-F_n)F_{n+2}+F_nF_{n+1} \\ &= F_{n+1}F_{n+3}-F_{n-1}F_{n+2}+F_nF_{n+1} \;=\; F_{n+1}F_{n+3}-F_{n-1}(F_n+F_{n+1})+F_nF_{n+1} \\ &= F_{n+1}F_{n+3}-F_{n-1}F_{n+1}+F_n(F_{n+1}-F_{n-1}) \;=\; F_{n+1}F_{n+3}-[F_n^2-(-1)^{n-1}]+F_n^2 \end{aligned}$$

$$= F_{n+1}F_{n+3} + (-1)^{n+1}.$$

特别地得到

$$F_{2n-3}F_{2n-5} = 1 + F_{2n-4}^2, \quad n \ge 3.$$

当 $n = 3$ 时, 计算可得

$$\begin{array}{ccccccccc} F_{2n-3} & = & F_3 & = & 2 & = & a_3 - a_2 & = & a_n - a_{n-1}, \\ F_{2n-4} & = & F_2 & = & 1 & = & a_2 - a_1 & = & a_{n-1} - a_{n-2}, \\ F_{2n-5} & = & F_1 & = & 1 & = & a_1 - a_0 & = & a_{n-2} - a_{n-3}. \end{array}$$

现在三个初值一样而且递推方程结构一样, 因此

$$a_n - a_{n-1} = F_{2n-3}, \quad n \ge 2.$$

最后我们推出

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{2\le k\le n} F_{2k-3} = a_1 + F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-3} \\ &= a_1 + F_2 + (F_4 - F_2) + (F_6 - F_4) + \cdots + (F_{2n-2} - F_{2n-4}) \\ &= a_1 + F_{2n-2} = 2 + F_{2n-2}. \end{aligned}$$

从而得到

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-2}\right] \\ &= 2 + \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right], \quad n \ge 1. \end{aligned}$$

根据 $a_n = 2 + F_{2n-2}$ 得到

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{2 + F_{2n-2}}{2 + F_{2n}} = \frac{F_{2n-2}}{F_{2n}} \frac{\frac{2}{F_{2n-2}} + 1}{\frac{2}{F_{2n}} + 1} \\ &= \frac{\alpha^{2n-2}[1 - (\beta/\alpha)^{2n-2}]}{\alpha^{2n}[1 - (\beta/\alpha)^{2n}]} \frac{\frac{2}{F_{2n-2}} + 1}{\frac{2}{F_{2n}} + 1}. \end{aligned}$$

因为 $\beta/\alpha = \frac{\sqrt{5}-3}{4} \in (-1, 1)$, 得到 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{\alpha^2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. □

例2.3.21. 定义数列 $\{x_n\}_{n\ge 0}$ 如下

$$x_0 = 1, \quad x_n = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} \quad n \ge 1.$$

证明数列 $\{x_n\}_{n\ge 0}$ 发散但是 $\lim_{n\to\infty} x_n/\sqrt{2n} = 1$.

证: 假设 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. 由于 x_n 递增且 $x_n > 0$, 得到 $x = x + \frac{1}{x}$. 但是这个方程无解从而数列 $\{x_n\}_{n\geq 0}$ 发散.

因为

$$x_n^2 = \left(x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}\right)^2 = x_{n-1}^2 + \frac{1}{x_{n-1}^2} + 2 > x_{n-1}^2 + 2$$

得到

$$x_n^2 > x_{n-1}^2 + 2 > x_{n-2}^2 + 4 > \cdots > x_0^2 + 2n > 2n.$$

故我们可以引入

$$y_n := x_n^2 - 2n > 0, \quad n \geq 1.$$

简单计算得到

$$y_{n+1} = x_{n+1}^2 - 2(n+1) = \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)^2 - 2(n+1) = y_n + \frac{1}{y_n + 2n}.$$

从而

$$y_n < y_{n+1} < y_n + \frac{1}{2n}, \quad n \geq 1.$$

递推得到

$$y_n < \frac{1}{2(n-1)} + y_{n-1} < \frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{2(n-2)} + y_{n-2} < \cdots < y_1 + \frac{1}{2}\sum_{1\leq k\leq n-1}\frac{1}{k}.$$

我们已经证明了数列 $\{a_n := \sum_{1\leq k\leq n}\frac{1}{k} - \ln n\}_{n\geq 1}$ 递减, 故

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} < \ln(n-1) + 1.$$

因此

$$0 < y_n < 2 + \frac{\ln(n-1)+1}{2} = \frac{\ln(n-1)}{2} + \frac{5}{2}, \quad n \geq 2.$$

作为直接推论得到

$$1 < \frac{x_n}{\sqrt{2n}} < \sqrt{1 + \frac{5}{4n} + \frac{\ln(n-1)}{4n}}.$$

利用夹逼定理推出 $x_n/\sqrt{2n} \to 1$. $\square$

例2.3.22. 假设数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ 满嘴条件: $a_0 = 0$, $0 < a_n < a_{n+1}$, $a_n \to +\infty$ 且 $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{a_n} = +\infty$. 再假设 $s_0, \cdots, s_n$ 是下列线性方程组的解

$$\sum_{0\leq j\leq n}\frac{s_j}{a_i + a_j + 1} = \frac{1}{m + a_i + 1}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

这里 $m \in \mathbb{N}$. 定义

$$I_n := \frac{1}{2m+1} - \sum_{0\leq i\leq n}\frac{s_i}{m + a_i + 1}.$$

求极限 $\lim_{n\to\infty} I_n$.

证: 考虑 $(n+1)\times(n+1)$ 矩阵 A 和 $n+1$ 维向量 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^{n+1}$ 如下:

$$A=\left(\frac{1}{a_i+a_j+1}\right)_{0\le i,j\le n},\quad \boldsymbol{a}=\left(\frac{1}{m+a_0+1},\cdots,\frac{1}{m+a_n+1}\right)\in\mathbb{R}^{n+1}.$$

此时上述线性方程组可以写成

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{0}^T \\ \boldsymbol{a} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{s}^T \\ I_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}^T \\ \frac{1}{2m+1} \end{bmatrix}$$

这里 $\boldsymbol{s}=(s_0,\cdots,s_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$. 从而得到

$$I_n=\frac{\det B}{\det A},$$

这里

$$B=\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{a}^T \\ a & \frac{1}{2m+1} \end{bmatrix}$$

为了计算 A 和 B 的行列式, 我们利用**Cauchy 行列式**:

$$D_n:=\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}\quad (a_i,\ b_i\in\mathbb{C},\ a_i+b_j\neq 0).$$

则

$$D_n=\prod_{1\le i<j\le n}[(a_i-a_j)(b_i-b_j)]\Big/\prod_{1\le i,j\le n}(a_i+b_j).$$

为了利用数学归纳法证明, 前 $n-1$ 行减去第 n 行得到

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} \frac{a_n-a_1}{(a_1+b_1)(a_n+b_1)} & \frac{a_n-a_1}{(a_1+b_2)(a_n+b_2)} & \cdots & \frac{a_n-a_1}{(a_1+b_n)(a_n+b_n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_n-a_{n-1}}{(a_{n-1}+b_1)(a_n+b_n)} & \frac{a_n-a_{n-1}}{(a_{n-1}+b_2)(a_n+b_2)} & \cdots & \frac{a_n-a_{n-1}}{(a_{n-1}+b_n)(a_n+b_n)} \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} \\ &= \frac{\prod_{1\le i\le n-1}(a_n-a_i)}{\prod_{1\le i\le n}(a_n+b_i)}\cdot\Delta_n, \end{aligned}$$

这里

$$\Delta_n:=\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

前 $n-1$ 列减去第 n 列得到

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{b_n-b_1}{(a_1+b_1)(a_1+b_n)} & \cdots & \frac{b_n-b_{n-1}}{(a_1+b_{n-1})(a_1+b_n)} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{b_n-b_1}{(a_2+b_1)(a_2+b_n)} & \cdots & \frac{b_n-b_{n-1}}{(a_2+b_{n-1})(a_2+b_n)} & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ \frac{b_n-b_1}{(a_{n-1}+b_1)(a_{n-1}+b_n)} & \cdots & \frac{b_n-b_{n-1}}{(a_{n-1}+b_{n-1})(a_{n-1}+b_n)} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\prod_{0\le i\le n-1}(b_n-b_i)}{\prod_{1\le j\le n-1}(a_j+b_n)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 1 \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{n-1}} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\prod_{0\le i\le n-1}(b_n-b_i)}{\prod_{1\le j\le n-1}(a_j+b_n)} \cdot D_{n-1}.$$

结合这两个等式推出

$$D_n = \frac{\prod_{1\le i\le n-1}(a_n-a_i)(b_n-b_i)}{\prod_{1\le i\le n}(a_n+b_i)\prod_{1\le j\le n-1}(a_j+b_n)} \cdot D_{n-1}.$$

递归得到 D_n 的显示表达式. 特别地得到

$$\det A = \frac{\prod_{0\le i,j\le n}(a_i-a_j)^2}{\prod_{0\le i,j\le n}(a_i+a_j+1)}, \quad I_n = \frac{1}{2m+1}\prod_{0\le k\le n}\left(\frac{a_k-m}{m+a_k+1}\right)^2.$$

故

$$\ln[(2m+1)I_n] = \sum_{0\le k\le n} 2\ln\left|\frac{a_k-m}{m+a_k+1}\right|.$$

但是

$$\ln\frac{|a_k-m|}{m+a_k+1} = \ln\left(1-\frac{2m+1}{m+a_k+1}\right) \le -\frac{2m+1}{m+a_k+1} \le -\frac{m}{a_k},$$

当 $a_k > m$ $(\forall\, l \ge k^*)$. 对 k 求和得到

$$\sum_{0\le k\le n} 2\ln\left|\frac{a_k-m}{m+a_k+1}\right| \le \sum_{0\le k\le k^*} 2\ln\left|\frac{a_k-m}{m+a_k+1}\right| - m\sum_{k^*\le k\le n}\frac{1}{a_k} \to -\infty$$

从而 $(2m+1)I_n \to e^{-\infty} = 0$. □

§2.3.5 * Ramanujan 恒等式

印度传奇数学家Ramanujan 在 1912 年发现了如下恒等式

$$3 = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+\cdots}}}}}, \tag{2.3.12}$$

但是却未给出详细证明. 本小节我们试着给出上述恒等式的证明 (当然这个证明取自参考文献1 的附录).

首先我们给出一个“显然的”证明:

$$\begin{aligned} 3 &= \sqrt{9} = \sqrt{1+8} = \sqrt{1+2\times 4} \\ &= \sqrt{1+2\sqrt{16}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\times 5}} \\ &= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{25}}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\times 6}}} \\ &= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{36}}}} = \cdots. \end{aligned}$$

实际上Herschfeld (1935) 指出上述证明不完整, 原因是未证明定义的数列是否收敛. 令

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \sqrt{1+2}, \quad a_3 = \sqrt{1+2\sqrt{1+3}}$$

且

$$a_n = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots+(n-2)\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}}}}.$$

定义另一个数列如下

$$b_1 = a_n$$

$$b_2 = \sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots+(n-2)\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}}}}$$

$$b_3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots+(n-2)\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}}}$$

$$\cdots$$

$$b_{n-2} = \sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}$$

$$b_{n-1} = \sqrt{1+n}.$$

从而对任意 $1 \leq k \leq n-2$ 得到

$$\begin{aligned} b_k^2-(k+2)^2 &= [1+(k+1)b_{k+1}]-(k+2)^2 = (k+1)[b_{k+1}-(k+3)] \\ &= (k+1)\frac{b_{k+1}^2-(k+3)^2}{b_{k+1}+k+3}. \end{aligned}$$

由此推出

$$\begin{aligned} a_n-3 &= \frac{b_1^2-3^2}{b_1+3} = 2\frac{b_2^2-4^2}{(b_1+3)(b_2+4)} = \cdots \\ &= (n-1)!\frac{b_{n-1}^2-(n+1)^2}{(b_1+3)(b_2+4)\cdots(b_{n-1}+n+1)} \\ &= \frac{-(n+1)!}{(b_1+3)(b_1+5)\cdots(b_{n-1}|+n+1)}. \end{aligned}$$

最后得到

$$|a_n - 3| \le \frac{(n+1)!}{4 \times 5 \times \cdots \times (n+2)} = \frac{6}{n+2} \to 0.$$

下面我们到 Ramanujian 恒等式做推广.

例2.3.23. 定义数列 $\{x_n\}_{n\ge 1}$ 如下

$$x_n := \sqrt{a_1 + b_1\sqrt{a_2 + b_2\sqrt{Pa_3 + \cdots + b_{n-1}\sqrt{a_n}}}}, \quad n \ge 1.$$

这里 $a_n, b_n > 0$. 证明

(1) (T. Vijayaraghavan)

$$\{x_n\}_{n\ge 1} \text{ 收敛} \iff \frac{\ln a_n}{2^n} + \sum_{1\le k\le n-1} \frac{\ln b_k}{2^k} < C\ (n \ge 1).$$

(2) 如果存在数列 $\{\theta_n\}_{n\ge 1}$ $(\theta_n > 0)$ 满足

$$\theta_n^2 = a_n + b_n\theta_{n+1}\ (n \ge 1), \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(\sqrt{a_n}/\theta_n)}{2^n} = 0,$$

则 $\lim_{n\to\infty} x_n = \theta_1$.

(3) (Ramanujan) 对任意 $a \ge 1$ 有

$$a + 1 = \sqrt{1 + a\sqrt{1 + (a+1)\sqrt{1 + (a+2)\sqrt{1 + \cdots}}}}.$$

证: (1) 首先观察到

$$\begin{aligned} x_n &= \sqrt{a_1 + b_1\sqrt{a_2 + b_2\sqrt{a_3 + \cdots + b_{n-2}\sqrt{a_{n-1} + b_{n-1}\sqrt{a_n}}}}} \\ &= \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 b_1^2 + b_1^2 b_2\sqrt{a_3 + \cdots + b_{n-2}\sqrt{a_{n-1} + b_{n-1}\sqrt{a_n}}}}}. \end{aligned}$$

接下去把系数 $b_1^2 b_2$ 收缩到下个根号里面, 继续这个过程, 最后得到

$$x_n = \sqrt{c_1 + \sqrt{c_2 + \sqrt{c_3 + \cdots + \sqrt{c_{n-1} + \sqrt{c_n}}}}} \quad (\ge x_{n-1})$$

这里

$$c_1 = a_1, \quad c_2 = a_2 b_1^2, \quad c_3 = a_3 b_1^{2^2} b_2^2, \quad \cdots, \quad c_n = a_n b_1^{2^{n-1}} b_2^{2^{n-2}} \cdots b_{n-1}^2.$$

假设 $\lim_{n\to\infty} x_n = c$. 因为 x_n 递增得到 $x_n \le c$ 从而 $(c_n)^{1/2^n} \le c$ 或者

$$\left(a_n \prod_{1\le k\le n-1} b_k^{2^{n-k}}\right)^{\frac{1}{2^n}} \le c.$$

两边取对数推出

$$\frac{\ln a_n}{2^n} + \sum_{1\le k\le n-1} \frac{\ln b_k}{2^k} \le C := \ln c.$$

反之假设 $\frac{\ln a_n}{2^n} + \sum_{1\le k\le n-1} \frac{\ln b_k}{2^k} \le C$ 对任意 $n \ge 1$ 都成立. 得到 $c_n \le c^{2n}$, 这里 $c = e^C$. 从而

$$x_n \le \sqrt{c^2 + \sqrt{c^{2^2} + \cdots + \sqrt{c^{2^{n-1}} + \sqrt{c^{2^n}}}}}.$$

注意到

$$\sqrt{c^{2^{n-1}} + \sqrt{c^{2^n}}} = \sqrt{c^{2^{n-1}} + c^{2^{n-1}}\sqrt{1}} = c^{2^{n-2}}\sqrt{1+\sqrt{1}}.$$

最后推出

$$\begin{aligned} x_n &\le \sqrt{c^2 + \sqrt{c^{2^2} + \cdots + c^{2^{n-2}} + \sqrt{c^{2^{n-1}} + \sqrt{c^{2^n}}}}} \\ &\le \sqrt{c^2 + \sqrt{c^{2^2} + \cdots + c^{2^{n-2}} + c^{2^{n-2}}\sqrt{1+\sqrt{1}}}} \le \cdots \le c y_n \end{aligned}$$

这里

$$y_n := \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1}}}}.$$

但是 $y_{n+1} > y_n \ge 1$ 且

$$y_n = \sqrt{1 + y_{n-1}} \le \sqrt{2y_{n-1}} < \sqrt{2y_n},$$

得到 $1 \le y_n < 2$ 从而 $x_n \le 2c$. 根据单调有界原理推出极限 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在.

(2) 因为

$$\theta_n^2 \ge a_n, \quad a_{n-1} + b_{n-1}\theta_n = \theta_{n-1}^2$$

得到

$$\begin{aligned} c_n &\le \sqrt{a_1 + b_1\sqrt{a_2 + b_2\sqrt{a_3 + \cdots + b_{n-2}\sqrt{a_{n-1} + b_{n-1}\theta_n}}}} \\ &\le \sqrt{a_1 + b_1\sqrt{a_2 + b_2\sqrt{a_3 + \cdots + b_{n-2}\theta_{n-1}}}} \\ &\le \cdots \le \sqrt{a_1 + b_1\theta} = \theta_1. \end{aligned}$$

另一方面利用不等式

$$\sqrt{\alpha + \gamma\beta} \le \sqrt{\gamma}\sqrt{\alpha+\beta}, \quad \alpha, \beta \ge 0, \ \gamma \ge 1$$

和

$$\frac{\theta_n}{\sqrt{a_n}} \geq 1, \quad n \geq 1,$$

得到

$$\begin{aligned}\sqrt{a_{n-1}+b_{n-1}\theta_n} &= \sqrt{a_{n-1}+b_{n-1}\sqrt{a_n}\frac{\theta_n}{\sqrt{a_n}}} \\ &\leq \sqrt{\frac{\theta_n}{\sqrt{a_n}}}\sqrt{a_{n-1}+b_{n-1}\sqrt{a_n}} \leq \sqrt{\frac{\theta_n}{\sqrt{a_n}}}\sqrt{a_{n-1}+b_{b-1}\theta_n}.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\sqrt{a_{n-2}+b_{n-2}\sqrt{a_{n-1}+b_{n-1}\theta_n}} &\leq \sqrt{a_{n-2}+b_{n-2}\sqrt{\frac{\theta_n}{\sqrt{a_n}}}\sqrt{a_{n-1}+b_{n-1}\theta_n}} \\ &\leq \left(\frac{\theta_n}{\sqrt{a_n}}\right)^{\frac{1}{2^2}}\sqrt{a_{n-2}+b_{n-2}\sqrt{a_{n-1}+b_{n-1}\theta_n}}.\end{aligned}$$

继续下去得到

$$\theta_1 \leq \left(\frac{\theta_n}{\sqrt{a_n}}\right)^{\frac{1}{2^n}} x_n \quad 或 \quad \theta_1\left(\frac{\sqrt{a_n}}{\theta_n}\right)^{\frac{1}{2^n}} \leq x_n \leq \theta_1.$$

条件 $\ln(\sqrt{a_n}/\theta_n)/2^n \to 0$ 推出 $(\sqrt{a_n}/\theta_n)^{1/2^n} \to 1$ 和 $x_n \to \theta_1$.

(3) 取 $a_n \equiv 1$, $b_n := a+n-1$, 和 $\theta_n = a+n$. □

§2.3.6 * Cantor 集

考虑闭区间 $[0,1]$. 我们在这一小节定义一个不可数的闭集但是"长度"为零.

第一步: 把 $[0,1]$ 三等分并去掉中间的开区间 $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$, 令

$$G_1 = \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right), \quad P_1 = \left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},1\right].$$

第二步: 把 P_1 中的每个区间再三等分并去掉中间的部分 $(\frac{1}{9},\frac{2}{9})$ 和 $(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$, 令

$$G_2 = \left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right), \quad P_2 = [0,1] \setminus G_2 = \left[0,\frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9},1\right].$$

继续这个过程得到两个数列 $\{G_n\}_{n\geq 1}$ 和 $\{P_n\}_{n\geq 1}$. 定义

$$G := \bigcup_{n\geq 1} G_n, \quad P := [0,1] \setminus G = \bigcap_{n\geq 1} P_n,$$

这里 G_n 是 2^{n-1} 个长度都为 3^{-n} 的不相交的开区间的并. 易证

$$P \cap G = \emptyset, \quad P \cup G = [0,1], \quad |G_n| = \frac{2^{n-1}}{3^n}.$$

从而
$$|G| = \sum_{n\geq 1}\frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{2}\frac{2/3}{1-2/3} = 1.$$
称集合 P 为Cantor **集**. 注意到 P 不可数, 闭的, $|P| = 0$ 但是 $P \neq \emptyset$.

这个和通常的"直观"发生矛盾. 原因是用欧式空间的度量来测量 P 不合适. 之后我们会引入**Hausdorff 维数** $\dim_{\mathcal{H}}$ (欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的 Haudorff 维数就是 n) 和**Hausdorff 测度**来描述 Cantor 集并可以证明 $\dim_{\mathcal{H}}(P) = \ln 2/\ln 3 \in (0,1)$. 这样的集合研究属于**分形 (fractal)** 范畴. 一个经典的例子是英国海岸线是永远测不准的!

§2.3.7 * Logistic 差分方程和混沌

本小节大部分内容取材于参考文献**[14, 22]**. 一本较有趣的关于浑沌的科普书, 是李天岩的学生丁玖教授的书[18].

假设 $\{x_n\}_{n\geq 0}$ 表示某生物的种群规模, 即 x_0 表示初始种群规模, x_1 表示第 1 代 (在时间 t_1) 的种群规模, x_2 表示第 2 代 (在时间 t_2) 的种群规模, $\cdots$, x_n 表示第 n 代 (在时间 t_n) 的种群规模. 假设该种群的出生率和死亡率分别为常数 b 和 d (即若种群规模为 x, 则在这一代出生和死亡分别为 bx 和 dx), 则得到
$$x_{n+1} - x_n = (b-d)x_n \quad\Longrightarrow\quad x_{n+1} = (1+b-d)x_n.$$
若引入常数 $r := 1+b-d$ 就得到线性模型
$$x_{n+1} = rx_n, \quad n \geq 0. \tag{2.3.13}$$
这个递推数列的解是
$$x_n = r^n x_0, \quad n \geq 0.$$
从而得到,

- 当 $0 \leq r < 1$ 时, 种群规模逐渐减少到 0;
- 当 $r = 1$ 时, 出生率和死亡率相等从而种群规模保持不变;
- 当 $r > 1$ 时, 种群规模逐渐增加到 $+\infty$.

显然这个线性模型与实际不符合, 原因是现实生活中出生率和死亡率一般来说不是常数, 而且也没有考虑种群迁出和迁入等其它因素.

[18]丁玖 著: **智者的困惑 – 混沌分形漫谈**, 高等教育出版社, 2013.

上述模型早在 1798 年被英国经济学家Malthus[19] 在其著作《人口学原理》(An essay on the principle of population) 中所研究过.

1845 年比利时数学家Verhulst[20] 提出了如下递推数列

$$x_{n+1} = x_n + rx_n\left(1 - \frac{x_n}{K}\right) \quad \text{或} \quad x_{n+1} = rx_n\left(1 - \frac{x_n}{K}\right) \tag{2.3.14}$$

来研究种群规模 (可以证明上述两个方程是等价的, 为了叙述方便我们采用第一个递推数列). (2.3.14) 是一个非线性模型, 被称为**logistic 模型**[21].

如果引入辅助函数

$$f(x) := x + rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) = (1+r)x - \frac{r}{K}x^2 \tag{2.3.15}$$

则 (2.3.14) 可写成递推数列

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \geq 0. \tag{2.3.16}$$

称 x_∞ 是 (2.3.16) 的**平衡点 (equilibrium point)** 如果

$$x_\infty = f(x_\infty).$$

根据**第三章** 可知如果极限 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ 存在且函数 f 在 x 处连续, 则 x 就是 (2.3.16) 的一个平衡点.

现在进一步假设 (2.3.16) 有平衡点 x_∞ 且函数[22] f 在 x_∞ 附近二阶导数存在且连续, 即假设 $f \in C^2([x_\infty - \delta, x_\infty + \delta])$. 考虑 x_n 和平衡点 x_∞ 的偏差,

$$u_n := x_n - x_\infty, \quad n \geq 0.$$

[19]Thomas Robert Malthus, 1766 年 2 月 13 日 - 1834 年 12 月 23 日, 今英国萨里郡韦斯科特人, 英国人口学家和经济学家. 1798 年在其著作《人口学原理》中, Malthus 提出了著名的预言: 人口增长超越食物供应. Malthus 的人口理论的基本思想是: 人类赖以生存的生活资料是以算术级数增长的, 然而人类自己的人口数目却是以几何级数增加的; 为了抑制人口增长, Malthus 认为道德抑制 (包括晚婚和禁欲)、自然灾难、战争和瘟疫等是比较好的手段. 但此学说往往会被人误用 (作为发动战争的借口之一), 也被很多经济学家所诟病.

[20]Pierre François Verhulst, 1804 年 10 月 28 日 - 1849 年 2 月 15 日, 比利时数学家, 1825 年获得比利时根特大学数论方向博士学位. Verhulst 在 1838 年提出了方程

$$\frac{dN}{dt} = rN - \alpha N^2.$$

之后该方程在 1920 年被Raymond Pearl 和Lowell Reed 推广到

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right).$$

[21]相关历史可参见 https://papers.tinbergen.nl/02119.pdf

[22]如果高中时候没有接触过连续和导数, 可先跳过这段, 等学完**第三章** 和**第四章** 后再回顾头来阅读.

一般来说 u_n 不一定收敛到 0, 但是为了引入下面概念, 我们暂且假设 $|u_n| < \delta$ 对充分大的 n 成立. 对方程 $x_\infty + u_{n+1} = f(x_\infty + u_n)$ 应用 Taylor 展开(**定理 4.7.3** 或**定理 5.4.21**) 得到

$$x_\infty + u_{n+1} = f(x_\infty + u_n) = f(x_\infty) + f'(x_\infty)u_n + \int_{x_\infty}^{x_\infty+u_n} f''(t)(x_\infty + u_n - t)dt.$$

因为函数 $f'' \in C([x_\infty - \delta, x_\infty + \delta])$, 所以函数

$$h(u_n) := \int_{x_\infty}^{x_\infty+u_n} f''(t)(x_\infty + u_n - t)dt$$

满足

$$h(u_n) = \frac{f''(c_n)}{2}u_n^2, \quad \text{其中 } c_n \text{ 介于 } x_\infty \text{ 和 } x_\infty + u_n \text{ 之间}$$

且

$$u_{n+1} = f'(x_\infty)u_n + h(u_n). \tag{2.3.17}$$

根据闭区间上连续函数必有界, 存在正数 $M > 0$ 使得 $|f''(u)| \leq M$ 对任何 $x \in [x_\infty - \delta, x_\infty + \delta]$ 都成立. 因此

$$|h(u_n)| \leq \frac{M}{2}u_n^2, \quad \text{如果 } |u_n| < \delta.$$

这样只要 u_n 充分小, 则 (2.3.17) 告诉我们有 $u_{n+1} \approx f'(x_\infty)u_n$. 故我们称

$$v_{n+1} = f'(x_\infty)v_n \tag{2.3.18}$$

为 (2.3.16) 在平衡点 x_∞ 的**线性化 (linearization)**. 根据线性模型 (2.3.13) 的解得到

$$v_{n+1} = [f'(x_\infty)]^n v_0, \quad n \geq 0.$$

注意到 $v_n \to 0$ 当且仅当 $|f'(x_\infty)| < 1$.

性质2.3.24. *假设 x_∞ 是 (2.3.16) 的平衡点, f 在 x_∞ 附近二阶导数存在且连续, 且 $|f'(x_\infty)| < 1$. 如果初始值 x_0 充分接近于 x_∞, 则 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty$.*

证: 令 $\rho := |f'(x_\infty)|$ 并假设 $f \in C^2([x_\infty - \delta, x_\infty + \delta])$, 这里 $\delta > 0$ 是充分小的正数. 因为 $\rho < 1$, 所以存在 $\epsilon > 0$ 满足 $\rho + \epsilon < 1$.

假设 $|u_0| < \delta_0 := \min\{\delta, 2\epsilon/M\}$. 则根据 (2.3.17) 得到

$$|u_1| \leq |f'(x_\infty)||u_0| + |h(u_0)| < \rho|u_0| + \frac{M}{2}|u_0|^2 < (\rho + \epsilon)\delta_0 < \delta_0.$$

再次根据 (2.3.17) 得到 $|u_2| \leq (\rho + \epsilon)|u_1| \leq (\rho + \epsilon)^2|u_0|$. 一般地得到

$$|u_n| \leq (\rho + \epsilon)^n|u_0| < |u_0| < \delta_0 < \delta, \quad n \geq 0.$$

令 $n \to \infty$ 推出 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ 即 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty$. □

我们把满足条件 $|f'(x_\infty)| < 1$ 的平衡点 x_∞ 称为**渐进稳定点 (asymptotically stable point)**, 而把满足条件 $|f'(x_\infty)| > 1$ 的平衡点 x_∞ 称为**不稳定点 (unstable point)**. 这是因为, 同样可证明在条件 $|f'(x_\infty)| > 1$ 下, 数列 $\{u_n\}_{n\ge 0}$ 是发散的.

回到我们的函数 (2.3.15) 上来. 因为

$$f'(x) = 1 + r - \frac{2r}{K}x,$$

故得到两个平衡点 $x_\infty = 0$ 或 $x_\infty = K$, 而且当 $-2 < r < 0$ 时 $x_\infty = 0$ 时渐进稳定的, 但当 $0 < r < 2$ 时 $x_\infty = K$ 是渐进稳定的.

实际应用中 $r > 0$, 故我们只研究平衡点 $x_\infty = K$, 此时当 $0 < r < 2$ 时是渐进稳定的, 而当 $r > 2$ 时是不稳定的.

为了进一步研究 $r > 2$ 时 (2.3.16) 解的性态, 我们引入**n- 周期点 (n-period point)**, 即

$$x_\infty = f_n(x_\infty) \quad \text{但} \quad x_\infty \ne f_i(x_\infty)\ (1 \le i < n), \quad f_n := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n}.$$

显然 1- 周期点就是平衡点. 首先来计算 2- 周期点. 根据定义 (2.3.15) 得到

$$\begin{aligned} f_2(x) &= f(f(x)) = (1+r)f(x) - \frac{r}{K}[f(x)]^2 \\ &= (1+r)^2 x - \frac{r(1+r)(2+r)}{K}x^2 + \frac{2r^2(1+r)}{K^2}x^3 - \frac{r^3}{K^3}x^4. \end{aligned}$$

令 $x = f(x)$ 得到四次方程

$$x\left(\frac{x}{K} - 1\right)\left[r^2\left(\frac{x}{K}\right)^2 - r(r+2)\frac{x}{K} + r + 2\right] = 0,$$

从而得到 4 个解 (注意假设条件 $r > 2$)

$$0, \quad K, \quad x_+ := \frac{r + 2 + \sqrt{r^2 - 4}}{2r}K, \quad x_- := \frac{r + 2 - \sqrt{r^2 - 4}}{2r}K.$$

简单计算表明 (请诸位验证之!)

$$f(x_\pm) = x_\mp, \quad f_2'(x_+) = 5 - r^2.$$

类似于性质 2.3.24 可以证明当 $|f_2'(x_\infty)| < 1$ 时, 2- 周期点 x_∞ 是递推数列 $x_{n+1} = f_2(x_n)$ 的渐进稳定点, 而当 $|f_2'(x_\infty)| > 1$ 时, 2- 周期点 x_∞ 是不稳定点; 即当 $|f_2'(x_\infty)| < 1$ 时, 只要初始值 x_0 充分接近于 x_∞, 则 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty$.

因此当 $|5 - r^2| < 1$ 或 $2 < r < \sqrt{6} \approx 2.449$ 时, x_+ 是渐近稳定点. 虽然当 $r > \sqrt{6}$ 时 x_+ 是不稳定的, 但是可以证明此时出现了 4- 周期点, 且当

$\sqrt{6} < r < 2.544$ 时这个点是渐进稳定的. 当 $r > 2.544$ 时这个 4- 周期点不稳定, 但出现了 8- 周期点, 且当 $2.544 < r < 2.564$ 时这个点是渐进稳定的. 这个**倍周期现象**持续到 $r = 2.570$, 而且当 $r > 2.570$ 时出现了不是 2 的幂次方的周期点, 甚至非周期点. 可以证明当 $r = \sqrt{8} \approx 2.828$ 时出现 3- 周期解, 而且 $r > \sqrt{8}$ 时对每个正整数 k 都存在 k- 周期解; 但不同的初始值则给出不同的周期解. 除此之外, 还存在某些随机性的解 – **混沌 (chaos)**. 1977 年李天岩[23]和其导师Yorke 证明了**周期 3 必有混沌!**[24].

§2.4 实数系统基本定理

本节我们给出实数系统六个基本定理的等价性:

确界原理 $\Longleftrightarrow$ 单调有界收敛定理

Cantor 区间套定理 $\Longleftrightarrow$ Bolzano-Weierstrass 定理

Cauchy 收敛定理 $\Longleftrightarrow$ Heine-Borel 有限覆盖定理

§2.4.1 确界原理

根据**定理1.5.55** 和**性质1.5.54** 我们得到

定理2.4.1. (确界原理) *$\mathbb{R}$ 的每个非空有上界子集必有上确界, 而每个非空有下界子集必有下确界.*

§2.4.2 单调有界收敛定理

利用**定理2.4.1** 得到

定理2.4.2. (单调有界收敛定理) *单调递增有上界数列必收敛, 和单调递减有下界数列必收敛.*

证: 参见**定理2.3.1**. □

§2.4.3 Cantor 闭区间套定理

在证明**定理2.3.11** 时已经给出了Cantor 闭区间定理的证明.

---

[23] Tien-Yien Li, 1945 年 6 月 - 2020 年6 月35 日, 我国福建省三明市沙县人, 美籍数学家. 1968 年毕业于台湾省清华大学数学系, 1974 年 University of Maryland (马里兰大学) 博士毕业. 从1976 年起在 Michigan State University (密西根州立大学)任教, 历任助理教授、副教授、正教授和杰出数学教授.

[24] Li, T. Y.; Yorke, James A. *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly, **82**(1975), no. 10, 985 - 992.

定理2.4.3. (Cantor 比区间套定理) 假设闭区间序列$\{[a_n,b_n]\}_{n\geq1}$ 满足条件

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots,\quad \lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0.$$

则存在唯一的$x_0\in\cap_{n\geq1}[a_n,b_n]$.

证: 参见**定理2.3.11**.□

§2.4.4 Bolzano-Weierstrass 定理

利用**定理2.4.3** 得到

定理2.4.4. (Bolzano-Weierstrass 定理) 有界数列必有收敛子列.

证: 参见**定理2.3.11**. □

§2.4.5 Cauchy 收敛定理

利用**定理2.4.4** 得到

定理2.4.5. (Cauchy 收敛定理) Cauchy 数列必收敛.

证: 参见**定理2.3.15**. □

§2.4.6 Heine-Borel 有限覆盖定理

令$\mathscr{I}$ 为由$\mathbb{R}$ 中的一些开区间所构成的集合. 称$\mathscr{I}$ 是区间I_0 的**开覆盖(open covering)** 如果$I_0\subset\cup_{I\in\mathscr{I}}I$.

比如$\{(\frac{n-1}{n},\frac{n}{n+1})\}_{n\geq1}$ 是$(0,1)$ 的开覆盖.

定理2.4.6. (Heine-Borel 有限覆盖定理) 假设$\mathscr{I}$ 是闭区间$[a,b]$ 的开覆盖. 则存在有限个开区间$I_1,\cdots,I_k\in\mathscr{I}$ 满足$[a,b]\subset\cup_{1\leq i\leq k}I_i$.

证: 参见下一节. □

§2.4.7 六大定理的等价性

我们已经证明了

$$\begin{tikzcd} \text{定理2.4.1} \arrow[r] & \text{定理2.4.2} \arrow[r] & \text{定理2.4.3} \arrow[d] \\ \text{定理2.4.6} \arrow[u, "??", "??"'] & \text{定理2.4.5} \arrow[l, "??"', "??"] & \text{定理2.4.4} \arrow[l] \end{tikzcd} \tag{2.4.1}$$

下面给出剩余两个箭头的证明.

定理2.4.7. 上述**定理2.4.1** – **定理2.4.6** 都是等价的.

证: 只要证明**定理2.4.5** $\Rightarrow$ **定理2.4.6** 和**定理2.4.6** $\Rightarrow$ **定理2.4.1**. 下面的证明方法参考了杨艳萍和明清河的专著[25].

定理2.4.5 $\Rightarrow$ **定理2.4.6**: 假设$\mathscr{I}$ 中不存在有限个开区间$I_1, \cdots, I_k$ 满足条件$[a,b] \subset \cup_{1\leq i\leq k} I_i$, 即$\mathscr{I}$ 不存在有限子覆盖. 把闭区间$[a,b]$ 对分得到两个小区间, 则至少有一个小区间也不存在有限子覆盖; 把这个小区间记为$[a_1, a_2]$. 如此下去就得到闭区间序列$\{[a_n, b_n]\}_{n\geq 1}$, 使得每个闭区间$[a_n, b_n]$ 都不存在有限子覆盖. 因为数列$\{b_n\}_{n\geq 1}$ 是有界的, 故根据**定理2.4.5** 得到收敛子列$\{b_{n_k}\}_{k\geq 1}$. 记

$$\lim_{k\to\infty} b_{n_k} = x \in [a,b].$$

根据$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ 得到$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{k\to\infty} b_{n_k} = x$. 因为

$$[a,b] \subset \cup_{I\in\mathscr{I}} I, \quad x \in [a,b],$$

所以存在开区间$I_x \in \mathscr{I}$ 满足$x \in I_x$; 从而存在$n_k \in \mathbb{N}$ 使得

$$[a_{n_k}, b_{n_k}] \subset I_x$$

成立, 这和$[a_{n_k}, b_{n_k}]$ 不存在有限子覆盖相矛盾.

定理2.4.6 $\Rightarrow$ **定理2.4.1**: 假设E 是$\mathbb{R}$ 中的非空有上界子集, 并令Σ 为S 的所有上界所构成的集合. 显然$\Sigma \neq \emptyset$ 且存在$x_0 \in E$. 任取$M \in \Sigma$ 满足$x_0 < M$, 并考察区间$[x_0, M]$.

假设Σ 没有上确界, 即E 没有最小的上界. 任取$x \in [x_0, M]$; 如果$x \in \Sigma$, 则根据假设条件存在$x' \in \Sigma$ 且$x' < x$, 从而可以找到包含x 的开区间I_x 使得$I_x \subset \Sigma$; 如果$x \notin \Sigma$, 则存在$x'' \in E$ 满足$x < x''$, 从而可以找到包含x 的开区间I_x 使得$I_x \notin \Sigma$.

这样就得到了闭区间$[x_0, M]$ 的一个开覆盖$\mathscr{I} = \{I_x | x \in [x_0, M]\}$. 根据有限覆盖定理得到$[x_0, M] \subset I_{x_1} \cup \cdots \cup I_{x_k}$, 这里$x_1, \cdots, x_k \in [x_0, M]$. 不妨假设

$$x_0 \leq x_1 < \cdots < x_k \leq M,$$

从而得到$x_0 \in I_{x_1}$ 和$M \in I_{x_k}$. 由于$M \in \Sigma$, 所以$I_{x_k} \subset \Sigma$. 根据开区间I_x 的构造, $I_{x_{k-1}} \in \Sigma$. 经过有限次后$I_{x_1} \in \Sigma$, 特别地有$x_0 \in \Sigma$, 矛盾. □

练习2.4.8. 在(2.4.1) 中, 我们按照顺序$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6$ 来完成**定理2.4.7** 的证明. 请用其它顺序来完成该定理的证明. [**提示:** 可参考杨艳萍和明清河的专著中的想法, 但请用自己的语言逻辑来完成证明.]

[25] 杨艳萍, 明清河 著:《数学分析中的重要定理》, 电子工业出版社, 2015.

§2.5 习题

1. 根据定义证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n}{2n^2-1}=\frac{3}{2},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}}{n}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n-\sqrt{n}}=+\infty,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^3-(n+1)^3}{n+1}=-\infty,\quad \lim_{n\to\infty}(-1)^n(\sqrt{n}+1)=\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{n}}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\arctan n=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\arctan n}{1+n^2}=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}=0,\quad \lim_{n\to\infty}a_n=2,\ \text{其中}\ a_n=\begin{cases}\frac{2n+1}{n}, & n\ \text{为偶数},\\ \frac{\sqrt{4n^2+n}}{n}, & n\text{为奇数}.\end{cases}$$

2. 讨论数列的极限:

$$a_n=\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2},\quad a_n=4+(-1)^n,\quad a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1},$$

$$a_n=\sqrt[n]{n^2+1},\quad a_n=\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{n^2},\quad a_n=(-1)^n+\frac{1}{n}.$$

3. 证明下列极限不存在:

$$\lim_{n\to\infty}\cos n,\quad \lim_{n\to\infty}\cot n,\quad \lim_{n\to\infty}\sin\sqrt{n}.$$

4. 求下列极限:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1+2^2+\cdots+n^2}{n^3},\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+n}},\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{3^n}\right)^{3^n},\quad \lim_{n\to\infty}n[\ln(1+n)-\ln n],\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{1\le k\le n}\frac{1}{k(k+1)},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}},\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}),\quad \sum_{n\to\infty}\sum_{1\le k\le n}\frac{1}{2^k},$$

$$\lim_{n\to\infty}[\log_2(n+1)-\log_2 n],\quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}),\quad \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)^{1/n},\quad \lim_{n\to\infty}(n^2-n+2)^{1/n},$$

$$\lim_{n\to\infty}(\arctan n)^{1/n},\quad \lim_{n\to\infty}(2\sin^2 n+\cos^2 n)^{1/n},\quad \lim_{n\to\infty}\left[(n^2+1)^{1/8}-(n+1)^{1/4}\right],$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{1+2+\cdots+n}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1}n}{n},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}}),\quad |x|<1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{1\leq k\leq n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)},\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{c}+\frac{2}{c}+\cdots+\frac{n}{c^n}\right)\ (c>1),$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2},\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\frac{1}{n}}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{1\leq k\leq n}\frac{4k}{4k^4-1},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{0\leq k\leq n}\arctan\left(\frac{}{k^2+k+1}\right),\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{1\leq k\leq n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{b}{2^k}\right)\ (b\notin\mathbb{Z}\pi),$$

5. 证明数列

$$a_n:=\frac{\sin 1}{2^n}+\frac{\sin 2}{2^n}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}$$

的极限存在.

6. 若$x_n\leq a\leq y_n$ 且$\lim_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$. 证明$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=a$.

7. 假设数列$\{a_n\}_{n\geq1}$ 满足$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=a$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=a$$

.

8. 如果数列$\{a_n\}_{n\geq1}$ 满足$\lim_{n\to\infty}a_n=a$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=\frac{a}{2}.$$

9. 研究下列数列的单调性并求极限:

$$a_1=\sqrt{2},\ a_{n+1}=\sqrt{2a_n};\quad a_1=1,\ a_{n+1}=1+\frac{a_n}{1+a_n};$$

$$a_1>0,\ a_{n+1}=\frac{6(1+a_n)}{7+a_n};\quad a_1\in(0,1),\ a_{n+1}=a_n(1-a_n);$$

$$a_1=\sqrt{c},\ c>0,\ a_{n+1}=\sqrt{c+a_n};\quad a_1\geq0,\ a_{n+1}=\sqrt{2+a_n};$$

$$a_1>0,\ c>0,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{c}{a_n}\right);\quad a_1\geq0,\ a_{n+1}=\frac{1}{1+a_n};$$

$$a_1=c>0,\quad a_{n+1}=c+\frac{1}{a_n};\quad a_1>0,\quad a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{a_n};$$

$$a_1>0,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{5}{8a_n};\quad a_1\in(0,\sqrt{2}),\ a_{n+1}=a_n+\frac{1}{2}a_n\left(1-\frac{1}{2}a_n^2\right),$$

$$a_1\in(0,1),\ a_{n+1}=1-\sqrt{1-a_n};\quad a_1=a>0,\ a_{n+1}=\sqrt[3]{a_n+\sqrt[3]{a}};$$

$$a_1>1,\ a_{n+1}=\frac{3a_n+1}{a_n+3};\quad a_1=1,\ a_{n+1}=n(1+a_n),\ b_n=\prod_{1\leq k\leq n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right).$$

10. 假设$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 和$\lim_{n\to\infty} b_n = b$. 证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = ab.$$

11. 假设$0 < a < b$ 且$a_1 = a$, $b_1 = b$. 证明数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$ 和$\{b_n\}_{n\geq 1}$ 都收敛且收敛到同一值, 这里

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

如果上面a_n 换成

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$$

而b_n 保持不变, 是否得到相同的结论.

12. 利用Cauchy 收敛准则证明下列数列收敛:

$$a_n = 1 + \sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{k!}, \quad a_n = \sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{k^2}, \quad a_n = \sum_{1\leq k\leq n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

13. 证明数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$ 是Cauchy 的:

(1) 如果a_n 满足$|a_{n+1} - a_n| \leq q|a_n - a_{n-1}|$ $(n \geq 1)$, $q \in [0, 1)$ 是常数;

(2) 如果a_n 满足$|a_{n+1} - a_n| \leq b_{n+1} - b_n$ $(n \geq 1)$, 其中$\{b_n\}_{n\geq 1}$ 位单调递增有界数列;

(3) 如果a_n 满足

$$|a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \leq M, \quad n \geq 1,$$

这里M 是常数.

14. 证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n^{3/2}} = \frac{2}{3}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{1\leq k\leq n} \sqrt{k} - \frac{2}{3} n^{3/2} \right) = \frac{1}{2}.$$

15. 证明不等式

$$0 \leq \left[1 + \frac{1}{n(n+2)}\right]^n - \left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{n-1}{2n(n+2)^2}\right] \leq \frac{n-1}{2n(n+2)^3}.$$

由此证明

$$\lim_{n\to\infty} n \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] = \frac{e}{2}.$$

16. 证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n} = 0,$$

这里$p(n)$ 表示n 的素因数的个数.

17. 假设$a_n > 0, n \geq 1$, 且满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}+a_{n+2}}{a_n} = +\infty.$$

证明$\{a_n\}_{n\geq 1}$ 是无界数列.

18. 假设$c > 0$, $a_1 = \frac{c}{2}$, $a_{n+1} = \frac{c+a_n^2}{2}$. 证明

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 1-\sqrt{1-c}, & 0 < c \leq 1, \\ +\infty, & c > 1. \end{cases}$$

19. 给定两个常数$a, b \in \mathbb{R}$. 定义

$$a_1 = b, \quad a_{n+1} = a_n^2 + (1-2a)a_n + a^2 \ (n \geq 1).$$

当a, b 取何值时数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$ 收敛? 此时的极限是多少?

20. 证明不等式

$$\sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{k!} - \frac{3}{2n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{k!}, \quad n \geq 3.$$

21. 证明不等式

$$n^n\left[1+\frac{1}{4(n-1)}\right] < \sum_{1\leq k\leq n} k^k < n^n\left[1+\frac{2}{e(n-1)}\right], \quad n \geq 3.$$

22. 证明下列数列收敛:

$$a_n = \frac{\sin(2x)}{2(2+\sin(2x))} + \frac{\sin(3x)}{3(3+\sin(3x))} + \cdots + \frac{\sin(nx)}{n(n+\sin(nx))}, \quad n \geq 1,\ x \in \mathbb{R}.$$

23. 假设$0 < a_1 < \frac{1}{q}$, $q \in (0,1]$, 且$a_{n+1} = a_n(1-qa_n)$, $n \geq 1$. 证明

$$\lim_{n\to\infty} na_n = \frac{1}{q}.$$

24. 假设数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$ 满足$\lim_{n\to\infty} a_n(a_1^2+\cdots+a_n^2) = 1$. 证明

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{3n}a_n = 1.$$

25. 假设

$$a_n = \frac{1}{n^2}\sum_{0\leq k\leq n} \ln\binom{n}{k}, \quad n \geq 1.$$

求极限$\lim_{n\to\infty} a_n$.

26. 假设$a_1 = c > 0$ 和

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = \ln\left(1+\frac{a_n}{n}\right), \quad n \geq 1.$$

求极限$\lim_{n\to\infty} a_n$.

27. 假设数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$ 满足条件

$$a_{n+1}^2 + q(a_{n+1} + a_n) \leq a_n^2, \quad n \geq 1, \quad q \in (0,1).$$

讨论$\{a_n\}_{n\geq 1}$ 的敛散性.

28. 假设$a_0 + a_1 + \cdots + a_p = 0$. 证明

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_0\sqrt{n} + a_1\sqrt{n+1} + \cdots + a_p\sqrt{n+p}\right) = 0.$$

29. 假设数列$\{a_n\}_{n\geq 1}, \{b_n\}_{n\geq 1}, \{c_n\}_{n\geq 1}$ 满足$a_1 > 0, b_n, c_n \leq 5, n \geq 1$ 和

$$a_n = \frac{\sqrt{b_n^2 + c_n^2}}{b_n + c_n} a_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

证明$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

30. 证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} \sum_{1\leq k\leq n} k! = 1.$$

31. 假设$\lim_{n\to\infty} a_n$ 和$\lim_{n\to\infty} b_n = b$ 存在. 令

$$a_n \vee b_n := \max\{a_n, b_n\}, \quad a_n \wedge b_n := \min\{a_n, b_n\}, \quad n \geq 1.$$

证明

$$\lim_{n\to\infty} a_n \vee b_n = a \vee b, \quad \lim_{n\to\infty} a_n \wedge b_n = a \wedge b.$$

32. 证明

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sin\frac{\ln 2}{2} + \sin\frac{\ln 3}{3} + \cdots + \sin\frac{\ln n}{n}\right)^{1/n} = 1.$$

33. 证明

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{n^2\leq k\leq (n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2.$$

34. 假设

$$a_n := \sum_{1\leq k\leq n} \left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1\right).$$

证明$\lim_{n\to\infty} x_n = 1/4$.

35. 对任何$n \in \mathbb{N}_*$ 用x_n 表示方程

$$x + x^2 + \cdots + x^n = 1$$

在闭区间$[0,1]$ 上的根. 求极限$\lim_{n\to\infty} x_n$.

36. 用Cauchy 收敛法则证明下列数列收敛:

$$a_n = \frac{\cos(1!}{1\cdot 2} + \frac{\cos(2!)}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{\cos(n!)}{n(n+1)},$$

$$a_n=\frac{\arctan 1}{1(1+\cos(1!))}+\frac{\arctan 2}{2(2+\cos(2!))}+\cdots+\frac{\arctan n}{n(n+\cos(n!))}.$$

37. 假设$a_n\geq 0$, $S_n=\sum_{1\leq k\leq n}a_k$ 收敛到S. 证明数列$\{b_n\}_{n\geq 1}$收敛, 其中

$$b_n:=(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n).$$

38. 假设$a_0\geq 2$, $a_n=a_{n-1}^2-2$, $n\geq 1$, 且

$$S_n:=\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_0a_1}+\cdots+\frac{1}{a_0a_1\cdots a_n}.$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a_0-\sqrt{a_0^2-4}}{2}.$$

39. 假设数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$满足

$$a_n=\sum_{0\leq k\leq n}\frac{1}{\binom{n}{k}},\quad n\geq 1.$$

证明$a_{n+1}=\frac{n+2}{2(n+1)}a_n+1$, $n\geq 1$, 和$\lim_{n\to\infty}a_n=2$.

40. 举例说明实数系统的六大基本定理在有理数系统上不一定成立.

41. 证明如果$\lim_{n\to\infty}a_n=a$ 成立, 则$\lim_{n\to\infty}|a_n|=|a|$. 当$a$ 取何值时反过来也成立?

42. 假设$\{a_n\}_{n\geq 1}$, $\{b_n\}_{n\geq 1}$ 是无界数列而$\{c_n\}_{n\geq 1}$ 是无穷大数列. 证明或举反例来回答如下问题:

(1) $\{a_nb_n\}_{n\geq 1}$ 是否为无界数列?

(2) $\{a_nc_n\}_{n\geq 1}$ 是否为无界数列?

(3) $\{a_nc_n\}_{n\geq 1}$ 是否为无穷大数列?

43. 讨论下列数列的有界性:

(1) 如果$\{a_n^3-a_n\}_{n\geq 1}$ 有上界, $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 是否也有上界?

(2) 如果$\{a_n^2-a_n\}_{n\geq 1}$ 有上界, $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 是否也有上界?

(3) 如果$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$, $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 是否有界?

(4) 如果$\lim_{n\to\infty}(a_{2n}-2a_n)=0$, $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 是否有界?

(5) 如果$\lim_{n\to\infty}(a_{2n}-\sqrt{2}a_n)=0$, $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 是否有界?

(6) 如果$a_{n+2}=\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}$ 且$a_1,a_2>0$, $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 是否有界?

(7) 如果$\lim_{n\to\infty}n(a_{n+1}-a_n)=+\infty$, $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 是否有界?

(8) 如果$|a_n - a_m| > 1/n$ 只要$n < m$, $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 是否有界?

(9) 如果$a_{n+2} \leq pa_n + (1-p)a_{n+1}$ 这里$0 < p < 1$ 和$a_n > 0$, $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 是否有界?

(10) 如果$a_{n+2} \leq (a_{n+1} + a_n)/(n+2)^2$ 且$a_n > 0$, $n!a_n$ 是否有界?

44. 讨论下列数列的敛散性:

(1) 如果$(2 - a_n)a_{n+1} = 1$, 讨论$\{a_n\}_{n\geq 1}$ 的敛散性.

(2) 如果$(a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$, 讨论$\{a_n\}_{n\geq 1}$ 的敛散性.

(3) 如果$a_{n+1} = 1 + qa_n^2$ 且$q > 0$ 和$0 < a_1 < 1$, 讨论$\{a_n\}_{n\geq 1}$ 的敛散性.

(4) 如果$a_{n+1} = 2 - a_n^2$, 讨论$\{a_n\}_{n\geq 1}$ 的敛散性.

(5) 如果$a_{n+1} = A + Ba_n^3$ 且$A, B > 0$, $A + B = 1$ 和$0 < a_1 \leq A$, 讨论$\{a_n\}_{n\geq 1}$ 的敛散性.

(6) 如果$a_{n+1} = \sqrt{a_n} + 2$ 且$a_1 > 4$, 讨论$\{a_n\}_{n\geq 1}$ 的敛散性.

(7) 如果$a_{n+2} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}$ 且$a_1, a_2 > 0$, 讨论$\{a_n\}_{n\geq 1}$ 的敛散性.

(8) 如果$2a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n^2 + 2^{-n}}$ 且$a_1 > 0$, 讨论$\{a_n\}_{n\geq 1}$ 的敛散性.

(9) 如果$a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n^\alpha}$ 且$a_1, \alpha > 0$, 讨论$\{a_n\}_{n\geq 1}$ 的敛散性.

(10) 如果$a_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + \frac{1}{a_n^2})$ 且$a_1 > -1/2$, 讨论$\{a_n\}_{n\geq 1}$ 的敛散性.

(11) 如果$a_{n+2} \leq \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}a_{n-1}$ 且$|a_n| \leq M$, 讨论$\{a_n\}_{n\geq 1}$ 的敛散性.

(12) 如果$a_{n+1} + \frac{1}{a_n} < 2$ 且$a_n > 0$, 讨论$\{a_n\}_{n\geq 1}$ 的敛散性.

(13) 如果$a_n(1 - a_{n+1}) > \frac{1}{4}$ 且$0 < a_n < 1$, 讨论$\{a_n\}_{n\geq 1}$ 的敛散性.

(14) 如果$a_n^2 \leq a_n - a_{n+1}$ 且$a_n > 0$, 讨论$\{a_n\}_{n\geq 1}$ 的敛散性.

(15) 如果$a_{n+1} \leq a_n + q^n$ 且$0 < q < 1$ 和$a_n > 0$, 讨论$\{a_n\}_{n\geq 1}$ 的敛散性.

45. 利用闭区间套定理证明如下命题. 假设$f(x)$ 是定义开区间(a, b) 上的函数, 且$a < c < d < b$. 如果对任意$x \in [c, d]$ 存在$M_x > 0$ 和$\delta_x \in (0, \min\{c - a, b - d\})$, 使得

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M_x|x_1 - x_2|, \quad x_1, x_2 \in (x - \delta_x, x + \delta_x)$$

成立, 则存在$M > 0$ 使得

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$$

对任意$x_1, x_2 \in [c, d]$ 都成立.

46. 利用闭区间套定理证明如下命题. 假设函数$f(x)$ 在闭区间$[a, b]$ 上递增, 且$f(a) > a$ 和$f(b) < b$. 证明存在$x_0 \in (a, b)$ 满足$f(x_0) = x_0$.

§2.6 参考文献

1. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis I*, Translated from the 1988 German original by Gary Brookfield, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. xiv+426 pp. ISBN: 3-7643-7153-6

2. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis II*, Translated from the 1999 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. xii+400 pp. ISBN: 978-3-7643-7472-3; 3-7643-7472-3

3. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis III*, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. xii+468 pp. ISBN: 978-3-7643-7479-2; 3-7643-7479-2

4. Iwaniec, Henryk; Kowalski, Emmanuel. *Analytic number theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. xii+615 pp. ISBN: 0-8218-3633-1

5. Kashiwara, Masaki; Schapira, Pierre. *Categories and sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer-Verlag, Berlin, 2006. x+497 pp. ISBN: 978-3-504-27949-5; 3-540-27949-0

6. Kashiwara, Masaki; Schapira, Pierre. *Sheaves on manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer-Verlag, Berlin, 1990. x+512 pp. ISBN: 3-540-51861-4

7. Par J. Liouville. *Sur L'irrationalité du nombre* $e = 2.718\cdots$, Journal de Mathématiques, (1840), 192 - 192.

8. Munkres, James R. *Topology*, Second edition, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000. xvi+537 pp. ISBN: 0-13-181629-2

9. Niven, Ivan. *A simple proof that* π *is irrational*, Bull. Amer. Math. Soc., **53**(1947), 509.

10. Robinson, R. Clark. *An introduction to dynamical systems - continuous and discrete*, Second Edition, Pure and Applied Undergraduate Texts, **19**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012. xx+733 pp. ISBN: 978-0-8218-9135-3

11. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis I*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+574 pp. ISBN: 3-540-40386-8

12. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis II*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xvi+681 pp. ISBN: 3-540-40633-6

13. Martin Aigner, Gunter M. Ziegler 著 (冯荣权, 宋春伟, 宗传明 译): **Proofs from the book (数学天书中的证明)**(第四版), 高等教育出版社, 2012.

14. Fred Brauer, Carlos Castillo-Chavez 著 (金成桴 译): **Mathematical models in population biology and epidemiology (生物数学 – 种群生物学与传染病学中的数学模型)**(第二版), 清华大学出版社, 2013.

15. 布鲁斯 · C. 伯恩特 (Bruce C. Berndt) 主编: **拉玛努金笔记**(第 2 卷), 哈尔滨工业大学出版社, 2019.

16. 常庚哲, 史济怀 编: **数学分析教程** (上、下册), 高等教育出版社, 2003.

17. 陈天权 编著: **数学分析讲义** (第一、二、三册), 北京大学出版社, 2009.

18. 邓建平 编: **微积分 I 和 II**, 科学出版社, 2019.

19. 吉米多维奇 著 (李荣涷, 李植 译): **数学分析习题集** (根据 2010 年俄文版翻译), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.

20. 黎景辉, 赵春来 著: **模曲线导引** (第二版), 北京大学出版社, 2014.

21. 李傅山, 王培合 编著: **数学分析习题课讲义** (1、2、3), 北京大学出版社, 2018.

22. 李忠 著: **迭代、混沌、分形**, 科学出版社, 2007.

23. 林源渠, 方企勤 编: **数学分析解题指南**, 北京大学出版社, 2003.

24. 梅加强 编著: **数学分析**, 高等教育出版社, 2015.

25. 梅加强 编著: **数学分析**, 第二版, 高等教育出版社, 2020.

26. 裴礼文 编著: **数学分析中的典型问题与方法** (第二版), 高等教育出版社, 2015.

27. 汪林 著: **数学分析中的问题和反例**, 现代数学基础 **56**, 高等教育出版社, 2015.

28. Weir, D. Maurice; Hass, R. Joel; Giordano, R. Frank. *Thomas' calculus*, Eleventh Edition, (影印版, 上、下册), 高等教育出版社, 2016.

29. 徐森林, 薛春华 编著: **数学分析**, 清华出版社, 2005.

30. 杨小远, 孙玉泉, 薛玉梅, 杨卓琴 编著: **工科数学分析教程** (上、下册), 科学出版社, 2011.

31. 张福保, 薛金美, 潮小李 主编: **数学分析讲义**, 科学出版社, 2019.

32. 张筑生 编著: **数学分析新讲** (第一、二、三册), 北京大学出版社, 1990.

33. 周民强 编著: **数学分析习题演练** (第一、二、三册), 科学出版社, 2018.

34. 朱尧辰 编著: **数学分析例选通过范例学技巧**, 哈尔滨工业大学出版社, 2013.

35. 朱尧辰 编著: **数学分析例范例选解**, 第2版, 中国科学技术大学出版社, 2019.

第三章　极限理论 II: 函数极限

我用Euler 提出的一个关系式作为我的出发点, 也就是

$$\prod \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum \frac{1}{n^s},$$

其中 p 跑遍所有素数, 而 n 跑遍所有自然数. 这两个表达式在收敛时所表示的复变量 s 的函数, 我将记作 $\zeta(s)$. —-《论小于给定数值的素数个数》[1], Bernhard Riemann, 柏林科学院月报, 1859 年 11 月.

§3.1　函数极限

从下面的例子出发: 试着找到函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ 使得

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$$

对任意的 $x,y\in\mathbb{R}$ 都成立.

从 $f(1)=f(1+0)=f(1)f(0)$ 得到 $f(0)=1$, 类似地得到 $f(2)=f(1+1)=[f(1)]^2$. 对任意自然数 $n\in\mathbb{N}$ 得到 $f(n)=[f(1)]^n$. 如果 $-n\in\mathbb{N}$, 得到

$$f(n)=\frac{f(0)}{f(-n)}=\frac{1}{f(-n)}=\frac{1}{[f(1)]^{-n}}=[f(1)]^n.$$

从而对任意整数 n 都有

$$f(n)=[f(1)]^n,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

如果 $n\in\mathbb{Z}_+$, 得到

$$f(1)=f\left(\underbrace{\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n}\right)=\left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n \implies f\left(\frac{1}{n}\right)=[f(1)]^{\frac{1}{n}}.$$

类似的对 $n\in\mathbb{Z}_-$, 得到 $f(1/n)=[f(1)]^{1/n}$. 从而对任意非零整数 n 都有

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=[f(1)]^{\frac{1}{n}},\quad n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}.$$

对有理数 $p/q\in\mathbb{Q}$, 其中 $p>0$, 得到

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=f\left(\underbrace{\frac{1}{q}+\cdots+\frac{1}{q}}_{p}\right)=\left[f\left(\frac{1}{q}\right)\right]^p=[f(1)]^{\frac{p}{q}}.$$

[1]Bernhard Riemann 著 (李培廉 译): 黎曼全集 (第一卷), 高等教育出版社, 2016.

同样理由对有理数 $p/q \in \mathbb{Q}$, 其中 $p<0$, 也得到了类似的结论. 总之对任意有理数 x 得到

$$f(x)=[f(1)]^x, \quad x \in \mathbb{Q}.$$

现在给定一个实数 $x \in \mathbb{R}$, 已证存在有理数 $x_n \in \mathbb{Q}$ 满足 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ (参见**例 2.1.6**). 这样综合上述结果得到

$$\begin{tikzcd} f(x_n)=[f(1)]^{x_n} \arrow[r, "n\to\infty"] \arrow[d, "n\to\infty", "?"'] & {[f(1)]^x} \\ f(x) & \end{tikzcd}$$

如果 "?" 成立则推出

$$f(x)=[f(1)]^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

换句话说, 我们其实证明了

$$\begin{aligned} ?\ \text{成立} \quad &\Longleftrightarrow \quad f(x)=\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad f\ \text{和}\ \lim\ \text{可交换} \\ &\Longleftrightarrow \quad f\ \text{连续 (可作为连续的定义)} \end{aligned}$$

§3.1.1 函数极限的定义

在给出函数连续定义之前, 我们首先给出函数在无穷远处极限的概念.

定义3.1.1. (1) 给定函数 $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ 和 $A\in\mathbb{R}$, 定义

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \forall\, \epsilon>0\ \exists\, M>a\ \forall\, x>M \\ |f(x)-A|<\epsilon \end{pmatrix} \tag{3.1.1}$$

(2) 给定函数 $f:(-\infty,b)\to\mathbb{R}$ 和 $A\in\mathbb{R}$, 定义

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \forall\, \epsilon>0\ \exists\, M<b\ \forall\, x<M \\ |f(x)-A|<\epsilon \end{pmatrix} \tag{3.1.2}$$

(3) 给定函数 $f:(-\infty,+\infty)\to\mathbb{R}$ 和 $A\in\mathbb{R}$, 定义

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \forall\, \epsilon>0\ \exists\, M>0\ \forall\, |x|>M \\ |f(x)-A|<\epsilon \end{pmatrix} \tag{3.1.3}$$

根据定义马上得到

定理3.1.2. 我们有

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=A=\lim_{x\to-\infty} f(x). \tag{3.1.4}$$

例3.1.3. 研究下列函数的极限

$$(1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1+e^x},\qquad (2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}.$$

解: 因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=1,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=0$$

得到函数 $e^x/(1+e^x)$ 当 $x\to\infty$ 时极限不存在. 由于 $|\sin x/x|\le 1/|x|$ 得到 $\lim_{x\to\infty}\sin x/x=0$. □

接下来给出函数在某点 $a\in\mathbb{R}$ 处极限的定义. a 点的**去心邻域 (punched neighborhood of a)** 记作

$$U^\circ(a,\rho):=(a-\rho,a+\rho)\setminus\{a\}=(a-\rho,a)\cup(a,a+\rho).$$

定义3.1.4. 给定函数 $f:U^\circ(a,\rho)\to\mathbb{R}$ 和 $A\in\mathbb{R}$, 定义

$$\lim_{x\to a}f(x)=A\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{pmatrix}\forall\,\epsilon>0\,\exists\,\delta>0\ (\delta\le\rho)\\ \text{有 } |f(x)-A|<\epsilon\\ \text{只要 } 0<|x-a|<\delta\end{pmatrix}\tag{3.1.5}$$

在上述定义中, 不需要规定函数 f 在 a 点有定义. 如果 f 在 a 点有定义且取 $A=f(a)$, 这就是函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 连续的定义 (参见**定义 3.3.1**).

定义3.1.5. (单侧极限) (one-sided limits) (1) 给定函数 $f:(a-\rho,a)\to\mathbb{R}$(其中 $\rho>0$) 和 $A\in\mathbb{R}$, 定义**左极限 (left-hand limit)**

$$f(a-):=\lim_{x\to a-}f(x)=A\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{pmatrix}\forall\,\epsilon>0\,\exists\,\delta>0\,\forall\,x\in(a-\delta,a)\\ \text{都有 } |f(x)-A|<\epsilon\end{pmatrix}\tag{3.1.6}$$

(2) 给定函数 $f:(a,a+\rho)\to\mathbb{R}$(其中 $\rho>0$) 和 $A\in\mathbb{R}$, 定义**右极限 (right-hand limit)**

$$f(a+):=\lim_{x\to a+}f(x)=A\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{pmatrix}\forall\,\epsilon>0\,\exists\,\delta>0\,\forall\,x\in(a,a+\delta)\\ \text{都有 } |f(x)-A|<\epsilon\end{pmatrix}\tag{3.1.7}$$

定理3.1.6. 根据定义得到

$$\lim_{x\to a}f(x)=A\quad\Longleftrightarrow\quad f(a+)=A=f(a-).\tag{3.1.8}$$

例3.1.7. (1) 下列函数在 0 点极限不存在:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

对一个函数 $f(0-) = -1$ 和 $f(0+) = 1$. 而对第二个函数 $f(0-) = 0$ 但是 $f(0+)$ 不存在.

(2) 证明对任意 $a > 0$ 都有

$$\lim_{x \to 0} a^x = 1.$$

证: 当 $a = 1$ 时结论显然成立. 对任意 $\epsilon \in (0, 1)$ 要证明 $|a^x - 1| < \epsilon$ 只要证明 $1 - \epsilon < a^x < 1 + \epsilon$ 对充分小的 x 成立. 如果 $a > 1$, 则等价于证明

$$\ln_a(1-\epsilon) < x < \log_a(1+\epsilon).$$

从而取 $\delta := \min\{\log_a(1+\epsilon), -\log_a(1-\epsilon)\}$, 只要 $0 < |x| < \delta$ 就有 $|a^x - 1| < \epsilon$. 如果 $0 < a < 1$ 则同样的论断得到 $|a^x - 1| < \epsilon$ 只要 $0 < |x| < \delta := \min\{-\log_a(1+\epsilon), \log_a(1-\epsilon)\}$. □

(3) 证明对任何 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 都有

$$\lim_{x \to 0} \log_a(1+x) = 0.$$

证: 因为 $|\log_a(1+x)| < \epsilon$ 当且仅当

$$a^{-\epsilon} - 1 < x < a^{\epsilon} - 1 \quad (a > 1) \quad \text{或} \quad a^{\epsilon} - 1 < x < a^{-\epsilon} - 1 \quad (0 < a < 1),$$

取 $\delta := \min\{|a^{-\epsilon} - 1|, |a^{\epsilon} - 1|\}$, 当 $0 < |x| < \delta$ 时有 $|\log_a(1+x) - 0| < \epsilon$. □

(4) 证明

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - 3x + 1} = 2.$$

证: 做差得到

$$\left| \frac{x^2 - 1}{2x^2 - 3x + 1} - 2 \right| = \frac{3|x-1|}{|2x-1|}.$$

因为 x 是越来越靠近 1, 所以从

$$|2x - 1| = |1 + 2(x-1)| \ge 1 - 2|x - 1|$$

我们取 $|x - 1| < 1/4$ 来保证 $|2x - 1| > 1/2 > 0$. 取 $\delta := \min\{1/4, \epsilon/6\}$, 只要 $0 < |x - 1| < \delta$ 就有

$$\left| \frac{x^2 - 1}{2x^2 - 3x + 1} - 2 \right| < 6|x - 1| < \epsilon. \quad \square$$

(5) 假设 $x_0 \geq 0$. 研究函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 x_0 处的极限.

解: 当 $x_0 = 0$ 时我们只能考虑右极限 $f(0+)$. 对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta = \epsilon^2$ 当 $0 < x < \delta$ 时得到

$$|f(x) - 0| = \sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \epsilon.$$

即 $\lim_{x\to 0+} \sqrt{x} = 0$.

当 $x_0 > 0$ 时, 对任意 $\epsilon > 0$ 取 $\delta = \sqrt{x_0}\epsilon$ 只要 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时得到

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leq \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \epsilon. \ \square$$

(6) 对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$ 证明

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0.$$

证: 因为 (这里用到了不等式 $|\sin x| \leq |x|$, 任意 $x \in \mathbb{R}$, 参见 (3.1.10) 的证明过程)

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\cos\frac{x + x_0}{2}\right|\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \leq 2\left|\frac{x - x_0}{2}\right| = |x - x_0|,$$

所以对任意 $\epsilon > 0$ 取 $\delta = \epsilon$ 只要 $0 < |x - x_0| < \delta$ 得到 $|\sin x - \sin x_0| < \epsilon$. $\square$

(7) 研究函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

在 $x_0 = 0$ 处的极限.

解: 由于 $f(0-) = 0$ 和 $f(0+) = 1$, **定理 3.1.6** 告诉我们函数 $f(x)$ 在 $x_0 = 0$ 处极限不存在.

(8) 研究函数 $f(x) = \lfloor x \rfloor$ 的极限.

解: 如果 $x_0 \notin \mathbb{Z}$, 则得到 $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lfloor x \rfloor$. 如果 $x_0 \in \mathbb{Z}$, 则 $f(x_0-) = x_0 - 1$ 而 $f(x_0+) = x_0$. $\square$

§3.1.2 函数极限的性质

在这一小节主要考虑函数 $f(x)$ 在 $x \to a$ 时的性质, 对其它情形, 比如 $x \to a-$、$x \to a+$、$x \to -\infty$、$x \to +\infty$ 和 $x \to \infty$, 的极限可类似地证明.

定理3.1.8. (1) **(唯一性)** 若函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处有极限, 则极限必唯一.

(2) **(局部有界性)** 若函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处有极限, 则 $f(x)$ 在 a 的某个去心邻域内必有界.

(3) **(局部保序性)** 假设 $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$ 且 $A > B$. 则存在 a 的某个去心邻域 $U^\circ(a,\rho)$ 使得 $f(x) > g(x)$ 对任意 $x \in U^\circ(a,\rho)$ 都成立.

(4) **(绝对值性质)** 若 $\lim_{x\to a} f(x) = A$, 则 $\lim_{x\to \infty} |f(x)| = |A|$.

(5) **(夹逼定理)** 若在某个去心邻域 $U^\circ(a,\rho)$ 内成立 $g(x) \le f(x) \le h(x)$, 且 $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = A$, 则 $\lim_{x\to a} f(x) = A$.

(6) **(四则运算)** 假设 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$, 且 α, β 为给定常数. 则得到

- $\lim_{x\to x_0}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha A + \beta B$.
- $\lim_{x\to x_0}[f(x)g(x)] = AB$.
- 若 $B \ne 0$, 则 $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = A/B$.

(7) **(复合函数极限)** 假设 $\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0$, $\lim_{u\to u_0} f(u) = A$, 且在 x_0 的某个去心邻域内 $g(x) \ne u_0$, 则复合函数 $f\circ g$ 在 x_0 处有极限且

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = A. \tag{3.1.9}$$

证: 只给出最后一个性质的证明. 给定 $\epsilon > 0$, 根据 $\lim_{u\to u_0} f(u) = A$ 的定义可以找到 $\eta > 0$ 只要 $0 < |u - u_0| < \eta$ 时有 $|f(u) - A| < \epsilon$. 对这个找到的 $\eta > 0$ 存在 $\delta > 0$ 只要 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $0 < |g(x) - u_0| < \eta$. 从而当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f[g(x)] - A| < \epsilon$. □

在结论 (3.1.9) 中我们已经假设 $g(x) \ne u_0$ 在 x_0 的某个去心邻域内成立. 如果把这个条件去掉则结论 (3.1.9) 不一定成立. 事实上在参考文献**[1]** 中已经指出: 若 $\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0$, $\lim_{u\to u_0} f(u) = A$, 则或者 $\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = A$, 或者 $\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = f(u_0)$, 或者 $\lim_{x\to x_0} f[g(x)]$ 不存在.

例3.1.9. 求解

$$(1)\ \lim_{x\to 0} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = 1, \qquad (2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{a^x} = 0\ (a>1,\ k\in\mathbb{N})$$

解: (1) $\frac{1}{x} - 1 < \lfloor \frac{1}{x}\rfloor \le \frac{1}{x}$ 得到 $1 - x < x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor \le 1$. (2) $0 < x^k/a^x \le (\lfloor x\rfloor + 1)^k/a^{\lfloor x\rfloor+1}a$. 利用 $\lim_{n\to\infty} n^k/a^n = 0$ 推出原来函数的极限为 0. □

§3.1.3 两个重要的极限

在**例 3.1.3** (2) 中我们已经研究了函数 $\sin x/x$ 当 $x\to\infty$ 时候的极限. 接下来很自然地想知道这个函数当 $x\to 0$ 时的极限. 首先我们来证明初等不等式

$$|\sin x| < |x| < |\tan x|, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

先考虑 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 情形. 此时以 $O = (0,0)$ 为圆心半径为 1 作单位圆, 令 $A = (1,0)$ 和任取圆上的点 D (位于第一象限内) 满足 $\angle AOD \in (0, \frac{\pi}{2})$. 过 A 作垂线交 OD 的延长线于 B. 比较三角形 $\triangle OAD$、扇形 $\widehat{OAD}$ 和三角形 $\triangle OAB$ 的面积得到

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x,$$

从而得到 $\sin x < x < \tan x$ 对任意 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 成立. 如果 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, 作变换 $y = -x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 得证.
如果 $|x| \geq \frac{\pi}{2}$, 则

$$|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x|,$$

从而得到

$$|\sin x| \leq |x|, \quad x \in \mathbb{R},$$

且等号成立当且仅当 $x = 0$.

性质3.1.10. 下面极限成立

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{3.1.10}$$

证: 根据上面不等式得到 $\cos x < \sin x / x < 1$ 只要 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$. 要利用函数极限的夹逼定理, 只有说明 $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$. 根据倍角公式得到

$$|\cos x - 1| = 2\sin^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{2}$$

从而得到 $\cos x \to 1$ 当 $x \to 0$. □

注3.1.11. (1) 对函数 $\sin x / x$ 已经证明了

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

考虑函数 $\sin x / x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的积分, 即反常积分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

利用含参变量积分 (参见**例 15.2.14**) 或者复变函数可以证明上述积分值等于 $\pi / 2$.

(2) 根据 (3.1.10) 可知

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\alpha x)}{x} = \alpha, \quad \alpha \neq 0.$$

(3) 根据 (3.1.10) 和**定理** 3.1.8 得到

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} 2\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}.$$

上述最后一个函数极限给出了 $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, 当 $x \to 0$ 时. 符号"$\sim$"的确切含义见**定义 3.2.4**.

第二个重要的极限是把 (2.3.3) 推广到函数情形.

性质3.1.12. 下面极限成立

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{3.1.11}$$

证: 注意到函数极限是当 $x\to\infty$ 时. 对任意 $x\geq 1$ 有不等式

$$\left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor+1}\right)^{\lfloor x\rfloor} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\right)^{\lfloor x\rfloor+1}.$$

最左边项可以写成

$$\left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor+1}\right)^{\lfloor x\rfloor+1} \Big/ \left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor+1}\right)$$

而最右边项可以写成

$$\left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\right)^{\lfloor x\rfloor}\left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\right).$$

利用数列极限 $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e$ 推出 $\lim_{x\to+\infty}(1+1/x)^x = e$ 成立. 当 $x\to-\infty$ 时, 令 $y=-x\to+\infty$ 得到

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y = \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\frac{y}{y-1}\to e.$$

利用**定理** 3.1.6 (关于 $x\to\infty$ 的版本) 得到 $\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x = e$. □

注3.1.13. 公式 (3.1.11) 有下列变形:

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e, \qquad \lim_{y\to\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^y = \frac{1}{e}. \tag{3.1.12}$$

公式 (3.1.10) 有下面一个应用: 证明

$$\lim_{n\to\infty}[n\sin(2\pi n!e)] = 2\pi.$$

证: 回顾极限

$$e = \lim_{n\to\infty}\sum_{0\leq k\leq n}\frac{1}{k!} = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}.$$

从而得到

$$n!e = n!\sum_{0\leq k\leq n}\frac{1}{k!}n!\sum_{k\geq n+1}\frac{1}{k!}.$$

右边第一项属于 $\mathbb{Z}$ 而把第二项记作 $\epsilon_n\to 0$. 计算可得

$$\frac{1}{n+1} < \epsilon_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots < \frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots = \frac{1}{n}$$

故

$$n\sin(2\pi n!e) = n\sin(2\pi\epsilon_n) = \frac{\sin(2\pi\epsilon_n)}{2\pi\epsilon_n}\frac{2\pi\epsilon_n}{\frac{1}{n}}\to 1\times 2\pi = 2\pi. \quad \square$$

§3.1.4 Heine 定理

这个定理, 以德国数学家Heine[2] 命名, 在数列极限和函数极限之间建立了一座桥梁.

定理3.1.14. (Heine) 给定函数 $f : U^\circ(a,\rho) \to \mathbb{R}$ 和 $A \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) = A \quad &\iff \quad \forall\, \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U^\circ(a,\rho) \text{ 满足 } a_n \to a \text{ 有 } \lim_{n\to\infty} f(a_n) = A,\\ &\iff \quad \forall\, \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U^\circ(a,\rho) \text{ 满足 } a_n \to a \text{ 有 } \{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ 收敛}.\end{aligned}$$

证: (1) $\Longleftarrow$: 假设 $\lim_{x\to a} f(x) \neq A$, 则存在 $\epsilon_0 > 0$, 对任意 $\delta > 0$ 存在 $x \in U^\circ(a,\delta)$ 使得 $|f(x) - A| \geq \epsilon_0$ 成立. 分别取 $\delta_1 = \rho$, $\delta_2 = \frac{\rho}{2}, \cdots, \delta_n = \frac{\rho}{n}$, $\cdots$, 得到点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 满足 $x_n \in U^\circ(a,\rho/n)$ 和 $|f(x_n) - A| \geq \epsilon_0$. 此时 $x_n \to a$, 但 $f(x_n) \nrightarrow A$. 矛盾表明必有 $\lim_{x\to a} f(x) = A$.

$\Longrightarrow$: 显然.

(2) $\Longrightarrow$: 显然.

$\Longleftarrow$: 只要证明任何收敛数列 $\{f(a_n)\}_{n\geq 1}$ 都有相同的极限. 假设存在数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 和 $\{b_n\}_{n\geq 1}$ 满足 $a_n \to a$, $b_n \to a$, $f(a_n) \to A$, $f(b_n) \to B$, 但 $A \neq B$. 定义新的数列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 如下:

$$x_1 := a_1,\ x_2 := b_1,\ x_3 := a_2,\ x_4 := b_2,\ \cdots,\ x_{2n-1} := a_n,\ x_{2n} := b_n,\ \cdots.$$

此时 $x_n \to a$ 但数列 $\{f(x_n)\}_{n\geq 1}$ 发散. 矛盾表明必有 $A = B$. □

例3.1.15. (1) 证明函数 $\sin\frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处无极限.

证: 对数列 $x_n = 1/n\pi$ 和 $y_n = 1/(2n\pi + \pi/2)$ 有

$$\sin\frac{1}{x_n} = 0, \quad \sin\frac{1}{y_n} = 1.$$

故 $\sin 1/x$ 在 $x = 0$ 处极限不存在. □

(2) 证明Dirichlet 函数在任何点 $x \in \mathbb{R}$ 的极限都不存在.

证: 回忆Dirichlet 函数的定义

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q},\\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

对任意 $a \in \mathbb{R}$ 存在 $a_n \in \mathbb{Q}$ 满足 $a_n \to a$. 另一方面存在 $b_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 满足 $b_n \to a$. 所以 $D(a_n) = 1 \neq 0 = D(b_n)$. □

---

[2]Heinrich Eduard Heine, 1821 年 3 月 16 日 - 1881 年 10 月 21 日, 今德国柏林人, 德国数学家, 以研究特殊函数和实分析著称.

(3) 拓扑学家的 sine 曲线定义为 $X := \{(x, \sin(1/x)) : x \in (0,1]\}$. 定义映射

$$f : (0,1] \longrightarrow X \subset \mathbb{R}^2, \quad f(x) := \left(x, \sin\frac{1}{x}\right).$$

从而可以证明 X 是连通的, $\overline{X}$ 是连通的但不是道路连通的.

定理3.1.16. *函数极限的Cauchy 收敛准则成立, 即*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \text{ 存在} \iff \begin{pmatrix} \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, M > 0\ \forall\, |x|, |y| > M \\ \text{有 } |f(x) - f(y)| < \epsilon \end{pmatrix},$$

$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ 存在} \iff \begin{pmatrix} \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, 0 < |x-a|, |y-a| < \delta \\ \text{有 } |f(x) - f(y)| < \epsilon \end{pmatrix}.$$

证: $\Longrightarrow$: 显然. $\Longleftarrow$: 利用数列的 Cauchy 收敛准则得到对任意 $a_n \to \infty$, 数列 $\{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛. 根据 Heine 定理得到极限 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ 存在. □

作为直接推论得到: $\lim_{x\to\infty} f(x)$ 存在当且仅当对任意两个无穷大数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有 $\lim_{n\to\infty}[f(x_n) - f(y_n)] = 0$.

§3.1.5 * Bohr - Mollerup - Artin 定理

称函数 $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ $(-\infty \le a < b \le +\infty)$ 是**凸的 (convex)** 如果不等式

$$F(\lambda x + \mu y) \le \lambda F(x) + \mu F(y) \tag{3.1.13}$$

对任意 $x, y \in (a,b)$ 和任意 $0 \le \lambda, \mu \le 1$, 但满足 $\lambda + \mu = 1$, 都成立.

如果函数 F 本身是 2 阶可导的, 则 F 是凸的当且仅当 $F'' > 0$ (参见**定理 4.8.7**). 比如下列函数

$$-\ln x, \quad x > 0; \quad |x|, \quad x \in \mathbb{R}; \quad e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

都是凸函数.

定理3.1.17. **(Bohr - Mollerup - Artin)** *假设函数 $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ 满足条件:*

$$\text{(i) } f(x+1) = x f(x), \quad \text{(ii) } \ln f(x) \text{ 是凸的}, \quad \text{(iii) } f(1) = 1.$$

则函数 f 由下面极限给出

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

证: (1) 首先假设 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n \geq 2$, $x \in (0,1]$. 从条件 (i) 和 (iii) 得到

$$f(n) = (n-1)!.$$

令

$$F(x) := \ln f(x).$$

根据条件 (ii) 和分解 $n + x = x(n+1) + (1-x)n$ 得到

$$F(n+x) \leq xF(n+1) + (1-x)F(n).$$

所以

$$\frac{F(n+x) - F(n)}{x} \leq F(n+1) - F(n).$$

另一方面, 利用分解 $n = \frac{x}{1+x}(n-1) + \frac{1}{1+x}(nx)$ 得到

$$F(n) \leq \frac{x}{1+x}F(n-1) + \frac{1}{1+x}F(n+x).$$

所以

$$(1+x)F(n) \leq xF(n-1) + F(n+x) \quad \Longrightarrow \quad F(n) - F(n-1) \leq \frac{F(n+x) - F(n)}{x}.$$

最后推出

$$\ln(n-1) \leq \frac{\ln[f(x+n)] - \ln[(n-1)!]}{x} \leq \ln n$$

即

$$\ln\left[(n-1)^x(n-1)!\right] \leq \ln[f(x+n)] \leq \ln\left[n^x(n-1)!\right]$$

或

$$(n-1)P^x(n-1)! \leq f(x+n) = (x+n-1)\cdots(x+1)f(x) \leq n^x(n-1)!.$$

由此得到 $f(x)$ 的估计

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \leq f(x) \leq \frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}.$$

等价地,

$$\frac{n}{n+x}f(x) \leq \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \leq f(x), \quad \forall\, n \geq 1.$$

因此结论对任意 $x \in (0,1]$ 成立.

(2) 对一般的 $x > 0$, 存在 $k \in \mathbb{N}$ 满足 $k < x \leq k+1$ 和 $0 < x - k \leq 1$. 从而得到

$$f(x-k) \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{n^{x-k}n!}{(x-k)(x-k+1)\cdots(x-k+n)}$$

和

$$f(x) \;=\; f(x-1+1) \;=\; (x-1)f(x-1) \;=\; \cdots$$

$$
\begin{aligned}
&= (x-k)(x-k+1)\cdots(x-1)f(x-k) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{n^k x(x+1)\cdots(x-k+n)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\cdot\frac{(x-k+n+1)\cdots(x+n)}{n^k} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}. \quad \square
\end{aligned}
$$

实际上上述定理给出了 Γ 函数 (参见 (5.5.17)) 的Euler 定义 (参见**推论 15.4.52**).

§3.2 函数的阶估计

我们知道当 $x\to+\infty$ 时函数 $f(x)=x^2$ 和 $g(x)=x$ 都趋于 $+\infty$, 但函数 $f(x)$ 比 $g(x)$ 更加快的趋于 $+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)/g(x)=+\infty$. 从**例 3.1.9** 知道函数 e^x 比任意多项式都更快的趋于 $+\infty$. 那么有没有比任意多项式都更慢的趋于 $+\infty$ 的函数呢? 答案是有的, 比如函数 $\ln x$ (参见**例 4.6.4**).

Bois-Reymond[3] 系统地研究了形如两个无穷大函数比值的极限, 称为**无穷计算 (calculus of infinities)**.

§3.2.1 无穷小

数列中无穷小和无穷大的概念可以平行推广到函数情形. 我们先给出无穷小的概念.

定义3.2.1. 给定 $a\in\mathbb{R}$. 称函数 $f(x)$ 为 (当 $x\to a$ 时的)**无穷小 (infinitesimal)**, 并记作 $f(x)=o(1)$ (当 $x\to a$ 时), 如果 $\lim_{x\to a}f(x)=0$.

在上述定义中, 如果把极限过程 $x\to a$ 换成 $x\to a+$, $x\to a-$, $x\to-\infty$, $x\to+\infty$, $x\to\infty$, 我们就得到相应的无穷小之概念.

[3] Paul David Gustav du Bois-Reymond, 1831 年 12 月 2 日 - 1889 年 4 月 7 日, 今德国柏林市人, 德国数学家. 博士导师是著名数学家Ernst Eduard Kummer, 而著名数学家Emil Artin 是他的徒孙. 在 1873 年Bois-Reymond 给出了其 Fourier 级数仅在一点发散的连续函数的例子, 之后在 1875 年他给出了几乎处处不可导的连续函数的例子. 1877 年Bois-Reymond 系统地发展了无穷小理论, 他写道: The infinitely small is a mathematical quantity and has all its properties in common with the finite $\cdots$ A belief in the infinitely small does not triumph easily. Yet when one thinks boldly and freely, the initial distrust will soon mellow into a pleasant certainty $\cdots$ A majority of educated people will admit an infinite in space and time, and not just an "unboundedly large". But they will only with difficulty believe in the infinitely small, despite the fact that the infinitely small has the same right to existence as the infinitely large $\cdots$ 参见

$$\mathrm{https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Du_{Bois}-Reymond/}$$

注3.2.2. (1) 不失一般性, 之后的讨论都围绕着极限过程 $x \to a$ 展开. 其它极限过程可类似地讨论.

(2) $\lim_{x\to a} f(x) = A \Longleftrightarrow f(x) - A = o(1)$ 当 $x \to a$ 时.

(3) $f(x) = o(1)\ x \to a \Longleftrightarrow |f(x)| = o(1)$ 当 $x \to a$ 时.

(4) $f(x) = o(1), g(x) = o(1)$ 当 $x \to a$ 时 $\Longrightarrow$ 任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f(x) + \beta g(x) = o(1)$ 当 $x \to a$ 时.

(5) $f(x) = o(1)$ 当 $x \to a$ 时, 且 $g(x)$ 在 $(a-\delta, a+\delta)$ (存在 $\delta > 0$) 内有界 $\Longrightarrow f(x)g(x) = o(1)$ 当 $x \to a$ 时.

我们给出常用的一些无穷小.

例3.2.3. (1) 当 $x \to 0$ 时:

$$\sin x = o(1), \quad \tan x = o(1), \quad a^x - 1 = o(1)\ (a > 0).$$

当 $x \to 0+$ 时:

$$x^\alpha = o(1)\ (\alpha > 0), \quad 1 - \cos x = o(1).$$

当 $x \to +\infty$ 时:

$$\frac{1}{x^\alpha} = o(1)\ (\alpha > 0), \quad a^x = o(1)\ (0 < a < 1).$$

当 $x \to \infty$ 时:

$$\frac{1}{x^n} = o(1)\ (n \in \mathbb{Z}_+), \quad \frac{1}{x^{1/3}} = o(1).$$

当 $x \to -\infty$ 时:

$$a^x = o(1)\ (a > 1).$$

(2) 当 $x \to 0$ 时:

$$xe^x + 3\ln(1+x) = e^{\sin x}\cos x - 1 = o(1).$$

当 $x \to \infty$ 时:

$$\frac{x + \sin x}{x^2 + 5x - 2} = \frac{3x}{e^x + \ln x} = \sqrt{1+x} - \sqrt{x} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{\sin x}{x} = o(1).$$

(3) 求常数 A 和 B 满足

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+5} + Ax + B\right) = 1.$$

解: 根据条件可令

$$\sqrt{x^2+2x+5}+Ax+B=1+\alpha(x),\quad \alpha(x)=o(1)\ (\text{当 } x\to+\infty).$$

则

$$A=\frac{1+\alpha-B-\sqrt{x^2+2x+5}}{x}=-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+\frac{1-B}{x}+\frac{\alpha}{x}.$$

令 $x\to+\infty$ 得到 $A=-1$ 从而

$$B=1+\alpha+x-\sqrt{x^2+2x+5}.$$

两边再让 $x\to+\infty$ 推出

$$B=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x-5}{\sqrt{x^2+2x+5}+x}=1-\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{5}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}}=0.$$

最后得到 $A=-1$ 和 $B=0$. □

现在我们把上述无穷小的概念推广之, 部分符号来自Hardy[4] 的专著.

定义3.2.4. 假设函数 $u(x), v(x)$ 满足条件 $u(x)=v(x)=o(1)$, 当 $x\to a$ 时.

(1) 定义 (或记作 $u\prec v$)

$$u(x)=o(v(x))\ \text{当 } x\to a \text{ 时} \iff \lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)}=0.$$

(2) 定义 (或记作 $u\preccurlyeq v$)

$$u(x)=O(v(x))\ \text{当 } x\to a \text{ 时} \iff \left|\frac{u(x)}{v(x)}\right|\le M\ (\exists\, M>0)\ \text{在 } \mathring{U}(a,\delta)\ \text{内}.$$

(3) (Landau 记号) 定义 (或记作 $u\asymp v$)

$$\begin{aligned} u(x)\approx v(x)\ \text{当 } x\to a \text{ 时} &\iff u(x)=O(v(x))\ \text{且}\ v(x)=O(u(x))\\ &\qquad \text{当 } x\to a \text{ 时}\\ &\iff 0<m\le\left|\frac{u(x)}{v(x)}\right|\le M\\ &\qquad (\exists\, 0<m<M)\ \text{在 } \mathring{U}(a,\delta)\ \text{内} \end{aligned}$$

(4) 定义

$$u(x)\sim v(x)\ \text{当 } x\to a \text{ 时} \iff \lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)}=1.$$

[4]Hardy, G. H. *Orders of infinity*, The "infinitärcalcül" of Paul Du Bois-Reymond, Cambridge university press, 1910.

性质3.2.5. (1) $u(x)=v(x)=o(1)$ 当 $x\to a$ 时, 且 $\lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)}$ 存在 $\Longrightarrow$ $u(x)=O(v(x))$ 当 $x\to a$ 时.

(2) $u(x)=v(x)=o(1)$ 当 $x\to a$ 时, 且 $\lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)}=c\neq 0\Longrightarrow u(x)\approx v(x)$ 当 $x\to a$ 时.

证: 显然成立. □.

定义3.2.6. (1) 称函数 $u(x)$ 为k **阶无穷小 (k-th order of infinitesimal)**(当 $x\to a$ 时), 如果

$$u(x)\approx(x-a)^k\ (k>0).$$

(2) 称 $c(x-a)^k$ 为$u(x)$ **的主部 (principal)**(当 $x\to a$ 时), 如果 $c\neq 0$ 且

$$u(x)\sim c(x-a)^k,\quad x\to a.$$

在证明**性质 3.1.10** 时, 其实我们已经证明了

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}=1. \tag{3.2.1}$$

故 $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$ 当 $x\to 0$ 时.

例3.2.7. (1) 当 $x\to 0$ 时:

$$\sin x\approx(x-0)^1,\quad 1-\cos x\approx(x-0)^2,\quad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}(x-0)^2.$$

(2) 当 $x\to 0+$ 时:

$$\ln x=o(1),\quad x^\alpha(\ln x)^k=o(1)\ (\alpha>0,\ k\in\mathbb{Z}_+).$$

(3) $x\to 0$:

$$\sin x\sim x\sim\tan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1\sim\frac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha}\ (\alpha>0).$$

证: 先证 $x\sim\ln(1+x)$:

$$\lim_{x\to 0}\ln\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}=\lim_{x\to 0}\ln\left[1+\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{e}\right]=\ln(1+0)=0.$$

再证 $e^x-1\sim x$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=1.$$

最后证 $[(1+x)^\alpha-1]/x\sim\alpha$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\cdot\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}=\alpha.\ \square$$

性质3.2.8. 假设极限过程都为 $x \to a$.

(1) $u(x) = O(v(x))$ $v(x) = O(w(x)) \Longrightarrow u(x) = O(w(x))$.

(2) $u(x) = O(v(x))$ $v(x) = o(w(x)) \Longrightarrow u(x) = o(w(x))$.

(3) $O(u(x)) + O(v(x)) = O(u(x) + v(x))$.

(4) $O(u(x))O(v(x)) = O(u(x)v(x))$, 特别地 $O(u^k(x)) = O(u(x))^k$.

(5) $o(1)O(u(x)) = o(u(x))$.

(6) $O(1)o(u(x)) = o(u(x))$.

(7) $O(u(x)) + o(u(x)) = O(u(x))$.

(8) $o(u(x)) + o(v(x)) = o(|u(x)| + |v(x)|)$.

(9) $o(u(x))o(v(x)) = o(u(x)v(x)$, 特别地 $o(u^k(x)) = o(u(x))^k$.

(10) $u(x) \sim v(x)$ $v(x) \sim w(x) \Longrightarrow u(x) \sim w(x)$.

(11) $u(x) \sim v(x)$, $w(x) = o(u(x)) \Longrightarrow u(x) \sim v(x) \pm w(x)$.

证: 请诸位作为练习自证. □

§3.2.2 无穷大

若 $u(x)$ 为无穷小, 则把 $f(x) = 1/u(x)$ 称为**无穷大 (infinite)**. 下面我们只对极限过程 $x \to a$ 时展开讨论. 对其余极限情形 $x \to a+$, $x \to a-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to \infty$, 请诸生自行写出定义.

定义3.2.9. 假设函数 $f(x)$ 定义在 $\mathring{U}(a,\rho)$ 内, 其中 $\rho > 0$. 定义

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \iff \left(\begin{array}{c} \forall\, C > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, x \in \mathring{U}(a,\delta) \\ \text{有 } f(x) \geq C. \end{array} \right),$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \iff \left(\begin{array}{c} \forall\, C > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, x \in \mathring{U}(a,\delta) \\ \text{有 } f(x) \leq -C. \end{array} \right),$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \iff \left(\begin{array}{c} \forall\, C > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, x \in \mathring{U}(a,\delta) \\ \text{有 } |f(x)| \geq C. \end{array} \right).$$

类似于**定义 3.2.4**, 我们可引入如下记号:

(1) 若 $u(x) \to \infty$ 和 $v(x) \to \infty$, 定义

$$u(x) = o(v(x)) \iff \lim_{x\to a} \frac{u(x)}{v(x)} = 0.$$

(2) 若 $u(x) \to \infty$ 和 $v(x) \to \infty$, 定义

$$u(x) = O(v(x)) \iff \left| \frac{u(x)}{v(x)} \right| \leq M \text{ 在 } \mathring{U}(a,\delta) \text{ 内}.$$

(3) 若 $u(x) \to \infty$ 和 $v(x) \to \infty$, 定义

$$u(x) \approx v(x) \iff u(x) = O(v(x)) \text{ 且 } v(x) = O(u(x)).$$

(4) 若 $u(x)\to\infty$ 和 $v(x)\to\infty$, 定义

$$u(x)\sim v(x) \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)}=1.$$

性质3.2.10. **性质** 3.2.8 对无穷大也成立.

§3.2.3 等价替换

我们知道当 $x\to a$ 时, $\tan x\sim\sin x\sim x$ 从而得到 $\tan x-\sin x\to 0$. 因此

$$\lim_{x\to 0}(\tan x-\sin x)=0.$$

例3.2.11. 求

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}.$$

证: 如果直接把等价关系 $\sin x\sim\tan x\sim x$ 带入就会得到极限为 ∞. 但是实际上

$$\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{\sin x}{\cos x}\frac{1-\cos x}{x^3}=\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

一个很自然的问题是为何不能够直接把等价量带入后再求极限呢? 原因在于在**例 3.2.11** 中分母是 x^3 从而导致我们要算出分子 $\tan x-\sin x$ 更加准确的估计, 即要算出高阶无穷小. 事实上利用以后会学到的Taylor 展开我们可以得到

$$\sin x\sim x-\frac{1}{3!}x^3,\quad \tan x\sim x+\frac{1}{3}x^3,\quad \tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3,\quad x\to 0,$$

参见 (4.7.17) 和 (4.7.25). 利用上述估计立刻得到极限就是 $\frac{1}{2}$.□

定理3.2.12. 假设 $v(x)\sim w(x)$, 当 $x\to a$ 时, 是等价无穷小或等价无穷大. 则

$$\lim_{x\to a}u(x)v(x)=A \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{x\to a}u(x)w(x)=A,$$
$$\lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)}=A \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{x\to a}\frac{u(x)}{w(x)}=A.$$

证: 利用 $u(x)w(x)=u(x)v(x)\cdot\frac{w(x)}{v(x)}$ $\frac{u(x)}{w(x)}=\frac{u(x)}{v(x)}\cdot\frac{v(x)}{w(x)}$ 马上得证. □

上述定理告诉我们在乘除运算中, 等价的两个无穷小或无穷大可以互相替换而不影响最后结果. 但是对加减运算则情况很复杂, **例 3.2.11** 告诉我们不能直接把等价量替换掉; 而另一方面要想运用**定理 3.2.12** 就必须找到一个方法把被求极限函数变成乘除运算从而可以应用定理.

例3.2.13. (1) 求极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{\ln(1+2x)}.$$

解: 因为 $\ln(1+2x)\sim 2x$ 当 $x\to0$ 时成立, 所以得到

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{\ln(1+2x)}\sim\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{2x}=\frac{(\sqrt{1+x}-1)-(\sqrt[3]{1+x}-1)}{2x}.$$

根据平方差公式得到

$$\frac{(1+x)^{1/2}-1}{x}=\frac{(1+x)-1}{x[(1+x)^{1/2}+1]}=\frac{1}{(1+x)^{1/2}+1}\sim\frac{1}{2}$$

当 $x\to0$ 时. 同样利用立方差公式得到

$$\frac{(1+x)^{1/3}-1}{x}=\frac{1}{(1+x)^{2/3}+(1+x)^{1/3}+1}\sim\frac{1}{3}$$

当 $x\to0$ 时. 因此

$$(1+x)^{1/2}-1\sim\frac{1}{2}x,\quad (1+x)^{1/3}-1\sim\frac{1}{3}x,\quad x\to0.$$

最终极限等于 $(1/2-1/3)/2=1/12$. □

(2) 求极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}.$$

解: 仿照 (1) 得到

$$\sqrt{1+2x}-1\sim\frac{1}{2}\times2x=x,\quad x\to0.$$

但是 $(\sqrt{1+2x}-1)/x^2\to\infty$. 故考虑分解

$$\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}=\left[\sqrt{1+2x}-(1+x)\right]-\left[\sqrt[3]{1+3x}-(1+x)\right].$$

分别利用平方差公式和立方差公式得到

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-(1+x)}{x^2}&=\lim_{x\to0}\frac{-x^2}{x^2[\sqrt{1+2x}+(1+x)]}\\&=-\lim_{x\to0}\frac{1}{1+x+\sqrt{1+2x}}=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-(1+x)}{x^2}\\=&\lim_{x\to0}\frac{(1+3x)-(1+x)^3}{x^2[(1+3x)^{2/3}+(1+3x)^{1/3}(1+x)+(1+x)^2]}=\frac{-3}{3}=-1.\end{aligned}$$

最后得到极限等于 $-1/2+1=1/2$. □

(3) 实际上对任何 $\alpha>0$ 有 (参见 (4.7.19) 及之后的证明)

$$(1+x)^\alpha-\left[\sum_{0\le i\le k-1}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{i!}x^i\right]\sim\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k \tag{3.2.2}$$

当 $x\to0$ 时. 由此我们得到如下断言:

断言: 假设 $u(x)-\sum_{0\le i\le k-1}a_ix^i\sim a_kx^k$ 和 $v(x)-\sum_{0\le i\le k-1}a_ix^i\sim b_kx^k$ 当 $x\to0$ 时成立, 其中 $a_0,b_0,\cdots,a_k,b_k$ 都是常数且 $a_k\ne b_k$. 则

$$u(x)-v(x)\sim(a_k-b_k)x^k,\quad x\to0.$$

证: 根据假设条件得到

$$\begin{aligned}\frac{u(x)-v(x)}{(a_k-b_k)x^k}&=\frac{[u(x)-\sum_{0\le i\le k-1}a_ix^i]-[v(x)-\sum_{0\le i\le k-1}b_ix^i]}{(a_k-b_k)x^k}\\&=\frac{u(x)-\sum_{0\le i\le k-1}a_ix^i}{a_kx^k}\cdot\frac{a_k}{a_k-b_k}-\frac{v(x)-\sum_{0\le i\le k-1}b_ix^i}{b_kx^k}\cdot\frac{b_k}{a_k-b_k}\\&\sim\frac{a_k}{a_k-b_k}-\frac{b_k}{a_k-b_k}=1.\end{aligned}$$

即 $u(x)-v(x)\sim(a_k-b_k)x^k$. □

比如

$$\begin{aligned}(1+x)^{1/2}-\left[1+\frac12x\right]&\sim\frac{\frac12(\frac12-1)}{2}x^2=-\frac18x^2,\\(1+x)^{1/3}-\left[1+\frac13x\right]&\sim\frac{\frac13(\frac13-1)}{2}x^2=-\frac19x^2\end{aligned}$$

故

$$(1+x)^{1/2}-(12+x)^{1/3}\sim\left(\frac12-\frac13\right)x=\frac16x.$$

又比如

$$\begin{aligned}(1+2x)^{1/2}-\left[1+\frac12(2x)\right]&\sim\frac{\frac12(\frac12-1)}{2}(2x)^2=-\frac12x^2,\\(1+3x)^{1/3}-\left[1+\frac13(3x)\right]&\sim\frac{\frac13(\frac13-1)}{2}(3x)^2=-x^2.\end{aligned}$$

故得到

$$(1+2x)^{1/3}-(1+3x)^{1/3}\sim\left(-\frac12+1\right)x^2=\frac12x^2.$$

(4) 求极限 $\lim_{x\to+\infty}\arccos(\sqrt{x^2+x}-x)$.

解: 令 $u := \sqrt{x^2+x}-x$. 由于

$$\lim_{x\to+\infty} u = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+\sqrt{x^2+x}} = \frac{1}{2}$$

得到

$$\lim_{x\to+\infty} \arccos(\sqrt{x^2+x}-x) = \lim_{u\to\frac{1}{2}} \arccos u = \frac{\pi}{3}. \quad \square$$

(5) 证明

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} \sim x^{1/2}, \quad x\to+\infty.$$

证: 令 $u := (x+x^{1/2})/x^2$ 推出

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x^{1/2}} = \lim_{x\to+\infty} \left[1+\left(\frac{x+x^{1/2}}{x^2}\right)^{1/2}\right]^{1/2}$$

$$= \lim_{u\to0}(1+u^{1/2})^{1/2} = 1. \quad \square$$

(6) 求下列函数当 $x\to0$ 时的主部

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \pi-3\arccos\left(x+\frac{1}{2}\right), \quad x\to0.$$

解: 对第一个函数有

$$\begin{aligned}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2} &= \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\frac{\pi}{3} \\ &= 2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{x}{2} \sim \sin\frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}\end{aligned}$$

所以函数 $\sin(x+\pi/3)-\sqrt{3}2$ 当 $x\to0$ 时的主部是 $x/2$. 对第二个函数利用 $\sin(3\theta)=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ 有

$$\pi-3\arccos\left(x+\frac{1}{2}\right) \sim \sin\left[\pi-3\arccos\left(x+\frac{1}{2}\right)\right] = \sin\left[3\arccos\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= 3\sqrt{1-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}-4\left(\sqrt{1-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\right)^3$$

$$= \sqrt{1-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\left\{3-4\left[1-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right]\right\}$$

$$\sim \frac{\sqrt{3}}{2}(4x+4x^2) \sim 2\sqrt{3}x, \quad x\to0.$$

所以函数 $\pi-3\arccos(x+1/2)$ 当 $x\to0$ 时的主部是 $2\sqrt{3}x$. $\square$

例3.2.14. 假设函数 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 满足条件

$$f(2x)=f(x)\quad \text{且}\quad f(x)=o(1),\quad x\to+\infty.$$

证明 $f\equiv 0$.

证: 任取 $x_0\in(0,+\infty)$ 得到

$$f(x_0)=f(2x_0)=f(2^2x_0)=\cdots=f(2^nx_0),\quad \forall\, n\geq 0.$$

根据 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$, Heine 定理, 和**定理** 3.1.14 ($x\to+\infty$ 的版本), 得到

$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty}f(2^nx_0)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

即对任意 $x_0>0$ 有 $f(x_0)=0$. □

例3.2.15. 假设函数 $f(x)$ 满足条件 $f(x)=o(1)$ 且 $f(2x)-f(x)=O(x)$, 当 $x\to 0$ 时. 则 $f(x)=O(x)$, 当 $x\to 0$ 时.

证: 根据条件 $f(2x)-f(x)=O(x)$ 可知, 存在正数 $M>0$ 对任意 $x\in\mathring{U}(0,\delta)$(存在 δ) 有 $|f(2x)-f(x)|\leq M|x|$. 从而得到

$$\left|f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)\right|\leq\frac{M|x|}{2},\quad \left|f\left(\frac{x}{2}\right)-f\left(\frac{x}{2^2}\right)\right|\leq\frac{M|x|}{2^2}$$

$$\cdots,\quad \left|f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right|\leq\frac{M|x|}{2^n}.$$

把这些不等式加起来并利用基本不等式 $|x-y|\leq|x|+|y|$ 得到

$$\left|f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right|\leq M|x|\sum_{1\leq k\leq n}\frac{1}{2^k}\leq M|x|.$$

利用假设条件 $f(x)=o(1)$ 并令 $n\to\infty$ 推出 $|f(x)|\leq M|x|$. 即 $f(x)=O(x)$, 当 $x\to 0$ 时. □

§3.3 函数的连续和间断

假设函数 $f(x)$ 定义在某个去心邻域 $\mathring{U}(a,r)$ 内, 其中 $r>0$. 回顾下函数极限

$$\lim_{x\to a}f(x)=A$$

的定义, 即对任意 $\epsilon>0$ 存在 $\delta\in(0,r]$, 对任意 $x\in\mathring{U}(a,\delta)$ 有 $|f(x)-A|<\epsilon$. 如果函数 $f(x)$ 定义在邻域 $U(a,r)$ 内且 $A=f(a)$, 我们就得到函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续的定义.

§3.3.1 连续函数

我们那上述的讨论写成如下的定义.

定义3.3.1. 假设函数 $f(x)$ 定义在邻域 $U(a,r)$ 内. 称函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处**连续 (continuous)** 如果

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$

即对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta \in (0,r]$, 对任意 $x \in U(a,\delta)$ 有

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

此时 a 称为函数 $f(x)$ 的**连续点 (point of continuity)**.

称函数 $f(x)$ 在**开区间** (a,b) **内连续 (continuous in an open interval (a,b))** 如果函数 $f(x)$ 在任意 $x \in (a,b)$ 处连续. 假设函数 $f(x)$ 定义在区间 $[a,a+r)$ 内. 称函数 $f(x)$ 在a **处右连续 (right continuous at a)** 如果

$$f(a+) = \lim_{x\to a+} f(x) = f(a).$$

假设函数 $f(x)$ 定义在区间 $(a-r,a]$ 内. 称函数 $f(x)$ 在a **处左连续 (left continuous at a)** 如果

$$f(a-) = \lim_{x\to a-} f(x) = f(a).$$

称函数 $f(x)$ 在**闭区间** $[a,b]$ **内连续 (continuous on a closed interval $[a,b]$)** 如果 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续, 在 a 处右连续, 且在 a 处左连续.

类似地可以定义函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 或 $[a,b)$ 内连续的概念.

例3.3.2. (1) 函数 $\sin x$, $\cos x$, a^x $(a>0)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续; 函数 $\log_a x$ $(a>0)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续; 函数 $\tan x$, $\sec x$ 在其定义域 $\mathbb{R}\setminus\{k\pi+\frac{\pi}{2}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 内连续; 函数 $\cot x$, $\csc x$ 在其定义域 $\mathbb{R}\setminus\{k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 内连续.

(2) 函数 $f(x)$ 在 a 处连续 $\Longleftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 在 a 处即是左连续又是右连续.

(3) 函数 $f(x)$ 连续 $\Longrightarrow$ 函数 $|f(x)|$ 连续. 但是反之不一定成立, 比如考察函数

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}x+1, & x\in[0,2], \\ \frac{1}{2}x-1, & x\in[-2,0). \end{cases}$$

(4) $f(a) = \lim_{x\to a} f(x) \Longleftrightarrow$ 对任意 $x_n \to a$ 都有 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

例3.3.3. (1)

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$$

在 0 处连续.

证: 这是因为

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0. \quad \square$$

(2)
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{x^2}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$$
在 0 处不连续.

证: 这是因为
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\neq 1.\ \square$$

例3.3.4. 考察函数
$$f(x)=\begin{cases}a_n+\sin(\pi x), & 2n\le x\le 2n+1,\\ b_n+\cos(\pi x), & 2n-1<x<2n,\end{cases}\qquad n\in\mathbb{Z}.$$
求 a_n 和 b_n 使得函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

解: 因为函数 $f(x)$ 在 $2n$ 处连续, 所以 $f(2n-)=f(2n)=f(2n+)$ 从而
$$b_n+1=a_n.$$
同样根据函数 $f(x)$ 在 $2n-1$ 处连续得到
$$a_{n-1}=b_n-1.$$
故推出 $a_n=a_0+2n$ 且 $b_n=a_0+2n-1$. $\square$

例3.3.5. (1) 定义 $(0,1)$ 上的Riemann 函数为
$$f(x):=\begin{cases}0, & x\in(0,1)\text{ 且为无理数},\\ \frac{1}{q}, & x=p/q\in(0,1)\cap\mathbb{Q}\text{ 且 }(p,q)=1.\end{cases}$$
证明函数 $f(x)$ 在任意 $x\in(0,1)\cap\mathbb{Q}$ 处不连续, 但是在任意 $x\in(0,1)\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ 处连续.

证: 令取 $x=p/q\in(0,1)\cap\mathbb{Q}$. 存在 $\epsilon_0\in(0,1/q)$ 对任意 $\delta>0$, 存在 $(0,1)$ 的无理数 x 满足 $|x-x_0|<\delta$, 但是
$$|f(x)-f(x_0)|=|f(x_0)|=\frac{1}{q}>\epsilon_0.$$

现在假设 $x_0\in(0,1)\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$. 对任意 $\epsilon>0$ 存在有限多个 $q\in\mathbb{N}$ 满足 $1/q\ge\epsilon$. 从而存在有限多个 $p/q\in(0,1)$ 满足 $1/q\ge\epsilon$. 故存在 $\delta>0$ 使得不等式 $|\frac{p}{q}-x_0|\ge\delta$ 对有限多个满足条件 $1/q\ge\epsilon$ 的 $p/q\in(0,1)$ 都成立. 从而对任意 $x\in(0,1)\cap\mathbb{Q}$ 只要 $|x-x_0|<\delta$ 都有 $1/q<\epsilon$, 这里 $x=p/q$; 此时得到
$$|f(x)-f(x_0)|=|f(x)|=\frac{1}{q}>\epsilon.$$
当 $|x-x_0|<\delta$ 且 $x\in(0,1)\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ 时, 显然有 $|f(x)-f(x_0)|=|f(x)|=0<\epsilon$. $\square$

(2) 定义函数 $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ 如下

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in(0,1)\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}),\\ \frac{nx}{n+1}, & x=\frac{m}{n}\in(0,1)\cap\mathbb{Q},\ (m,n)=1.\end{cases}$$

证明 $f(x)$ 在任意 $x\in(0,1)\cap\mathbb{Q}$ 处不连续, 但是在任意 $x\in(0,1)\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ 处连续.

证: 令 $x_0=m/n\in(0,1)\cap\mathbb{Q}$. 则 $f(x_0)=nx_0/(n+1)=m/(n+1)$. 取

$$x_k=\frac{km+1}{kn}\longrightarrow\frac{m}{n}=x_0$$

得到

$$\lim_{k\to\infty}f(x_k)=\lim_{k\to\infty}\frac{kn\frac{km+1}{kn}}{kn+1}=\frac{m}{n}\neq f(x_0).$$

所以函数 $f(x)$ 在 x_0 处不连续.

如果 $x_0\in(0,1)\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$, 就和 (1) 中的证明一样存在 $\delta_0>0$ 使得对任意 $x\in(0,1)\cap\mathbb{Q}$ 且 $|x-x_0|<\delta_0$ 都有 $1/n<\epsilon$, 这里 $x=m/n$. 取 $\delta:=\min(\epsilon,\delta_0)>0$. 任意 $x\in(0,1)\cap\mathbb{Q}$ 且 $|x-x_0|<\delta$ 有 $1/n<\epsilon$, 这里 $x=m/n$. 进一步

$$|f(x)-f(x_0)|=\left|\frac{x}{1+\frac{1}{n}}-x_0\right|=\frac{|x-x_0-\frac{m}{n}|}{1+\frac{1}{n}}\leq\frac{|x-x_0|}{1+\frac{1}{n}}+\frac{\frac{x_0}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$

$$<|x-x_0|+\frac{x_0}{n}<\delta+\epsilon x_0<\epsilon(1+x_0).$$

当 $x\in(0,1)\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ 时, 有 $|f(x)-f(x_0)|=|x-x_0|<\delta<\epsilon$. 故函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续. □

例3.3.6. 定义函数

$$f(x):=\lim_{m\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty}(\cos^n(\pi m!x))\right],\quad x\in\mathbb{R}.$$

证明

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

因此 $f(x)$ 就是Dirichlet 函数, 而且 $f(x)$ 处处不连续.

证: 简便起见对给定 m,n 记

$$f_{m,n}(x):=\cos^n(\pi m!x).$$

如果 $x=p/q\in\mathbb{Q}$, 则 $\forall\, m>q$, 都有 $f_{m,n}(x)=1$ 从而 $f(x)=1$. 如果 $x\notin Q$, 由于 $|\cos(\pi m!x)|<1$ 得到 $\lim_{n\to\infty}f_{m,n}(x)=0$ 故 $f(x)=0$. 函数 $f(x)$ 处处不连续是显然的. □

定理3.3.7. (1) 连续函数满足四则运算法则, 即如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=a$ 处连续, 则函数 $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$ 及 $f(x)/g(x)$(此时 $g(a)\neq 0$) 在 $x=a$ 处连续.

(2) **(复合函数的连续性)** 假设函数 $f(y)$ 在 y_0 处连续而函数 $g(x)$ 在 x_0 处的极限为 y_0, 则

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right). \tag{3.3.1}$$

特别地, 如果函数 $g(x)$ 在 x_0 处连续, 则复合函数 $f(g(x))$ 在 x_0 处连续.

证: (1) 利用**定理 3.1.8** (6).

(2) 对任给 $\epsilon>0$ 存在 $\delta>0$ 只要 $|y-y_0|<\delta$ 就有

$$|f(y)-f(y_0)|<\epsilon.$$

因为极限 $\lim_{x\to x_0} g(x)=y_0$ 存在, 所以对上述 $\delta>0$ 存在 $\eta>0$ 只要 $0<|x-x_0|<\eta$ 就有

$$|g(x)-y_0|<\delta.$$

因此得到 $|f(g(x))-f(y_0)|<\epsilon$. □

(1) f 在 x_0 处连续, g 在 x_0 处不连续 $\Longrightarrow$ $f+g$ 在 x_0 处一定不连续, 但是 fg 在 x_0 处可能连续. 反例如下

$$f\equiv 0,\quad g(x)=\begin{cases} 1, & x\geq 0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

(2) f 和 g 都在 x_0 处不连续 $\Longrightarrow$ $f+g$ 在 x_0 处可能连续, 比如

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x\geq 0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

fg 在 x_0 处可能连续, 比如

$$f(x)=g(x)=\begin{cases} 1, & x\geq 0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

(3) f 在 x_0 处不连续 $\Longrightarrow$ f^2 在 x_0 处可能连续.

(4) f,g 都在 x_0 处连续 $\Longrightarrow$ $f\wedge g\equiv \min(f,g)$ 和 $f\vee g\equiv\max(f,g)$ 都连续. 这是因为

$$f\wedge g=\frac{f+g-|f-g|}{2},\quad f\vee g=\frac{f+g+|f-g|}{2}.$$

§3.3.2 函数的间断点

称 a 是函数 $f(x)$ 的**间断点 (discontinuity)**, 根据定义如果 $f(x)$ 在 a 处不连续 (此时 $f(a)$ 是有定义的) 或者 $f(x)$ 在 a 处没有定义. 如果 $f(a)$ 有定义但是 $f(x)$ 在 $x=a$ 处不连续, 此时要么极限 $\lim_{x\to a}f(x)$ 不存在, 要么该极限存在但不等于 $f(a)$. 这样我们就得到如下三种类型的间断点.

定义3.3.8. *假设 a 是 $f(x)$ 的间断点.*

(1) *a 是***第一类间断点 (discontinuity of first kind)***: $f(a-)$ 和 $f(a+)$ 都存在.*

(1a) *a 是***可去间断点 (removable discontinuity)** *若 $f(a+)=f(a-)$: 要么 $f(a)$ 没有定义但是 $f(a+)=f(a-)$, 此时我们可以把原来的函数 $f(x)$ 进行延拓后得到一个连续函数 $F(x)$:*

$$F(x):=\begin{cases} f(x), & x\neq a,\\ f(a+)=f(a-), & x=a;\end{cases}$$

要么 $f(a)$ 有定义但是 $f(a+)=f(a-)\neq f(a)$.

(1b) *a 是***跳跃间断点 (jump discontinuity)** *若 $f(a+)\neq f(a-)$: 此时把 $|f(a+)-f(a-)|$ 称为函数 f 在 a 处的***跃度 (jump)**.

(2) *a 是***第二类间断点 (discontinuity of second kind)***: 若 $f(a+), f(a-)$ 中至少有一个不存在.*

例3.3.9. (1) 0 是如下函数的跳跃间断点:

$$f(x)=\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases} 1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

(2) $k\in\mathbb{Z}$ 是函数 $f(x)=\lfloor x\rfloor$ 的跳跃间断点.

(3) -1 是函数 $f(x)=x/(1+x)^2$ 的第二类间断点.

(4) -1 是函数 $f(x)=(1+x)/(1+x^3)$ 的可去间断点.

(5) 0 和 $k\pi$ 分别是函数 $f(x)=x/\sin x$ 的可去间断点和第二类间断点.

(6) $k\in\mathbb{Z}$ 是函数 $f(x)=x-\lfloor x\rfloor$ 的跳跃间断点.

(7) 0 和 $1/k$ 分别是函数 $f(x)=1/x-\lfloor 1/x\rfloor$ 的第二类间断点和跳跃间断点.

(8) 函数 $f(x)=\lfloor x\rfloor\sin(\pi x)$ 处处连续.

(9) $x\neq k\in\mathbb{Z}$ 是如下函数

$$f(x)=\begin{cases} \sin(\pi x), & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

的第二类间断点.

注3.3.10. (1) *单调函数 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 的不连续点只能是跳跃间断点.*

证: 不是一般性不妨假设函数 $f(x)$ 是递增函数且 $c\in(a,b)$ 是间断点. 对任意 $a<c_1<c<c_2<b$, 根据单调性得到

$$f(c_1)\le f(c)\le f(c_2).$$

从而 $f(c-)\le f(c)\le f(c+)$. 如果 $f(c-)=f(c+)$ 则 $f(x)$ 在 c 处连续, 产生矛盾. 因此 $f(c-)\neq f(c+)$ 实际上 $f(c-)<f(c+)$. □

(2) *初等函数在其定义域内都是连续的.*

证: 我们已经知道基本初等函数中的常值函数、三角函数、幂函数、指数函数及对数函数在其定义域内都是连续的. 根据**推论 3.3.19** 可知反三角函数在其定义域内也是连续的. 而初等函数是基本初等函数作有限次四则运算和复合运算而得到, 从而根据**定理 3.3.7** 得到初等函数都是连续的. □

定理3.3.11. *单调函数的间断点构成的集合是可数的.*

证: 不失一般性不妨假设函数 $f(x)$ 单调且定义在开区间 $I\subset\mathbb{R}$ 内. 如果 $x_1<x_2$ 是函数 $f(x)$ 的间断点, 根据**注 3.3.10** 得到

$$f(x_1-0)\le f(x_1)\le f(x_1+0)<f(x_2-0)\le f(x_2)\le f(x_2+0).$$

所以

$$\begin{aligned} I_{x_1}:=(f(x_1-0),f(x_1+0))\neq\emptyset &\implies \exists\, r_1\in\mathbb{Q}\cap I_{x_1},\\ I_{x_2}:=(f(x_2-0),f(x_2+0))\neq\emptyset &\implies \exists\, r_2\in\mathbb{Q}\cap I_{x_2},\\ I_{x_1}\cap I_{x_2}=\emptyset &\implies r_1<r_2. \end{aligned}$$

令 $X:=\{f(x)\text{ 的间断点}\}$ 并定义

$$F:X\longrightarrow\mathbb{Q},\quad x\longmapsto r_x.$$

所以 F 是单的, 故 $|X|\le|Q|$. 因此 X 是可数的. □

§3.3.3 连续函数的性质

这一小节我们讨论闭区间上连续函数的几个重要性质.

定理3.3.12. **(有界性)** *如果函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则 f 必有界.*

证: 否则 f 在 $[a,b]$ 上无界. 对任意 $n\in\mathbb{N}$ 存在 $x_n\in[a,b]$ 满足 $|f(x_n)|\ge n$. 但数列 $\{x_n\}_{n\ge1}$ 有界, 存在 $[a,b]$ 内某个收敛子列 $\{x_{n_k}\}_{k\ge1}$. 记 $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=c\in[a,b]$. 根据函数 f 的连续性得到 $f(c)=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})$, 这和 $f(x_n)\to\infty$ 产生矛盾. □

注3.3.13. (1) 在**定理** 3.3.12 中, 我们假设函数 f 要定义在闭区间上, 这是因为如果函数 f 定义在开区间 (a,b) 内则极限 $c=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}$ 可能是端点 a 或 b, 但此时 $f(c)$ 不一定有定义.

(2) 函数 f 在 (a,b) 内连续 $\Longrightarrow f$ 在任意闭区间 $[c,d]\subset(a,b)$ 上有界, 但不一定在 (a,b) 内有界, 比如函数 $f(x)=1/x, 0<x<1$.

定理3.3.14. (Weierstrass 最值定理) 如果函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则 $\exists\,\xi,\eta\in[a,b]$ 满足不等式 $f(\xi)\le f(x)\le f(\eta)$ 对所有的 $x\in[a,b]$ 都成立.

证: 不失一般性只证存在 $\eta\in[a,b]$ 使得 $f(x)\le f(\eta)$ 对任意 $x\in[a,b]$ 都成立. 根据**定理**3.3.12 得到 $M:=\sup_{x\in[a,b]}f(x)$ 存在. 假设 $M>f(x)$ 对任意 $x\in[a,b]$ 都成立. 定义

$$F(x):=\frac{1}{M-f(x)}>0,\quad x\in[a,b].$$

则 F 在 $[a,b]$ 上连续. 再次利用**定理** 3.3.12 得到存在正数 $K>0$ 使得不等式 $0<F(x)\le K$ 对任意 $x\in[a,b]$ 都成立. 故

$$f(x)\le M-\frac{1}{K},\quad \forall\,x\in[a,b]$$

但这和 M 的定义发生矛盾. 所以 $M=f(\eta)$ 对某个 $\eta\in[a,b]$ 成立. □

定义3.3.15. 闭区间构成的数列 $\{[a_n,b_n]\}_{n\ge1}$ 称为**闭区间套(nested intervals)** 如果

$$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]\ (\forall\,n\ge1),\quad \lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0.$$

定理3.3.16. 如果 $\{[a_n,b_n]\}_{n\ge1}$ 是闭区间套则 $\exists!\,\xi\in\mathbb{R}$ 满足

$$a_n\le\xi\le b_n\ (\forall\,n\ge1),\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\xi=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

证: 参见**定理** 2.3.11 的证明. □

注3.3.17. (1) **定理** 3.3.16 不一定成立若把闭区间 $[a_n,b_n]$ 换成开区间 (a_n,b_n), 比如 $\{(0,1/n)\}_{n\ge1}$.

(2) 可以证明Zorn 引理, **定理** 2.3.1, **定理** 2.3.11, **定理** 2.3.15, **定理** 3.3.16 互相等价 (需要补充!).

现在我们引入记号

$$f\in C(I)$$

这表示函数 f 在区间 I 上连续.

定理3.3.18. (Bolzano-Cauchy 介值定理) (1) 假设 $f \in C[a,b]$ 且 $f(a)f(b) < 0$(或 $f(a)f(b) \leq 0$), 则存在 $\xi \in (a,b)$(或存在 $\xi \in [a,b]$) 满足 $f(\xi) = 0$.

(2) 若 $f \in C[a,b]$, $M_f := \max_{[a,b]} f$, $m_f := \min_{[a,b]} f$, 则任意 $\mu \in (m_f, M_f)$ 存在 $\xi \in (a,b)$ 满足 $f(\xi) = \mu$. 一般地, 假设 $f(a) < \mu < f(b)$, 则存在 $\xi \in (a,b)$ 满足 $f(\xi) = \mu$.

证: 不失一般性不妨假设 $f(a) < 0 < f(b)$. 假设 $f(x) \neq 0$ 对任何 $a < x < b$ 都成立. 若 $f((a+b)/2) > 0$, 取 $a_1 = a$, $b_1 = (a+b)/2$; 若 $f((a+b)/2) < 0$, 取 $a_1 = (a+b)/2$, $b_1 = b$. 总之在任何情形下均有不等式 $f(a_1) < 0 < f(b_1)$ 成立. $\{[a_n, b_n]\}_{n\geq 1}$,

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], \quad f(a_n) < 0 < f(b_n), \quad \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n} = 0.$$

根据**定理 3.3.16** 存在 $\xi \in [a,b]$ 满足 $\lim_{n\to\infty} a_n = \xi = \lim_{n\to\infty} b_n$. 因此

$$0 \geq \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0.$$

(2) 由**定理 3.3.14** 存在 $\xi_1, \xi_2 \in [a,b]$ 满足 $f(\xi_1) = m_f$ 和 $f(\xi_2) = M_f$. 不失一般性不妨假设 $\xi_1 < \xi_2$. 定义

$$F(x) := f(x) - \mu.$$

则 $f(\xi_1) = m_f - \mu < 0$ 且 $f(\xi_2) = M_f - \mu \geq 0$ 成立. 由 (1) 存在 $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$ 使得 $F(\xi) = 0$ 成立. 即 $\mu = f(\xi)$. □

推论3.3.19. (1) $f \in C[a,b] \Longrightarrow f([a,b]) = [m_f, M_f]$.

(2) 如果 I 是区间, 则 $f \in C(I) \Longrightarrow f(I)$ 也是区间.

(3) 假设函数 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的严格单调函数. 则 $f(x)$ 连续当且仅当 $f(I)$ 也是区间.

(4) 定义在区间 I 上的严格单调连续函数必可逆, 且逆函数也是严格单调连续的.

(5) $f \in C(I) \Longrightarrow f$ 严格单调当且仅当 f^{-1} 存在.

(6) $f: [a,b] \to [a,b]$ 连续 $\Longrightarrow$ 存在 $\xi \in [a,b]$ 满足 $f(\xi) = \xi$.

证: (1) 如果 $m_f = M_f$ 则得到 f 为常数, 从而得到 $f([a,b]) = [m_f, M_f]$. 所以假设 $m_f < M_f$. 根据**定理 3.3.14** 存在 $\xi, \eta \in [a,b]$ 满足

$$f(\xi) = m_f, \quad f(\eta) = M_f.$$

由**定理 3.3.18**, 对任意 $\mu \in [m_f, M_f]$ 存在 $x \in [a,b]$ 满足 $f(x) = \mu$, 从而得到 $[m_f, M_f] \subset f([a,b]) \subset [m_f, M_f]$.

(2) 若 f 为常数, 则 $f(I)$ 为一点故必是区间. 现在假设 f 不是常数. $\forall\, y_1 < y_2$ 且 $y_1, y_2 \in f(I)$, 我们将证明 $[y_1, y_2] \subset f(I)$. 令 $f(x_1) = y_1 < y_2 = f(x_2)$. 根

据**定理** 3.3.18, $\forall\, y \in (y_1, y_2)\ \exists\, x \in (x_1, x_2)$ 满足 $f(x) = y \Longrightarrow [y_1, y_2] \subset f(I)$ $\Longrightarrow f(I)$ 是区间.

(3) 假设函数 $f(x)$ 在 I 上是严格单调递增的且 $f(I)$ 是区间. 如果 $x_0 \in I$ 是间断点, 则根据**注 3.3.10** x_0 必是跳跃间断点. 因此 $(f(x_0-), f(x_0+))$ 不属于 $f(I)$, 这和 $f(I)$ 是区间相矛盾.

反之, 见 (2).

(4) 假设函数 $f(x)$ 是严格单调递增的. 根据 (3) 知道 $f(I)$ 是区间. 由于映射 $f: I \to f(I)$ 是即单又满的, 故存在逆映射 f^{-1} 且也是严格单调递增的. 因此根据 $f^{-1}(f(I)) = I$ 是区间并结合 (3), 得到了逆函数 f^{-1} 的连续性.

(5) $\Longrightarrow$: 显然.

$\Longleftarrow$: 假设函数 f 可逆且 $x_1 < x_2$. 则首先可得到 $f(x_1) \neq f(x_2)$. 不失一般性不妨假设 $f(x_1) < f(x_2)$. 我们将证明 f 在区间 $[x_1, x_2]$ 上严格递增. 否则的话, $\exists\, x' < x''$ 满足 $x', x'' \in [x_1, x_2]$ 且 $f(x') \geq f(x'')$.

情形 1: $f(x'') < f(x_1)$. 此时 $f(x'') < f(x_1) < f(x_2)$. 根据**定理**3.3.18 $\exists\, \xi \in (x'', x_2)$ 使得 $f(\xi) = f(x_1)$ 成立, 矛盾!

情形 2: $f(x'') > f(x_1)$. 此时 $f(x_1) < f(x'') < f(x')$ 推出存在 $\xi \in (x_1, x')$ 使得 $f(\xi) = f(x'')$ 成立, 矛盾!

(6) 定义 $F(x) := f(x) - x$, $a \leq x \leq b$. 从 $F(a)F(b) \leq 0$, 存在 $\xi \in [a, b]$ 满足 $F(\xi) = 0$. □

例3.3.20. (1) *任意定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇数次多项式至少有一个根.*

证: 令此奇数次多项式为

$$P(x) := a_0 x^{2n-1} + a_1 x^{2n-2} + \cdots + a_{2n-2}x + a_{2n-1}, \quad a_0 \neq 0.$$

不失一般性不妨假设 $a_0 > 0$. 根据极限

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{x^{2n-1}} = a_0 > 0$$

得到存在 $x_1 < 0 < x_0$ 满足

$$\frac{P(x_1)}{x_1^{2n-1}} > 0, \quad \frac{P(x_2)}{x_2^{2n-1}} > 0.$$

从而 $x_1^{2n-1} < 0 < x_2^{2n-1}$ 推出 $P(x_1) < 0 < P(x_2)$ 即而 $P(\xi) = 0$ 对某个 $\xi \in (x_1, x_2)$ 成立. □

(2) *$\lim_{x\to X} f(x) = \alpha > 0$, $\lim_{x\to X} g(x) = \beta \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim_{x\to X}[f(x)]^{g(x)} = \alpha^\beta$. 这里 $x \to X$ 可以是下列极限过程之一: $x \to a$, $x \to a-$, $x \to a+$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$.*

证: 根据复合函数性质得到

$$\lim_{x\to X}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to X} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim_{x\to X} g(x)\ln f(x)} = e^{\beta\ln\alpha} = \alpha^\beta. \quad \square$$

(3) $f \in C([0,1])$, $f \geq 0$, $f(0) = f(1) = 0$, $0 < a < 1 \Longrightarrow$ 存在 $x_0 \in [0,1]$ 使得 $f(x_0) = f(x_0 + a)$ 和 $0 \leq x_0 + a \leq 1$ 都成立.

证: 令 $F(x) := f(x) - f(x+a)$. 则 $F \in C([0, 1-a])$ 且 $F(0) = f(0) - f(a) = -f(a) \leq 0$, $F(1-a) = f(1-a) - f(1) = f(1-a) \geq 0$. 从而 $\exists\, x_0 \in [0, 1-a]$ 满足 $F(x_0) = 0$. □

(4) $f \in C([0,1])$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1 \Longrightarrow$ 存在 $\xi \in [\frac{1}{3}, 1)$ $f(\xi - \frac{1}{3}) = f(\xi) - \frac{1}{3}$.

证: 令 $F(x) = f(x - \frac{1}{3}) - f(x) + \frac{1}{3}$. 则 $F \in C([1/3, 1])$ 且

$$\begin{aligned} F(1/3) &= f(0) - f(1/3) + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - f(1/3), \\ F(1) &= f(2/3) - f(1) + \frac{1}{3} = f(2/3) - \frac{2}{3}, \\ F(2/3) &= f(1/3) - f(2/3) + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

上述三式相加得到

$$F(1/3) + F(2/3) + F(1) = 0.$$

如果 $F(2/3) = 0$, 则 $\xi = 2/3$. 如果 $F(2/3) \neq 0$, 则不妨假设 $F(2/3) > 0$. 此时 $F(1/3) + F(1) < 0$. 如果 $F(1/3) < 0$, 则存在 $\xi \in (1/3, 2/3)$ 使得 $F(\xi) = 0$ 成立; 如果 $F(1/3) = 0$ 则取 $\xi = 1/3$; 如果 $F(1/3) > 0$, 必有 $F(1) < 0$ 从而存在 $\xi \in (1/3, 1)$ 使得 $F(\xi) = 0$ 成立. 无论哪种情形, 都存在 $\xi \in [1/3, 1)$ 使得 $F(\xi) = 0$ 成立. □

(5) $f \in C((-\infty, +\infty))$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Longrightarrow$ 存在 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ 满足 $f(x_0) = \inf_{(-\infty,+\infty)} f(x)$.

证: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Longrightarrow$ 存在 $a < 0$ 使得 $f(x) > f(0)$ 对任意 $x < a$ 都成立. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Longrightarrow$ 存在 $b > 0$ 使得 $f(x) > f(0)$ 对任意 $x > b$ 都成立. 在闭区间 $[a, b]$ 上, 存在 $x_0 \in [a, b]$ 使得 $f(x_0) = \min_{[a,b]} f$ 成立. 从而

$$f(x_0 \leq f(0) \leq f(x), \quad \forall\, x \in (-\infty, +\infty) \setminus [a, b].$$

故 $f(x_0) = \inf_{(-\infty,+\infty)} f$. □

(6) $f \in C([a,b])$, 且对任意 $x \in [a,b]$ 存在 $t \in [a,b]$ 满足 $|f(t)| \leq |f(x)|/2 \Longrightarrow$ 存在 $x_0 \in [a,b]$ 使得 $f(x_0) = 0$ 成立.

证: 否则的话对任意 $x \in [a,b]$ 都有 $|f(x)| > 0$. $f \in C([a,b])$ 推出 $|f| \in C([a,b])$, 从而存在 $x_0 \in [a,b]$ 满足 $|f(x_0)| = \min_{[a,b]} |f| > 0$. 故存在 $t_0 \in [a,b]$ 满足 $|f(t_0)| \leq \frac{1}{2}|f(x_0)| = \frac{1}{2}\min_{[a,b]} |f| \leq \frac{1}{2}|f(t_0)|$. 因此 $|f(t_0)| = 0$, 矛盾! □

(7) $f\in C([a,b])$, $t,s>0\Longrightarrow$ 存在 $\xi\in[a,b]$ 满足

$$tf(a)+sf(b)=(t+s)f(\xi).$$

证: 令 $F(x):=tf(a)+sf(b)-(t+s)f(x)$. 则

$$F(a)=s[f(b)-f(a)],\quad F(b)=t[f(a)-f(b)],\quad F(a)F(b)\le 0.$$

故存在 $\xi\in[a,b]$ 满足 $F(\xi)=0$. □

(8) $f\in C([0,1])$, $f(0)=f(1)\Longrightarrow$ 对任意 $n\ge 1$ 存在 $x_n\in(0,1)$ 满足 $f(x_n)=f(x_n+\frac{1}{n})$.

证: 令 $F(x):=f(x)-f(x+\frac{1}{n})$ 得到

$$F\left(\frac{k}{n}\right)=f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k+1}{n}\right),\quad 0\le k\le n-1.$$

从而

$$\sum_{0\le k\le n-1}F\left(\frac{k}{n}\right)=f(0)-f(1)=0.$$

如果存在 k 满足 $F(k/n)=0$, 取 $x_n=k/n$. 如果对任意 k 都有 $F(k/n)\neq 0$ 则存在 $k_1<k_2$ 满足 $F(k_1/n)F(k_2/n)<0$, 故存在 $x_n\in(k_1/n,k_2/n)$ 满足 $F(x_n)=0$. □

(9) 假设函数 $f:[a,b]\to[a,b]$ 定义在 $[a,b]$ 上且存在 $k>0$ 满足 $|f(x)-f(y)|\le L|x-y|$(所有 $a\le x,y\le b$) $\Longrightarrow$

(a) f 连续.

(b) 存在 $\xi\in[a,b]$ 满足 $f(\xi)=\xi$.

(c) 如果 $0\le L<1$, $x_{n+1}:=f(x_n)$, 其中 $x_0\in[a,b]$ 给定, 则 $\lim_{n\to\infty}x_n=\xi$.

证: (a) 和 (b) 之前都已经证明. 下面证明 (c). 根据条件得到

$$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|\le L|x_n-x_{n-1}|\le\cdots\le L^n|x_1-x_0|.$$

故对 $\forall\, q>p$,

$$|x_q-x_p|\le\sum_{p\le k\le q-1}|x_{k+1}-x_k|\le\sum_{p\le k\le q-1}L^k|x_1-x_0|\le|x_1-x_0|\frac{L^p}{1-L}$$

从而 $\{x_n\}_{n\ge 0}$ 是Cauchy 数列 $\Longrightarrow x:=\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在且

$$x=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}f(x_{n-1})=f(x),\quad |x-\xi|=|f(x)-f(\xi)|\le L|x-\xi|.$$

但是 $0 \le L < 1$, 得到 $x = \xi$. □

(10) $f, g \in C([a,b])$, 且对任意 $n \ge 1$ 存在 $x_n \in [a,b]$ 满足 $g(x_n) = f(x_{n+1})$ $\Longrightarrow$ 存在 $x_0 \in [a,b]$ 满足 $f(x_0) = g(x_0)$.

证: 因为数列 $\{x_n\}_{n\ge1}$ 有界, 从而存在 $\{x_n\}_{n\ge1}$ 的某个收敛子列, 不妨假设这个收敛子列就是数列 $\{x_n\}_{n\ge1}$ 本身. 则极限 $x_0 := \lim_{n\to\infty} x_n$ 存在, 故 $f(x_0) = g(x_0)$. □

(11) 证明多项式 $x^3 + 2x - 1 = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内只有一个实根 ξ 且 $\xi \in (0,1)$.

证: 令 $f(x) := x^3 + 2x - 1 \in C((-\infty, +\infty))$. 计算得到

$$f(0) = -1 < 0, \quad f(1) = 1 + 2 - 1 = 2 > 0.$$

从而存在 $x_0 \in (0,1)$ 满足 $f(x_0) = 0$. 但是对任意 $x < y$

$$f(y) - f(x) = (y^3 - x^3) + 2(y - x) = (y - x)\left[\left(y + \frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 + 2\right] > 0$$

推出函数 f 严格单调递增, 从而存在唯一的 $\xi \in (0,1)$ 满足 $f(\xi) = 0$. □

(12) $f \in C(-\infty, +\infty)$, 且等式 $f(f(x)) = x$ 对任何 x 成立, 从而存在唯一的 $\xi \in (-\infty, +\infty)$ 满足 $f(\xi) = \xi$.

证: 否则的话对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 我们有 $f(x) \ne x$. 若存在 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ 使得 $f(x_0) > x_0$ 成立, 则对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 必有 $f(x) > x$. 如若不然存在 x_1 满足 $f(x_1) < x_1$ 推出存在 ξ 使得 $f(\xi) = \xi$ 成立, 矛盾! 类似地, 若 $f(x_0) < x_0$ 对某个 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ 成立, 必有 $f(x) < x$ 对任何 x 成立.

不失一般性不妨假设 $f(x) > x$. 则

$$f(x) < f(f(x)) = x < f(x),$$

矛盾! 从而说明存在 ξ 满足 $f(\xi) = \xi$. □

性质3.3.21. 假设 $f \in C([a,b])$. 证明

$$m_f(x) := \inf_{a \le y \le b} f(y), \quad M_f(x) := \sup_{a \le y \le x} f(y)$$

在 $[a,b]$ 上都连续.

证: 不失一般性不妨只证明 m_f 是连续的.

(1) m_f **在 a 处右连续**. 观察到 $m_f(a) = f(a)$. 对任意 $\epsilon > 0$, 由于 f 在 a 处右连续, 所以存在 $\delta > 0$ 使得不等式 $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ 对任何 $a \le x < a + \delta$ 都成立. 因此

$$f(x) > f(a) - \epsilon = m_f(a) - \epsilon.$$

特别地, 对任意 $a \le y \le x < a+\delta$,

$$m_f(a) - \epsilon < f(y) \implies m_f(a) - \epsilon \le m_f(x) \le m_f(a).$$

故不等式 $|m_f(x) - m_f(a)| < \epsilon$ 对任何 $a \le x < a+\delta$ 都成立.

(2) m_f **在** b **处左连续**. $f \in C([a,b])$ 存在 $\xi \in [a,b]$ 满足 $f(\xi) = \min_{[a,b]} f = m_f(b)$. 首先假设 $\xi = b$. 对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$, 有

$$|f(x) - f(b)| < \epsilon, \quad b - \delta < x < b,$$

推出

$$f(x) < f(b) + \epsilon = m_f(b) + \epsilon, \quad b - \delta < x < b.$$

所以不等式 $m_f(x) \le m_f(b) + \epsilon$ 对任何 $b - \delta < x < b$ 都成立, 故得到 $|m_f(x) - m_f(b)| < \epsilon$ 从而 $\lim_{x\to b-} m_f(x) = m_f(b)$.

现在假设 $m_f(b) = f(\xi)$ 对某个 $a \le \xi \le b$ 成立. 故对任意 $x \in (a,b)$ 有

$$m_f(x) = \inf_{[a,x]} f \le f(\xi) = m_f(b) \ge \inf_{[a,b]} f = m_f(b).$$

所以 $m_f(x) = m_f(b) \Rightarrow m_f$ 在 b 处左连续.

(3) m_f **在** (a,b) **内连续**. 证明已经蕴含在 (1) 和 (2) 中. □

例3.3.22. *$f \in C([a,b])$, $x_1, \cdots, x_n \in [a,b] \Rightarrow$ 存在 $\xi \in [a,b]$ 满足*

$$f(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{1\le k\le n} f(x_k).$$

证: 因为不等式 $m_f \le f(x_k) \le M_f$ 对任何 $1 \le k \le n$ 都成立 $\Rightarrow m_f \le \frac{1}{n}\sum_{1\le k\le n} f(x_k) \le M_f$. 根据**定理 3.3.18** 得到存在 ξ 使得 $f(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{1\le k\le n} f(x_k)$ 成立. □

§3.3.4 一致连续

回顾下函数在一点连续的定义:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \begin{pmatrix} \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta = \delta(x_0, \epsilon) > 0 \text{ 满足} \\ |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \\ \text{只要 } |x - x_0| < \delta \end{pmatrix}$$

我们自然会问:

在定义中可否找到 δ 使得它仅仅依赖于 x_0 本身?

先来考察如下的例子. 令 $f(x) = \sin x$, $x \in (-\infty, +\infty)$. 计算得到

$$|f(x) - f(x_0)| = |\sin x - \sin x_0| = \left|2\sin\frac{x - x_0}{2}\cos\frac{x + x_0}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right|.$$

只要 $|x - x_0| < \delta = \epsilon$ 充分小 (其实只要小于 $\pi/4$ 即可), 有 $|f(x) - f(x_0)| \le |x - x_0| < \epsilon = \delta$. 此时我们只要取 $\delta = \epsilon$.

定义3.3.23. 函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 称为**一致连续的 (uniformly continuous)**, 如果对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$, 对任意 $x, y \in I$ 只要满足 $|x-y| < \delta$, 就有

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

成立.

注3.3.24. (1) 一致连续 $\Longrightarrow$ 连续.

(2) f 在 I 上不是一致连续 $\Longleftrightarrow$ 存在 $\epsilon_0 > 0$, 对任意 $\delta > 0$, 存在 $x_0, y_0 \in I$ 满足 $|x_0 - y_0| < \delta$, 但是 $|f(x_0) - f(y_0)| \geq \epsilon_0$.

(3) 说函数 f 是一致连续的一定要讲明定义域. 比如函数 $f(x) = 1/x$ 在 $(0, +\infty)$ 上不是一致连续 (见**例** 3.3.25 (2)) 但是在 $[1, 2]$ 上却一致连续.

例3.3.25. (1) 函数 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是一致连续的.

(2) 函数 $f(x) = 1/x$ 在 $(0, +\infty)$ 上不是一致连续的.

证: 存在 $\epsilon_0 = 1$ 对任意 $\delta > 0$ 存在 $x_0 = \min\{1/2, \delta\}$, $y_0 = x_0/2$, 满足 $|y_0 - x_0| = x_0/2 < \delta$ 但是 $|f(x_0) - f(y_0)| = 1/x_0 \geq 2 > 1 = \epsilon_0$. □

(3) 函数 $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上不是一致连续的.

证: 取 $x_n = 1/2n\pi$ 和 $y_n = 1/(2n\pi + \pi/2)$, 得到 $|x_n - y_n| = 1/[2n(4n+1)\pi]$ 但是 $|f(x_n) - f(y_n)| = |0 - 1| = 1$. □

(4) 给定函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 和常数 $0 < \alpha \leq 1$. 如果 $\exists\, M > 0$ 满足如下不等式

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^{\alpha}, \quad \forall\, x, y \in I,$$

则称函数 f 是**Hölder 连续的**并记作 $f \in C^{\alpha}(I)$. 证明 $f \in C^{\alpha}(I) \Longrightarrow f$ 是一致连续的.

证: 对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta = (\epsilon/M)^{1/\alpha} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$ 对任何 $|x-y| < \delta$ 都成立. □

定理3.3.26. 假设函数 f, g 在区间 I 上都是一致连续的 $\Rightarrow$

(a) 对任意常数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ 在 I 上是一致连续的.

(b) f, g 在 I 上有界 $\Rightarrow fg$ 在 I 上是一致连续的.

(c) f 在 I 上有界, 且存在 $\epsilon_0 > 0$ 满足 $g \geq \epsilon_0$ 对任意 $x \in I$ 都成立 $\Rightarrow f/g$ 在 I 上实际一致连续的.

证: 请读者自证. □

定理3.3.27. (Cantor) $f \in C([a, b]) \Rightarrow f$ 在 $[a, b]$ 上是一致连续的.

证: 否则存在 $\delta_0 > 0$ 和数列 $\{x_n\}_{n\ge1}, \{y_n\}_{n\ge1} \subset [a,b]$, 满足 $x_n - y_n \to 0$ 但是 $|f(x_n) - f(y_n)| \ge \epsilon_0$. 由于 $\{y_n\}_{n\ge1}$ 有界, 可以找到收敛子列 $\{y_{n_k}\}_{k\ge1}$ 满足 $y_{n_k} \to y_0 \in [a,b]$. 取 $x_{n_k} := y_{n_k} + (x_{n_k} - y_{n_k}) \to y_0 + 0 = y_0$ 得到

$$0 < \epsilon_0 \le |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \to |f(y_0) - f(y_0)| = 0.$$

矛盾表明函数 f 在 $[a,b]$ 上是一致连续的. □

如下定理给出了函数一致连续的其它充要条件.

定理3.3.28. (1) *函数 f 在区间 I 上一致连续 $\Leftrightarrow$ 对任何 $\{x_n\}_{n\ge1}, \{y_n\}_{n\ge1} \subset I$ 只要满足 $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ 都有 $\lim_{n\to\infty}[f(x_n) - f(y_n)] = 0$ 成立.*

(2) **(Paine, 1968)** *函数 f 在区间 I 上一致连续 $\Leftrightarrow$ 对任意 $\epsilon > 0$ 和任意 $x, y \in I$, 存在 $P \in \mathbb{R}$ 满足*

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \text{只要} \quad \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} > P \ (x \ne y).$$

(3) *函数 f 在区间 (a,b), $-\infty < a < b < +\infty$, 上一致连续 $\Leftrightarrow$ 对任何Cauchy 数列 $\{x_n\}_{n\ge1} \subset (a,b)$, $\{f(x_n)\}_{n\ge1}$ 也是Cauchy 数列.*

证: (1) $\Rightarrow$: 对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$, 有不等式 $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ 成立只要 $|x - y| < \delta$. 对上述 $\epsilon > 0$ 和 $\delta > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 对任意 $n > N$ 有 $|x_n - y_n| < \delta$ 从而得到 $|f(x_n) - f(y_n)| < \epsilon$.

$\Leftarrow$: 否则的话存在两个数列 $\{x_n\}_{n\ge1}$ 和 $\{y_n\}_{n\ge1}$ 满足 $x_n - y_n \to 0$, 但是 $|f(x_n) - f(y_n)| \ge \epsilon_0$.

(2) $\Leftarrow$: 任给 $\epsilon > 0$, 当 $P \le 0$ 时, $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ 对任意 $x, y \in I$ 都成立. 当 $P > 0$ 时, 取 $\delta = \epsilon / P$.

$\Rightarrow$: 否则的话存在 $\epsilon_0 > 0$ 存在 $x_0, y_0 \in I$, 对任意 $P \in \mathbb{R}$ 有

$$|f(x_0) - f(y_0)| \ge \epsilon_0, \quad \left|\frac{f(x_0) - f(y_0)}{x_0 - y_0}\right| > P.$$

记 $\alpha := |f(x_0) - f(y_0)| \ge \epsilon_0$. 存在自然数 $k \ge 2$ 满足 $(k-1)\epsilon_0 \le \alpha < k\epsilon_0$. 令 $\beta := \alpha/(k-1) \Rightarrow \epsilon_0 \le \beta < k\epsilon_0/(k-1) \le 2\epsilon_0$. 不失一般性不妨假设 $x_0 < y_0$ 且 $f(x_0) < f(y_0)$. 从

$$f(x_0) < f(x_0) + \beta < f(x_0) + \alpha \le f(y_0)$$

得到 $\exists\, x_1 \in (x_0, y_0)$ 满足 $f(x_1) = f(x_0) + \beta \Rightarrow$

$$f(x_1) < f(x_1) + \beta = f(x_0) + 2\beta \le f(y_0) + 2\beta - \alpha.$$

当 $2\beta - \alpha \le 0$ 时 (即 $k \ge 3$), 得到 $f(x_1) < f(x_n) + \beta \le f(y_0)$. 所以存在 $x_2 \in (x_1, y_0)$ 满足 $f(x_2) = f(x_1) + \beta$. 一般情形下对任意 $2 \le \ell \le k$, 存在 $x_{\ell-1} \in (x_{\ell-2}, y_0)$ 满足 $f(x_{\ell-1}) = f(x_{\ell-2}) + \beta$. 定义 $x_k := y_0$ 推出

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f(y_0) - [f(x_{k-2}) + \beta] = f(x_0) + \alpha - f(x_{k-2}) - \beta$$

$$= [f(x_0) - f(x_{k-2})] + (\alpha - \beta) = -\sum_{2\le\ell\le k-1}[f(x_{\ell-1}) - f(x_{\ell-2})] + (\alpha-\beta)$$
$$= (\alpha - \beta) - \sum_{2\le\ell\le k-1}\beta = \alpha - \beta - (k-2)\beta = \alpha - (k-1)\beta = 0.$$

做为推论得到

$$f(x_\ell) - f(x_\ell - 1) = \beta\ (1 \le \ell \le k), \quad x_\ell - x_{\ell-2} \ge \delta\ (\exists\, \delta > 0).$$

故

$$\left|\frac{f(x_0) - f(y_0)}{x_0 - y_0}\right| = \frac{|f(x_0) - f(x_k)|}{|x_0 - x_k|} \le \frac{k\beta}{k\delta} = \frac{\beta}{\delta} < \frac{2\epsilon_0}{\delta} = P.$$

发生矛盾!

(3) $\Rightarrow$: 假设函数 f 在 (a,b) 上是一致连续且 $\{x_n\}_{n\ge1}$ 是Cauchy 数列. 对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$, 对任意 $x, y \in (a,b)$ 满足 $|x-y| < \delta$, 都有 $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ 成立. 对这个 $\delta > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 对任意 $m, n > N$ 有不等式 $|x_m - x_n| < \delta$ 成立. 因此有 $|f(x_m) - f(x_n)| < \epsilon$ 从而 $\{f(x_n)\}_{n\ge1}$ 也是Cauchy 的.

$\Leftarrow$: 假设函数 f 不是一致连续的. 存在 $\epsilon_0 > 0$ 和存在 $x'_n, y'_n \in (a,b)$ 满足 $|x'_n - y'_n| < 1/n$, 但是 $|f(x'_n) - f(y'_n)| \ge \epsilon_0$. 由于 (a,b) 是有界的, 存在 $\{x'_n\}_{n\ge1}$ 的收敛子列 $\{x'_{n_k}\}_{k\ge1}$; 令 $x = \lim_{k\to\infty} x'_{n_k} \Rightarrow x = \lim_{k\to\infty} y'_{n_k}$. 取

$$x_1 = x'_{n_1},\ x_2 = y'_{n_1},\ x_3 = x'_{n_2},\ x_4 = y'_{n_2},\ \cdots,\ x_{2k-1} = x'_{n_k},\ x_{2k} = y'_{n_k}, \cdots.$$

则得到Cauchy 数列 $\{x_k\}_{k\ge1}$, 但是 $|f(x_{2k-1}) - f(x_{2k})| \ge \epsilon_0$ 从而 $\{f(x_k)\}_{k\ge1}$ 不是Cauchy 数列. □

定义3.3.29. 假设函数 f 在邻域 $U(x_0, \rho)$ 内有定义, 其中 $\rho > 0$. 定义

$$\omega_f(x_0, r) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in U(x_0, r)\}, \quad 0 < r < \rho. \tag{3.3.2}$$

对任意 $r_1 < r_2 \in (0, \rho)$, 显然有

$$0 < \omega_f(x_0, r_1) \le \omega_f(x_0, r_2).$$

故可定义函数 f 的**振幅 (oscillation)** 如下

$$\omega_f(x_0) := \lim_{r\to0+} \omega_f(x_0, r). \tag{3.3.3}$$

当函数 f 定义在 $[x_0, x_0+\rho)$ 或 $(x_0-\rho, x_0]$ 内时, 也可以类似定义 $\omega_f(x_0)$. 另一方面 $\omega_f(x_0)$ 可以为 $+\infty$, 比如对函数

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

有 $\omega_f(0) = +\infty$.

例3.3.30. 考察函数
$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x>0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$
显然有 $\omega_f(0)\le 2$. 取 $a_n=1/(2n\pi+\pi/2)$ 和 $b_n=1/(2n\pi-\pi/2)$ 得到
$$|f(a_n)-f(b_n)|=|1-(-1)|=2.$$
因此 $\omega_f(0)=2$.

为了研究函数的一致连续性,我们可类似地引入连续模的概念. 假设函数 $f(x)$ 定义在区间 I 上, 对任意 $\delta>0$ 定义
$$\omega_f(I,\delta):=\sup\{|f(x)-f(y)|: x,y\in I \text{ 且 } |x-y|<\delta\}. \tag{3.3.4}$$
根据定义立即得到
$$\omega_f(I,\delta_1+\delta_2)\le\omega_f(I,\delta_1)+\omega_f(I,\delta_2),\quad \forall\,\delta_1,\delta_2>0.$$
对任意 $\delta_1<\delta_2$, 显然有
$$0<\omega_f(I,\delta_1)\le\omega_f(I,\delta_2).$$
故可定义函数 f 在区间 I 上的**连续模 (modulus of continuity)** 如下
$$\omega_f(I):=\lim_{\delta\to0+}\omega_f(I,\delta). \tag{3.3.5}$$
比如对函数 $f(x)=x$, 其在 $\mathbb{R}$ 上的连续模为
$$\omega_x(\mathbb{R})=\lim_{\delta\to0+}\omega_x(\mathbb{R},\delta)=\lim_{\delta\to0+}\delta=0.$$
又比如对定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)=\sin(x^2)$, 有
$$\omega_{\sin(x^2)}(\mathbb{R},\delta)\le 2;$$
取 $x_n=\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ 和 $y_n=\sqrt{2n\pi-\frac{\pi}{2}}$ 则得到
$$\omega_{\sin(x^2)}(\mathbb{R},\delta)=2$$
从而得到 $\omega_{\sin(x^2)}(\mathbb{R})=2$.

定理3.3.31. (1) 函数 f 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \omega_f(x_0)=0$.
(2) 函数 f 在区间 I 上一致连续 $\Leftrightarrow \omega_f(I)=0$.

证: (1) $\Rightarrow$: 对任意 $\epsilon>0$ 存在 $\delta>0$, 对任意 $x\in U(x_0,\delta)$, 有
$$|f(x)-f(x_0)|<\epsilon/2.$$

故对任意 $0 < r \le \delta$ 和任意 $x, y \in U(x_0, r)$ 得到

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(x_0)| + |f(y) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

因此 $\omega_f(x_0, r) \le \epsilon$ 推出 $\omega_f(x_0) = 0$.

$\Leftarrow$: 假设 $\omega_f(x_0) = 0$. 对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$, 对任意 $0 < r \le \delta$, 有 $\omega_f(x_0, .r) < \epsilon$, 从而 $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ 对任意 $x, y \in U(x_0, r)$ 都成立. 特别地 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ 对任何 $x \in U(x_0, \delta)$ 都成立.

(2) 根据定义可得. □

注3.3.32. (1) 函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续 $\Leftrightarrow$ 函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上一致连续.

(2) *函数 f 在开区间 (a, b) 上一致连续 $\Rightarrow$ 函数 f 在开区间 (a, b) 上连续. 但是反之则不一定成立.*

接下来我们给出连续函数在开区间上一致连续的充要条件.

定理3.3.33. *给定连续函数 $f \in C((a, b)) \Rightarrow$ 函数 f 在 (a, b) 上一致连续当且仅当极限 $\lim_{x \to a+} f(x)$ 和 $\lim_{x \to b-} f(x)$ 都存在.*

证: $\Rightarrow$: 根据**定理 3.1.16**.

$\Leftarrow$: 令 $A := \lim_{x \to a+} f(x)$ 和 $B := \lim_{x \to b-} f(x)$. 定义

$$F(x) := \begin{cases} A, & x = a, \\ f(x), & a < x < b, \\ B, & x = b. \end{cases}$$

则 $F \in C([a, b])$ 推出 F 是一致连续的, 从而 f 在 (a, b) 上是一致连续的. □

注3.3.34. (1) *连续 + 有界 $\not\Rightarrow$ 一致连续*: 函数 $f(x) = \sin(x^2)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续且有界. 存在 $\epsilon_0 = 1/2$, 对任意 $\delta > 0$ 存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 满足 $\frac{1}{\sqrt{n_0}} < \delta$, 从而存在 $x_1 = \sqrt{2n_0\pi}$ 和 $x_2 = \sqrt{2n_0\pi + \frac{\pi}{2}}$ 满足

$$0 < x_2 - x_1 = \frac{\pi}{2}(x_2 + x_1)^{-1} \le \frac{\pi}{2}(2x_1)^{-1} = \frac{\pi}{4}x_1^{-1} < \frac{1}{\sqrt{2n_0\pi}} < \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \delta$$

和

$$|f(x_2) - f(x_1)| = \sin\left[(2n_0 + 1)\frac{\pi}{2}\right] - \sin(2n_0\pi) = 1 > \epsilon_0.$$

(2) 闭区间 $[a, b]$ 上连续 $\Rightarrow$ 闭区间 $[a, b]$ 上一致连续.

(3) *f, g 一致连续 $\not\Rightarrow$ fg 一致连续*: $f(x) = x, g(x) = \sin x$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

(4) *f 一致连续且 f^{-1} 存在 $\not\Rightarrow$ f^{-1} 一致连续*: $f(x) = \ln x$, $x \in [a, +\infty)$, $a > 0$.

(5) $f \in C([a,+\infty))$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A < \infty \Rightarrow$ 函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续. 一般地, $f \in C((-\infty,+\infty))$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = B \Rightarrow$ 函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

证: $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ 推出对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $M > a$, 对任意 $x,y \geq M$ 有 $|f(x)-f(y)| < \epsilon$ 成立. 因为 $f \in C([a,M+1])$, 故 f 在 $[a,M+1]$ 上一致连续从而对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta_1 > 0$, 对任意 $x,y \in [a,M+1]$ 只要满足 $|x-y| < \delta_1$ 就有 $|f(x)-f(y)| < \epsilon$ 成立. 令 $\delta = \min\{1,\delta_1\}$, 则对任意 $x,y > a$ 只要满足 $|x-y| < \delta$ 就有 $x,y \in [a,M+1]$ 或 $x,y \in [M,+\infty)$. 故 $|f(x)-f(y)| < \epsilon$. □

很多参考书上都是采用这样的证明, 还特意强调不能用函数 f 在闭区间 $[a,M]$ 上一致连续来证明. 人云亦云, 害人不浅! 其实是可以这样去做的, 请诸位思考 (实在想不出来可参考: 徐森林, 薛春华 编著: **数学分析**, 清华出版社, 2005, 第一册, 例2.5.10)

(6) 若函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, $\varphi \in C([a,+\infty))$ 且 $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\varphi(x)] = 0 \Rightarrow \varphi$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

证: 对任意 ϵ 存在 $M > 0$, 对任意 $x > M$ 有 $|f(x)-\varphi(x)| < \epsilon$ 成立. f 一致连续推出对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta_1 > 0$, 对任意 $x,y > a$ 只要满足 $|x-y| < \delta_1$ 有不等式 $|f(x)-f(y)| < \epsilon$ 成立. 从而对任何 $x,y > M$ 只要满足 $|x-y| < \delta_1$ 就有

$$|\varphi(x)-\varphi(y)| \leq |f(x)-\varphi(x)| + |f(y)-\varphi(y)| + |f(x)-f(y)| < \epsilon+\epsilon+\epsilon = 3\epsilon.$$

在 $[a,M+1]$ 上应用Cantor 定理得到 φ 在 $[a,M+1]$ 上一致连续. 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta_2 > 0$ 对任意 $x,y \in [a,M+1]$ 只要满足 $|x-y| < \delta_2$ 有 $|\varphi(x)-\varphi(y)| < \epsilon$ 成立. 取 $\delta = \min\{1,\delta_1,\delta_2\}$, 对任意 $x,y \geq a$ 只要满足 $|x-y| < \delta$ 有 $x,y \in [M,+\infty)$ 或 $[a,M+1]$. 故 $|\varphi(zx)-\varphi(y)| < 3\epsilon$. □

(7) 函数 $f(x) = x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续, 但是其平方 $f^2(x) = x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是一致连续的:

$$\left|(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2\right| = 1, \quad \left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0.$$

(8) 函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续 $\Rightarrow$ 存在 $a,b \geq 0$ 使得 $|f(x)| \leq a|x|+b$ 对任何 $x \in (-\infty,+\infty)$ 都成立.

证: 对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$, 对任意 $x,y \in (-\infty,+\infty)$ 只要满足 $|x-y| < \delta$ 都有不等式 $|f(x)-f(y)| < \epsilon$ 成立. 固定上述 $\epsilon,\delta > 0$, 对任意 $x \in (-\infty,+\infty)$, 存在 $n \in \mathbb{Z}$ 和 $x_0 \in (-\delta,\delta)$ 使得 $x = n\delta + x_0$ 成立. 故存在 $M > 0$ 使得 $|f(x)| \leq M$ 对任何 $x \in [-\delta,\delta]$ 都成立. 根据

$$f(x) = \sum_{1\leq k\leq|n|} \{f(k\delta+x_0) - f[(k-1)\delta+x_0]\} + f(x_0)$$

得到

$$|f(x)| \le \sum_{1\le k\le |n|} |f(k\delta + x_0) - f[(k-1)\delta + x_0]| + |f(x_0)| \le |n|\epsilon + M$$

$$= \frac{\epsilon}{\delta}|x - x_0| + M \le \frac{\epsilon}{\delta}|x| + \left(M + \frac{\epsilon}{\delta}|x_0|\right) \le \frac{\epsilon}{\delta}|x| + (M+\epsilon). \quad \square$$

例3.3.35. (1) 证明函数

$$f(x) = \begin{cases} |x|\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right), & x \ne 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

一致连续.

证: 因为

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (2x+1)] = \lim_{x\to-\infty}[f(x) + (2x+1)] = 0$$

并结合**注 3.3.34** (6) 得到结论. □

(2) 函数 $f(x) = \sin^2 x$ 在 $[-, +\infty)$ 上一致收敛.

(3) 函数 $f(x) = \sin(x^2)$ 在 $[0, +\infty)$ 不是一致收敛.

(4) 函数 $f(x) = |\sin x|/x$ 在 $(-1, 1)$ 上不是一致收敛.

(5) 函数 $f(x) = \sin(x \sin x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上不是一致收敛.

根据**注 3.3.34** 中的想法, 可以证明如果函数 f 在 $(-\infty, 1]$ 和 $[-1, +\infty)$ 上都是一致连续则函数 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上也是一致连续. 请读者自证.

§3.4 参考文献

1. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis I*, Translated from the 1988 German original by Gary Brookfield, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. xiv+426 pp. ISBN: 3-7643-7153-6

2. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis II*, Translated from the 1999 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. xii+400 pp. ISBN: 978-3-7643-7472-3; 3-7643-7472-3

3. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis III*, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. xii+468 pp. ISBN: 978-3-7643-7479-2; 3-7643-7479-2

4. Ramankutty, P.; Vamanamurthy, M. K. *Limit of the composite of two functions*, Amer. Math. Monthly, **82**(1975), 63 - 64.

5. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis I*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+574 pp. ISBN: 3-540-40386-8

6. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis II*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xvi+681 pp. ISBN: 3-540-40633-6

7. 常庚哲, 史济怀 编: **数学分析教程** (上、下册), 高等教育出版社, 2003.

8. 陈天权 编著: **数学分析讲义** (第一、二、三册), 北京大学出版社, 2009.

9. 邓建平 编: **微积分 I 和 II**, 科学出版社, 2019.

10. 吉米多维奇 著 (李荣涑, 李植 译): **数学分析习题集** (根据 2010 年俄文版翻译), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.

11. 黎景辉, 赵春来 著: **模曲线导引** (第二版), 北京大学出版社, 2014.

12. 李傅山, 王培合 编著: **数学分析习题课讲义** (1、2、3), 北京大学出版社, 2018.

13. 林源渠, 方企勤 编: **数学分析解题指南**, 北京大学出版社, 2003.

14. 梅加强 编著: **数学分析**, 高等教育出版社, 2015.

15. 裴礼文 编著: **数学分析中的典型问题与方法** (第二版), 高等教育出版社, 2015.

16. 汪林 著: **数学分析中的问题和反例**, 现代数学基础 **56**, 高等教育出版社, 2015.

17. Weir, D. Maurice; Hass, R. Joel; Giordano, R. Frank. *Thomas' calculus*, Eleventh Edition, (影印版, 上、下册), 高等教育出版社, 2016.

18. 徐森林, 薛春华 编著: **数学分析**, 清华出版社, 2005.

19. 杨小远, 孙玉泉, 薛玉梅, 杨卓琴 编著: **工科数学分析教程** (上、下册), 科学出版社, 2011.

20. 张福保, 薛金美, 潮小李 主编: **数学分析讲义**, 科学出版社, 2019.

21. 张筑生 编著: **数学分析新讲** (第一、二、三册), 北京大学出版社, 1990.

22. 周民强 编著: **数学分析习题演练** (第一、二、三册), 科学出版社, 2018.

23. 朱尧辰 编著: **数学分析例选通过范例学技巧**, 哈尔滨工业大学出版社, 2013.

第四章　导数理论

One more differentiation of the first of these two equations yields

$$36J(J-1)\frac{d^2\Omega}{dJ^2}+(69J-42)\frac{d\Omega}{dJ}+2(J-1)\frac{dH}{dJ}-3\Omega+2H=0,$$

an equation which we join with the two preceding ones for the elimination of H and $\frac{dH}{dJ}$*. By this we finally obtain the anticipated differential equation in the form:*

$$\frac{d^2\Omega}{dJ^2}+\frac{1}{J}\cdot\frac{d\Omega}{dJ}+\frac{\frac{31}{144}J-\frac{1}{36}}{J^2(J-1)^2}\cdot\Omega=0.$$

—- Klein, Felix; Fricke, RObert. *Lectures on the theory of elliptic modular functions* (translated by Arthur M. Dupre), First volume, CTM **1**, Higher Education Press, 2017.

§4.1　微分和导数

给定函数 $f(x)$ 和其定义域中的点 a, 一个很自然的问题是当 $x\to a$ 如何用已知的函数值 $f(a)$ 来 (近似地) 计算未知的函数值 $f(x)$. 比如考察如下的例子:

$$f(x)=x^2,\quad x\in\mathbb{R}.$$

令 $\Delta x:=x-a$ 得到

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a+\Delta x) = (a+\Delta x)^2 \\ &= a^2+2a\Delta x+(\Delta x)^2 = f(a)+2a(x-a)+(x-a)^2. \end{aligned}$$

因为

$$\frac{f(x)-f(a)-2a(x-a)}{x-a}=\frac{(x-a)^2}{x-a}=x-a\to 0$$

所以当 $x\to a$ 时得到

$$f(x)=f(a)+2a(x-a)+o(x-a).$$

由此可见, 当 x 和 a 靠的很近时, 我们可以用线性函数 $f(a)+2a(x-a)$ 来近似的计算 $f(x)$.

§4.1.1　微分

当然上面这个例子是较简单, 然而其中的想法确可以推广之. 由此我们引入如下定义.

定义4.1.1. 假设函数 f 定义在某个邻域 $U(x_0, r)$ 内. 称f **在 x_0 处可微 (differentiable)** 如果存在常数 A (不依赖 x) 使得

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$$

当 $x \to x_0$ 时成立. 线性函数 $A(x - x_0)$ 称为f **在 x_0 处的微分 (differential)**.

为了方便期间, 引入如下记号:

(a) $\Delta x := x - x_0$.

(b) $\Delta y \equiv \Delta f := f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

(c) $df(x) := A(x - x_0)$ 或者 $dy \equiv df := A\Delta x$.

例4.1.2. (1) 函数 $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}_+$, 在每点 $x \in (-\infty, +\infty)$ 处都可微且 $dy = nx^{n-1}\Delta x$.

(2) 函数 $f(x) = |x|$ 只在 $x = 0$ 处不可微.

证: (1) $x \in \mathbb{R}$, 从下列计算

$$\begin{aligned} \Delta y \quad &= \quad f(x + \Delta x) - f(x) \quad = \quad (x + \Delta x)^n - x^n \\ = \quad nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n \quad &= \quad nx^{n-1}\Delta x + o(\Delta x) \end{aligned}$$

得到 $\Delta y = nx^{n-1}\Delta x$.

(2) 若 $x \neq 0$ 则根据 (1) 知道函数 $f(x)$ 在 x 处可微. 若 $x = 0$ 得到

$$\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = |\Delta x|.$$

如果 $\Delta x > 0$, 则 $\Delta y = \Delta x$; 如果 $\Delta x < 0$, 则 $\Delta y = -\Delta x$. 故不存在常数 A 使得 $\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x)$ 成立. □

注4.1.3. (1) 对函数 $f(x) = x$ 得到

$$dx = dy = \Delta x \quad \Longrightarrow \quad \text{一般地把微分记作 } dy = Adx \text{ (\textbf{Leibniz 记号})}$$

(2) 函数 f 在 x_0 处可微 $\Longrightarrow$ 函数 f 在 x_0 处连续. 但反之则不对, 譬如例 4.1.2 (2).

(3) 给定点 $x_1, \cdots, x_n \Longrightarrow$ 存在函数只在 $x_1, \cdots, x_n$ 处不可微. 比如,

$$f(x) = \sum_{1 \leq k \leq n} |x - x_k|.$$

(4) 存在函数只在 $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ 处可微但在 $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ 处不可微. 比如

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{|x - r_n|}{3^n}$$

其中 $\{r_n\} = [0,1] \cap \mathbb{Q}$.

(5) (Weierstrass) 存在函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处不可微:

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} b^n \cos(a^n \pi x),$$

这里 $0 < b < 1$, $a > 0$ 为奇数, 且满足 $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

(6) (Caratheodory)[1] 可微的等价定义:

函数 f 在 x_0 可微 $\Longleftrightarrow$ 存在函数 g 在 x_0 处连续且 $f(x) = f(x_0) + g(x)(x - x_0)$.

证: $\Rightarrow$: 存在 A 满足

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0).$$

由此定义

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A + \frac{o(x-x_0)}{x-x_0}, & x \neq x_0, \\ A, & x = x_0. \end{cases}$$

因为 $\lim_{x\to x_0} g(x) = A = g(x_0)$, 函数 g 在 x_0 处连续.

$\Leftarrow$: 假设存在 g 使得 g 在 x_0 处连续且 $f(x) = f(x_0) + g(x)(x - x_0)$. 令 $A := g(x_0)$ 得到

$$\frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{x - x_0} = g(x) - g(x_0) \to 0$$

当 $x \to x_0$ 时. □

(7) 存在函数只在一点可微, 比如

$$f(x) = \begin{cases} x(1-x), & x \in \mathbb{Q}, \\ x(1+x), & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

仅在 $x = 0$ 处可导.

§4.1.2 导数

假设函数 f 在 x_0 处可微. 则

$$A = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + o(1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} + o(1).$$

[1]Constantin Caratheéodory, 1873 年 9 月 13 日 - 1950 年 2 月 2 日, 今德国柏林人, 希腊数学家. 1902 年德国 Georg August University of Göttingen (哥廷根大学) 博士毕业, 导师是著名数学家Hermann Minkowski. 他指导了大约 20 多名博士生, 比如Paul Finsler, Hans Rademacher 和中国第一位女数学博士同时也是Carathéodory 的关门弟子徐瑞云 (1915 年 6 月 - 1969 年 1 月, 上海市人, 祖籍浙江省宁波市慈溪市五洞闸镇, 1941 年德国 Ludwig Maximilian University of Munich (慕尼黑大学) 博士毕业, 同年回国任教于浙江大学. 1955 年翻译出版了苏联数学家Isidor Pavlovich Natanson《实变函数论》, 1956 年加入中国共产党. 培养诸如曹锡华、叶彦谦、金福临、越民义、孙以丰、杨宗道等杰出的数学家).

令 $x \to x_0$ 得到

$$A = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

定义4.1.4. 假设函数 f 定义在邻域 $U(x_0, r)$ 内. 称 f 在 x_0 **处可导(derivable)** 若极限

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0) \tag{4.1.1}$$

存在. 该极限 $f'(x_0)$ 称为 f 在 x_0 **处的导数 (derivative)**.

定理4.1.5. *函数 f 在 x_0 处可微 $\iff$ 函数 f 在 x_0 处可导.*

证: 根据定义直接得到. □

例4.1.6. (1) 考察函数

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

其中 $n \in \mathbb{N}_+$. 证明 (a) $n \geq 1 \Rightarrow f \in C((-\infty, +\infty))$. (b) $n \geq 2 \Rightarrow f$ 在 $x = 0$ 处可导. (c) $n \geq 3 \Rightarrow f'$ 在 $x = 0$ 处连续.

证: $n \geq 1$ 得到

$$\lim_{x \to 0} x^n \sin\frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} \left(x \sin\frac{1}{x}\right)(x^{n-1}) = 0.$$

$n \geq 2$ 得到

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^{n-1} \sin\frac{1}{\Delta x} = 0.$$

$n \geq 3$ 得到

$$f'(x) = nx^{n-1} \sin\frac{1}{x} - x^{n-2} \cos\frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

$\lim_{x \to 0} f'(x) = 0 - \lim_{x \to 0} x^{n-2} \cos(1/x) = 0.$ □

(2) *给定区间 I. 如果函数 f 在 I 内处处可导, 记作 $f \in D(I)$. 如果函数 $f \in D(I)$ 的导函数 f' 在 I 内处处连续, 记作 $f \in C^1(I)$.* 根据 (1) 得到下列关系

$$C(I) \supsetneqq D(I) \supsetneqq C^1(I). \tag{4.1.2}$$

接下来我们会看到 $C^1(I)$ 中上标的本质含义.

(3) 假设函数 f 在 x_0 处可导 $\Rightarrow$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} = f'(x_0).$$

进一步, 对任何 $\alpha \neq \beta$ 有

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \alpha\Delta x) - f(x_0 + \beta\Delta x)}{(\alpha - \beta)\Delta x} = f'(x_0).$$

证: 计算得到

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}+\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-2\Delta x}$$

$$\to\frac{f'(x_0)}{2}+\frac{f'(x_0)}{2}=f'(x_0).$$

若 α,β 中有一个为 0, 则结论显然成立. 下面假设 $\alpha,\beta\neq 0$. 和上面计算类似可得到

$$\frac{f(x_0+\alpha\Delta x)-f(x_0+\beta\Delta x)}{(\alpha-\beta)\Delta x}=\frac{f(x_0+\alpha\Delta x)-f(x_0)}{\alpha\Delta x}\frac{\alpha}{\alpha-\beta}$$

$$+\frac{f(x_0+\beta\Delta x)-f(x_0)}{\beta\beta\Delta x}\frac{-\beta}{\alpha-\beta}\ \to\ f'(x_0)\frac{\alpha}{\alpha-\beta}+f'(x_0)\frac{-\beta}{\alpha-\beta}\ =\ f'(x_0).\ \square$$

(4) (3) 的反命题不一定成立, 不如考察函数 $f(x)=|x|$, $x_0=0$.

(5) 如果函数 f 在 x_0 处可导, 且存在数列 $\{a_n\}_{n\geq1}$, $\{b_n\}_{n\geq1}$ 满足

$$a_n<x_0<b_n,\quad \lim_{n\to\infty}a_n=x_0=\lim_{n\to\infty}b_n,$$

则

$$f'(x_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}.$$

证: 计算得到

$$I_n:=\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=\frac{b_n-x_0}{b_n-a_n}\frac{f(b_n)-f(x_0)}{b_n-x_0}+\frac{x-a_n}{b_n-a_n}\frac{f(a_n)-f(x_0)}{a_n-x_0}.$$

引入记号

$$\lambda_n:=\frac{b_n-x_0}{b_n-a_n},\quad \mu_n:=\frac{x_0-a_n}{b_n-a_n},\quad 0\leq\lambda_n,\mu_n\leq1,\ \lambda_n+\mu_n=1.$$

从而有

$$|I_n-f'(x_0)|\ =\ \left|\lambda_n\frac{f(b_n)-f(x_0)}{b_n-x_0}+\mu_n\frac{f(x_n)-f(x_0)}{a_n-x_0}-(\lambda_n+\mu_n)f'(x_0)\right|$$

$$\leq\ \lambda_n\left|\frac{f(b_n)-f(x_0)}{b_n-x_0}-f'(x_0)\right|+\mu_n\left|\frac{f(a_n)-f(x_0)}{a_n-x_0}-f'(x_0)\right|\ \to\ 0.\ \square$$

(6) 在 (5) 中条件"$a_n<x_0<b_n$"是必须的. 比如考察函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

例 4.1.6 (1) 已经告诉我们 $f'(0)=0$. 但是若取 $a_n=2/[(4n+1)\pi]$ 和 $b_n=2/4n\pi$, 得到 $0<a_n<b_n$ 但是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{16n^2\pi^2}\cdot0-\frac{4}{(4n+1)^2\pi^2}\cdot1}{\frac{2}{\pi}(\frac{1}{4n}-\frac{1}{4n+1})}=-\frac{2}{\pi}\neq0=f'(0).$$

(7) 如果 $f'(0)$ 存在, 且存在数列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$, $\{y_n\}_{n\geq 1}$ 满足条件

$$0 < x_n < y_n, \quad y_n \to 0, \quad \frac{y_n}{y_n - x_n}$$

则

$$f'(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}.$$

证: 和 (5) 证明几乎一样. □

(8) 证明Riemann 函数

$$R(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in (0,1) \cap \mathbb{Q} \ ((p,q) = 1). \end{cases}$$

在 $x \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}$ 连续但不可导.

证: 连续性已证, 可参见**例 3.3.5** (1). 下证第二个论断. 对任意 $x_0 \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}$ 存在数列 $\{h_n\}_{n\geq 1} \to 0$ 使得 $x_0 + h \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}$ 成立. 比如, 若记 $x_0 = 0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$, 则可取 $h_n = 0.a_1a_2\cdots a_n - x_0$. 令 N 为最小正整数满足 $a_N \neq 0$ 得到

$$f(x_0 + h_n) = f(0,a_1\cdots a_n) \geq \frac{1}{10^n} \ (n \geq N), \quad |h_n| \leq \frac{1}{10^n}$$

和

$$\left| \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} \right| = \left| \frac{f(x_0 + h_n)}{h_n} \right| \geq 1. \quad \square$$

(9) $f \in D([a,+\infty))$, $f(a) = 0$, 且 $f'(x) \geq -f(x)$ $(x \in [a,+\infty)) \Rightarrow f(x) \geq 0$ 对任何 $x \in [a,+\infty)$ 成立.

证: 否则存在 $x_0 > a$ 满足 $f(x_0) < 0$. 根据闭区间上连续函数必有最小值, 得到

$$f(t) = \min_{[a,x_0]} f, \quad \exists\, t \in [a, x_0].$$

因为 $f(a) = 0$, 必有 $a < t \leq x_0$ 且 $f(t) < 0$. 因为 $f'(t) > 0, \exists\, h > 0$ 使得不等式 $0 < [f(t-h) - f(t)]/-h$ 成立, 即 $f(t-h) < f(t)$, 这是不可能的! □

(10) 根据行列式定义及第二节中的Leibniz 法则得到

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{in}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{1\leq i\leq n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{i1}(x) & f'_{i2}(x) & \cdots & f'_{in}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

(11) 求函数 $f(x) = \sin x$ 的导数.

解: 因为

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{1}{2}\Delta x\right)\sin\left(\frac{1}{2}\Delta x\right)$$

所以

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \cos x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} = \cos x. \quad \square$$

§4.1.3 线性逼近

考虑曲线 $y = f(x)$ 和其上的点 $P = (x_0, y_0)$. 任取曲线上点 $Q = (x, y)$, 得到直线 PQ 方程

$$y - y_0 = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0).$$

当 $Q \to P$ 沿着曲线得到 P 处的**切线方程 (tangent line equation)**

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{4.1.3}$$

此时过 P 的**法线方程 (normal line equation)** 为

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad 若\ f'(x_0) \neq 0, \tag{4.1.4}$$

或者 $x = x_0$, 若 $f'(x_0) = 0$.

§4.1.4 单侧导数

因为导数 $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0}[f(x) - f(x_0)]/(x - x_0)$ 是函数极限的一种特殊情况, 所以可以引入单侧导数之概念.

定义4.1.7. 假设函数 f 定义在区间 $[x_0, x_0 + r)$ 内. 函数 f 在 x_0 处的**右导数 (right-sided derivative)** 定义为

$$f'_+(x_0) := \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{4.1.5}$$

类似地对定义在区间 $(x_0 - r, x_0]$ 内的函数 f 可以定义其在 x_0 处的**左导数 (left-sided derivative)**:

$$f'_-(x_0) := \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{4.1.6}$$

例4.1.8. (1) 对函数 $f(x) = |x|$ 求 $f'_+(0)$ 和 $f'_-(0)$.

解: 因为

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{x - 0}{x} = 1, \\ f'_-(0) &= \lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{-x - 0}{x} = -1, \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 处不存在导数. □

(2) 对函数 $f(x)=|\ln|x||, x\neq 0$, 求 $f'_+(1)$ 和 $f'_-(1)$.

解: 根据 $f(1)=|\ln 1|=0$, 得到

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{|\ln x|}{x-1}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{|\ln(1+\Delta x)|}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0+}\left|\ln\left[(1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}\right]\right| = \ln e = 1.$$

类似地得到 $f'_-(1)=-1$. □

注4.1.9. (1) 函数 f 在 x_0 处可导 $\Leftrightarrow f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$ 存在.

(2) 函数 f 在 x_0 处可导 $\not\Rightarrow$ 其绝对值 $|f|$ 在 x_0 处连续. 比如函数 $f(x)=|x|$.

(3) 可以定义函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 甚至一般区间 I 上的可导性. 对内部点 $x_0\in I$, $f'(x_0)$ 是通常意义下的导数, 对端点 $x_0\in I$, $f'(x_0)$ 定义为左导数或右导数.

(4) 假设 $f\in D((a,b))$, 我们有如下结论:

(a) $\lim_{x\to a+}f(x)=\infty \not\Rightarrow \lim_{x\to a+}f'(x)=\infty$. 比如

$$f(x):=\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x},\quad 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

(b) $\lim_{x\to a+}f'(x)=\infty \not\Rightarrow \lim_{x\to a+}f(x)=\infty$. 比如

$$f(x)=x^{1/3},\quad 0<x<1.$$

这两个反例说明函数在端点处取到无穷大和函数的导数在端点处取到无穷大, 没有本质上的联系.

(5) 假设 $f\in D((a,+\infty))$, 我们有如下结论:

(a) $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 存在 $\not\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在. 比如

$$f(x)=\frac{\sin(x^2)}{x},\quad x>0.$$

(b) $\lim_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在 $\not\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)$ 存在. 比如

$$f(x)=\cos(\ln x),\quad x>0.$$

(c) $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 和 $\lim_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在 $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$. 这个需要微分中值定理来证明.

证: 令 $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=A$. 存在 $x_0>a$ 对任何 $x>x_0$ 有 $|f'(x)|\geq |A|/2$. 根据微分中值定理, **定理** 4.5.3, 存在 $\xi\in(x_0,x)$

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|=|f'(\xi)|\geq\frac{|A|}{2}.$$

由于 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 故 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$. 因此 $A=0$. □

(a) 和 (b) 中的反例说明函数在无穷远处的值和函数的导数在无穷远处的值, 是没有本质上的联系.

例4.1.10. 假设 $f\in C((-\infty,+\infty))$, 且对任意 $x\in\mathbb{R}$ 有

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(x+2h)-f(x+h)}{h}=0.$$

证明右侧导数 $f'_+(x)$ 存在且 f 为常值函数.

证: 对任意 $\epsilon>0$ 存在 $\delta>0$, 对任意 $0<h<\delta$ 有

$$\left|\frac{f(x+2h)-f(x+h)}{h}\right|<\epsilon.$$

对一般的 $k\in\mathbb{N}$ 得到

$$\left|\frac{f(x+2^{-k}h)-f(x+2^{-k-1}h)}{2^{-k-1}h}\right|<\epsilon.$$

因为函数 f 连续, 故得到

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{0\le k\le n}\left[f\left(x+\frac{h}{2^k}\right)-f\left(x+\frac{h}{2^{k+1}}\right)\right] \\ &= \sum_{k\ge 0}\left[f\left(x+\frac{h}{2^k}\right)-f\left(x+\frac{h}{2^{k+1}}\right)\right]. \end{aligned}$$

从而

$$|f(x+h)-f(x)|\le\sum_{k\ge 0}\frac{h\epsilon}{2^{k+1}}=h\epsilon.$$

这表明右侧导数 $f'_+(x)$ 存在且 $f'_+(x)=0$. 接下来证明函数的导数均为 0. 对任意 $\epsilon>0$ 存在 $\delta>0$, 对任意 $0<h<\delta$ 有

$$|f(x+h)-f(x)|<h\epsilon.$$

因此对任意 $a<b$ 存在 $n_0\in\mathbb{N}$ 只要 $(b-a)/n_0<\delta$ 就有

$$\begin{aligned} |f(b)-f(a)| &\le \left|f(b)-f\left(a+\frac{b-a}{n_0}\right)\right|+\left|f\left(a+\frac{b-a}{n_0}\right)-f\left(a+2\frac{b-a}{n_0}\right)\right| \\ &+\cdots+\left|f\left(a+(n_0-1)\frac{b-a}{n_0}\right)-f(b)\right| \le \left(\frac{b-a}{n_0}\epsilon\right)n_0 = (b-a)\epsilon. \end{aligned}$$

根据 ϵ 的任意性得到 $f(b)=f(a)$. □

例4.1.11. 若 $|f(x)-f(x_0)|\le L|x-x_0|^a$, 其中 $a>1$ 和 $L>0$, 证明 $f'(x_0)=0$.

证: 根据条件得到

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-0\right|\le L|x-x_0|^{a-1}.$$

当 $x\to x_0$ 时, 由于 $a>1$, 得到 $f'(x_0)=0$. □

§4.2 求导法则

以下基本初等函数的导数容易求得:

(1) (常值函数)$' = 0$.

(2) $(x^n)' = nx^{n-1}$, 其中 $n \in \mathbb{N}_+$, $x \in \mathbb{R}$.

(3) $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, 其中 $x \in \mathbb{R}$. 事实上

$$\frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \to -\sin x$$

当 $\Delta x \to 0$ 时. $(\sin x)' = \cos x$ 已在**例** 4.1.6 (11) 得证.

(4) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, 其中 $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$. 特别地, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$. 事实上

$$\frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \frac{\ln(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} = \frac{1}{x}\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right] \to \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}$$

当 $\Delta x \to 0$ 时. 根据 $\log_a x = \ln x / \ln a$ 可得到一般对数函数的导数.

(5) $(a^x)' = a^x \ln a$, 其中 $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. 特别地 $(e^x)' = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. 事实上根据

$$\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \frac{e^{\ln a \Delta x} - 1}{\Delta x} \to \ln a, \quad \Delta x \to 0,$$

得到

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

(6) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, 其中 $a \in \mathbb{R}$, $x > 0$. 事实上

$$(x^\alpha)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = x^{\alpha-1} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1 + \frac{\Delta x}{x})^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = x^{\alpha-1}\alpha.$$

§4.2.1 导数的算术运算

导数最基本的算术运算是四则运算.

性质4.2.1. (1) $f, g \in D(I)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g \in D(I)$ 且

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'. \tag{4.2.1}$$

(2) $f, g \in D(I) \Rightarrow fg \in D(I)$ 且

$$(fg)' = f'g + fg'. \tag{4.2.2}$$

(3) $f, g \in D(I)$, $g \neq 0$ 在 I 内 $\Rightarrow f/g \in D(I)$ 且

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{f'}{g} - \frac{f}{g}\frac{g'}{g}. \tag{4.2.3}$$

证: (1) 根据定义

$$(\alpha f+\beta g)'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[\alpha f(x+\Delta)+\beta g(x+\Delta x)]-[\alpha f(x)+\beta g(x)]}{\Delta x}$$

$$=\alpha\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\beta\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\ =\ \alpha f'(x)+\beta g'(x).$$

(2) 根据定义

$$(fg)'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x+\Delta x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}+g(x)\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]$$

$$=f(x)g'(x)+g(x)f'(x).$$

(3) 根据定义

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)f(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)}{g(x)g(x+\Delta x)\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{g(x)(f(x+\Delta x)-f(x))-f(x)(g(x+\Delta x)-g(x))}{g(x)g(x+\Delta x)\Delta x}\right]$$

$$=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.\ \square$$

注4.2.2. (1) 一般地对任意可导函数 $f_1,\cdots,f_n$ 和常数 $c_1,\cdots,c_n$, 有

$$\left(\sum_{1\le k\le n}c_kf_k\right)'=\sum_{1\le k\le n}c_kf_k',$$

和

$$\left(\prod_{1\le k\le n}f_k\right)'=\sum_{1\le k\le n}f_1\cdots f_{k-1}f_k'f_{k+1}\cdots f_n=\left(\prod_{1\le k\le n}f_k\right)\sum_{1\le i\le n}\frac{f_i'}{f_i}.$$

(2) 微分的四则运算可根据相应导数的四则运算得到

$$d(\alpha f+\beta g)=\alpha df+\beta dg,\quad d(fg)=fdg+gdf,\quad d(f/g)=\frac{gdf-fdg}{g^2}.$$

(3) 给定区间 I, 定义映射

$$\mathbf{L}:\mathscr{X}=\{I\text{ 上的可导函数}\}\longrightarrow\mathscr{Y}=\{I\text{ 上的函数}\},\quad f\longmapsto f'.$$

根据导数的四则运算得到

$$\mathbf{L}(fg)=f\mathbf{L}(g)+g\mathbf{L}(f),\quad \mathbf{L}(\alpha f+\beta g)=\alpha\mathbf{L}(f)+\beta\mathbf{L}(g).$$

满足上述两个条件的映射 $\mathbf{L}$ 称为**导子 (derivation)**. 仅通过这两个条件有

$$\mathbf{L}(1)=\mathbf{L}(1\cdot 1)=2\mathbf{L}(1)\Longrightarrow \mathbf{L}(1)=0$$

从而对任何常数 c 得到 $\mathbf{L}(c)=\mathbf{L}(c\cdot 1)=c\mathbf{L}(1)=0$.

(4) $(\tan x)'=\sec^2 x$, $(\sec x)'=\tan x\sec x$, $(\cot x)'=-\csc^2 x$, $(\csc x)'=-\cot x\csc x$.

导子是一种 1 阶线性微分算子, 可推广到所谓微分流形上. 至于流形上高阶线性微分算子甚至高阶微分算子的引入需要向量丛的概念, 这在之后的章节中会给出详细定义.

§4.2.2 反函数的求导

函数 $y=f(x)=x^2, x>0$, 的反函数为 $x=f^{-1}(y)=g(y)=y^{1/2}, y>0$. 把变量 y 换成变量 x (按照一般函数的写法) 得到 $g'(x)=x^{-1/2}/2$.

定理4.2.3. *假设 $f\in D((a,b))$, 严格单调, 且 $f'(x_0)\neq 0$, 其中 $x_0\in(a,b)$. 则其反函数 $x=g(y)=f^{-1}(y)$ 在 (α,β) 内可导且*

$$g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}. \tag{4.2.4}$$

这里 $y_0=f(x_0)$, $\alpha=\min\{f(a+),f(b-)\}$ 且 $\beta=\max\{f(a+),f(b-)\}$.

证: 不妨假设函数 f 严格单调递增. 根据函数 f 的连续性得到 $f^{-1}\in C((\alpha,\beta))$ 且也是严格单调递增. 从

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\neq 0\Longleftrightarrow \Delta x=f^{-1}(y_0+\Delta y)-f^{-1}(y_0)$$

得到当 $\Delta y\to 0$ 时有 $\Delta x\to 0$. 故有

$$\begin{aligned} g'(y_0) &= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f^{-1}(y_0+\Delta y)-f^{-1}(y_0)}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad \square \end{aligned}$$

例4.2.4. (1) 求 $(\arcsin x)'$, $(\arccos x)'$, $(\arctan x)'$, 和 $(\operatorname{arccot} x)'$.

解: $f(x)=\sin x$, $f'(x)=\cos x$.

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{\cos x_0}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x_0}},\quad -\frac{\pi}{2}<x_0<\frac{\pi}{2}.$$

故

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad |x|<1. \tag{4.2.5}$$

类似地,

$$(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\ (|x|<1), \tag{4.2.6}$$

和

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}. \tag{4.2.7}$$

(2) 求 $(\cot x)'$ 和 $(\csc x)'$.

解: 根据定义得到

$$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = -\csc^2 x, \quad (\csc x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\cot x \csc x. \tag{4.2.8}$$

(3) 回忆

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

从而得到

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

双曲函数的导数见 (4.2.12).

我们把常用函数的求导公式罗列如下:

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
C	0	x^a	$ax^{a-1}\ \ (a \neq 0)$
e^x	e^x	a^x	$a^x \ln a\ \ (a > 0,\ a \neq 1)$
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$	$\log_a \lvert x\rvert$	$\frac{1}{x \ln a}\ \ (a > 0,\ a \neq 1)$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos^{-1} x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sec x$	$\sec x \tan x$	$\csc x$	$-\csc x \cot x$
$\tan x$	$\sec^2 x$	$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot x$	$-\csc^2 x$	$\cot^{-1} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$1 - \tanh^2 x$	$\coth x$	$1 - \coth^2 x$

注4.2.5. (1) *假设函数 f 在 x_0 处可微, 且函数 g 在 x_0 处可微. 则 fg 在 x_0 处可微.*

(2) 假设函数 f 在 x_0 处可微, 但函数 g 在 x_0 处不可微. 则 fg 可能在 x_0 处可微也可能不可微. 比如, 取 $f(x) = x, g(x) = |x|, x_0 = 0$, 得到 fg 在 $x_0 = 0$ 可微; 取 $f(x) = x, g(x) = \operatorname{sgn}(x), x_0 = 0$, 得到 fg 在 x_0 处不可微.

(3) 假设函数 f 在 x_0 处不可微, 且函数 g 在 x_0 处也不可微. 则 fg 可能在 x_0 处可微也可能不可微. 比如, 取 $f(x) = g(x) = |x|, x_0 = 0$, 得到 fg 在 $x_0 = 0$ 可微; 取 $f(x) = g(x) = |x|^{1/2}, x_0 = 0$, 得到 fg 在 x_0 处不可微.

§4.2.3 链式法则

链式法则 (Chain rule) 告诉我们如何求复合函数 $f(g(x))$ 的导数.

定理4.2.6. (链式法则) *假设函数 $u = g(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导且函数 $y = f(u)$ 在 $u = u_0 := g(x_0)$ 处可导. 则复合函数 $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ 在 $x = x_0$ 处可导且满足*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0). \tag{4.2.9}$$

证: 根据定义得到

$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x_0 + \Delta x)) - f(g(x_0))}{\Delta x}$$

其中

$$g(x_0 + \Delta x) = g(x_0) + g'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

和

$$f(g(x_0 + \Delta x)) = f(g(x_0)) + f'(u_0)\Delta u + o(\Delta u)$$

这里 $\Delta u = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$. 从而得到

$$\begin{aligned} f(g(x_0 + \Delta x)) - f(g(x_0)) &= f'(g(x_0))\Delta u + o(\Delta u) \\ &= f'(g(x_0))[g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)] + o(\Delta u) \\ &= f'(g(x_0))[g'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)] + o(g'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) \end{aligned}$$

$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f'(g(x_0))(g'(x_0) + o(1)) + o(1) \right] = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

这是因为 $o(\Delta x)/\Delta x \to 0$ 且 $o(o(\Delta x))/\Delta x \to 0$, 当 $\Delta x \to 0$ 时. □

注4.2.7. (1) *微分的链式法则可类似得到:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}, \quad d(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)dx. \tag{4.2.10}$$

(2) *三个函数构成的复合函数的导数为*

$$(f(g(h(x))))' = f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x).$$

(3)**一阶微分的不变性**:

$$\text{函数 } y = f(u) \text{ 可导} \Longrightarrow dy = df(u) = f'(u)du$$

当 $u = g(x)$ 可导时, $du = g'(x)dx$ 从而

$$d[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)dx = f'(g(x))du = f'(u)du.$$

无论 u 是自变量还是关于 x 的函数, 微分形式 $dy = f'(u)du$ 保持不变.

(4) 假设 $u, v \in D(I)$, $u > 0$. 求 $f(x) = [u(x)]^{v(x)}$. 事实上若令

$$f(x) = e^{v(x)\ln u(x)}$$

得到

$$\begin{aligned} df'(x) &= e^{v(x)\ln u(x)}\left[v'(x)\ln u(x) + \frac{v(x)u'(x)}{u(x)}\right] \\ &= [u(x)]^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right]. \end{aligned}$$

(5) **双曲函数**定义为

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}. \tag{4.2.11}$$

计算得到

$$(\sinh x)' = \cosh x, (\cosh x)' = \sinh x, (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}, (\coth x)' = \frac{-1}{\sinh^2 x}. \tag{4.2.12}$$

(6) **对数导数 (logarithmic derivative)**. 假设 $f \in D(I)$ 且 $f \neq 0$, 则

$$f'(x) = f(x)\frac{d}{dx}\ln|f(x)|. \tag{4.2.13}$$

若引入算子

$$D := \frac{d}{dx}\ln$$

得到

$$D|f| = \frac{f'}{f}.$$

即 "一个对数函数无论多么复杂, 它的微分等于函数表达式的微分除以表达式", 这是JohanBernoulli[2] 在 1697 年得到的. 利用这个法则他计算了函数 $y =$

[2]Johann Bernoulli, 1667 年 7 月 27 日 - 1748 年 1 月 1 日, 今瑞士巴塞尔人, 瑞士数学家. 博士导师是他年长的大哥Jacob Bernoulli, 而二位都是Gottfried Leibniz 的得意门生, 另一位数学名家Leonhard Euler 是Johann Bernoulli 的学生. Johann Bernoulli 在 1691 年和 1692 年写出了世界上第一本微积分教材, 积分部分《Lections mathematies de method integralium》于 1742 年出版而微分部分《Die differentialrechnung》直到 1924 年才出版. 这段历史是这样的, Guillaume de l'Hôpital 和Johann Bernoulli 签了协议, 按照协议Guillaume de l'Hôpital 支付报酬来有权使用Johann Bernoulli 的数学发现. 1696 年Guillaume de l'Hôpital 以他自己名义出版了第一本微积分教材《Analyse des infiniment petits pour l'Intelligence des lignes courbes》, 其中就包含了Johann Bernoulli 发现的 l'Hôpital 法则. 虽然教材的序言中写道: "I recognize I owe much to the insights of the Messrs. Bernoulli, especially to those of the young (John), currently a professor in Groningen. I did unceremoniously use their discoveries, as well as those of Mr. Leibniz. For this reason I consent that they claim as much credit as they please, and will content myself with what they will agree to leave me." Johann Bernoulli 在写给Gottfried Leibniz 等人的信中抱怨他没有得到足够多的功劳. 直到 1922 年Johann Bernoulli 的侄子Nicolaus I Bernoulli 记录他教程的

x^x 的导数:

$$\frac{dy}{y} = d\ln y = d(x\ln x) = \ln x dx + x\frac{dx}{x} = (1+\ln x)dx.$$

(7) 求 $(x^{x^x})'$ $x > 0$.

解: 令 $y = x^{x^x}$ 得到 $\ln y = x^x \ln x$ 和 $\ln\ln y = x\ln x + \ln\ln x$. 两边求导得到

$$\frac{1}{\ln y}\frac{y'}{y} = \ln x + 1 + \frac{1}{x\ln x}$$

所以

$$y' = x^x x^{x^x}\left[\ln x + (\ln x)^2 + \frac{1}{x}\right]. \ \square$$

§4.2.4 隐函数的求导

目前为止我们所接触到的函数都是形如 $y = f(x)$, 但往往也存在一些“隐式”定义的函数是, 比如

- 单位圆**(unit circle)**

$$x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

- 椭圆**(ellipse)**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

- 抛物线**(parabola)**

$$y^2 - x = 0,$$

- 叶形线**(folium)** (Descartes, 1638)

$$x^3 + y^3 - 9xy = 0.$$

- 星形线**(astroid)** (最早对星形线进行研究是Johann Bernoulli)

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},$$

复印本被找到, 人们才发现Guillaume de l'Hôpital 出版的教材的真正作者是Johann Bernoulli. 但是这里要指出的是Guillaume de l'Hôpital 版教材指出了Johann Bernoulli 版教材的一些错误, 比如Johann Bernoulli 认为 $1/x$ 的积分是无限的:

$$\int \frac{1}{x}dx = \int x^{-1}dx = \frac{1}{0}x^0 = \frac{1}{0}\times 1 = \infty.$$

这是对指数法则的滥用, 也是微积分初学者易犯的错误之一. 幸好后来Johann Bernoulli 改正了错误.

- 对数螺线**(logarithmic spiral)** (Descartes, 1638; Jacob Bernoulli[3] 1691 年重新发现)

$$\arctan\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2},$$

- Archimedean 螺线**(Archimedean spiral)**

$$r = a\varphi, \quad r = \sqrt{x^2+y^2},\ \varphi = \arctan\frac{y}{x},$$

- 心脏线**(Cardioid)** (de Castillon 在 1741 年命名)

$$r = a(1+\cos\varphi), \quad r = \sqrt{x^2+y^2},\ \varphi = \arctan\frac{y}{x},$$

- Gerono 双扭线**(Lemniscate of Gerono)**

$$y^4 = y^2 - x^2,$$

- Bernoulli 双扭线**(Lemniscate of Bernoulli)** (Jacob Bernoulli, 1694)

$$(x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2),$$

[3]Jocob Bernoulli, 1654 年 12 月 27 日 - 1705 年 8 月 16 日, 今瑞士巴塞尔人, 瑞士数学家. 最早使用“积分”这个术语, 是最早使用极坐标系的数学家之一, 而且是概率论的先驱之一. 1689 年他给出了调和级数 $\sum_{n\geq 1} 1/n$ 是发散的新证明, 并证明了级数 $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$ 收敛且值不超过 2. 在 1690 年 5 月, Jocob Bernoulli 在《Acta Eruditorum》上发表文章证明了求解悬链线 (isochrone) 问题等价于求解一阶非线性微分方程 (Bernoulli 方程). 1694 年他首次给出了直角坐标和极坐标下的曲率半径公式, 这也是系统地使用极坐标的开始. Jocob Bernoulli 去世 8 年后, 在 1713 年出版了他最原创的工作《Ars Conjectandi》(由于 Bernoulli 兄弟在科学问题上过于激烈的争论, 致使双方的家庭也被卷入其中, 以至于他死后该手稿被其遗孀和儿子在外藏匿多年, 直到 1713 年才得以出版), 其中就包含了著名的 Bernoulli 数和概率论中大数定理的最早形式“Bernoulli 定理”. Jocob Bernoulli 对对数螺线深有研究, 他发现对数螺线经过各种变换后结果还是对数螺线. 在他遗言中, 要将对数螺线刻在墓碑上并附以拉丁座右铭: “Eadem mutata resurgo (Although changed, I rise again the same; 即, 纵使变化, 依然故我)”. 可惜雕刻师误将阿基米德螺线刻了上去. 他的墓碑上用拉丁文写着:

Jacob Bernoulli, the incomparable mathematician.

Professor at the University of Basel for more than 18 years;

member of the Royal Academies of Paris and Berlin; famous for his writings.

Of a chronic illness, of sound mind to the end;

succumbed in the year of grace 1705, the 16th of August, at the age of 50 years and 7 months,

awaiting the resurrection.

Judith Stupanus,

his wife for 20 years,

and his two children have erected a monument to the husband and father they miss so much.

- 魔鬼曲线(**the devil's curve**) (Gabriel Cramer, 1750)

$$y^4 - 4y^2 = x^4 - 9x^2.$$

上述 11 个例子都可写成如下形式

$$F(x,y) = 0 \quad \text{其中} \quad y = f(x).$$

此时两边求导有

$$0 = F_x(x_0, y_0) + F_y(x_0, y_0)y'$$

从而化简得到

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}, \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0. \tag{4.2.14}$$

其中 $F_x(x_0, y_0)$ 是表示在 $F(x,y)$ 中先把 y 看成常数, 然后对 x 求导, 再把 (x_0, y_0) 带入所得到的函数值. 类似的可定义 $F_y(x_0, y_0)$. 在 §12.4.1 我们会再详细阐述.

例4.2.8. (1) 已知 $y^3 + 3y = x$ 求 $y'(x)$.

解: 设 $x = f(y) := y^3 + 3y$ 得到 $f'(y) = 3y^2 + 3 > 0$ 故

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{3y^2 + 3}.$$

或者应用 (4.2.14) 得到 $(3y^2 + 3)y' = 1$. □

(2) 已知 $y - \epsilon \sin y = x$, $0 \le \epsilon < 1$, 求 $y'(x)$.

解: $y' = \frac{1}{1 - \epsilon \cos y}$. □

(3) 已知 $y^2 = x^2 + \sin(xy)$ 求 $y'(x)$.

解: 此时 $F(x,y) = y^2 - x^2 - \sin(xy)$ 从而得到

$$F_x = -2x - y\cos(xy), \quad F_y = 2y - x\cos(xy).$$

故得到 $y' = [2x + y\cos(xy)]/[2y - x\cos(xy)]$. □

(4) 求本小节开头提到的 11 个函数的导数.

解: 对单位圆有 $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, 所以

$$F_x = 2x, \quad F_y = 2y, \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

对椭圆有 $F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$, 所以

$$F_x = \frac{2x}{a^2}, \quad F_y = \frac{2y}{b^2}, \quad y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

对抛物线有 $F(x,y) = y^2 - x$, 所以

$$F_x = -1, \quad F_y = 2y, \quad y' = \frac{1}{2y}.$$

对叶形线有 $F(x,y)=x^3+y^3-9xy$, 所以

$$F_x=3x^2-9y,\quad F_y=3y^2-9x,\quad y'=\frac{3y^2-x^2}{y^2-3x}.$$

对星形线有 $F(x,y)=x^{2/3}+y^{2/3}-a^{2/3}$, 所以

$$F_x=\frac{2}{3}x^{-1/3},\quad F_y=\frac{2}{3}y^{-2/3},\quad y'=-(y/x)^{1/3}.$$

对对数螺线有 $F(x,y)=\arctan(y/x)-\ln\sqrt{x^2+y^2}$, 所以

$$F_x=\frac{-x-y}{x^2+y^2},\quad F_y=\frac{x+y}{x^2+y^2},\quad y'=\frac{x+y}{x-y}.$$

对Archimediean螺线有 $F(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}-a\arctan(y/x)$, 所以

$$F_x=\frac{ay+x\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2},\quad F_y=\frac{-ay+y\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2},\quad y'=\frac{ay+x\sqrt{x^2+y^2}}{ay-y\sqrt{x^2+y^2}}.$$

对心脏线有 $F(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}-a(1+\cos(\arctan(y/x)))$, 所以

$$F_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{ay}{x^2+y^2}\sin\left(\arctan\frac{y}{x}\right),$$

$$F_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{ax}{x^2+y^2}\sin\left(\arctan\frac{y}{x}\right),$$

$$y'=\frac{ay\sin(\arctan(y/x))-x\sqrt{x^2+y^2}}{ax\sin(\arctan(y/x))+y\sqrt{x^2+y^2}}.$$

对 Gerono 双扭线有 $F(x,y)=y^4-y^2+x^2$, 所以

$$F_x=2x,\quad F_y=4y^3-2y,\quad y'=\frac{x}{y-2y^3}.$$

对 Bernoulli 双扭线有 $F(x,y)=(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)$, 所以

$$F_x=4x(x^2+y^2)-4x,\quad F_y=4y(x^2+y^2)+4y,\quad y'=\frac{x-x(x^2+y^2)}{y+y(x^2+y^2)}.$$

对魔鬼曲线有 $F(x,y)=y^4-4y^2-x^4+9x^2$, 所以

$$F_x=-4x^3+18x,\quad F_y=4y^3-8y,\quad y'=\frac{2x^3-9x}{2y^3-4y}.\ \Box$$

§4.2.5 参数化函数的求导

利用极坐标得到单位圆上的每点 (x,y) 可写成

$$x=\cos t,\quad y=\sin t,\quad t\in[0,2\pi).$$

此时 x,y 可看成变量 t 的函数.

一般地, 考虑**参数方程 (parametric equation)**:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad a \le t \le b,$$

其中 t 称为**参数 (parameter)**, 点集 $\{(\varphi(t), \psi(t)) : a \le t \le b\}$ 称为**参数曲线 (parametric curve)**, $(\varphi(a), \psi(a))$ 和 $(\varphi(b), \psi(b))$ 分别称为参数曲线的**起点 (initial point)** 和**终点 (terminal point)**.

下面假设 φ, ψ 可导, $\varphi(t)$ 严格单调, 且 $\varphi' \neq 0$. 如果反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$ 存在, 则得到 $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ 和

$$y'(x_0) = (\psi \circ \varphi^{-1})'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}, \quad \varphi^{-1}(x_0) = t_0. \tag{4.2.15}$$

这里用到了 (4.2.9) 和 (4.2.4).

例4.2.9. (3) 已知 $x = \sqrt[3]{1-\sqrt{t}}, y = \sqrt{1-\sqrt[3]{t}}$ 求 $y'(x)$.

解: 直接计算得到

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[6]{\frac{(1-\sqrt{t})^4}{t(1-\sqrt[3]{t})^3}}, \quad t > 0, \, t \neq 1. \quad \square$$

(4) 已知 $x = e^{2t}\cos^2 t, y = e^{2t}\sin^2 t$ 求 $y'(x)$.

解: 直接计算得到

$$\frac{dy}{dx} = \tan t \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right), \quad t \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \quad t \neq n\pi + \frac{\pi}{2} \ (n \in \mathbb{N}). \quad \square$$

§4.3 高阶导数

如果函数 $y = f(x)$ 的导数 $f' = dy/dx$ 仍旧可以求导, 则得到所谓的高阶导数.

定义4.3.1. 假设函数 $f \in D(U(x_0, r))$ 且导函数 f' 在 x_0 处也可导, 则称函数 f 在 x_0 处**二阶可导**, 并把

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) \equiv f''(x_0) := (f')'(x_0)$$

称为 f 在 x_0 处的**二阶导数 (second derivative)**. 一般地, 假设函数 f 在 $U(x_0, r)$ 内 n 阶可导且 $f^{(n)}$ 在 x_0 处也可导, 则称函数 f 在 x_0 处**$n+1$ 阶可导**, 并记作

$$f^{(n+1)}(x_0) := (f^{(n)})'(x_0).$$

一般地我们把前三阶导数记作 f' f'' f''', 而把之后的导数记为 $f^{(4)}$, $f^{(5)}$, $\cdots$. 为把自变量 x 也写出来, 那么**高阶导数 (higher derivatives)** 可写成

$$\frac{d^k f}{dx^k} = f^{(k)}.$$

最后要指出的是, Newton 采用记号

$$\dot{y},\quad \ddot{y},\quad \dddot{y},$$

来表示导数, Leibniz 采用记号

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}f,\quad \frac{d^n y}{dx^n}=\frac{dnf}{dx^n}=\frac{d^n}{dx^n}f,$$

来表示导数, Euler 采用符号

$$D_x y = D_x f(x),$$

来表述导数, 而Lagrange 采用符号

$$f',\quad f'',\quad f''',\quad f^{(4)},\quad f^{(n)},$$

来表示导数.

§4.3.1 记号

给定区间 I 可类似地定义函数 f 在 I 内的高阶导数. 引入记号

$$f\in D^k(I) \iff f^{(i)}\in D(I),\quad \forall\, 1\le i\le k, \tag{4.3.1}$$

$$f\in C^k(I) \iff f\in D^k(I)\ \text{且}\ f^{(n)}\in C(I). \tag{4.3.2}$$

注意到

$$D(I)=D^1(I)\quad \text{但是}\quad C(I)\neq C^1(I). \tag{4.3.3}$$

因为可导函数必连续, 故得到

$$C(I)\supsetneqq D(I)=D^1(I)\supsetneqq C^1(I)\supsetneqq D^2(I)\supsetneqq C^2(I)\supsetneqq D^3(I)\supsetneqq\cdots \tag{4.3.4}$$

例4.3.2. (1) $(e^x)^{(n)}=e^x$, $n\in\mathbb{Z}_+$.

(2) $(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^n$, $a>0$, $n\in\mathbb{Z}_+$.

(3) $(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$ 和 $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$, $n\in\mathbb{Z}_+$.

(4) $(x^\alpha)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$, $x>0$. 特别地

$$(x^m)^{(n)}=\begin{cases} m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}, & m\ge n,\\ 0, & m<n.\end{cases}$$

(5) $(1/x))^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$, $n\in\mathbb{Z}_+$.

(6) $(\ln x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$, $n\in\mathbb{Z}_+$.

定义4.3.3. 定义

$$D^\infty(I):=\bigcap_{n\ge1}D^n(I),\quad C^\infty(I):=\bigcap_{n\ge1}C^n(I). \tag{4.3.5}$$

注意到$D^\infty(I)=C^\infty(I)$ 并称函数 $f\in C^\infty(I)$ 为 I 上的**光滑函数 (smooth function)**.

例4.3.4. (1) 求 $f''(x)$, 其中

$$f(x)=\begin{cases} x^4\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

解: 计算得到

$$f'(x)=\begin{cases} 4x^3\sin\frac{1}{x}-x^2\cos\frac{1}{x}, m & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

和

$$f''(x)=\begin{cases} 12x^2\sin\frac{1}{x}-6x\cos\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

但是 $f'''(0)$ 不存在. □

(2) 求 $f^{(n)}(x)$, 其中

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x}, & x>0,\\ 0, & x\leq 0.\end{cases}$$

解: 低阶导数直接计算得到

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}, & x>0,\\ 0, & x\leq 0.\end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}-\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}, & x>0,\\ 0, & xc\leq 0.\end{cases}$$

一般可得到

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases} P_{2n}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}, & x>0,\\ 0, & x\leq 0.\end{cases}$$

这里多项式 P_{2n} 的次数为 $\deg P_{2n}=2n$. 下面证明 $f^{(n)}(0)$ 对任意正整数 n 都存在且为 0. 实际上根据归纳假设得到

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(0+) &= \lim_{x\to 0+}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0+}\left[\frac{1}{x}P_{2n}\left(\frac{1}{x}\right)\right]e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{tP_{2n}(t)}{e^t} = 0. \end{aligned}$$

左侧导数是显然: $f^{(n+1)}(0-)=0$. □

(3) 函数 $y=a\cos x+b\sin x$ 满足微分方程 $y''+y=0$.

(4) 函数 $y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$ 满足微分方程 $y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2 y=0$. 这里 $c_1, c_2, \lambda_1, \lambda_2$ 都是常数.

(5) 函数

$$y=e^{x/\sqrt{2}}\left(c_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+c_2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+e^{-x/\sqrt{2}}\left(c_3\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+c_4\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

满足微分方程 $y^{(4)}+y=0$.

例4.3.5. (1) 考虑集合

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}):=\left\{A:=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}:\det A=1,\ a,b,c,d\in\mathbb{Z}\right\}.$$

对任意 $A,B\in\mathbf{SL}(2,\mathbb{Z})$, 可证明 $AB\in\mathbf{SL}(2,\mathbb{Z})$, 从而 $\mathbf{SL}(2,\mathbb{Z})$ 是群, 称为**二阶特殊线性群 (special linear group)**. 定义映射

$$\mathbf{SL}(2,\mathbb{Z})\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\quad (A,x)\longmapsto A\cdot x:=\frac{ax+b}{cx+d}.$$

固定 $A\in\mathbf{SL}(2,\mathbb{Z})$ 考虑函数

$$f(x):=\mathbf{L}(A,x)=\frac{ax+b}{cx+d}.$$

计算得到

$$f'(x)=\frac{\det A}{(cx+d)^2}=\frac{1}{(cx+d)^2}.$$

和

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}c^{n-1}n!}{(cx+d)^{n+1}}.$$

(2) 上述映射可推广到复平面. 定义

$$\mathbf{SL}(2,\mathbb{Z})\times\mathbb{H}\longrightarrow\mathbb{H},\quad (A,z)\longmapsto A\cdot z:=\frac{az+b}{cz+d}.$$

这里 $\mathbb{H}:=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}(z)>0\}$ 表示上半平面. 作为练习可证明

$$(AB)\cdot z=A\cdot(B\cdot z),\quad A,B\in\mathbf{SL}(2,\mathbb{Z}),\ z\in\mathbb{H}.$$

定义

$$j(A,z):=cz+d,\quad A:=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}.$$

可以证明

$$j(AB,z)=j(A,B\cdot z)j(B,z),\quad \mathrm{Im}(A\cdot z)=\frac{\mathrm{Im}(z)}{|j(A,z)|^2}.$$

如果 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\in\mathbf{SL}(2,\mathbb{Z})$ 满足 $A\cdot z=z$ 对某个 $z\in\mathbb{H}$ 成立, 则必有 $|a+d|<2$.

§4.3.2 算术运算

对高阶导数来说最重要的性质就是 Leibniz 法则.

定理4.3.6. 若函数 f, g 都是 n 阶可导, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, 则 $c_1 f + c_2 g$ 也 n 阶可导且

$$(c_1 f + c_2 g)^{(n)} = c_1 f^{(n)} + c_2 g^{(n)}. \tag{4.3.6}$$

如果函数 $f_1, \cdots, f_n$ 都是 n 阶可导, $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$, 则

$$\left(\sum_{1\le i\le m} c_i f_i\right)^{(n)} = \sum_{1\le i\le m} c_i f_i^{(n)}. \tag{4.3.7}$$

定理4.3.7. (Leibniz) 如果函数 f, g 都 n 阶可导, 则 fg 也 n 阶可导且

$$(fg)^{(n)} = \sum_{0\le k\le n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}. \tag{4.3.8}$$

证: 假设 (4.3.8) 对 n 成立. 则对 $n+1$ 得到

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= (f'g + fg')^{(n)} = (f'g)^{(n)} + (fg')^{(n)} \\
&= \sum_{0\le k\le n} \binom{n}{k} f^{(n-k+1)} g^{(k)} + \sum_{0\le k\le n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k+1)} \\
&= \sum_{0\le k\le n} \binom{b}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)} + \sum_{1\le k\le n+1} \binom{n}{k-1} f^{(n+1-k} g^{(k)} \\
&= gf^{(n+1)} + fg^{(n+1)} + \sum_{1\le k\le n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] f^{(n+1-k)} g^{(k)}.
\end{aligned}$$

中括号中的二项式系数之和为 $(n+1)!/k!(n+1-k)!$. □

注4.3.8. (1) **复合函数**. $y = f(u), u = g(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$. 但是

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\right) = \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}.$$

(2) **隐函数**. $F(x,y) = 0 \Rightarrow y' = -F_x(x,y)/F_y(x,y)$. 但是从

$$0 = F_{xx}(x,y) + F_{xy}(x,y)y' + F_{yx}(x,y)y' + F_{yy}(x,y)(y')^2$$

得到

$$y'' = -\frac{1}{F_y^3}\left[F_{xx}F_y^2 - F_x F_y(F_{xy} + F_{yx}) + F_{yy}F_x^2\right].$$

(3) **反函数**. $y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y) = g(y)$. 根据恒等式 $y = f(g(y))$ 得到 $1 = f'(g(y))g'(y)$ 以及

$$0 = f''(g(y))(g'(y))^2 + f'(g(y))g''(y)$$

故

$$g''(y) = -\frac{f''(g(y))(g'(y))^2}{f'(g(y))} = -\frac{f''(g(y))}{[f'(g(y))]^2} = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

(4) $x=\varphi(t), y=\psi(t) \Rightarrow dy/dx=\psi'(t)/\varphi'(t)$. 因此

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

例4.3.9. (1) 求 $y^{(n)}(0)$, 这里 $y(x)=\arcsin x$.

解: 因为前面 2 个低阶导数分别为 $y'=(1-x^2)^{-1/2}$ 和 $y''=\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}=xy'/(1-x^2)$, 故得到

$$(x^2-1)y''+xy'=0.$$

对上述微分方程再求 n 阶导数得到

$$0 = \sum_{0\le k\le n-2}\binom{n-2}{k}(x^2-1)^{(k)}y^{(n-k)}+\sum_{0\le k\le n-2}\binom{n-2}{k}x^{(k)}y^{(n-1-k)}$$

$$= (x^2-1)y^{(n)}+2x\binom{n-2}{1}y^{(n-1)}+2\binom{n-2}{2}y^{(n-2)}+xy^{(n-1)}+\binom{n-2}{1}y^{(n-2)}$$

从而 $y^{(n)}(0)=(n-2)^2y^{(n-2)}(0)$.

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases}[(n-2)!!]^2, & n=2k+1,\ k\in\mathbb{N}_+,\\ 1, & n=1,\\ 0, & n=2k,\ k\in\mathbb{N}.\end{cases}\qquad\square$$

(2) 定义

$$T_m(x):=\frac{1}{2^{m-1}}\cos(m\arccos x),\quad m\in\mathbb{N}.$$

易证

$$(1-x^2)T_m''(x)-xT_m'(x)+m^2T_m(x)=0.$$

(3) 定义

$$P_m(x):=\frac{1}{2^m m!}\left[(x^2-1)^m\right]^{(m)},\quad m\in\mathbb{N}.$$

易证

$$0=(1-x^2)P_m''(x)-2xP_m'(x)+m(m+1)P_m(x).$$

(4) 定义

$$L_m(x):=e^x(x^me^{-x})^{(m)},\quad m\in\mathbb{N}.$$

易证

$$xL_m''(x)+(1-x)L_m'(x)+mL_m(x)=0.$$

(5) 定义

$$H_m(x):=(-1)^me^{x^2}(e^{-x^2})^{(m)},\quad m\in\mathbb{N}.$$

易证

$$H_m''(x)-2xH_m'(x)+2mH_m(x)=0.$$

(6) 引入记号

$$\mathbf{D} := \frac{d}{dx}, \quad f(\mathbf{D}) := \sum_{0\le k\le n} p_k(x)\mathbf{D}^k$$

这里 p_k 都是连续的. 证明对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$ 有

$$f(\mathbf{D})\left[e^{\lambda x}u(x)\right] = e^{\lambda x} f(\mathbf{D}+\lambda)u(x).$$

证: 对每个 k 有

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^k\left[e^{\lambda x}u(x)\right] &= \left[e^{\lambda x}u(x)\right]^{(k)} = \sum_{0\le i\le k}\binom{k}{i}\lambda^i e^{\lambda x}u^{(k-i)}(x)\\ &= \sum_{0\le i\le k}\binom{k}{i}\lambda^i \mathbf{D}^{k-i}u(x) = (\mathbf{D}+\lambda)^k u(x). \quad \square\end{aligned}$$

(7) 假设函数 $y = y(x)$ 满足条件

$$\sum_{0\le k\le n} a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} = 0.$$

如果 $x = e^t$, 则必有

$$0 = \sum_{0\le k\le n} a_k \mathbf{D}(\mathbf{D}-1)\cdots(\mathbf{D}-k+1)y$$

其中 $\mathbf{D} = d/dt$.

证: 引入 $\delta := d/dx$ 得到 $\mathbf{D}y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = x\delta y$. 即

$$\delta = e^{-t}\mathbf{D} \quad \text{或} \quad \mathbf{D} = e^t\delta.$$

进一步

$$\begin{aligned}\delta^2 y &= e^{-t}\mathbf{D}[e^{-t}\mathbf{D}y] = e^{-t}[-e^{-t}\mathbf{D}y + e^{-t}\mathbf{D}^2 y]\\ &= -e^{-2t}\mathbf{D}y + e^{-2t}\mathbf{D}^2 y = e^{-2t}\mathbf{D}(\mathbf{D}-1)y.\end{aligned}$$

断言

$$\delta^{(k)}y = e^{-kt}\mathbf{D}(\mathbf{D}-1)\cdots(\mathbf{D}-k+1)y.$$

事实上, 根据归纳假设得到

$$\begin{aligned}\delta^{(k+1)}y &= \delta(\delta^{(k)}y) = e^{-t}\mathbf{D}\left[e^{-kt}\mathbf{D}(\mathbf{D}-1)\cdots(\mathbf{D}-k+2)y\right]\\ &= e^{-t}\left[-ke^{-kt}\mathbf{D}(\mathbf{D}-1)\cdots(\mathbf{D}-k+1)y + e^{-kt}\mathbf{D}^2(\mathbf{D}-1)\cdots(\mathbf{D}-k+1)y\right]\\ &= e^{-(k+1)t}\mathbf{D}(\mathbf{D}-1)\cdots(\mathbf{D}-k+1)(\mathbf{D}-k)y. \quad \square\end{aligned}$$

§4.4 极值定理

考察函数 $f(x)=x^2, x\in[-1,1]$. 易知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处达到最小. 另一方面根据 $f'(x)=2x$，得到 $f'(0)=0$. 这个例子告诉我们最值点和导数为零的点似乎有某种关系. 本节就来探讨这个问题.

§4.4.1 极值

假设函数 f 在 I 内有定义. 称函数在 $x_0\in I$ 有**最大值或绝对最大值 (absolute maximum value)** 如果

$$f(x)\le f(x_0),\quad \forall\, x\in I.$$

同理称函数在 $x_0\in I$ 有**最小值或绝对最小值 (absolute minimum value)** 如果

$$f(x)\ge f(x_0),\quad \forall\, x\in I.$$

最大值和最小值合起来叫**最值或(绝对极值)**.

定义4.4.1. *假设函数 f 定义在 (a,b) 内且 $x_0\in(a,b)$.*

(1) *称 x_0 是 f 的***极大值点或局部最大值点 (local maximum point)** *, 如果存在 $U(x_0,\delta)\subset(a,b)$ 满足*

$$f(x)\le f(x_0),\quad \forall\, x\in U(x_0,\delta).$$

*此时函数值 $f(x_0)$ 称为***极大值或局部最大值 (local maximum value)**.

(2) *称 x_0 是 f 的***极小值点或局部最小值点 (local minimum point)***, 如果存在 $U(x_0,\delta)\subset(a,b)$ 满足*

$$f(x)\ge f(x_0),\quad \forall\, x\in U(x_0,\delta).$$

*此时函数值 $f(x_0)$ 称为***极小值或局部最小值 (local minimum value)**.

(3) *称 $x_0\in(a,b)$ 是***极值点或局部最值点 (local extrema point)** *如果 x_0 是极大值点或极小值点. 相应的函数值称为***极值或局部最值 (local extrema)**.

注4.4.2. (1) *根据***定义 4.4.1***, 任何极值点一定在区间内部.*

(2) *如果函数 f 的定义域是一般的区间 I, 此时 I 可以是 (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$ 中的一种. 那么 I 中的极值点可如下定义:*

$$x_0\in I\text{ 是极值点}\iff \begin{array}{c}\exists\,\delta>0\text{ 满足 } f(x)\le f(x_0)\ (\text{或 } f(x)\ge f(x_0))\\ \forall\, x\in U_I(x_0,\delta):=U(x_0,\delta)\cap I\end{array}$$

按照这种定义极值点可以取到端点.

*为了方便起见我们总是按照***定义 4.4.1** *来阐述极值点和极值的含义.*

(3) *显然极值点不一定是最值点. 但是如果最值点在定义域内部, 则必是极值点.*

§4.4.2 Fermat 引理

这个引理告诉我们如果极值点是可微点那么此点处的导数必为零.

定理4.4.3. (Fermat) 若 x_0 是函数 f 的极值点且 f 在 x_0 处可导, 则 $f'(x_0)=0$.

证: 不妨假设 x_0 是 f 的极小值点. 则存在 $\delta>0$ 使得 $U(x_0,\delta)\subset(a,b)$ 且满足不等式 $f(x)\le f(x_0)$, 任意 $x\in U(x_0,\delta)$. 根据定义得到

$$x_0-\delta<x<x_0\Rightarrow\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0,\quad x_0<x<x_0+\delta\Rightarrow\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0.$$

因为函数 f 在 x_0 处可导, $f'(x_0+)=f'(x_0)=f'(x_0-)$, 从而 $0\le f'(x_0-)=f'(x_0+)\le 0$. 由此得到 $f'(x_0+)=f'(x_0-)=f'(x_0)=0$. □

注4.4.4. (1) 称 x_0 是函数 f 的**驻点 (stationary point)** 或**临界点 (critical point)** 如果 $f'(x_0)=0$.

(2) 根据**定理** 4.4.3 得到

$$\begin{array}{c} x_0\ \text{是极值点} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f'(x_0)\ \text{存在}} \\ x_0\ \text{是驻点} \end{array}$$

上述条件"$f'(x_0)$ 存在"不能去掉. 比如函数 $f(x)=|x|$ 在 $x_0=0$ 处有极小值, 但是 0 显然不是驻点因为函数在 0 处不可导.

反之, 驻点不一定是极值点. 比如 $f(x)=x^3$, $x_0=0$.

§4.4.3 Darboux 定理

回顾闭区间上连续函数的介值定理:

$$f\in C([a,b])\ \text{且}\ f(a)f(b)<0\Longrightarrow\exists\,\xi\in(a,b)\ \text{满足}\ f(\xi)=0.$$

如果 $f\in C^1([a,b])$, 则得到

$$f\in C^1([a,b])\ \text{且}\ f'(a)f'(b)<0\Longrightarrow\exists\,\xi\in(a,b)\ \text{满足}\ f'(\xi)=0.$$

但是下面的 Darboux[4] 定理告诉我们把条件 $f\in C^1([a,b])$ 减弱为 $f\in D([a,b])$ 结论仍旧成立.

定理4.4.5. (Darboux) 假设 $f\in D((a,b))$ 且 $f'(x_1)f'(x_2)<0$, 其中 $x_1,x_2\in(a,b)\Rightarrow f'(\xi)=0$, 这里存在 ξ 介于 x_1 和 x_2 之间.

[4]Jean-Gaston Darboux, 1842 年 8 月 14 日 - 1917 年 2 月 23 日, 法国奥克西塔尼大区加尔省尼姆镇人, 法国数学家. 他在数学分析 (对 Riemann 积分理论做了重要的推广, 引入 Darboux 上、下和概念)、微分几何 (四卷本的《Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal》是曲面理论中的名著)、微分方程 (关于微分方程的奇异解理论) 等领域有很多的贡献, 培养诸多有名的数学家比如Émile Borel, Élie Cartan, Émile Picard, Thomas Stieltjes 等.

证: 不妨假设 $x_1 < x_2$, $f'(x_1) < 0$, 且 $f'(x_2) > 0$ (否则的话考察函数 $-f$). 存在 (a,b) 内的两个开区间 $U(x_1,\delta_1)$ 和 $U(x_2,\delta_2)$ 使得下列不等式成立:

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < 0,\ \forall\, x \in U(x_1,\delta_1) \ \text{且}\ \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2} > 0,\ \forall\, x \in U(x_2,\delta_2).$$

因此存在 $x_1' > x_1, x_2' < x_2$, 且 $x_1' < x_2'$ 使得 $f(x_1') < f(x_1)$ 和 $f(x_2') < f(x_2)$ 都成立. 由于 $f \in C([x_1,x_2])$, 故存在 $\xi \in [x_1,x_2]$ 满足 $f(\xi) = \min_{[x_1,x_2]} f$. 根据 x_1' 和 x_2' 的取法, 必有 $\xi \in (x_1,x_2)$ 成立. 利用**定理 4.4.3** 推出 $f'(\xi) = 0$. □

注4.4.6. (1) *$f \in D((a,b))$, $x_1, x_2 \in (a,b)$, μ 介于 $f'(x_1)$ 和 $f'(x_2)$ 之间 $\Rightarrow \exists\, \xi$ 介于 x_1 和 x_2 之间满足 $f'(\xi) = \mu$.*

证: 应用**定理** 4.4.5 到函数 $F(x) := f(x) - \mu$. □

(2) *在**定理** 4.4.5 中不需要 f' 的连续性.*

根据**定理 4.4.3** 我们知道 x_0 要么是端点, 要么是内点但不可导, 要么是内点且为驻点. 所以求函数在某个区间上的最值就要把这三种情况考虑进去.

例4.4.7. (1) 求函数 $f(x) = x^3 - x + 1$, $-1 \le x \le 1$, 的最值.

解: 根据 $f'(x) = 0$ 得到驻点为 $\pm 1/\sqrt{3}$. 计算可得

$$f(-1) = 1,\quad f(-1/\sqrt{3}) = 1 + \frac{2}{3\sqrt{3}},\quad f(1/\sqrt{3}) = 1 - \frac{2}{3\sqrt{3}},\quad f(1) = 1.$$

故 $\max_{[-1,1]} f = 1 + \frac{2}{3\sqrt{3}} = f(-\frac{1}{\sqrt{3}})$, $\min_{[-1,1]} f = 1 - \frac{2}{3\sqrt{3}} = f(\frac{1}{\sqrt{3}})$. □

(2) 求函数 $f(x) = x^3 - x^2 + 1$, $-1 \le x \le 2$, 的最值.

解: 根据 $f'(x) = 0$ 得到驻点为 0 和 2/3. 计算可得

$$f(-1) = -1,\quad f(0) = 1,\quad f(2/3) = 1 - \frac{23}{27},\quad f(2) = 5.$$

故 $\max_{[-1,2]} f = 5 = f(2)$, $\min_{[-1,2]} f = -1 = f(-1)$. □

(3) $f \in D([0,+\infty))$, $0 \le f(x) \le \frac{x}{1+x^2} \Rightarrow$ 存在 $\xi \in (0,+\infty)$ 满足 $f'(\xi) = (1-\xi^2)/(1+\xi^2)^2$.

证: 注意到 $(1-\xi^2)/(1+\xi^2)^2 = (\xi/(1+\xi^2))'$, 故定义函数 $F(x) := \frac{x}{1+x^2} - f(x)$. 因为 $F(0) = F(+\infty) = 0$, $F \ge 0$, 若函数 F 不恒为零则 F 的最大值点必在 $(0,+\infty)$ 内取到. □

§4.5 微分中值定理

本节证明三个非常重要的微分中值定理, 即 Rolle 定理、Lagrange 中值定理、Cauchy 中值定理. 这是之后 Taylor 展开的关键之处.

§4.5.1 Rolle 定理

首先给出导函数有零点的充分条件, 即 Rolle 定理. 1691 年Rolle[5] 在论文《Démonstration d'une méthode pour résoudre les égalitéz de tous les dégrez》中给出了这个定理, 当时他只叙述了定理并没有给出证明.

定理4.5.1. (Rolle, 1691) *$f \in C([a,b]) \cap D((a,b))$ 且 $f(a)=f(b) \Rightarrow$ 存在 $\xi \in (a,b)$ 满足 $f'(\xi)=0$.*

证: 因为函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 存在 $\xi, \eta \in [a,b]$ 满足

$$m_f := \min_{[a,b]} f = f(\xi) \le f(x) \le f(\eta) = M_f := \max_{[a,b]} f, \quad \forall\, x \in [a,b].$$

若 $M_f = m_f$, 则函数 f 是常值函数, 从而对任何 $\xi \in (a,b)$ 都有 $f'(\xi)=0$.

若 $M_f > m_f$, 那么 ξ 和 η 中至少有一个不等于区间的端点, 这是因为 $f(a)=f(b)$. 不妨假设 $a<\xi<b$. 根据**定理 4.4.3** 得到 $f'(\xi)=0$. □

注4.5.2. (1) *定理 4.5.1 中三个条件缺一不可.* 令

$$A: f \in C([a,b]),\ B: f \in D((a,b)),\ C: f(a)=f(b),\ D: f'(\xi)=0\,\exists\,\xi \in (a,b).$$

则

$$\begin{aligned}
A+B &\nRightarrow D, \quad (f(x)=x,\ 0\le x\le 1)\\
A+C &\nRightarrow D, \quad (f(x)=|1-2x|,\ 0\le x\le 1),\\
B+C &\nRightarrow D, \quad \left(f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1,\\ 0, & x=1.\end{cases}\right).
\end{aligned}$$

(2) *函数 f 在"闭区间 $[a,b]$ 上连续"这个条件不能减弱为在"开区间 (a,b) 内连续". 比如*

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<1,\\ -1, & x=0 \text{ 或 } 1.\end{cases}$$

(3) *反之, 在 (1) 中,*

$$\begin{aligned}
D &\nRightarrow A \quad \left(f(x)=\begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2, & 0<x<1,\\ 0, & c=0 \text{ 或 } 1.\end{cases}\right)\\
D &\nRightarrow B \quad \left(f(x)=\begin{cases} 2x, & 0\le x\le \frac{1}{2},\\ 1, & \frac{1}{2}\le 1.\end{cases}\right)\\
D &\nRightarrow C \quad (f(x)=-x(x-1),\ 0<x\le 1.).
\end{aligned}$$

[5] Michel Rolle, 1652 年 4 月 21 日 - 1719 年 11 月 8 日, 法国多姆山省昂贝尔镇人, 法国数学家. 以 Rolle 定理闻名, 他是现在标准记号 $\sqrt[n]{x}$ 的发明者.

(4) $f \in D^2([a,b])$ 且 $f(a)=f(b)=0 \Rightarrow \forall\, x \in (a,b)\, \exists\, \xi_x \in (a,b)$ 满足

$$f(x)=\frac{f''(\xi_x)}{2}(x-a)(x-b).$$

证: 只要证明存在 $\xi_x \in (a,b)$ 满足

$$f''(\xi_x)=\frac{2f(x)}{(x-a)(x-b)}.$$

固定 $x \in (a,b)$ 并定义 $\lambda := 2f(x)/(x-a)(x-b)$. 考察函数

$$F(u):=f(u)-\frac{\lambda}{2}(u-a)(u-b).$$

计算得到 $F(a)=F(b)=F(x)=0$. 利用**定理** 4.5.1 两次推出存在 $\xi_1 \in (a,x)$ 和 $\xi_2 \in (x,b)$ 使得 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$ 成立. 再次利用**定理** 4.5.1 得到存在 $\xi_x \in (\xi_1,\xi_2)$ 满足 $F''(\xi_x)=0$. $\square$

(5) $f \in D^3([a,b])$ 且 $f(a)=f'(a)=f(b)=0 \Rightarrow$ 对任意 $x \in (a,b)$ 存在 $\xi_x \in (a,b)$ 满足

$$f(x)=\frac{f'''(\xi_x)}{3!}(x-a)^2(x-b).$$

证: 固定 $x \in (a,b)$ 并定义函数

$$F(u):=f(u)-\frac{\lambda}{3!}(u-a)^2(u-b), \quad \lambda:=\frac{3!f(x)}{(x-a)^2(x-b)}.$$

因为 $F(a)=F(x)=F(b)=0$, 利用**定理** 4.5.1 得到存在 $a<\xi_1<x<\xi_2<b$ 使得 $0=F'(\xi_1)=F'(\xi_2)$ 成立. 但是

$$F'(u)=f'(u)-\frac{\lambda}{3!}\left[2(u-a)(u-b)+(u-a)^2\right], \quad F'(a)=0,$$

再次利用**定理** 4.5.1 得到存在 $a<\xi_3<\xi_1<\xi_4<\xi_2$ 满足 $F''(\xi_3)=F''(\xi_4)=0$. 故存在 $\xi_x \in (\xi_3,\xi_4) \subset (a,b)$ 使得 $F'''(\xi_x)=0$ 成立. 根据

$$F''(u)=f''(u)-\frac{\lambda}{3!}\left[2(u-b)+(u-a)+2(u-a)\right], \quad F'''(u)=f'''(u)-\lambda$$

得到结论成立. $\square$

(6) $f \in C([a,b]) \cap D^2((a,b)) \Rightarrow$ 对任意 $c \in (a,b)$ 存在 $\xi_c \in (a,b)$ 满足

$$f''(\xi_c)=\frac{2f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{2f(b)}{(b-c)(b-a)}+\frac{2f(c)}{(c-a)(c-b)}.$$

证: 引入记号

$$\lambda_1:=\frac{2f(a)}{(a-b)(a-c)}, \quad \lambda_2:=\frac{2f(b)}{(b-c)(b-a)}, \quad \lambda_3:=\frac{2f(c)}{(c-a)(c-b)}.$$

定义函数

$$F(x):=f(x)-\frac{\lambda_1}{2}(x-b)(x-c)-\frac{\lambda_2}{2}(x-c)(x-a)-\frac{\lambda_3}{2}(x-a)(x-b).$$

则 $F(a) = F(b) = F(c) = 0$, 从而存在 $a < \xi_1 < c < \xi_2 < b$ 使得 $F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$ 成立. 故存在 $\xi_1 < \xi_c < \xi_2$ 满足 $F''(\xi_c) = 0$. 根据

$$F''(x) = f''(x) - \sum_{1 \le i \le 3} \lambda_i,$$

得到 $f''(\xi_c) = \sum_{1 \le i \le 3} \lambda_i$. □

§4.5.2 Lagrange 定理

Rolle 定理, **定理 4.5.1**, 需要条件 $f(a) = f(b)$. 如果 $f(a) \neq f(b)$, 即两点 $(a, f(a))$ 和 $(b, f(b))$ 不等高, 可以把坐标轴旋转一个角度使得在新的坐标下该两点等高.

定理4.5.3. (Lagrange) $f \in C([a,b]) \cap D((a,b)) \Rightarrow$ 存在 $\xi \in (a,b)$ 满足

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{4.5.1}$$

证: 连接两点 $(a, f(a))$ 和 $(b, f(b))$ 的直线方程为

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

因此旋转坐标使得新的 x 轴和这个直线平行从而在新的坐标下上述两点是等高的. 定义

$$F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

则 $F \in C([a,b]) \cap D((a,b))$ 且 $F(a) = F(b) = 0$. 根据**定理 4.5.1** 知 $F'(\xi) = 0$ 对某个 $\xi \in (a,b)$ 成立. □

注4.5.4. (1) 根据**定理** 4.5.3 得到

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), \quad \exists\, a < \xi < b.$$

如果把 ξ 写成如下形式

$$\xi = (1 - \theta)a + \theta b = a + \theta(b - a), \quad \exists\, 0 < \theta < 1$$

则得到

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a))(b - a).$$

一般地对任意 $a \le x, x_0 \le b$ 存在 $\theta \in (0,1)$ 使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0) \tag{4.5.2}$$

成立. 当 $x - x_0 = \Delta x$ 足够小时得到

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta\Delta x)\Delta x \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \tag{4.5.3}$$

(2) 引入记号

$$\begin{aligned} A: &\quad f\in C([a,b]),\\ B: &\quad f\in D((a,b)),\\ C: &\quad f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\ \exists\, a<\xi<b. \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} A &\quad \nRightarrow \quad C \quad (\text{显然}),\\ B &\quad \nRightarrow \quad C \quad \left(f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1,\\ 0, & x=1.\end{cases}\right). \end{aligned}$$

定理4.5.5. $f\in C((a,b))\Rightarrow f$ 是常值函数当且仅当在 (a,b) 内 $f'\equiv 0$.

证: 假设 $f'\equiv 0$. 对任意 $x\in(a,b)$, 根据**定理 4.5.3** 得到

$$0=f'(\xi)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a},\quad \exists\, a<\xi<x.$$

故 $f(x)=f(a)$. 反之是显然成立的. □

定理4.5.6. $f\in C([a,b])\cap D((a,b))\Rightarrow f$ 在 $[a,b]$ 上为常值函数当且仅当在 (a,b) 内 $f'\equiv 0$.

证: 假设在 (a,b) 内 $f'\equiv 0$. 根据**定理 4.5.5** 可知在 (a,b) 内 $f\equiv c$, 其中 c 是一个常数. 根据连续性得到在 $[a,b]$ 上 $f\equiv c$. 反之是显然成立的. □

例4.5.7. (1) 证明不等式

$$1-\frac{a}{b}<\ln\frac{a}{b}<\frac{b}{a}-1,\quad \forall\, 0<a<b. \tag{4.5.4}$$

证: 令 $x=a/b\in(0,1)$ 并考虑函数 $f(x)=\ln x$. 由 $f'(x)=1/x$ 得到

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=f'(\xi)=\frac{1}{\xi}\in(b^{-1},a^{-1}).$$

这立即得到 (4.5.4). □

(2) 证明

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},\quad 0\le x\le 1. \tag{4.5.5}$$

证: 考虑函数 $f(x):=\arcsin x+\arccos x$. 由 $f'(x)=(1-x^2)^{-1/2}-(1-x^2)^{-1/2}=0$ 得到 $f(x)=f(0)=\pi/2$. □

(3) 证明

$$x-\frac{1}{2}x^2<\ln(1+x)<x,\quad \forall\, x>0. \tag{4.5.6}$$

证: 定义函数 $f(x) = x - \ln(1+x)$. 根据导数 $f'(x) = x/(1+x) > 0$ 及微分中值定理得到 $f(x) - f(0) > 0$, 即 $f(x) > 0$. 另一端不等式考虑函数 $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$. □

(4) 证明

$$|e^x - \cos x| \le \sqrt{2}xe^x, \quad \forall\, x \ge 0. \tag{4.5.7}$$

证: 定义函数

$$f(x) := e^x - \cos x - \sqrt{2}xe^x, \quad \forall\, x \ge 0.$$

计算可得

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x + \sin x - \sqrt{2}\,(e^x + xe^x) &= [1 - \sqrt{2}(1+x)]e^x + \sin x, \\ f''(x) &= -\sqrt{2}e^x + [1 - \sqrt{2}(1+x)]e^x - \cos x \\ &= [1 - \sqrt{2}(2+x)]e^x - \cos x \;\le\; [1 - \sqrt{2}(2+0)]e^0 + 1 \;<\; 0. \end{aligned}$$

故 $f'(x) < f'(0) = 1 - \sqrt{2} < 0$ 推出 $f(x) \le f(0) = 0$. 另一个不等式可类似得到. □

(5) 计算

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \left[\ln\arctan(x+1) - \ln\arctan x\right].$$

解: 根据微分中值定理得到

$$x^2 \left[\ln\arctan(x+1) - \ln\arctan x\right] = x^2 \frac{1}{1+\xi_x^2}\frac{1}{\arctan\xi_x} \to 1 \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi},$$

这里 $x < \xi_x < x+1$. □

§4.5.3 Cauchy 定理

可以把结论 (4.5.1) 改写成如下形式

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad g(x) := x.$$

一般形式就是如下的定理.

定理4.5.8. (Cauchy) *$f, g \in C([a,b]) \cap D((a,b))$ 且 $g'(x) \neq 0$ ($\forall\, a < t < b$) $\Rightarrow$ 存在 $\xi \in (a,b)$ 满足*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}. \tag{4.5.8}$$

证: 注意到

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \quad\Longleftrightarrow\quad f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = 0, \quad \lambda := \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

考察函数

$$F(x) := f(x) - f(a) - \lambda[g(x) - g(a)].$$

则 $F \in C([a,b]) \cap D((a,b))$ 且 $F(a) = F(b) = 0$. 根据**定理 4.5.1** 知存在 $a < \xi < b$ 满足 $0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \lambda g'(\xi)$. □

例4.5.9. (1) $f \in C([a,b]) \cap D((a,b))$ 且 $0 < a < b \Rightarrow$ 存在 $\xi \in (a,b)$ 满足

$$f(b) - f(a) = \xi f'(\xi) \ln \frac{b}{a}.$$

证: 取函数 $g(x) = \ln x$. □

(2) $f \in D([a,b])$ 且 $0 < a < b \Rightarrow$ 存在 $\xi \in (a,b)$ 满足

$$2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2) f'(\xi).$$

证: 取函数 $g(x) = x^2$. □

(3) $f \in D([a,b])$ 且 $0 < a < b \Rightarrow$ 存在 $\xi \in (a,b)$ 满足

$$\frac{1}{a-b} \begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

证: 注意到

$$\frac{1}{a-b} \begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = \frac{af(b) - bf(a)}{a-b} = \frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}.$$

取函数 $F(x) = f(x)/x$ 和 $G(x) = 1/x$. □

(4) $f \in C([a,b]) \cap D((a,b))$ 且 $0 < a < b \Rightarrow$ 存在 $\xi, \eta \in (a,b)$ 满足

$$f'(\eta) = (b^2 + ab + a^2 + 2) \frac{f'(\xi)}{3\xi^2 + 2}.$$

证: η 的选取是显然的: 存在 $\eta \in (a,b)$ 满足

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\eta).$$

这样只要证明存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{b^3 - a^3 + 2(b-a)} = \frac{f'(\xi)}{3\xi^3 + 2}$$

成立, 也即证明

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b^3 - a^3 + 2(b-a)} (3\xi^2 + 2) = \frac{f(b) - f(a)}{b^3 - a^3 + 2(b-a)} (\xi^3 + 2\xi)'.$$

定义函数

$$F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b^3 - a^3 + 2(b-a)} (x^3 - a^3 + 2(x-a)).$$

则 $F \in C([a,b]) \cap D((a,b))$ 且 $F(a) = F(b) = 0$. 从而存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $F'(\xi) = 0$ 成立. □

(5) $f \in C([a,b]) \cap D((a,b))$ 且 $0 < a < b \Rightarrow$ 存在 $\xi, \eta \in (a,b)$ 满足

$$f'(\xi) = \frac{a+b}{2\eta} f'(\eta).$$

证: 首先存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

成立. 其次定义函数

$$F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}(x^2-a^2).$$

则 $F \in C([a,b]) \cap D((a,b))$ 且 $F(a) = F(b) = 0$. 从而存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $F'(\xi) = 0$ 成立. □

(6) $f \in D([a,b]\ f'(a) = f'(b) = 0 \Rightarrow$ 存在 $\xi \in (a,b)$

$$f(\xi) - f(a) = f'(\xi)(\xi - a).$$

证: 注意到

$$f(\xi) - f(a) = f'(\xi)(\xi - a) \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(\xi)-f(a)}{\xi - a}.$$

定义函数

$$F(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, & a < x \le b, \\ f'(a), & x = a. \end{cases}$$

则 $F \in C([a,b]) \cap D((a,b))$. 对任意 $x \in (a,b)$ 计算得到

$$F'(x) = \frac{f'(x)}{x-a} - \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}$$

从而有

$$F'(b) = -\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2}, \quad F(b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \quad F(a) = 0.$$

情形 1: $f(a) = f(b)$**.** 此时 $F(b) = 0 = F(a)$. 则存在 $\xi \in (a,b)$ 满足 $F'(\xi) = 0$.

情形 2: $f(a) \neq f(b)$**.** 不失一般性不妨假设 $f(a) > f(b)$ 从而得到 $F'(b) > 0$ 和 $F(b) < 0$. 故存在 $\xi_1 \in (a,b)$ 满足 $F(\xi_1) < F(b) < 0 = F(a)$. 利用连续函数介质性定理得到存在 $\xi_2 \in (a, \xi_1)$ 使得 $F(\xi_2) = F(b)$ 成立. 因此存在 $\xi \in (\xi_2, b)$ 满足 $F'(\xi) = 0$. □

(7) 假设 f 不是线性函数且 $f \in C([a,b]) \cap D((a,b)) \Rightarrow$ 存在 $\xi \in (a,b)$ 满足

$$|f'(\xi)| > \left| \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right|.$$

证: 定义函数

$$F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a), \quad x \in [a,b].$$

因为函数 F 不是线性的, 故存在 $c \in (a,b)$ 满足 $F(c) \neq 0$. 不妨假设 $F(c) > 0$. 则存在 $\xi_1 \in (a,c)$ 和 $\xi_2 \in (c,b)$ 使得

$$F'(\xi_1) = \frac{F(c)-F(a)}{c-a} = \frac{F(c)}{c-a} > 0, \quad F'(\xi_2) = \frac{F(b)-F(c)}{b-c} = \frac{-F(c)}{b-c} < 0$$

成立, 也即

$$f'(\xi_1) > \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad f'(\xi_2) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

当 $f(b) \geq f(a)$ 时取 $\xi = \xi_1$ 得到

$$|f'(\xi_1)| = f'(\xi_1) > \frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0.$$

否则的话取 $\xi = \xi_2$. □

(8) $f \in D^2([a,b])$ 且 $f'(a) = f'(b) = 0 \Rightarrow$ 存在 $c \in (a,b)$ 满足

$$|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

证: 对任意 $x_0 \in [a,b]$ 可以证明

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(\xi_x) \tag{4.5.9}$$

这里 ξ 是介于 x 和 x_0 之间. 事实上定义函数

$$F(x) := f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0), \quad G(x) := (x-x_0)^2.$$

根据微分中值定理得到

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{f'(\xi_1)-f'(x_0)}{2(\xi_1-x_0)}\frac{f''(\xi_2)}{2},$$

其中 $x_0 < x_2 < \xi_1 < x$. 特别地取 $x_0 = a$ 和 $x = (a+b)/2$ 得到

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + \frac{(n-a)^2}{8}f''(\xi_1), \quad \exists\, \xi_1 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right).$$

类似地, 可证存在 $(a+b)/2 < \xi_2 < b$ 满足

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) + \frac{(b-a)^2}{8}f''(\xi_2).$$

从而得到

$$f(b) - f(a) = \frac{(b-a)^2}{8}[f''(\xi_1) - f''(\xi_2)]$$

或

$$\frac{4}{(b-a)^2}[f(b)-f(a)]=\frac{f''(\xi_1)-f''(\xi_2)}{2}.$$

两边取绝对值得到

$$\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|\le\frac{|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|}{2}.$$

若 $|f''(\xi_1)|\le|f''(\xi_2)|$, 则取 $\xi=\xi_2$, 否则的话取 $\xi=\xi_1$. □

(9) $f\in D^2((-\infty,+\infty))$ 且 $M_k:=\sup_{(-\infty,+\infty)}|f^{(k)}|<+\infty$ $(k=0,1,2)\Rightarrow M_1^2\le 2M_0M_2$.

证: 利用 (4.5.9) 得到

$$\begin{aligned}f(x+h)&=&f(x)+f'(x)h+\frac{f''(\xi_1)}{2}h^2,\\ f(x-h)&=&f(x)-f'(x)h+\frac{f''(\xi_2)}{2}h^2,\end{aligned}$$

其中 $x-h<\xi_2<x<\xi_1<x+h$. 两式相加得到

$$2f'(x)h=[f(x+h)-f(x-h)]-\frac{h^2}{2}[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)]$$

从而不等式 $2h|f'(x)|\le 2M_0+h^2M_2$ 对任何 $h\in\mathbb{R}$ 都成立. 根据二次多项式的判别式得到 $4M_1^2-4M_02M_2\le 0$. □

§4.6 L'Hospital 法则

假设函数 f,g 定义在 $U(a,r)$ 内且均在 a 处可导. 如果 $f(a)=g(a)=0$ 且 $g'(a)\neq 0$ 则直接根据导数定义得到

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

作为推论我们计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

但是在实际应用中, 导数 $f'(a)$ 和 $g'(a)$ 不一定都存在, 此时我们需要更加广泛的公式 – L'Hôpital 法则或 L'Hospital 法则 (相关的数学历史参见 (4.2.13) 后的脚注).

§4.6.1 $\frac{0}{0}$ 型

首先我们来研究两个无穷小函数的比式, 即所谓的$\frac{0}{0}$ **型不定式 (indeterminate form $\frac{0}{0}$)**.

定理4.6.1. (L'Hôpital 和 Bernoulli, 1696) 假设 $f,g\in D((a,b))$, $g'\neq 0$, 且 $\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}g(x)=0\Longrightarrow$ 如果极限

$$\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\quad (\text{存在或}\infty)$$

则

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{4.6.1}$$

证: 延拓定义函数

$$F(x):=\begin{cases}0, & x=a,\\ f(x), & a<x<b,\end{cases}\qquad G(x):=\begin{cases}0, & x=a,\\ g(x), & a<x<b.\end{cases}$$

则 $F,G\in C([a,b])\cap D((a,b))$. 从而对任意 $x\in(a,b)$ 存在 $\xi\in(a,x)$ 使得

$$\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}\Longrightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\to A$$

成立. □

如果求导后的比式 $f'(x)/g'(x)$ 仍旧是 $\frac{0}{0}$ 型不定式且也满足**定理 4.6.1** 中的条件, 则可继续使用 L'Hôpital 法则.

在使用 (4.6.1) 时要注意, 如果极限 $\lim_{x\to a+}f'(x)/g'(x)$ 不存在则不能使用该公式! 比如

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^2\sin(1/x)}{x}=\lim_{x\to 0+}x\sin\frac{1}{x}=0,$$

但是若使用 (4.6.1) 就得到

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^2\sin(2/x)}{x}=\lim_{x\to 0+}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right),$$

该极限是不存在的.

如果把区间 (a,b) 换成其它区间, 也有类似的结论:

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a-}\frac{f'(x)}{g'(x)},\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},\quad \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

和

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

例4.6.2. (1) 证明

$$f''(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}$$

对在 a 处二阶可导的任意函数 f 都成立.

证: 根据定义

$$f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}$$

可知 $f \in D(U(a,r))$. 利用**定理** 4.6.1 两次计算得到

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a-h)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f(a)}{2h}+\lim_{h\to 0}\frac{f'(a-h)-f(a)}{-2h}=\frac{f''(a)+f''(a)}{2}=f''(a).\quad\square$$

(2) 已知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(6x)-xf(x)}{x^3}=0$$

求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{6-f(x)}{x^2}.$$

证: 利用**定理** 4.6.1 两次计算得到

$$\frac{6-f(x)}{x^2}=\frac{5x-xf(x)}{x^3}=\frac{\sin(6x)-xf(x)}{x^3}+\frac{6x-\sin(6x)}{x^3}$$

$$\to 0+\frac{6-6\cos(6x)}{3x^2}\to\frac{12\sin(6x)}{2x}\to 36\cos(6x)\to 36.\quad\square$$

§4.6.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型

再次我们来研究两个无穷大函数的比式, 即所谓的 $\frac{\infty}{\infty}$ **型不定式 (indeterminate form** $\frac{\infty}{\infty}$**)**. 但这时候我们只需要假设分母函数是无穷大即可.

定理4.6.3. 假设 $f,g\in D((a,b))$, 在 (a,b) 内 $g'\neq 0$, 且 $\lim_{x\to a+}g(x)=\infty\Longrightarrow$ 若

$$\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\quad(\text{存在或 }\infty)$$

则

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.\tag{4.6.2}$$

证: (1) $A<\infty$. 对任意 $x,x_0>a$ 只要 $x\neq x_0$ 有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)}+\frac{f(x_0)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\frac{g(x)-g(x_0)}{g(x)}+\frac{f(x_0)}{g(x)}$$

$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\left[1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right]+\frac{f(x_0)}{g(x)}$$

成立. 从而

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-A\right|=\left|\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-A\right]\left[1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right]+\frac{f(x_0)-Ag(x_0)}{g(x)}\right|$$

$$\le\left|1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-A\right|+\left|\frac{f(x_0)-Ag(x_0)}{g(x)}\right|.$$

因为 $\lim_{x\to a+} f'(x)/g'(x) = A$ 故对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta_1 < b - a$ 使得

$$\left|\frac{f'(zx)}{g'(x)} - A\right| < \epsilon \quad \forall\, x \in (a, a+\delta_1)$$

成立. 令 $x_0 := a + \delta_1$. 对任意 $x \in (a, x_0)$ 存在 $\xi \in (x, x_0)$ 满足

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

则得到

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - A\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A\right| < \epsilon.$$

根据假设条件 $\lim_{x\to a+} g(x) = \infty$ 得到对上述 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta < \delta_1$ 使得

$$\left|1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}\right| < \epsilon, \quad \left|\frac{f(x_0) - Ag(x_0)}{g(x)}\right| < \epsilon$$

成立. 因此对任意 $a < x < a + \delta$ 得到

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| < \epsilon + 2\epsilon = 3\epsilon.$$

(2) $A = \infty$. 基本想法是证明此时 $\lim_{x\to a+} f(x) = \infty$ 从而可以利用 (1) 中的结论. 因为

$$\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty,$$

故存在 $\delta_1 > 0$ 使得不等式 $|f'(x)/g'(x)| \ge 1$ 对任意 $a < x < a + \delta_1$ 都成立. 任取 $a < x < y < a + \delta_1$ 得到

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)}\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right| \ge 1, \quad \exists\, \xi \in (x, y).$$

从而

$$|f(x) - f(y)| \ge |g(x) - g(y)| \ge |g(x)| - |g(y)|.$$

但是 $\lim_{x\to a+} g(x) = \infty$ 推出 $\lim_{x\to a+} f(x) = \infty$. 利用 (1) 得到

$$\lim_{x\to a+} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty. \quad \square$$

例4.6.4. (1) 对任意 $\alpha > 0$ 和任意 $k \in \mathbb{N}_+ \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{(\ln x)^k} = +\infty$.

证: 利用 k 次**定理** 4.6.3 得到

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^k}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{k(\ln x)^{k-1}}{\alpha x^\alpha} = \cdots = \lim_{x\to+\infty} \frac{k!}{\alpha^k x^\alpha} = 0. \quad \square$$

(2) $f \in D([a, +\infty))$, f 有界, 且 $\lim_{x\to+\infty} f'(x) \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

证: 利用**定理** 4.6.3 得到

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} f'(x) = A.$$

但是 f 有界故 $f(x)/x \to 0$. 从而 $A = 0$. $\square$

(3) $f \in D([a,+\infty))$, f 有界, 且 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \not\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

解: 考察函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

对任意 $x > 0$ 计算得到

$$f'(x) = \frac{2x^2\cos(x^2) - \sin(x^2)}{x^2} = 2\cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2}.$$

从而极限 $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ 不存在. 注意到 $f'(0+) = 1$. $\square$

§4.6.3 其它型不定式

主要有以下三种类型的不定式:

(A) “$0\cdot\infty$” 型. $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ 且 $\lim_{x\to a} g(x) = \infty \Longrightarrow$

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad 或 \quad \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}. \tag{4.6.3}$$

(B) “∞ - ∞” 型. $\lim_{x\to a} f(x) = \infty = \lim_{x\to a} g(x) \Longrightarrow$

$$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}. \tag{4.6.4}$$

(C) “$0^0, \infty^0, 1^\infty$” 型.

$$\left.\begin{array}{l} 0^0 \text{ 型} \\ \infty^0 \text{ 型} \\ 1^\infty \text{ 型} \end{array}\right\} \lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)} \left\{\begin{array}{l} 0\cdot\infty \text{ 型} \\ 0\cdot\infty \text{ 型} \\ \infty\cdot 0 \text{ 型} \end{array}\right. \tag{4.6.5}$$

例4.6.5. (1) 计算

$$\lim_{x\to\pi}(x-\pi)\cot x = \lim_{x\to\pi}\frac{x-\pi}{\tan x} = \lim_{x\to\pi}\frac{1}{\sec^2 x} = 1.$$

(2) 计算

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x} = 0.$$

(3) 计算

$$\lim_{x\to 0+}\left[\frac{e}{(1+x)^{1/x}}\right]^{1/x} = e^{\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}\ln\frac{e}{(1+x)^{1/x}}} = e^{\lim_{x\to 0+}\frac{1-\frac{1}{x}\ln(1+x)}{x}}$$

$$= e^{\lim_{x\to 0+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0+}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}} = e^{\lim_{x\to 0+}\frac{1}{2(1+x)}} = e^{1/2}.$$

(4) 计算

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = \lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = \ lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1.$$

(5) $f \in D((0,\infty))$, $a > 0$, 且 $\lim_{x\to+\infty}[af(x) + f'(x)] = L \Longrightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{L}{a}.$$

证: 计算得到

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{ax}f(x)}{e^{ax}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{ax}f(x))'}{ae^{ax}} = \frac{L}{a}. \ \square$$

(6) $f \in D^2((0,+\infty))$ 且 $\lim_{x\to+\infty}[f(x) + f'(x) + f''(x)] = L \Longrightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L.$$

证: 注意到 (5) 的结论, 所以引入两个参数

$$f + f' + f'' = \beta[(\alpha f + f') + (\alpha f + f')]'.$$

得到 $\alpha + \beta = 1 = \alpha\beta$. 利用 (5) 两次得到

$$\lim_{x\to+\infty}[\alpha(x) + f'(x)] = \frac{L}{\beta}$$

和 $\lim_{x\to\infty} f(x) = L/\alpha\beta = L$. $\square$

(7) 假设函数 f 在 a 处 n 阶可导 $\Longrightarrow$

$$f^{(n)}(a) = \lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{h^n}\sum_{0\le k\le n}\left[(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(a+kh)\right]\right\}.$$

证: 计算得到

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{h^n}\sum_{0\le k\le n}\left[(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(a+kh)\right]\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{nh^{n-1}}\sum_{1\le k\le n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f'(a+kh)k$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{n(n-1)h^{n-2}}\sum_{2\le k\le n}(-1)^{n-k}k^2\binom{n}{k}f''(a+kh)$$

$$= \cdots = \frac{1}{n!}f^{(n)}(a) = f^{(n)}(a). \ \square$$

§4.7 Taylor 公式

作为引子我们考虑函数的k 阶有限差分 (finite differences of order k), 本段部分内容取自《古今数学思想》第二册 (参见参考文献). 这个方法是Henry Briggs[6] 在 1624 年出版的《Arithmetica logarithmica》中引入的, 但是最关键的公式是James Gregory 在 1670 年 11 月 23 日给出的. Newton 也独立地在 1687 年出版的《自然哲学的数学原理》(Philosphiae naturalis principia mathematica) 第三卷和 1711 年出版的《Methodus Differentialis》中给出过这个公式, 虽然早在 1676 年就已经写成了.

给定函数 $f(x)$ 并取其定义域中的 x_0. 如果下列 $n+1$ 个点

$$x_0,\quad x_0+c,\quad x_0+2c,\quad \cdots,\quad x_0+nc$$

都落在定义域中, 我们定义

$$\begin{aligned}
\Delta^1 f(x_0;c) &\equiv \Delta f(x_0;c) := f(x_0+c)-f(x_0)\\
&= \sum_{0\le k\le 1}(-1)^{k+1}\binom{1}{k}f(x_0+kc),\\
\Delta^2 f(x_0;c) &:= \Delta(\Delta f(\cdot;c))(x_0,c) = (\Delta f(\cdot;c))(x_0+c)-(\Delta f(\cdot;c))(x_0)\\
&= \Delta f(x_0+c;c)-\Delta f(x_0;c)\\
&= f(x_0+2c)-2f(x_0+c)+f(x_0)\\
&= \sum_{0\le k\le 2}(-1)^{k+1}\binom{2}{k}f(x_0+kc).
\end{aligned}$$

一般可归纳定义

$$\Delta^n f(x_0;c) := \Delta\left(\Delta^{n-1}f(\cdot;c)\right)(x_0;c) = \sum_{0\le k\le n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}f(x_0+kc),\quad n\ge 2.$$

从而**Gregory-Newton 差分公式**可叙述为

$$\begin{aligned}
f(a+h) &= f(a)+\frac{h}{c}\Delta f(a;c)+\frac{\frac{h}{c}(\frac{h}{c}-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 f(a;c)+\cdots\\
&= f(a)+\sum_{n\ge 1}\frac{\frac{h}{c}(\frac{h}{c}-1)\cdots(\frac{h}{c}-n+1)}{n!}\Delta^n f(a;c).
\end{aligned}$$

Brook Taylor[7] 在 1715 年出版的专著《Mechodus incrementorum directa et inversa》中推导了他在 1712 年曾叙述过的定理 – 即现在的 Taylor 公式[8].

[6] Henry Briggs, 1561 年 2 月 - 1630 年 1 月 26 日, 今英国约克郡人, 英国数学家. 他将最初的对数定义改成以 10 为底的对数.

[7] Brook Taylor, 1685 年 8 月 18 日 - 1731 年 11 月 30 日, 今英国米德萨斯郡人, 英国数学家. 他在 1715 年提出了著名的 Taylor 公式, 此公式被Lagrange 在 1772 年誉为“le principal foundement du calcul différentiel”.

[8] Taylor 公式在 1670 年就已经被James Gregory 所知, 稍后又被Leibniz 所独立发现, 但他们都没有发表过. 在 1694 年Johann Bernoulli 正式发表了相同结果, 但Brook Taylor 却没有引证过 (可能他自己给了不同的证明).

Taylor 在**Gregory-Newton 差分公式**中先令 $c = \Delta x$, 从而右边第三项就变成

$$\frac{h(h-\Delta x)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\Delta^2 f(x_0;\Delta x)}{(\Delta x)^2};$$

然后再令 $\Delta x = 0$, 由此Taylor 断言该项就变成

$$\frac{h^2}{2!}f''(a).$$

从而**Gregory-Newton 差分公式**就变成了

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + f''(a)\frac{h^2}{2!} + f'''(a)\frac{h^3}{3!} + \cdots.$$

当然Taylor 的证明是不严谨的, 而且也没有考虑级数的收敛问题.

Taylor 公式在 $a = 0$ 是就是著名的 Maclaurin 公式 – 这是Maclaurin[9] 在 1742 年的专著《Treatise on fluxions》上给出的, 并说明这只是 Taylor 公式的特殊情形. 早年之前, Stirling[10] 在 1717 年对代数函数及在 1730 年出版的专著《Methodus Differentialis》中对一般函数, 已经给出了这个特殊情形.

本节主要是来证明上面提到的 Taylor 公式. 利用微分中值定理, 我们观察到**Gregory-Newton 差分公式**的前几项可写成如下形式:

$$f\text{ 在 }x_0\text{ 处可导}\Longrightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0),$$

$$f\text{ 在 }x_0\text{ 处二阶可导}\Longrightarrow f(x) = f(x_0) + \sum_{1\le k\le 2}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^2).$$

右端第一项多项式可推广之.

定义4.7.1. *假设函数 f 在 x_0 处 n 阶可导, 则 $f\in D^{n-1}((x_0-\delta, x_0+\delta))$ 对某个 $\delta > 0$ 成立. f 在 x_0 处的n* **阶 Taylor 多项式***定义为*

$$P_n(x) \equiv P_n(x; x_0, f) := f(x_0) + \sum_{1\le k\le n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \tag{4.7.1}$$

§4.7.1 Peano 型余项

引子中提到的 Taylor 公式, 其最简单的形式就是所谓的**带 Peano 型余项的 Taylor 公式 (Taylor's formula with the Peano form of the remainder)**.

---

[9] Colin Maclaurin, 1698 年 2 月 - 1746 年 6 月 14 日, 今英国安格尔郡基尔默丹人, 英国数学家. 他是Newton 晚年的学生, 其墓志铭上刻着: 曾蒙牛顿推荐. Maclaurin 在数学上的主要贡献是 Euler-Maclaurin 公式、Maclaurin 级数、级数收敛的积分判别法等.

[10] James Stirling, 1792 年 5 月 - 1770 年 12 月 5 日, 今英国爱丁堡人, 英国数学家. 他在数学上贡献主要有 Stirling 公式和 Stirling 数等.

定理4.7.2. **(Peano 型余项)** 假设函数 f 在 x_0 处 n 阶可导 $\Longrightarrow$ 存在 $\delta>0$ 使得

$$f(x)=P_n(x)+r_n(x),\quad \forall\, x\in(x_0-\delta,x_0+\delta), \tag{4.7.2}$$

成立, 这里

$$r_n(x)=o((x-x_0)^n),\quad x\to x_0, \tag{4.7.3}$$

且 $P_n(x)=P_n(x;x_0,f)$ 是 f 在 x_0 处的 n 阶 Taylor 多项式.

证: 利用**定理 4.6.1** n 次得到

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n} &= \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-\sum_{1\le k\le n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}}{n(x-x_0)^{n-1}}\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-\sum_{0\le k\le n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{k}}{n(x-x_0)^{n-1}} = \cdots\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f^{(m)}(x)-\sum_{0\le k\le n-m}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{k}}{n(n-1)\cdots(n-m+1)(x-x_0)^{n-m}}\quad(0\le m\le n)\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n!(x-x_0)}\\ &= \frac{1}{n!}\left[f^{(n)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)\right] = 0.\ \square\end{aligned}$$

§4.7.2 Lagrange 型余项

假设 $f\in C^1([x_0-\delta,x_0+\delta])\cap D^2((x_0-\delta,x_0+\delta))$ 则得到 $f'\in C([x_0-\delta,x_0+\delta])\cap D((x_0-\delta,x_0+\delta))$. 故

$$f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=:r_1(x)=o(x-x_0),\quad x\to x_0,$$

其中 $r_1(x_0)=0$ 且 $r_1\in C([x_0-\delta,x_0+\delta])\cap D((x_0-\delta,x_0+\delta))$. 利用微分中值定理得到

$$\frac{r_1(x)-r_1(x_0)}{(x-x_0)^2-0}=\frac{r_1'(\xi)}{2(\xi-x_0)}=\frac{f'(\xi)-f'(x_0)}{2(\xi-x_0)},\quad \exists\,\xi\in(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

从而

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\eta)}{2}(x-x_0)^2,\quad \exists\,\eta\in(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

对具有高阶导数的 f 我们就得到**带 Lagrange 型余项的 Taylor 公式 (Taylor's formula with the Lagrange form of the remainder)**.

定理4.7.3. **(Lagrange 型余项)** $f\in C^n([x_0,x_0+\delta])\cap D^{n+1}((x_0,x_0+\delta))\Longrightarrow$ $\forall\, x\in(x_0,x_0+\delta)$ 有

$$f(x)=P_n(x)+r_n(x), \tag{4.7.4}$$

这里

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad \exists\, \xi \in (x_0, x_0+\delta), \tag{4.7.5}$$

且 $P_n(x) = P_n(x; x_0, f)$ 是 f 在 x_0 处的 n 阶 Taylor 多项式.

证: 引入辅助函数

$$G(t) := f(x) - \sum_{0\le k\le n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k, \quad \forall\, H(t) \in D((x_0, x_0+\delta)) \text{ 且 } H(x) = 0.$$

因为 $G \in C([x_0, x_0+\delta]) \cap D((x_0, x_0+\delta))$, 所以存在 $\xi \in (x_0, x_0+\delta)$ 满足

$$\frac{G(x_0)}{H(x_0)} = \frac{G(x) - G(x_0)}{H(x) - H(x_0)} = \frac{G'(\xi)}{H'(\xi)} = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!H'(\xi)}(x-\xi)^n.$$

即

$$G(x_0) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!H'(\xi)}(x-\xi)^n H(x_0). \tag{4.7.6}$$

如果取函数 $G(t) = (x-t)^{n+1}$ 则得到 (4.7.5). □

注4.7.4. (1) 根据**定理** 4.7.2, f 在 x_0 处 n 阶可导 $\Rightarrow r_n(x) = o((x-x_0)^n)$. 根据**定理** 4.7.3, $f \in C^n([x_0, x_0+\delta]) \cap D^{n+1}((x_0, x_0+\delta)) \Rightarrow r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^n$; 如果进一步要求 $f^{(n+1)}$ 有界则得到 $r_n(x) = o((x-x_0)^n)$.

(2) **(Bernstein)** 若 $f \in C([a,b])$ 则存在 $[a,b]$ 上的多项式列 $\{P_n(x)\}_{n\ge1}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x), \quad \forall\, x \in [a,b]. \tag{4.7.7}$$

证: 不妨假设 $[a,b] = [0,1]$. 定义多项式

$$P_n(x) := \sum_{0\le k\le n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

计算得到

$$\begin{aligned}|f(x) - P_n(x)| &= \left|\sum_{0\le k\le n} f(x)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} - P_n(x)\right| \\ &\le \sum_{0\le k\le n}\binom{n}{k}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| x^k(1-x)^{n-k}.\end{aligned}$$

由于 $f \in C([a,b])$, 对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$, 对任意 $y \in (x-\delta, x+\delta) \cap [0,1]$ 有

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

因此

$$|f(x) - P_n(x)| \le \sum_{|x-k/n|<\delta}\binom{n}{k}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| x^k(1-x)^{n-k}$$

$$+\,2M_f \sum_{|x-k/n|\ge\delta} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \ \le\ \epsilon + \frac{2M_f}{\delta} \sum_{|nx-k|\ge n\delta} \delta \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$
$$\le\ \epsilon + \frac{2M_f}{\delta}\sum_{0\le k\le n} \frac{(nx-k)^2}{n^2}\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$$
$$=\ \epsilon + \frac{2M_f}{\delta n^2} nx(1-x) \ =\ \epsilon + \frac{2M_f}{\delta n} x(1-x).$$

这里 $M_f := \max_{[0,1]}|f|$. 令 $n\to+\infty$ 得到 $P_n(x)\to f(x)$. 作为练习请计算最后那个求和. □

§4.7.3 Cauchy 型余项

如果在 (4.7.6) 中取 $H(t)=x-t$, 则得到**带 Cauchy 型余项的 Taylor 公式 (Taylor's formula with the Cauchy form of the remainder)**.

定理4.7.5. (Cauchy 型余项) $f\in C^n([x_0,x_0+\delta])\cap D^{n+1}((x_0,x_0+\delta)) \Longrightarrow$ 任意 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 有

$$f(x)=P_n(x)+r_n(x), \tag{4.7.8}$$

这里

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0) \tag{4.7.9}$$

且 $P_n(x)=P_n(x;x_0,f)$ 是 f 在 x_0 处的 n 阶 Taylor 多项式.

注4.7.6. (Maclaurin 公式) 该公式形式上可写成

$$f(x)=f(0)+\sum_{1\le k\le n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+r_n(x), \tag{4.7.10}$$

(1) f 在 0 处 n 阶可导 $\Longrightarrow r_n(x)=o(x^n)$.

(2) $f\in C^n([0,\delta])\cap D^{n+1}((0,\delta)) \Longrightarrow r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ 或 $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}x(x-\xi)^n$. 此时若记作 $\xi=\theta x$, 其中 $\theta\in(0,1)$, 得到

$$f(x)=f(0)+\sum_{1\le k\le n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \tag{4.7.11}$$

或者

$$f(x)=f(0)+\sum_{1\le k\le n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)(1-\theta)^n}{n!}x^{n+1}. \tag{4.7.12}$$

例4.7.7. (1) 指数函数 e^x:

$$e^x=1+\sum_{1\le k\le n}\frac{x^k}{k!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \tag{4.7.13}$$

或
$$e^x = 1 + \sum_{1\le k\le n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}(1-\theta)^n}{n!} x^{n+1}. \tag{4.7.14}$$

(2) 对数函数 $\ln(1+x)$ $(x > -1)$:
$$\ln(1+x) = \sum_{1\le k\le n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} x^{n+1}, \tag{4.7.15}$$

或
$$\ln(1+x) = \sum_{1\le k\le n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + \frac{(-1)^n(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} x^{n+1}. \tag{4.7.16}$$

(3) 三角函数 $\sin x$:
$$\sin x = \sum_{0\le k\le n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \begin{cases} o(x^{2n+2}), \\ \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\sin(\theta x + \frac{2n+3}{2}\pi), \\ \frac{x^{2n+3}}{(2n+1)!}(1-\theta)^{2n+1}\sin(\theta x + \frac{2n+3}{2}\pi). \end{cases} \tag{4.7.17}$$

(4) 三角函数 $\cos x$:
$$\cos x = \sum_{0\le k\le n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \begin{cases} o(x^{2n+1}), \\ \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos(\theta x), \\ \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{(2n)!}(1-\theta)^{2n}\cos(\theta x). \end{cases} \tag{4.7.18}$$

(5) 函数 $(1+x)^\alpha$:
$$(1+x)^\alpha = \sum_{0\le k\le n} \binom{\alpha}{k} x^k + \begin{cases} o(x^n), \\ \binom{\alpha}{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}x^{n+1}, \\ \binom{\alpha}{n+1}(n+1)(1-\theta)^n(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}x^{n+1}. \end{cases} \tag{4.7.19}$$

这里 $\binom{\alpha}{k} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)/k!$.

在例 3.2.13 (3) 中我们断言（但当时没有给出证明）当 $x \to 0$ 时, 有
$$(1+x)^\alpha - \sum_{0\le k\le n-1} \frac{\alpha(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k \sim \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

事实上, 当 $x \to 0$ 时,
$$\frac{(1+x)^\alpha - \sum_{0\le k\le n-1}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k}{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n} = 1 + \frac{o(x^n)}{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n} = 1 + o(1)$$

特别的
$$\frac{1}{1+x} = \sum_{0\le k\le n} (-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}}, \quad x > -1. \tag{4.7.20}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{0\le k\le n} x^k + \frac{x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+2}}, \quad 0 < x < 1. \tag{4.7.21}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{1\le k\le n} \frac{(-1)^{k-1}(2k-3)!!}{(2k)!!} x^k + \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+\frac{1}{2}}}. \tag{4.7.22}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{1\le k\le n} \frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k + \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+\frac{3}{2}}}. \tag{4.7.23}$$

(6) 把函数 $e^{\sin x}$ 进行 Taylor 公式展开至 x^3.

解: 因为

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{6}\sin^3 x + o(x^3)$$

和

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4),$$

我们得到

$$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3). \quad \square$$

(7) 把函数 $\ln\cos x$ 进行 Taylor 公式展开至 x^6.

解: 因为 $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ 故得到

$$\ln\cos x = (\cos x - 1) - \frac{1}{2}(\cos x - 1)^2 + \frac{1}{3}(\cos x - 1)^3 + o(x^6).$$

另一方面

$$\cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + o(x^7),$$

我们有

$$\begin{aligned}\ln\cos x &= \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{8}x^6\right) + o(x^6)\\ &= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6). \quad \square\end{aligned}$$

定理4.7.8. (唯一性) 假设函数 f 在 x_0 处 n 阶可导且在 x_0 附近有

$$f(x) = a_0 + \sum_{1\le k\le n} a_k(x-x_0)^k + R_n(x)$$

这里 $R_n(x) = o((x-x_0)^n) \Longrightarrow$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad 0 \le k \le n.$$

证: 根据假设条件有

$$a_0+\sum_{1\le k\le n}a_k(x-x_0)^k+R_n(x)=f(x_0)+\sum_{1\le k\le n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n).$$

令 $x\to x_0$ 得到 $a_0=f(x_0)$ 且

$$\sum_{1\le k\le n}\left[a_k-\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\right](x-x_0)^k=o((x-x_0)^k)-R_n(x).$$

特别地

$$\left[a_1-\frac{f'(x_0)}{1!}\right]+\sum_{2\le k\le n}\left[a_k-\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\right](x-x_0)^{k-1}=o((x-x_0)^{n-1}).$$

令 $x\to x_0$ 得到 $a_1=f'(x_0)$. 同样过程可得到 $a_k=f^{(k)}(x_0)/k!$. □

推论4.7.9. 假设函数 f 在 x_0 处 $(n+1)$ 阶可导 $\Longrightarrow$

$$P'_{n+1}(x;x_0,f)=P_n(x;x_0,f'),\tag{4.7.24}$$

即, 函数 f 在 x_0 处的 $n+1$ 阶Taylor 多项式等于其导函数 f' 在 x_0 处的 n 阶Taylor 多项式.

证: 根据定义得到

$$f(x)=P_{n+1}(x)+o((x-x_0)^{n+1}),\quad f'(x)=Q_n(x)+o((x-x_0)^n),$$

这里 $P_{n+1}(x)=P_{n+1}(x;x_0,f)$ 和 $Q_n(x):=P_n(x;x_0,f')$. 然而

$$\begin{aligned}P_{n+1}(x)&=\sum_{0\le k\le n+1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,\\ Q_n(x)&=\sum_{0\le k\le n}\frac{(f')^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\\ &=\sum_{1\le k\le n+1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}\ =\ P'_{n+1}(x).\ \square\end{aligned}$$

例4.7.10. (1) 已知 $f(x)=\tan x$ 求 $P_5(x;0,f)$.

解: 根据定义可令

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)}{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)}=\sum_{0\le k\le 5}a_kx^k+o(x^5)$$

故有等式

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)=a_0+a_1x+\left(a_2-\frac{a_0}{2}\right)x^2+\left(a_3-\frac{a_1}{2}\right)x^3$$

$$+\left(a_4-\frac{a_2}{2}+\frac{a_0}{24}\right)x^4+\left(a_5-\frac{a_3}{2}+\frac{a_1}{24}\right)x^5+o(x^5).$$

由定理 4.7.8 比较两边系数得到 $a_0=0, a_1=1, a_0=0, a_3=\frac{1}{3}, a_4=0, a_5=\frac{2}{15}$. 所以

$$\tan x = x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^5). \tag{4.7.25}$$

实际上可以证明 (等学过级数理论后, 参见 (14.3.17))

$$\tan x=\sum_{1\le k\le n}\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!}B_k x^{2k-1}+o(x^{2n-1}), \tag{4.7.26}$$

这里 B_k 是第 k 个Bernoulli 数 (定义见下个例题). □

(2) 已知 $f(x)=x/(e^x-1)$ 求 $P_4(x;0,f)$.

解: 根据 (4.7.13) 得到

$$\frac{x}{e^x-1}=\frac{x}{x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+o(x^4).$$

一般可以得到

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{1}{2}x+\sum_{1\le k\le n}\frac{(-1)^{k-1}B_k}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n}), \tag{4.7.27}$$

这里 B_k 就是所谓的**第 k 个 Bernoulli 数**, 比如

$$B_1=\frac{1}{6},\ \ B_2=\frac{1}{30},\ \ B_3=\frac{1}{42},\ \ B_4=\frac{1}{30},\ \ B_5=\frac{5}{66},\ \ \cdots,\ \ B_k\in\mathbb{Q}.$$

回顾**Riemann ζ 函数**定义为

$$\zeta(z):=\sum_{k\ge 1}\frac{1}{k^z}=\lim_{n\to\infty}\sum_{1\le k\le n}\frac{1}{k^z},\quad \mathrm{Re}(z)>1. \tag{4.7.28}$$

一个经典结果是 (参见 (14.3.15))

$$\zeta(2n)=\frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}B_n\in\mathbb{Q}, \tag{4.7.29}$$

即所有 $\zeta(2n), n=1,2,\cdots$, 是有理数, 我们猜测 $\zeta(2n+1)$ 是无理数 (对前面几个已经证明了). □

(3) $f\in D^2([0,1]), |f(0)|\le 1, |f(1)|\le 1, |f''(x)|\le 2$, 任意 $(x\in[0,1])\Longrightarrow |f'(x)|\le 3$, 任意 $x\in[0,1]$.

证: 给定 $x\in(0,1)$ 根据Taylor 公式得到

$$\begin{aligned} f(1) &= f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\xi)}{2}(1-x)^2,\ \ \exists\,\xi\in(x,1),\\ f(0) &= f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{f''(\eta)}{2}(0-x)^2,\ \ \exists\,\eta\in(0,x). \end{aligned}$$

从而有

$$f(1)-f(0)=f'(x)+\frac{f''(\xi)}{2}(1-x)^2-\frac{f''(\eta)}{2}x^2$$

和

$$\begin{aligned}|f'(x)| &= \left|f(1)-f(0)-\frac{f''(\xi)}{2}(1-x)^2+\frac{f''(\eta)}{2}x^2\right| \\ &\le |f(1)|+|f(0)|+|1-x|^2+|x|^2 \\ &\le 2+x^2+(1-x)^2 \;=\; 2x^2-2x+3 \;\le\; 3.\end{aligned}$$

如果 $x=0$ 或 $x=1$, 同样的不等式也成立. $\square$

(4) 假设 $f\in C^{n+1}((a-\delta,a+\delta))$, $-\delta<h<\delta$, $f^{(n+1)}(a)\neq 0$, 且

$$f(a+h)=\sum_{0\le k\le n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k+\frac{f^{(n)}(a+\theta_h h)}{n!}h^n,\quad 0<\theta_h<1.$$

证明

$$\lim_{h\to 0}\theta_h=\frac{1}{n+1}.$$

证: 根据Taylor 展开得到

$$f(a+h)=\sum_{0\le k\le n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k+\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}h^{n+1}+o(h^{n+1}).$$

由定理 4.7.8 推出

$$\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta_h h)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a)+o(h^{n+1}).$$

故

$$f^{(n)}(a+\theta_h h)=f^{(n)}(a)+\frac{h}{n+1}f^{(n+1)}(a)+o(h).$$

两边同除以 h 推出

$$\begin{array}{ccc}\frac{f^{(n)}(a+\theta_h h)-f^{(n)}(a)}{h} & = & \frac{f^{(n+1)}(a)}{n+1}+o(1)\\ {\scriptstyle h\to 0}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle h\to 0}\\ \lim_{h\to 0}\theta_h\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n)}(a+\theta_h h)-f^{(n)}(a)}{\theta_h h} & = & \frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(a)\end{array}$$

因此得到 $\lim_{h\to 0}\theta_h=1/(n+1)$. $\square$

(5) $f\in D^2([a,b])$, $f(a)=f(b)=0$, $|f''(x)|\le 8$, 任意 $(x\in[a,b])\Longrightarrow$

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\le (b-a)^2.$$

证: 根据Taylor 公式得到存在 $\xi,\eta\in(a,b)$ 满足

$$\begin{aligned} f(a) &= f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f'(\frac{a+b}{2})}{1!}\left(\frac{a-b}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2!}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2, \\ f(b) &= f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f'(\frac{a+b}{2})}{1!}\left(\frac{b-a}{2}\right)+\frac{f''(\eta)}{2!}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

化简得到

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi)+f''(\eta)}{4}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

由条件 $|f''|\le 8$ 得到

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\left|\frac{f''(\xi)+f''(\eta)}{4}\right|\le\frac{(b-a)^2}{4}\times\frac{8+8}{4}=(b-a)^2. \quad \square$$

§4.7.4 Taylor 级数

目前为止Taylor 公式中会有余项 $r_n(x)$, 即

$$f(x)=P_n(x)+r_n(x).$$

一个很自然的问题是什么时候余项消失. 但是根据余项定义, 要使余项消失首要的前提是函数本身的高阶导数都存在. 那么问题可如下陈述. 如果 $f\in C^\infty((x_0-\delta,x_0+\delta))$, 则对任意 $n\in\mathbb{N}_+$, 存在 f 在 x_0 处的 n 阶Taylor 多项式 $P_n(x)$

$$P_n(x)\equiv P_n(x;x_0,f)=\sum_{0\le k\le n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

什么时候如下极限

$$\lim_{n\to\infty}P_n(x)=f(x)\quad ???$$

存在.

定义4.7.11. 假设对每个 $n\in\mathbb{N}_+$ 函数 f 在 x_0 处是 n 阶可导的, 则其在x_0 **处的Taylor 级数 (Taylor's series)** 定义为

$$P_f(x)\equiv P_\infty(x;x_0,f)=\sum_{k\ge 0}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=\lim_{n\to\infty}P_n(x;x_0,f). \tag{4.7.30}$$

称函数 f 在x_0 **处实解析 (real analytic at x_0)** 如果存在 x_0 的邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 使得对任何 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 极限 $\lim_{n\to\infty}P_n(x)$ 都存在且满足

$$f(x)=P_f(x). \tag{4.7.31}$$

称函数 f 在区间 I 内实解析, 记作 $f\in C^\omega(I)$, 如果 f 在 I 中的每个点处都是实解析.

注4.7.12. (1) 函数 f 在 x_0 处实解析 $\Rightarrow$ 函数 f 在 x_0 处光滑 (即 f 的各阶导数都存在).

(2) 函数 f 在 x_0 处光滑 $\not\Rightarrow$ 函数 f 在 x_0 处实解析. 比如考察如下例子

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$$

根据**例** 4.3.4 (2) 得到

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases} Q_{2n}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$$

但函数

$$P_f(x)=\sum_{k\ge 0}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=0$$

对任何靠近 0 的 x 都成立, 这是不可能的!

(3) 利用级数理论可以证明 (参见 §14.3.3)

$$\sin x=\sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!},\quad \cos x=\sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!},$$

$$e^x=\sum_{k\ge 0}\frac{x^k}{k!},\quad \ln(1+x)=\sum_{k\ge 1}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k},$$

$$\tan x=\sum_{k\ge 1}\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)B_k}{(2k)!}x^{2k-1},\quad |x|<\frac{\pi}{2}.$$

(4) **(Bernstein)** $f\in D^\infty([a,b])$ 且 $f^{(k)}(x)\ge 0$, 任意 $(x\in[a,b])\Rightarrow$ 任意 $x,x_0\in(a,b)$ 只要满足 $|x-x_0|<b-x_0$ 就有

$$f(x)=\sum_{k\ge 0}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

证: 参见**定理** 14.3.13 的证明.

定理4.7.13. *假设函数 $f\in D^\infty((x_0-\delta,x_0+\delta))$ 且 $|f^{(n)}(x)|\le M^n$ (存在 $M>0$, 对任意 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 和任意 $n\in\mathbb{N}_+$) $\Rightarrow$ 得到*

$$f(x)=\sum_{k\ge 0}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,\quad \forall\, x\in(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

证: 根据Taylor 公式得到

$$\left|f(x)-\sum_{0\le k\le n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\le\frac{M^{n+1}\delta^{n+1}}{(n+1)!}.$$

当 $n\to\infty$ 得到结论成立. □

例4.7.14. 求函数

$$f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2},\quad -\pi<x<\pi$$

的Taylor 级数.

解: 因为 $f^{(n)}(x)\geq 0$ 根据**定理** 4.7.13 得到

$$\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}=\sum_{k\geq 0}\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k}=\sum_{k\geq 0}\frac{\zeta(2k+2)}{\pi^{2k+2}}(4k+2)x^{2k}$$

这里

$$f^{(2k)}(0)=2\sum_{n\geq 1}\frac{(2k+1)!}{(n\pi)^{2k+2}}=2(2k+1)!\frac{\zeta(2k+2)}{\pi^{2k+2}}.$$

$f^{(2k+1)}=0$. □

例4.7.15. (1) 回顾**Bernoulli** 数的定义

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n\geq 0}\frac{b_n}{n!}x^n=1-\frac{1}{2}x+\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}B_n}{(2n)!}x^{2n},\tag{4.7.32}$$

这里 $b_0=1$, $b_1=-\frac{1}{2}$, $b_{2n+1}=0\ (n\geq 1)$, 和 $b_n=-\frac{1}{n+1}\sum_{0\leq i\leq n-1}\binom{n+1}{i}b_i$.

(2) 类似地可以定义**Euler** 数

$$\frac{2e^x}{e^{2x}+1}=\sum_{n\geq 0}\frac{e_n}{n!}x^n=1+\sum_{n\geq 1}\frac{E_n}{(2n)!}x^{2n},\tag{4.7.33}$$

其中 $e_{2n+1}=0\ (n\geq 1)$ 和 $e_{2n}=-\sum_{0\leq i\leq n-1}\binom{2n}{2i}e_{2i}$.

§4.8 微分学的应用

这节主要是利用微分中值定理和 Taylor 公式来研究函数的性质, 比如单调性、凹凸性、极值性、近似计算等.

§4.8.1 单调函数和一阶导数

首先回忆下函数单调的定义. 假设函数 $f(x)$ 定义在区间 I 上, 称其为 (严格) 单调递增如果 $f(x)\leq(<)f(y)$ 对任意 $x<y$, $x,y\in I$, 都成立. 同样称其为 (严格) 单调递减如果 $f(x)\geq(>)f(y)$ 对任意 $x<y$, $x,y\in I$, 都成立. 为了简单起见, 有时候也把 (严格) 单调递增称为**(严格) 递增**, 把 (严格) 单调递减称为**(严格) 递减**.

定理4.8.1. $f\in C([a,b])\cap D((a,b))\Rightarrow$ 在 (a,b) 内有

(1) $f'>0\Rightarrow f$ 严格递增 $\Rightarrow f'\geq 0$.

(2) $f'\geq 0\Rightarrow f$ 递增 $\Rightarrow f'\geq 0$.

(3) $f' \equiv 0 \Rightarrow f$ 为常数 $\Rightarrow f' \equiv 0$.

(4) $f' \leq 0 \Rightarrow f$ 递减 $f' \leq 0$.

(5) $f' < 0 \Rightarrow f$ 严格递减 $\Rightarrow f \leq 0$.

证: (1) 对任意 $x_1 < x_2$, 存在 $\xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$ 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f'(\xi)}{1} > 0 \Longrightarrow f \text{ 严格递增}.$$

假设函数 f 严格递增. 对任意 $x, x_0 \in (a, b)$ 只要 $x \neq x_0$ 就有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

即得到 $f'(x_0) \geq 0$.

(2) 此时 $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$. 余下证明和 (1) 一样.

同理可证 (3), (4) 和 (5). □

注4.8.2. (1) 函数 f 严格递增 $\not\Rightarrow f' \geq 0$. 比如考虑函数 $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$.

(2) $f \in C([0, +\infty)) \cap D((0, +\infty))$, $f(0) = 0$, $f(x) \geq 0$, 且 $f(x) \geq f'(x)$ $(x > 0) \Rightarrow$ 在 $[0, +\infty)$ 上 $f \equiv 0$

证: 定义函数 $F(x) := e^{-x} f(x)$. 则得到 $F'(x) = [f'(x) - f(x)]e^{-x} \leq 0$, 从而 $F(x) \leq F(0) = 0$. 因此 $F \equiv 0$ 即 $f \equiv 0$. □

(3) $f \in D([1, +\infty))$, $f'(x) \geq 0$, 且 $f(1) = 1 \Rightarrow$

$$F(x) := \frac{f(x)}{1 + f(x)} \text{ 递增}, \quad G(x) := \frac{f(x)}{[1 + f(x)]^2} \text{ 递减}.$$

证: 计算可得

$$F' = \frac{f'}{(1 + f)^2} \geq 0, \quad G' = \frac{f'(1 - f^2)}{(1 + f)^4} \leq 0$$

这是因为 $f(x) \geq f(1) = 1$. □

(4) 考虑函数 $\frac{\sin x}{x}$ 我们得到

$$\frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

(5) 考虑函数 $\cos x - 1 + \frac{1}{2} x^2$ 我们得到

$$\cos x > 1 - \frac{1}{2} x^2, \quad x > 0.$$

(6) 考虑函数 $\sin x - x + \frac{1}{6} x^3$ 我们得到

$$\sin x > x - \frac{1}{6} x^3, \quad x > 0.$$

(7) 考虑函数 $\tan x - x - \frac{1}{3}x^3$ 我们得到

$$\tan x > x + \frac{1}{3}x^3, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

(8)[11] 假设$0 \le \epsilon \le 1/256000n^{10}$, $n \in \mathbb{N}_*$ 和$m = 25600n^{10}$. 证明如下不等式

$$10mn^3(1+\epsilon)^{m-1} \le \frac{m^2}{16}, \quad (1-\epsilon)^{m-2} \ge \frac{3}{4}.$$

§4.8.2 凸函数和一阶、二阶导数

在 §3.1.5 已经引入了凸函数的概念, 在此我们重新给出定义.

定义4.8.3. 假设函数 f 定义在闭区间 $[a,b]$ 上. 称函数 f 在 $[a,b]$ 上是**凸的 (convex)** 如果不等式

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \tag{4.8.1}$$

对任意 $x_1, x_2 \in [a,b]$ 和任意 $0 \le \lambda_1, \lambda_2 \le 1$ 满足 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ 都成立. 如果不等式 (4.8.1) 是严格不等式 (对 $x_1 \ne x_2$), 则称函数 f 在 $[a,b]$ 上是**严格凸的 (strictly convex)**. 若函数 $-f$ 是凸的 (或严格凸的) 则称函数 f 是**凹的 (concave)** (或**严格凹的 (strictly concave)**).

注4.8.4. (1) 下面命题等价: 其中 $x_1 < x < x_2$,

$$\text{函数 } f \text{ 在 } [a,b] \text{ 上是凸的}$$

$$\Updownarrow \clubsuit$$

$$f(x) \le f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1) = f(x_2) - \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x_2-x)$$

$$\Updownarrow \spadesuit$$

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

证: $\spadesuit$ $\Downarrow$. 根据假设得到

$$f(x)(x_2-x_1) \le [f(x_2)-f(x_1)](x-x_1) + (x_2-x_1)f(x_1)$$

从而

$$x_2[f(x)-f(x_1)] \le [f(x_2)-f(x_1)](x-x_1) + x_1[f(x)-f(x_1)].$$

[11] Shi, Wan-Xiong. *Deforming the metric on complete Riemannian manifolds*, J. Differential Geom., **30**(1989), no. 1, 22

即

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-a} \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

用另一个等式可推出第二个不等式.

♠ ⇑. 显然成立.

♣. 任意 $x_1 \le x \le x_2$ 都可以写成 $x = tx_1 + (1-t)x_2$ $(0 \le t \le 1)$. 从而得到

$$f(tx_1+(1-t)x_2) \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(tx_1(1-t)x_2-x_1)+f(x_1)$$

$$= \ (1-t)[f(x_2)-f(x_1)]+f(x_1) \ = \ tf(x_1)+(1-t)f(x_2). \ \square$$

(2) 函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上是凸的 $\Rightarrow$ 任意 $[c,d] \subset [a,b]$ $(a<c<d<b)$, 函数 f 在 $[c,d]$ 上是Lipschitz 的. 特别地, 函数 f 在开区间 (a,b) 内是连续的.

证: 对任意 $c \le x < y \le d$ 有

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \le \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(d)-f(y)}{d-y} \le \frac{f(b)-f(d)}{b-d}.$$

故

$$|f(y)-f(x)| \le M|y-x|, \quad M := \max\left\{\left|\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\right|, \left|\frac{f(b)-f(d)}{b-d}\right|\right\}. \ \square$$

(3) 函数 f 在 $[a,b]$ 上是凸的 $\not\Rightarrow$ $f \in C([a,b])$. 比如函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0<x<1, \\ 0, & \quad x=0, \\ 2, & \quad x=1. \end{cases}$$

(4) 函数 f 定义在 $[a,b]$ 上 $\Rightarrow$

$$f \text{ 是凸的} \quad \Longleftrightarrow \quad f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \ \forall\, x_1,x_2 \in [a,b]. \qquad (4.8.2)$$

证: $\Rightarrow$: 取 $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$.

$\Leftarrow$: 令

$$L(x) := f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

先证在闭区间 $[a,b]$ 上有不等式 $f \le L$ 成立. 定义函数 $g(x) := f(x) - L(x)$, 则 $g \in C([a,b])$. 从而根据闭区间上连续函数的最值性得到 $M_g := \max_{[a,b]} g$ 存在且 $M_g = g(x_0)$ 对某个 $x_0 \in [a,b]$ 成立. 如果 $x_0 = a$ 或 b 则 $M_g = 0$. 如果 $x_0 \in (a,b)$, 则 $x_0 \in (a,(a+b)/2]$ 或 $[(a+b)/2,b)$, 不妨假设 $a < x_0 \le (a+b)/2$. 定义

$$x_0^* := 2x_0 - a \in (a,b].$$

从而得到 $M=g(x_0)=g((a+x_0^*)/2)\le[g(a)+g(x_0^*)]/2\le M/2$, 所以 $M=0$. $\square$

(5) 函数 f 在 $[a,b]$ 上是凸的且 $\max_{[a,b]}f=f(\xi)$ 对某个 $\xi\in(a,b)$ 成立 $\Rightarrow$ $f\equiv f(\xi)$.

证: 因为 $\xi\in(a,b)$, 故存在 $\lambda\in(0,1)$ 使得 $\xi=\lambda x+(1-\lambda)y$ 成立. 根据凸性得到

$$\begin{aligned} f(\xi) &= f(\lambda x+(1-\lambda)y) \le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) \\ &\le \lambda M_f+(1-\lambda)M_f = M_f = f(\xi) \end{aligned}$$

由于 $\lambda\in(0,1)$ 必有 $f(x)=f(y)=f(\xi)$ 即 $f\equiv f(\xi)$. $\square$

(6) 函数 f 在 $[a,b]$ 上是凸的且 $x\in(a,b)\Rightarrow$ 单侧导数 $f'_-(x)$ 和 $f'_+(x)$ 都存在且 $f'_-(x)\le f'_+(x)$.

证: 对任意 $x_1,x_2\in(a,b)$ 只要满足 $x_1<x<x_2$ 就推出

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

令

$$g(y):=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{f(y)-f(x)}{y-x},\quad y<x.$$

对任何 $a<y_1<y_2<x$ 得到

$$g(y_1)=\frac{f(x)-f(y_1)}{x-y_1}\le\frac{f(x)-f(y_2)}{x-y_2}=g(y_2).$$

即函数 g 关于 y 单调递增, 从而左导数 $f'_-(x)$ 存在. 类似的函数

$$h(y):=\frac{f(y)-f(x)}{y-x},\quad x<y$$

关于 y 单调递减, 从而右导数 $f'_+(x)$ 存在. 不等式 $f'_-(x)\le f'_+(x)$ 显然成立. $\square$

(7) 凸的$\not\Rightarrow$ 可导的. 比如函数 $f(x)=|x|$.

(8) 假设函数 f 在 (a,b) 内是凸的. 可以证明集合

$$\{x\in(a,b): f \text{ 在 } x \text{ 处不可导的}\}$$

是可数的. 一般地, 我们有著名的**Rademacher 定理**[12]: 如果函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上是Lipschitz 的则 $f(x)$ 在 (a,b) 内是几乎处处可导. 证明我们会在之后给出.

定理4.8.5. 假设函数 $f\in C([a,b])\cap D((a,b))\Rightarrow$

$$f \text{ 在 } [a,b] \text{ 上是凸的} \iff f' \text{ 在 } (a,b) \text{ 上递增}. \tag{4.8.3}$$

[12] Hans Adolph Rademacher, 1892 年 4 月 3 日 - 1969 年 2 月 7 日, 今德国汉堡人, 德裔美国数学家. 1916 年在Carathéodory 指导下获得 Georg-August-Universität Göttingen 博士学位, 研究领域包括解析数论、实变函数、和量子理论. 1950 年受邀在 ICM 上作 45 钟报告.

证: $\Rightarrow$: 对任意 $a < x_1 < x_2 < b$ 和任意 $\forall\, 0 < \lambda < 1$, 令 $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. 由于 f 是凸的得到

$$f(x) - f(x_1) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) - f(x_1) = (1-\lambda)[f(x_2) - f(x_1)].$$

同样可得

$$f(x) - f(x_2) \le -\lambda[f(x_2) - f(x_1)].$$

即

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

两边求极限得到

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le f'(x_2). \tag{4.8.4}$$

$\Leftarrow$: 存在 $\eta_1 \in (x_1, x)$ 和 $\eta_2 \in (x, x_2)$ 满足

$$f(x_1) - f(x) = f'(\eta_1)(x_1 - x), \quad f(x_2) - f(x) = f'(\eta_2)(x_2 - x).$$

所以

$$\begin{aligned} f(x) - [\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)] &= \lambda f'(\eta_1)(x - x_1) + (1-\lambda)f'(\eta_2)(x - x_2) \\ &\le \lambda f'(\eta_1)(1-\lambda)(x_2 - x_1) + (1-\lambda)f'(\eta_2)\lambda(x_1 - x_2) \\ &= \lambda(1-\lambda)(x_2 - x_1)[f'(\eta_1) - f'(\eta_2)] \le 0. \quad \square \end{aligned}$$

注4.8.6. (1) $f \in C([a,b]) \cap D((a,b))$ 且 f' 在 (a,b) 内严格递增 $\Rightarrow f$ 在 $[a,b]$ 上严格凸的. 但是反之则不成立. 比如考察函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ -1, & x = 0, \\ 2, & x = 1. \end{cases}$$

(2) $f \in C([a,b]) \cap D((a,b)) \Rightarrow$

$$f \text{ 在 } [a,b] \text{ 上是凸的} \iff \left(\begin{array}{c} \forall\, a < x_1, x_2 < b \text{ 有不等式成立} \\ f(x_2) \ge f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) \end{array} \right) \tag{4.8.5}$$

证: $\Rightarrow$: 对任意 $x < x_1 < y$ 根据不等式 (4.8.4) 得到

$$f'(x) \le \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \le f'(x_1) \le \frac{f(y) - f(x_1)}{y - x_1} \le f'(y).$$

$\Leftarrow$: 对任意 $x_1 < x < x_2$ 有不等式

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le f'(x) \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x_1}.$$

利用下面的初等不等式

$$\frac{m}{k} \leq \frac{k+n}{k+\ell} \leq \frac{n}{\ell}, \quad \forall\, k,\ell > 0 \text{和} \ \frac{m}{k} \leq \frac{n}{\ell},$$

得到

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

根据注 4.8.4 (1) 知道 f 是凸的. □

综合以上结果得到

定理4.8.7. 假设函数 $f \in C([a,b]) \cap D^2((a,b)) \Rightarrow$

(1) 函数 f 在 $[a,b]$ 上是凸的 $\Leftrightarrow$ 在 (a,b) 内 $f'' \geq 0$

(2) 在 (a,b) 内 $f'' > 0 \Rightarrow$ 函数 f 在 $[a,b]$ 上是严格凸的.

注4.8.8. (1) **Jensen 不等式**: 函数 f 在 $[a,b]$ 上是凸的 $\Rightarrow$ 对任意 $x_1, \cdots, x_n \in [a,b]$ 和任意 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in [0,1]$ 只要满足 $\sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i = 1$ 就有

$$f\left(\sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i f(x_i). \tag{4.8.6}$$

(2) 函数 $\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内是凸的.

(3)**Young 不等式**: 实数 $a,b \geq 0$, 实数 $p,q > 0$ 且满足 $1/p+1/q=1 \Rightarrow$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}. \tag{4.8.7}$$

(4) **Hölder 不等式**: 实数 $a_i, b_i > 0$ $(1 \leq i \leq n)$, 实数 $p,q > 0$ 且满足 $1/p+1/q=1 \Rightarrow$

$$\sum_{1\leq i\leq n} a_i b_i \leq \left(\sum_{1\leq i\leq n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{1\leq i\leq n} b_i^q\right)^{1/q}. \tag{4.8.8}$$

$p=2$ 时称为**Cauchy 不等式**.

(5) **Minkowski 不等式**: 实数 $a_i, b_i > 0$ $(1 \leq i \leq n)$, 实数 $p > 1 \Rightarrow$

$$\left(\sum_{1\leq i\leq n} (a_i+b_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{1\leq i\leq n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{1\leq i\leq n} b_i^p\right)^{1/p}. \tag{4.8.9}$$

定义4.8.9. 假设函数 $f(x)$ 定义在开区间 I 内. 称 $x_0 \in I$ 是函数 f **的拐点 (point of inflection, inflection point, flex, inflection, inflexion)** 如果存在 $\delta > 0$ 使得 $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset I$, 而且函数 f 在 $(x_0-\delta, x_0)$ 内是凸的但在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内是凹的, 或者在 $(x_0-\delta, x_0)$ 内是凹的但在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内是凸的.

注意到上述定义中我们不要求函数 f 在 x_0 是否可导. 拐点, 根据定义, 是凹凸性发生改变的转折点, 从而拐点和驻点没有本质上的联系. 另一方面拐点是局部概念, 而且一个函数可能存在多个拐点.

另一个注意的地方如下. 函数凹凸性确实在某点 x_0 处改变, 但该点却不在函数定义域, 这样根据**定义 4.8.9** 这个 x_0 就不是拐点. 比如考察函数 $f(x) = 1/x, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $x_0 = 0$ 就不是拐点.

例4.8.10. (1) $f(x) = x^3$. 显然 $x = 0$ 是拐点且 $f'(0) = 0$.

(2) $f(x) = x^{1/3}$. 显然 $x = 0$ 是拐点但 f 在 $x = 0$ 处导数不存在.

(3) 对函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 计算得到

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}.$$

因此得到驻点 $x = 0$ 和两个拐点 $x = \pm 1/\sqrt{3}$.

(4) 对函数 $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ 计算得到

$$f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

因此得到两个驻点 $x = \pm 1$ 和两个拐点 $x = \pm\sqrt{3}$.

定理4.8.11. 给定函数 $f \in C((x_0-\delta, x_0+\delta)) \Rightarrow$

(1) 假设函数 $f \in D((x_0-\delta, x_0)) \cap D((x_0, x_0+\delta))$. 如果 f' 在 $(x_0-\delta, x_0)$ 内递增但在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内递减, 或 f' 在 $(x_0-\delta, x_0)$ 内递减但在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内递增, 则 x_0 是拐点.

(2) 假设函数 $f \in D^2((x_0-\delta, x_0)) \cap D((x_0, x_0+\delta))$. 如果在 $(x_0-\delta, x_0)$ 内 $f'' \geq 0$ 但在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内 $f'' \leq 0$, 或在 $(x_0-\delta, x_0)$ 内 $f'' \leq 0$ 但在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内 $f'' \geq 0$, 则 x_0 是拐点.

(3) 假设函数 $f \in D^2((x_0-\delta, x_0+\delta))$. 如果 x_0 是拐点, 则 $f''(x_0) = 0$.

证: (1) 和 (2) 显然成立. 对 (3), 不妨假设函数 f 在 $(x_0-\delta, x_0)$ 内是凸的而在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内是凹的. 则 f' 在 $(x_0-\delta, x_0)$ 内是单调递增而在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内单调递减. 从而 x_0 是函数 f 的极值点, 故根据**定理 4.4.3** 得到 $f''(x_0)$. □

注4.8.12. (1) x_0 是拐点 $\not\Rightarrow$ $f''(x_0) = 0$. 比如 $f(x) = x^{1/3}$.

(2) $f''(x_0) = 0 \not\Rightarrow x_0$ 是拐点. 比如 $f(x) = x^4$.

§4.8.3 极值和一阶、二阶导数

我们可以把**定理 4.4.3** 重新改写成如下关于极值点的必要条件.

定理4.8.13. (必要条件) 假设函数 f 定义在开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内, x_0 是极值点 $\Rightarrow$ 函数 f 要么在 x_0 处不可导, 要么 $f'(x_0)=0$.

例4.8.14. (1) 显然"函数 f 要么在 x_0 处不可导, 要么 $f'(x_0)=0$" $\not\Rightarrow$ "x_0 是极值点". 比如考察函数 $f(x)=x^3$ 和函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\geq 0, \\ 2x, & x<0. \end{cases}$

(2) 函数

$$f(x):=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$$

在 $x=0$ 处有导数 $f'(0)=0$. 但是导数

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

在 $x=0$ 处附近无穷多次地变号, 所以在 $x=0$ 处无极值.

定理4.8.15. (1) 假设函数 $f\in C((x_0-\delta,x_0+\delta))\cap D(\mathring{U}(x_0,\delta))$.

(1.1) 在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内 $f'(x)(x-x_0)\leq 0\Rightarrow x_0$ 是极大值点.

(1.2) 在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内 $f'(x)(x-x_0)\geq 0\Rightarrow x_0$ 是极小值点.

(1.3) 在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内 $f'(x)>0$ (或 <0) $\Rightarrow x_0$ 不是极值点.

(2) 假设函数 f 在 x_0 处二阶可导且 $f'(x_0)=0$.

(2.1) $f''(x_0)<0\Rightarrow x_0$ 是极大指点.

(2.2) $f''(x_0)>0\Rightarrow x_0$ 是极小值点.

(2.3) $f''(x_0)=0\Rightarrow$ 无法判断.

证: 根据Taylor 公式得到

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$$

即

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=\frac{1}{2}f''(x_0)+o(1),\quad x\to x_0.$$

如果 $f''(x_0)<0$ 则存在 $\delta>0$ 满足

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}<0,\quad \forall\, x\in(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

所以 $f(x)<f(x_0)$ 对任何 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 都成立, 故 x_0 是极大值点. 同理可证当 $f''(x_0)>0$ 时, x_0 是极小值点. 但是当 $f''(x_0)=0$, 上述方法无法判断 x_0 是否是极值点. □

推论4.8.16. 假设函数 f 在 x_0 处 n 阶可导, $f^{(k)}(x_0)=0\ (1\leq k\leq n-1)$, 但 $f^{(n)}(x_0)\neq 0$.

(1) 如果 n 是偶数 $\Rightarrow x_0$ 是极值点. 进一步如果 $f^{(n)}(x_0)>0$(或 $f^{(n)}(x_0)<0$), 则 x_0 是极大指点 (或极小值点).

(2) 如果 n 是奇数 $\Rightarrow x_0$ 不是极值点.

证: 根据Taylor 公式得到

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

即

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)+o(1),\quad x\to x_0.$$

此时结论显而易见. □

注4.8.17. (1) 已知函数 $f\in C([a,b])$ 求解 $M_f=\max_{[a,b]}f=f(\xi)$ 和 $m_f=\min_{[a,b]}f=f(\eta)$. 如果 $\xi,\eta\in(a,b)$, 则 ξ,η 都是内点从而 $f'(\xi)=f'(\eta)=0$, 如果假设 f 在 ξ,η 处可导的话. 否则 ξ,η 都是 $[a,b]$ 的端点. 因此

$$M_f/m_f:=\max/\min\left\{f(\text{端点}),f(\text{驻点}),f(\text{不可导点})\right\}.$$

这就给出函数在闭区间上求最值的方法.

(2) 求函数 $f(x)=x-2\sin x$ 在 $0\leq x\leq 2\pi$ 上的最值.

解: 根据 $f'(x)=1-2\cos x$ 计算得到驻点为 $\pi/3,5\pi/3$. 结合端点处的值得到

$$M_f=f(5\pi/3)=\frac{5\pi}{3}+\sqrt{3},\quad m_f=f(\pi/3)=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}.\ \ \square$$

(3) 假设函数 $f\in C(I)$, 这里 $I=(a,b]$, $[a,b)$, (a,b) 或 $[a,b]$, 或者甚至是 $(a,+\infty)$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,+\infty)\Rightarrow M_f$ 或 m_f 可能不存在. 比如定义在 $[0,1)$ 上的函数 $f(x)=x$.

(4) 求函数 $f(x)=xe^{-x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的最值.

解: 根据 $f'(x)=(1-2x^2)e^{-x^2}$ 计算得到驻点为 $\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2$. 函数 f 在 $(-\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)$ 内单调递增而在 $(-\infty,-\sqrt{2}/2)\cup(\sqrt{2}/2,+\infty)$ 内单调递减. 结合端点处的值得到

$$\sup_{\mathbb{R}}f=\max_{\mathbb{R}}f=f(\sqrt{2}/2)=\frac{1}{\sqrt{2e}},\quad \inf_{\mathbb{R}}f=\min_{\mathbb{R}}f=f(-\sqrt{2}/2)=\frac{-1}{\sqrt{2e}}.\ \ \square$$

(5) 假设函数 $f\in C(I)$ 且 $x_0\in\mathring{I}$ 是 I 内唯一的极值点 $\Rightarrow x_0$ 是 I 的最值点.

证: 不妨假设 x_0 是函数 f 的唯一极大值点. 对任意 $x\in I$ 且 $x\neq x_0$, 考虑闭区间 $[x,x_0]$ 和 $[x_0,x]$. 为了方便期间不妨进一步假设 $x<x_0$, 从而只要考虑

闭区间 $[x,x_0]$ 即可. 根据闭区间上连续函数的最值性得到存在 $\zeta\in[x,x_0]$ 满足 $f(\zeta)=\max_{[x,x_0]}f$. 如果 $\zeta\neq x_0$, 则得到另一个极大值, 这就和已知假设矛盾从而 $\zeta=x_0$. 根据 x 的任意性知道对任意 $x\in\mathring{I}$ 有 $f(x)\le f(x_0)$ 成立. 根据函数的连续性可知 $f(x)\le f(x_0)$ 对任意 $x\in I$ 都成立. □

(6)[13] 证明如下不等式

$$0<\frac{\alpha}{1-\alpha}\ln^2\alpha<1,\quad 0<\alpha<1.$$

证: 显然函数$F(\alpha):=\frac{\alpha}{1-\alpha}\ln^2\alpha$ 可延拓到闭区间$[0,1]$ 上来. 直接计算得到

$$F'(\alpha)=\frac{\ln\alpha}{(1-\alpha)^2}[\ln\alpha+2(1-\alpha)].$$

若令$G(\alpha):=\ln\alpha+2(1-\alpha)$ 则得到

$$G'(\alpha)=\frac{1}{\alpha}-2=\frac{1-2\alpha}{\alpha}.$$

函数$G(\alpha)$ 在$(0,1/2)$ 内严格递增而在$(1/2,1)$ 内严格递减; 注意到$G(1)=0$, $G(1/2)=1-\ln 2>0$ 而且$\lim_{\alpha\to0+}G(\alpha)=-\infty$. 因此存在$\alpha_*\in(0,1/2)$ 满足$G(\alpha_*)=0$ 使得函数$G(\alpha)$ 在$(0,\alpha_*)$ 内<0 而在$(\alpha_*,1)$ 内>0. 故导数$F'(\alpha)$ 在$(0,\alpha_*)$ 内>0 而在$(\alpha_*,1)$ 内<0. 所以

$$F(\alpha)\le F(\alpha_*)=\frac{\alpha_*}{1-\alpha_*}[2(1-\alpha_*)]^2=4\alpha_*(1-\alpha_*)<1,\quad 0<\alpha_*<\frac{1}{2}\quad\square.$$

§4.8.4 函数图像的渐近线

给定函数 $y=f(x)$, $\alpha<x<\beta$, 其中 $f\in C((\alpha,\beta))$. 考察其图像

$$S=\{(x,f(x)):\alpha<x<\beta\}.$$

称直线 $L:y=ax+b$ 是曲线 S 的**渐近线 (asymptote)** 如果

$$\lim_{(x,f(x))\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0. \tag{4.8.10}$$

这里"$(x,f(x))\to\infty$"表示 $\lim_{x\to\alpha+}[x^2+|f(x)|^2]=+\infty$ 或 $\lim_{x\to\beta-}[x^2+|f(x)|^2]=+\infty$.

(1) α 有限: $\lim_{x\to\alpha+}[x^2+|f(x)|^2]=+\infty$ 推出 $\lim_{x\to\alpha+}f(x)=\infty$. 此时直线 $L:x=\alpha$ 称为**垂直渐近线 (vertical asymptote)**.

(2) β 有限: $\lim_{x\to\beta-}[x^2+|f(x)|^2]=+\infty$ 推出 $\lim_{x\to\beta-}f(x)=\infty$. 此时直线 $L:x=\beta$ 也称为**垂直渐近线**.

[13]此例题来源于对下列论文(第13 页)的理解: He, Weiyong; Li, Bo. *The harmonic heat flow of almost complex structures*, arXiv: 1907.12210v1, preprint, 2019.

(3) $\alpha=-\infty\ \beta=+\infty$: 此时得到

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}\qquad b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax]. \tag{4.8.11}$$

当 $a=0$ 时, 称直线 $L:y=b$ 为**水平渐近线 (horizontal asymptote)**; 当 $a\neq 0$ 时, 称直线 $L:y=ax+b$ 为**一般渐近线**或**斜渐近线 (oblique asymptote)**.

综上所述, 最多有两条水平渐近线或斜渐近线, 但是可以有许多条垂直渐近线.

例4.8.18. (1) 求函数 $f(x)=x^3/(x+3)(x-1)$ 的渐近线.

解: 显然垂直渐近线为 $x=-3$ 或 $x=1$. 根据

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1,\quad b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2+3x}{(x+3)(x-1)}=-2$$

得到斜渐近线为 $y=x-2$. □

(2) 求正切函数 $f(x)=\tan x$ 的渐近线.

解: 此时仅有垂直渐近线, 且有无穷多条 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}, n\in\mathbb{Z}$. □

§4.8.5 函数画图

利用函数的单调性、凹凸性、极值点和拐点、及渐近线等, 我们可以较好的来画出给定函数的图像. 基本步骤如下:

(1) 观察函数本身的几何性质 (奇偶性、对称性、周期性), 求定义域、值域及不连续点, 从而将定义域分成若干个小区间 (可能是开区间、闭区间、甚至半开半闭区间);

(2) 寻找特殊点, 比如与坐标轴的交点、对称点、不连续点、不可导点等;

(3) 求驻点确定单调区间、极值点, 求拐点确定凹凸区间;

(4) 求渐近线, 包括水平渐进线、垂直渐近线和斜渐进线;

(5) 列表作图.

例4.8.19. 作函数 $f(x)=x^2/(1+x)$ 的图形.

解: 定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$, 两个特殊点 $x=0$ 和 $x=-1$. 求导数

$$f'=\frac{x(x+2)}{(1+x)^2},\quad f''=\frac{2}{(1+x)^3},$$

从而得到驻点 $x=0,-2$, 不可导点 $x=-1$. 因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{1+x}-x\right]=-1,$$

所以得到渐近线为 $x=-1$ 和 $y=x-1$. 最后列表

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$\nexists$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	极大	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	极小	$\nearrow$

§4.8.6 近似计算

Taylor 公式 (4.7.2)、(4.7.4)、(4.7.8) 及之后将要证明的 (5.4.28), 给出了函数值的近似计算方法. 比如利用 (4.7.4) 对函数 $f\in C^{n+1}([x_0,x_0+\delta])$ 我们得到

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{1\le k\le n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+r_n(x),\quad x\in(x_0,x_0+\delta),$$

这里的误差 $r_n(x)$ 可以被很好的控制

$$|r_n(x)|\le\frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}\le\frac{M\delta^{n+1}}{(n+1)!},\quad M:=\max_{[x_0,x_0+\delta]}|f^{(n+1)}|. \tag{4.8.12}$$

只要 δ 足够下, 我们得到更加精确的估计. 特别地,

$$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x+\sum_{2\le k\le n}\frac{(-1)^{k-1}(2k-3)!!}{(2k)!!}x^k,\quad x\sim 0. \tag{4.8.13}$$

从Plato[14] 的著作中可以发现毕达哥拉斯学派用 $49/25$ 代替 2 从而得到无理数 $\sqrt{2}$ 的近似值:

$$\sqrt{2}\approx\frac{7}{5}=1.4. \tag{4.8.14}$$

Theodorus[15] 用 $49/16$ 代替 3 从而得到无理数 $\sqrt{3}$ 的近似值:

$$\sqrt{3}\approx\frac{7}{4}=1.75. \tag{4.8.15}$$

Archimedes 在《Measurement of a circle》著作中得出了 $\sqrt{3}$ 的很好的近似值:

$$1.732026\approx\frac{265}{153}<\sqrt{3}<\frac{1351}{780}\approx 1.732051, \tag{4.8.16}$$

但却没有说明是如何得到了. Heron[16] 提出了求平方根的近似值:

$$\sqrt{A}=\sqrt{a^2\pm b}\approx a\pm\frac{b}{2a}, \tag{4.8.17}$$

---

[14]Plato, 前 427 年 - 前 347 年, 原名Aristocles, 古希腊伟大的哲学家和数学家. 他和他的老师Socrates 、他的学生Aristotle 被称为希腊三贤. 著有《理想国》.

[15]Theodorus of Cyrene, 约前 465 年 - 前 399 年, 今北非昔兰尼人, 古希腊数学家. 在数学上的贡献是对无理数的早期理论发展.

[16]Heron of Alexandria, 10 年 - 70 年, 古希腊数学家. 他在数学上的贡献是提出了递推计算平方根的方法, 这个公式也曾被巴比伦人使用过, 故也叫做 Babylonian method.

其中 a^2 是最接近 A 的有理数 a 的平方. Ptolemy[17] 给出了 $\sqrt{3}$ 相当近似的值:

$$\sqrt{3} \approx \frac{103}{60} + \frac{55}{60^2} + \frac{23}{60^3} \approx 1.7320509. \tag{4.8.18}$$

例4.8.20. 用 (4.8.13) 来验证 (4.8.17) 和改进 $\sqrt{2}$ 及 $\sqrt{3}$ 的近似值

解: (1) 因为

$$\sqrt{A} = (a^2 \pm b)^{1/2} = a\left(1 \pm \frac{b}{a^2}\right)^{1/2} \approx a\left(1 \pm \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a^2}\right) = a \pm \frac{b}{2a}.$$

(2) 因为

$$\sqrt{2} = \left(\frac{49}{25} + \frac{1}{25}\right)^{1/2} = \frac{7}{5}\left(1 + \frac{1}{49}\right)^{1/2}$$

所以根据 (4.8.13) 得到

$$\sqrt{2} \approx \frac{7}{5}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{49} - \frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{49^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{49^3}\right) \approx 1.41421357.$$

(3) 根据 (4.8.13) 得到

$$\sqrt{3} = \left(\frac{49}{16} - \frac{1}{16}\right)^{1/2} = \frac{9}{4}\left(1 - \frac{1}{49}\right)^{1/2}$$

$$\approx \frac{7}{4}\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{49} - \frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{49^2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{49^3}\right) \approx 1.73205082.$$

§4.8.7 Newton 方法

高中时候我们知道方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 有两个根, $x = 1$ 和 $x = 2$. 那对一般的函数 $f(x)$ 如何求解方程 $f(x) = 0$ 的根呢? 本小节介绍著名的**Newton 法**或**Newton-Raphson 法**.

Newton 在《De analysi per aequationes numero terminorum infinitas》(写于 1669 年但出版于 1711 年) 和《Methodus fluxionum et serierum infinitarum》(写于 1671 年单出版于 1736 年) 中, 给出求方程 $f(x) = 0$ 根的近似方法, 这个方法发表在Wallis 的著作《A treatise of algebra both historical and practical》(1685 年) 中. Raphson [18] 在其专著《Analysis aequationum universalis》(1690) 中改进了Newton 的方法.

假设 $f \in C([a,b]) \cap D^2((a,b))$, $f(a)f(b) < 0$, f' 和 f'' 在 (a,b) 内不变号, 且 f' 和 f'' 在 (a,b) 内有正下界. 在这个假设下, 根据连续函数的介值定理和微

---

[17] Claudius Ptolemy, 约 100 年 - 170 年, 今埃及人, 埃及天文学家和数学家, "地心说" 的提出者. 他在数学上的贡献是著有《Syntaxis mathematica》.

[18] Joseph Raphson, 1648 年 - 1715 年, 今英国伦敦人, 英国数学家. 最有名的公式是 Newton - Raphson 方法.

分中值定理,我们知道方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内仅有一个根 ξ, $f(a)<0<f(b)$, 且 f 为严格递增凸函数.

过点 $(b,f(b))$ 作切线交 x 轴于点

$$x_1=b-\frac{f(b)}{f'(b)}.$$

根据函数的凸性, x_1 比 b 更靠近 ξ. 过点 $(x_1,f(x_1))$ 作切线交 x 轴于点

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

同理 x_2 比 x_1 更靠近 ξ. 从而我们可以递推定义数列 $\{x_n\}_{n\ge1}$ 如下:

$$x_n:=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},\quad n\ge 2. \tag{4.8.19}$$

因为 $\{x_n\}_{n\ge1}$ 单递减却满足 $\xi<x_n<b$, 所以极限

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x_\infty$$

存在且满足 $\xi\le\xi_\infty<b$. 在 (4.8.19) 中令 $n\to\infty$ 得到

$$x_\infty=x_\infty-\frac{f(x_\infty)}{f'(x_\infty)}\quad\Longrightarrow\quad x_\infty=\xi.$$

利用 Taylor 公式存在 $c_n\in(\xi,x_n)$ 满足

$$0=f(\xi)=f(x_n)+f'(x_n)(\xi-x_n)+\frac{1}{2}f''(c_n)(\xi-x_n)^2$$

从而得到

$$x_{n+1}-\xi=\frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}(x_n-\xi)^2.$$

若令

$$M:=\sup_{x\in(a,b)}|f''(x)|,\quad m:=\inf_{x\in(a,b)}|f'(x)|,$$

我们得到

$$|x_{n+1}-\xi|\le\frac{M}{2m}|x_n-\xi|^2,\quad\forall\, n\ge1.$$

递推得到

$$|x_n-\xi|\le\left(\frac{M}{2m}\right)^{2^{n-1}-1}|x_1-\xi|^{2^{n-1}},\quad\forall\, n\ge1.$$

例4.8.21. 利用 Newton 法计算 $\sqrt{2}$.

解: 考虑函数 $f(x)=x^2-2$, $x\in(1,2)$. 因为 $f'(x)=2x$ 和 $f''(x)=2$, 所以

$$M:=\sup_{x\in(1,2)}|f''(x)|=2,\quad m:=\inf_{x\in(1,2)}|f'(x)|=2.$$

此时 (4.8.19) 变成

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 - 2}{2x_{n-1}} \quad \Longrightarrow \quad x_n = \frac{x_{n-1}}{2} + \frac{1}{x_{n-1}}.$$

误差估计为, 根据 (4.8.14) 取 $\sqrt{2} \approx 1.4$,

$$|x_n - \sqrt{2}| \le \frac{|x_1 - \sqrt{2}|^{2^{n-1}}}{2^{2^{n-1}-1}} = \frac{(0.1)^{2^{n-1}}}{2^{2^{n-1}} - 1}, \quad \forall\, n \ge 1.$$

根据我们的定义

$$x_1 = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{2}{4} = \frac{3}{2} = 1.5$$

从而得到

$$x_2 = \frac{1.5}{2} + \frac{1}{1.5} = \frac{8+9}{3 \times 4} = \frac{17}{12}, \quad x_3 = \frac{17}{24} + \frac{12}{17} = \frac{288+289}{17 \times 24} = \frac{577}{408}.$$

x_n	误差
$x_1 = 1.5$	0.1
$x_2 = 1.41666667$	0.00333333
$x_3 = 1.41421569$	0.00000667

但是 Newton 法不总是收敛的. 比如考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{r-x}, & x < r, \\ \sqrt{x-r}, & x \ge r. \end{cases}$$

计算可得

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(r-)^{-1/2}, & x < r, \\ \frac{1}{2}(x-r)^{-1/2}, & x > r, \end{cases}$$

和

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(r-x)^{-3/2}, & x < r, \\ -\frac{1}{4}(x-r)^{-3/2}, & x > r. \end{cases}$$

如果我们取 $x_0 = r + h, h > 0$, 则得到

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = (r+h) - \frac{h^{1/2}}{\frac{1}{2}h^{-1/2}} = (r+h) - 2h = r - h$$

和

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = (r-h) - \frac{-h^{1/2}}{\frac{1}{2}h^{-1/2}} = (r-h) + 2h = r + h.$$

这样下去得到 $x_0 = x_2 = x_4 = \cdots$ 和 $x_1 = x_3 = x_5 = \cdots$. 从而数列 $\{x_n\}_{n\ge1}$ 不收敛.

另一个要注意的是, 就算 Newton 法收敛, 也有可能收敛到另一个根.

§4.9 参考文献

1. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis I*, Translated from the 1988 German original by Gary Brookfield, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. xiv+426 pp. ISBN: 3-7643-7153-6

2. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis II*, Translated from the 1999 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. xii+400 pp. ISBN: 978-3-7643-7472-3; 3-7643-7472-3

3. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis III*, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. xii+468 pp. ISBN: 978-3-7643-7479-2; 3-7643-7479-2

4. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis I*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+574 pp. ISBN: 3-540-40386-8

5. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis II*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xvi+681 pp. ISBN: 3-540-40633-6

6. 常庚哲, 史济怀 编: **数学分析教程** (上、下册), 高等教育出版社, 2003.

7. 陈天权 编著: **数学分析讲义** (第一、二、三册), 北京大学出版社, 2009.

8. 邓建平 编: **微积分 I 和 II**, 科学出版社, 2019.

9. Duhham, William 著 (李伯民, 汪军, 张怀勇 译): **微积分的历程** – 从牛顿到勒贝格, 人民邮电出版社, 2013.

10. 吉米多维奇 著 (李荣涷, 李植 译): **数学分析习题集** (根据 2010 年俄文版翻译), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.

11. Kline, Morris 著 (张理京, 张炎热, 江泽涵等 译): **古今数学思想** (第一、二、三册), 上海科学技术出版社, 2014.

12. 李傅山, 王培合 编著: **数学分析习题课讲义** (1、2、3), 北京大学出版社, 2018.

13. 林源渠, 方企勤 编: **数学分析解题指南**, 北京大学出版社, 2003.

14. 梅加强 编著: **数学分析**, 高等教育出版社, 2015.

15. 裴礼文 编著: **数学分析中的典型问题与方法** (第二版), 高等教育出版社, 2015.

16. 汪林 著: **数学分析中的问题和反例**, 现代数学基础 **56**, 高等教育出版社, 2015.

17. Weir, D. Maurice; Hass, R. Joel; Giordano, R. Frank. *Thomas' calculus*, Eleventh Edition, (影印版, 上、下册), 高等教育出版社, 2016.

18. 徐森林, 薛春华 编著: **数学分析**, 清华出版社, 2005.

19. 杨小远, 孙玉泉, 薛玉梅, 杨卓琴 编著: **工科数学分析教程** (上、下册), 科学出版社, 2011.

20. 张福保, 薛金美, 潮小李 主编: **数学分析讲义**, 科学出版社, 2019.

21. 张筑生 编著: **数学分析新讲** (第一、二、三册), 北京大学出版社, 1990.

22. 周民强 编著: **数学分析习题演练** (第一、二、三册), 科学出版社, 2018.

23. 朱尧辰 编著: **数学分析例选通过范例学技巧**, 哈尔滨工业大学出版社, 2013.

第五章　积分理论

格物, 致知之事也; 诚意, 力行之事也. 物者何? 即所谓本末之物也. 身、心、意、知、家、国、天下皆物也, 天地万物皆物也, 日用常行之事皆物也. 格者, 即物而穷其理也. — 曾国藩家书·《致诸弟》道光二十二年十月二十六日

§5.1　不定积分

回顾下导数的定义:

$$\mathbf{L}: D((a,b)) \longrightarrow \{(a,b) \text{ 上的函数}\}, \quad f \longmapsto f'.$$

这个映射满足 Leibniz 法则, 即对任意 $f, g \in D((a,b))$ 和 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 有

$$\mathbf{L}(fg) = f\mathbf{L}(g) + g\mathbf{L}(f), \quad \mathbf{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathbf{L}(f) + \beta\mathbf{L}(g).$$

一个很自然的问题是 $\mathbf{L}$ 的反函数是什么? 为了回答这个问题, 先看两个例子:

$$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = x^n, \quad \left(\frac{1}{n+1}x^{n+1} + 3\right)' = x^n.$$

因此若反函数 $\mathbf{L}^{-1}$ 存在, 则必不唯一!

§5.1.1　原函数和不定积分

上述反函数 $\mathbf{L}^{-1}$ 的确切定义如下.

定义5.1.1. 称 F 是定义在区间 I 上的函数 f 的**原函数 (primitive)** 或 **(antiderivative)** 如果 $F \in D(I)$ 且满足

$$F'(x) = f(x), \quad x \in I.$$

注5.1.2. (1) 给定函数 f, 改变定义域 I 会给出不同的原函数:

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad x \in \mathbb{R}, \quad \left(\arctan\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+x^2} \quad x \neq 0.$$

(2) 原函数不是唯一的. 比如 $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ 和 $\frac{1}{n+1}x^{n+} + C$(任何常数 C) 都是 x^n 的原函数.

性质5.1.3. 如果函数 F_1 和 F_2 是定义在区间 I 上的函数 f 的原函数, 则对任何 $x \in I$ 差 $F_1(x) - F_2(x)$ 都是一固定的常数.

证: 令 $G := F_1 - F_2$, 则在 I 上成立 $G' \equiv 0$. 根据**定理 4.5.5** 得到 $G = C$. □

定义5.1.4. 给定区间 I 上的函数 f, 定义其**不定积分 (indefinite integral)** 为

$$\int f(x)dx = \{\text{定义在 } I \text{ 上的所有 } f \text{ 的原函数}\}.$$

如果 F 是原函数则根据**性质** 5.1.3 得到

$$\int f(x)dx = \{F + C : C \in \mathbb{R}\}.$$

为了方便起见一般记作

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \tag{5.1.1}$$

符号 "$\int$" 称为**积分号(integral sign)**, 函数 f 称为**被积函数 (integrand)**, x 称为**积分变量 (variable of integration)**, 而把 C 称为**积分常数 (integration constant)**.

积分号是Leibniz 在 1675 年 10 月 29 日的手稿中引入的, 它是"sum"首字母的拉长.

根据定义得到

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \quad \int F'(x)dx = F(x) + C. \tag{5.1.2}$$

§5.1.2 基本不定积分表 I

基本初等函数的原函数如下

$$\int \frac{1}{x}dx \equiv \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$$\int 0dx = C, \quad \int 1dx = x + C,$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{1+\alpha}x^{1+\alpha} + C \quad (\alpha \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx \equiv \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C,$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx \equiv \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \equiv \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(1+\sqrt{1+x^2}) + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \equiv \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1), \quad \int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx \equiv \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx \equiv \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C,$$
$$\int \sinh x dx = \cosh x + C, \quad \int \cosh x dx = \sinh x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sinh^2 x}dx \equiv \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C,$$
$$\int \frac{1}{\cosh^2 x}dx \equiv \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C.$$

作为结束我们来叙述下几个求不定积分方法的历史. 在 1765 年 10 月 29 日的手稿中Leibniz 就已经得出了

$$\int x dy = xy - \int y dx,$$

即**分部积分法**. Jacob Bernoulli 在 1699 年对

$$\int \frac{a^2}{a^2 - x^2} dx$$

作变量替换 (即**变量替换法**, 具体原理参见 §5.2.2)

$$x = a\frac{b^2 - t^2}{b^2 + t^2}$$

就把原来的不定积分化为

$$\int \frac{-a}{t}dt = -a \ln |t| + C = \frac{a}{2} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$$

而Johann Bernoulli 在 1702 年注意到

$$\frac{a^2}{a^2 - x^2} = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right)$$

从而立即把积分求出来. 这样就引入了**部分分式的求积法**, 同年Leibniz 也独立地发现了这个方法.

§5.2 不定积分的基本性质

不定积分最重要的基本性质是变量替换法和分部积分法, 它们给出了计算复杂不定积分的一个非常有效的方法.

§5.2.1 不定积分的线性

根据导数的线性性质我们得到

定理5.2.1. *如果*

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad \int g(x) dx = G(x) + C,$$

则对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 有

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx = [\alpha F(x) + \beta G(x)] + C.$$

推论5.2.2. 如果

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

则对任意 $a \neq 0$ 和任意 b, 有

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C. \tag{5.2.1}$$

证: 令 $t := ax+b$, 得到

$$\frac{d}{dx}F(ax+b) = \frac{d}{dt}F(t)\cdot\frac{dt}{dx} = F'(t)\cdot a = af(ax+b). \quad \square$$

例5.2.3. (1) 对任意 a 和任意 $k \in \mathbb{Z}_+$, 得到

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \begin{cases} \ln|x-a| + C, & \\ \frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C, & k > 1. \end{cases}$$

(2) 对任意 $m \neq 0$ 有

$$\int \sin(mx)\,dx = -\frac{1}{m}\cos(mx) + C, \quad \int \cos(mx)\,dx = \frac{1}{m}\sin(mx) + C,$$

(3) 对任意 $a > 0$ 有

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,$$

(4) 对任意 $c \neq 0$ 有

$$\int \frac{ax+b}{cx+d}dx = \int \left(\frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}\frac{1}{cx+d}\right)dx = \frac{a}{c}x + \frac{bc-ad}{c^2}\ln|cx+d| + C,$$

(5) 对任意 a 有

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,$$

和对任意 $a \neq b$ 有

$$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| + C,$$

(6) 在Johann Bernoulli 和Leibniz 的通信中, 部分分式法还用来求如下不定积分

$$\int \frac{dx}{ax^2 + 2bx + c}.$$

我们用现在的方法来求解.

情形 1: $b^2 - ac > 0$. 此时可写成 $ax^2 + 2bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$, 其中 $\alpha \neq \beta$ 是两个互异的实根, 从而

$$\int \frac{dx}{ax^2 + 2bx + c} = \frac{1}{2\sqrt{b^2 - ac}}\ln\left|\frac{ax + b - \sqrt{b^2 - ac}}{ax + b + \sqrt{b^2 - ac}}\right| + C.$$

情形 2: $b^2-ac=0$. 此时可写成 $ax^2+2bx+c=a(x-\alpha)^2$, 其中 $\alpha=-b/a$ 是唯一的实根, 从而

$$\int\frac{dx}{ax^2+2bx+c}=\int\frac{dx}{a(x-\alpha)^2}=-\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{x-\alpha}+C=\frac{-1}{ax+b}+C.$$

情形 3: $b^2-ac<0$. 此时可写成 $ax^2+2bx+c=a[(x+b/a)^2+(ac-b^2)/a^2]$, 从而

$$\int\frac{dx}{ax^2+2bx+c}=\frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\arctan\frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}}+C.$$

(7) 利用三角恒等式

$$\cos^2(mx)=\frac{1+\cos(2mx)}{2},\quad \sin^2(mx)=\frac{1-\cos(2mx)}{2},$$

得到对任意 $m\neq 0$ 有

$$\int\cos^2(mx)\,dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4m}\sin(2mx)+C,$$

$$\int\sin^2(mx)\,dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4m}\sin(2mx)+C.$$

(8) 利用三角恒等式

$$\sin(mx)\cos(nx)=\frac{\sin[(m+n)x]+\sin[(m-n)x]}{2},$$

$$\cos(mx)\cos(nx)=\frac{\cos[(m+n)x]+\cos[(m-n)x]}{2},$$

$$\sin(mx)\sin(nx)=\frac{\cos[(m+n)x]-\cos[(m-n)x]}{2},$$

得到对任意 $m+n\neq 0$ 且 $m-n\neq 0$ 有

$$\int\sin(mx)\cos(nx)\,dx=-\frac{\cos[(m+n)x]}{2(m+n)}-\frac{\cos[(m-n)x]}{2(m-n)}+C,$$

$$\int\cos(mx)\cos(nx)\,dx=\frac{\sin[(m+n)x]}{2(m+n)}+\frac{\sin[(m-n)x]}{2(m-n)}+C,$$

$$\int\sin(mx)\sin(nx)\,dx=\frac{\sin[(m+n)x]}{2(m+n)}-\frac{\sin[(m-n)x]}{2(m-n)}+C.$$

(9) 利用三角恒等式

$$\sin(2nx)=\sum_{1\le k\le n}[\sin(2kx)-\sin((2k-2)x)]=2\sin x\sum_{1\le k\le n}\cos[(2k-1)x]$$

得到

$$\int\frac{\sin(2nx)}{\sin x}dx=2\sum_{1\le k\le n}\frac{\sin[(2k-1)x]}{2k-1}+C.$$

类似地利用三角恒等式

$$\begin{aligned}\sin[(2n+1)x] &= \sum_{1\le k\le n}[\sin((2k+1)x)-\sin((2k-1)x)]+\sin x\\ &= \sin x+2\sin x\sum_{1\le k\le n}\cos(2kx)\end{aligned}$$

有

$$\int\frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x}dx = x+2\sum_{1\le k\le n}\frac{\sin(2kx)}{2k}+C.$$

§5.2.2 变量替换

基本想法是考虑变量替换 $x=\varphi(t)$ 得到

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

上述公式告诉我们两件事:

(1) 如果给定的不定积分可以写成如下形式

$$\int g(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt,$$

则根据上述公式得到

$$\int g(x)\,dx = F(x)+C,$$

如果此时 $f(x)$ 原函数 $F(x)$ 可以求出来的话.

(2) 反之, 如果给定不定积分

$$\int f(x)\,dx,$$

考察某种变量替换 $x=\varphi(t)$ 使得

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

容易求出原函数 $F(t)$, 则

$$\int f(x)\,dx = F(t)+C = F(\varphi^{-1}(x))+C$$

如果此时反函数 $\varphi^{-1}(x)$ 存在的话.

上面提到的就是**变量替换法 (substitution rule)**.

例5.2.4. (1) 我们有

$$\int\sin^3 x\cos x\,dx = \int\sin^3 x(\sin x)'\,dx = \frac{1}{4}\sin^4 x+C.$$

(2) 作变量替换 $x=t^6$ 得到

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} &= \int\frac{6t^5dt}{t^3(1+t^2)} = 6\int\frac{t^2dt}{1+t^2}\\ &= 6(t-\arctan t)+C = 6\left(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x}\right)+C.\end{aligned}$$

(3) 我们有

$$\int g(x^2)x\,dx=\frac{1}{2}\int g(x^2)\,d(x^2),$$

$$\int g(\ln x)\frac{dx}{x}=\int g(\ln x)\,d\ln x,$$

$$\int g(\sin x)\cos x\,dx=\int g(\sin x)\,d\sin x,$$

$$\int g(\cos x)\sin x\,dx=-\int g(\cos x)\,d\cos x,$$

$$\int g(\tan x)\frac{dx}{\cos^2 x}=\int g(\tan x)\,d\tan x,$$

$$\int\frac{g'(x)}{g(x)}dx=\ln|g(x)|+C.$$

(4) 其它变量替换:

- $x=a\sin t, a\sin^2 t, a\cos t, a\cos^2 t, \alpha\sin^2 t+\beta\cos^2 t,$
- $x=a\sinh t, a\sinh^2 t, a\cosh t, a\cosh^2 t, \alpha\sinh^2 t+\beta\sinh^2 t,$
- $x=a\tan t, a\tanh t,$
- **(万能公式)** 利用 $t=\tan\frac{x}{2}$ 得到 $dt=(1+\tan^2\frac{x}{2})d\frac{x}{2}$ 且*colorblue*

$$\cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},\quad \sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},\quad \tan x=\frac{2\tan\frac{x}{1}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}.$$

把上述变量替换应用到如下例子:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}\quad(\alpha<x<\beta),\quad\left(\text{答案}: 2\tan^{-1}\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}+C\right)$$

考虑 $x=\alpha\cos^2 t+\beta\sin^2 t, 0<t<\pi/2.$

$$\int\frac{dx}{\sin x},\quad\left(\text{答案}: \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C\right),$$

考虑 $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}.$

$$\int \frac{dx}{\cos x}, \quad \left(\text{答案: } \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C\right).$$

考虑变量替换 $x = t + \frac{\pi}{2}$.

$$\int \frac{dx}{1+\epsilon\cos x} \quad (0<\epsilon<1), \quad \left(\text{答案: } \frac{2}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}}\right)+C\right),$$

考虑变量替换 $t = \tan\frac{x}{2}$.

§5.2.3 分部积分及基本不定积分表 II

根据求导的 Leibniz 法则得到

$$(uv)' = u'v + uv'$$

从而对不定积分有**分部积分法 (integration by parts)**

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{5.2.2}$$

注意, 因为积分常数 C 已经在右边第二个不定积分中体现了, 所以应用分部积分法后就无需再写上积分常数了.

例5.2.5. (1) 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,d\ln x = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C,$$

(2) 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \int x\frac{dx}{1+x^2} = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C,$$

(3) 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C,$$

(4) 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$\begin{aligned}\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - \int x\cdot\cos(\ln x)\frac{dx}{x} &= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx \\ &= x\sin(\ln x) - \left[x\cos(\ln x) + \int x\cdot\sin(\ln x)\frac{dx}{x}\right]\end{aligned}$$

从而

$$\int \sin(\ln x)\,dx = \frac{x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]}{2} + C,$$

(5) 利用分部积分 (5.2.2) 和 (4) 得到

$$\int \cos(\ln x)dx = \frac{x[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]}{2} + C,$$

(6) 计算不定积分

$$I_n = \int x^n \ln x dx, \quad n \neq -1.$$

解: 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$I_n = \frac{1}{n+1}\int \ln x d(x^{n+1}) = \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\ln x - \int x^n dx\right)$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}x^{n+1}\right) = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C. \quad \square$$

(7) 计算不定积分

$$I_{n,m} := \int x^n \ln^m x dx, \quad n \neq -1 \text{ 且 } m \in \mathbb{N}_+.$$

解: 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$I_{n,m} = \frac{1}{n+1}\int \ln^m x d(x^{n+1})$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\ln^m x - \int x^{n+1}\cdot m\ln^{m-1} x \cdot \frac{1}{x}dx\right)$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\ln^m x - m\int x^n \ln^{m-1} x dx\right)$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\ln^m x - mI_{n,m-1}\right) = \frac{x^{n+1}\ln^m x}{n+1} - \frac{m}{n+1}I_{n,m-1}. \quad \square$$

比如

$$I_{n,2} = \frac{x^{n+1}\ln^2 x}{n+1} - \frac{2}{n+1}I_{n,1} = \frac{x^{n+1}\ln^2 x}{n+1} - \frac{2}{n+1}I_n$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\left[\ln^2 x - \frac{2}{n+1}\ln x + \frac{2}{(n+1)^2}\right] + C.$$

(8) 计算不定积分

$$I := \int P(x)e^{ax}dx, \quad a \neq 0, \ \deg P = n.$$

解: 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$I = \int \frac{P(x)}{a}de^{ax} = \frac{P(x)e^{ax}}{a} - \int \frac{P'(x)}{a}e^{ax}dx = \frac{P(x)}{a}e^{ax} - \int \frac{P'(x)}{a^2}de^{ax}$$

$$= \left[\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2}\right]e^{ax} + \int \frac{P''(x)}{a^2}e^{ax}dx$$

$$= \sum_{0\le k\le n-1} \frac{P^{(k)}(x)}{a^{k+1}} e^{ax} + \int (-1)^n \frac{P^{(n)}(x)}{a^n} e^{ax} dx$$

$$= \sum_{0\le k\le n-1} \frac{(-1)^k P^{(k)}(x)}{a^{k+1}} e^{ax} + \frac{(-1)^n P^{(n)}(x)}{a^{n+1}} e^{ax} + C$$

$$= \sum_{0\le k\le n} \frac{(-1)^k P^{(k)}(x)}{a^{k+1}} + C. \ \square$$

(9) 计算不定积分

$$I_P := \int P(x)\sin(bx)\,dx, \quad J_P := \int P(x)\cos(bx)\,dx, \quad \det P = n.$$

解: 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$I_P = \int \frac{-P(x)}{b} d\cos(bx) = -\frac{P(x)}{b}\cos(bx) + \int \frac{P'(x)}{b}\cos(bx)\,dx$$

$$= -\frac{P(x)}{b}\cos(bx) + \int \frac{P'(x)}{b^2} d\sin(bx)$$

$$= -\frac{P(x)}{b}\cos(bx) + \frac{P'(x)}{b^2}\sin(bx) - \int \frac{P''(x)}{b^2}\sin(bx)\,dx.$$

即

$$I_P = -\frac{P(x)}{b}\cos(bx) + J_{P'/b}, \quad J_P = \frac{P(x)}{b}\sin(bx) - I_{P'/b}. \ \square$$

(10) 计算不定积分

$$I_n := \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, \quad a \neq 0.$$

解: 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int x \frac{-n(x^2+a^2)^{n-1}\cdot 2x}{(x^2+a^2)^{2n}} dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1},$$

从而得到

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2na^2} I_n + \frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n}, \quad I_1 = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C. \ \square$$

(11) 计算不定积分

$$I_n := \int \tan^n x\,dx, \quad n \ge 1.$$

解: 利用分部积分 (5.2.2) 得到, 对 $n \ge 2$,

$$I_n = \int \tan^{n-2} x \tan^2 x\,dx = \int \tan^{n-2} x \sin^2 x\, d\tan x$$

$$= \tan^{n-1} x \sin^2 x - \int \tan x \left[(n-2)\tan^{n-3} x \tan^2 x + \tan^2 x \cdot 2\sin x \cos x\right] dx$$

$$= \tan^{n-1} x \sin^2 x - (n-2)I_n - 2\int \tan^n x \cos^2 x dx$$

故

$$(n-1)I_n = \tan^{n-1} x(1-\cos^2 x) + \int \tan^{n-1} x d(\cos^2 x)$$

$$= \tan^{n-1} x(1-\cos^2 x) + \tan^{n-1} x \cos^2 x - (n-1)\int \cos^2 x \tan^{n-2} x \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$= \tan^{n-1} x - (n-1)I_{n-2}.$$

因此得到递推公式

$$I_n = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - I_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

观察到

$$I_1 = \int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C,$$

$$I_2 = \int \tan^2 x dx = \int \sin^2 x d\tan x = \sin^2 x \tan x - \int 2\tan x \sin x \cos x dx$$

$$= \sin^2 x \tan x - 2\int \tan^2 x d\tan x = \sin^2 x \tan x - \frac{2}{3}\tan^3 x + C.$$

所以最后得到

$$I_{2n} = (-1)^{n-1} I_2 + \sum_{2\leq k\leq n} \frac{(-1)^{n-k}}{2k-1}\tan^{2k-1} x,$$

和

$$I_{2n+1} = (-1)^n I_1 + \sum_{1\leq k\leq n} \frac{(-)^{n-k}}{2k}\tan^{2k} x. \quad \square$$

(12) 计算不定积分

$$I_{m,n} := \int \cos^m \sin^n x dx, \quad m, n \neq 0.$$

解: 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$I_{m,n} = \int -\cos^m x \sin^{n-1} x d\cos x = \int -\frac{1}{m+1}\sin^{n-1} x d\left(\cos^{m+1} x\right)$$

$$= -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \cos^m x(1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x dx$$

$$= \frac{n-1}{m+1}\left(I_{m,n-2}, I_{m,n}\right) - \frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+1}.$$

故

$$I_{m,n} = \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2} - \frac{\cos^{m+1} x \sin^{n-1} x}{m+n}.$$

类似地可得到

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \int \cos^{m-1} x \sin^n x d \sin x = \int \cos^{m-1} x d\left(\frac{1}{n+1}\sin^{n+1} x\right) \\ &= \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^n x(1-\cos^2 x)\cos^{m-2} x dx \\ &= \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\left(I_{m-2,x} - I_{m,n}\right) \end{aligned}$$

故

$$I_{m,n} = \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n} + \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{m+n}. \square$$

(13) 计算不定积分

$$I_n := \int e^x \sin^n x dx, \quad J_n := \int e^x \cos^n x dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

解: 显然成立

$$I_0 = J_0 = e^x + C$$

和

$$I_1 = \int e^x \sin x dx = -\int e^x d\cos x = -\cos x e^x + J_1,$$

$$J_1 = \int e^x \cos x dx = \int e^x d\sin x = \sin x e^x - I_1.$$

所以

$$I_1 = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C, \quad J_1 = \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2} + C.$$

对 $n \geq 2$,

$$I_n = \int e^x \sin^n x dx = \int -e^x \sin^{n-1} x d\cos x$$

$$= -e^x \sin^{n-1} x \cos x + \int \cos x e^x \left[\sin^{n-1} x + (n-1)\sin^{n-2} x \cos x\right] dx$$

$$= -e^x \sin^{n-1} x \cos x + \int e^x \sin^{n-1} x d\sin x + (n-1)\int e^x \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x) dx$$

$$= -e^x \sin^{n-1} x \cos x + \frac{1}{n}\int e^x d(\sin^n x) + (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

故

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} - \frac{e^x}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{1}{n^2}\left(e^x \sin^n x - \int \sin^n x e^x dx\right) \\ &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} + \frac{e^x}{n^2}\left(\sin^n x - n\sin^{n-1} x \cos x\right) - \frac{1}{n^2} I_n. \end{aligned}$$

化简得到

$$I_n = \frac{n(n-1)}{1+n^2} I_{n-2} - \frac{e^x}{1+n^2}\left(\sin^n x - n\sin^{n-1} x \cos x\right).$$

请诸位补齐 J_n 的计算. □

(14) 若 $y := ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ 且 $b^2 - 4ac > 0$, 证明不定积分

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln|\frac{y'}{2} + \sqrt{ay}| + C, & a > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-y'}{\sqrt{b^2-4ac}} + C, & a < 0. \end{cases}$$

证: 实际上如果 $a > 0$ 得到

$$\sqrt{y} = \sqrt{a}\sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}} = \sqrt{a}\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}}.$$

所以

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|\frac{y'}{2a} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{a}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|\frac{y'}{2} + \sqrt{ay}\right| + C.$$

如果 $a < 0$ 得到

$$\sqrt{y} = \sqrt{-a}\sqrt{-x^2 - \frac{b}{a}x - \frac{c}{a}} = \sqrt{-a}\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} - \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}$$

故

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{\frac{y'}{2a}}{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}} + C = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{y'}{-\sqrt{b^2 - 4ac}} + C. \quad \square$$

(15) 计算不定积分

$$I = \int \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx.$$

解: 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$I = \int e^{x+\frac{1}{x}} dx + \int xd\left(e^{x+\frac{1}{x}}\right) = xe^{x+\frac{1}{x}} + C. \quad \square$$

§5.2.4 有理函数的原函数

Jacob Bernoulli 用部分分式成功地积出某些有理函数后, 他在 1702 年发表的文章中断言, 任何有理函数的不定积分无需包含除三角函数和对数函数之外的任何其它超越函数. 由于有理函数的分母是关于 x 的多项式, 因此Jacob Bernoulli 的断言是否成立取决于能不能把一个实系数多项式写成若干个实系数一次多项式和二次多项式的乘积. Leibniz 在同一年发表文章以 $x^4 + a^4$ 为例指出Jacob Bernoulli 的断言是不对的:

$$x^4 + a^4 = \left(x^2 - a^2\sqrt{-1}\right)\left(x^2 +_a^2 \sqrt{-1}\right)$$

$$= \left(x + a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(x - a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(x + a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\left(x - a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right).$$

在 1719 年Nicola Bernoulli 指出

$$x^4+a^4=(a^2+x^2)^2-2a^2x^2=\left(a^2+x^2+ax\sqrt{2}\right)\left(a^2+x^2-ax\sqrt{2}\right)$$

从而函数 $1/(x^4+a^4)$ 的不定积分可以用三角函数和对数函数来表示.

本小节我们来系统地研究**有理函数的不定积分 (indefinites of rational functions)**. 考察不定积分

$$\int R(x)\,dx, \quad 其中 \quad R(x):=\frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{5.2.3}$$

这里 $P(x),Q(x)$ 是多项式. 根据代数学基本定理[1]可知

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=p(x)+\sum_{1\le j\le \ell}\sum_{1\le k\le k_j}\frac{a_{jk}}{(x-x_j)^k}+\sum_{1\le j\le n}\sum_{1\le k\le m_j}\frac{b_{jk}x+c_{jk}}{(x^2+p_jx+q_j)^k}, \tag{5.2.4}$$

其中

$$\begin{aligned} p(x): &\quad 多项式, \\ a_{jk},b_{jk},c_{jk}: &\quad 唯一确定的实数, \\ Q(x): &\quad =\prod_{1\le j\le \ell}(x-x_j)^{k_j}\prod_{1\le j\le n}(x^2+p_jx+q_j)^{m_j} \quad (p_j^2-4q_j<0). \end{aligned}$$

所以计算不定积分 (5.2.3) 分成下面三种情况.

情形 1:

$$\int p(x)\,dx, \quad p(x) \text{ 是多项式.}$$

如果 $p(x)=\sum_{0\le i\le N}\alpha_i x^i$ 得到

$$\int p(x)\,dx=\sum_{0\le i\le N}\frac{\alpha_i}{i+1}x^{i+1}+C. \tag{5.2.5}$$

情形 2:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

根据基本不定积分表得到

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k}=\begin{cases} \ln|x-a|+C, & k=1, \\ \frac{1}{1-k}(x-a)^{1-k}, & k\ne 1. \end{cases} \tag{5.2.6}$$

[1]即, 任何复系数 n 次多项式 $P(z), n\ge 1$, 至少有一个复根, 在我们之后会给出证明. 作为推论立即得到

$$P(z)=c\prod_{1\le k\le n}(z-z_k).$$

特别地, 任何实系数多项式都可写成若干个实系数一次多项式和二次多项式的乘积.

情形 3:
$$\int \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^k}, \quad p^2-4q<0.$$
根据恒等式
$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2$$
和
$$\frac{bx+c}{(x^2+px+q)^k}=\frac{b\left(x+\frac{p}{2}\right)+\left(c-\frac{bp}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2\right]^k},$$
得到
$$\int \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^k}dx=\frac{b}{2}\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2\right]^k}$$
$$+\left(c-\frac{bp}{2}\right)\int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2\right]^k}.$$
所以只需要求如下两个不定积分
$$I_k:=\int \frac{du^2}{(u^2+a^2)^k}, \quad J_k:=\int \frac{du}{(u^2+a^2)^k},$$
即可. 然而第一个积分显然为
$$I_k=\begin{cases} \ln|u^2+a^2|+C, & k=1, \\ \frac{1}{1-k}(u^2+a^2)^{1-k}, & k\neq 1. \end{cases}$$
并且第二个积分可由**例** 5.2.5 (10) 给出, 即
$$J_k=\frac{2k-1}{2ka^2}J_{k-1}+\frac{1}{2ka^2}\frac{u}{(u^2+a^2)^k}, \quad J_1=\frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}+C.$$
例5.2.6. 计算不定积分
$$\int R(x)dx, \quad 其中 \quad R(x)=\frac{x^7-2x^6+4x^5-5x^4+4x^3-5x^2-x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}.$$

解: 观察到
$$\begin{aligned} R(x) &= x+\frac{x^5-x^4+x^3-3x^2-2x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} \\ &= x+\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+1}. \end{aligned}$$

故得到 $(A,B,C,D,E,F)=(-1,1,1,1,0,1)$ 且

$$\int R(x)dx=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{x-1}+\frac{x}{2(x^2+2)^2}+\ln|x-1|+\frac{3}{2}\tan^{-1}x+C. \quad \Box$$

例5.2.7. (1) 计算不定积分

$$I_n:=\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n},\quad a\neq 0.$$

解: 根据

$$4a(ax^2+bx+c)=(2ax+b)^2+(4ac-b^2)=:t^2+\Delta$$

得到

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{(4a)^n}{2a}\int\frac{dt}{(t^2+\Delta)^n} = 2^{2n-1}a^{n-1}\int\frac{dt}{(t^2+\Delta)^n} \\ &= \begin{cases} \frac{2n-3}{n-1}\frac{2a}{\Delta}I_{n-1}+\frac{1}{(n-1)\Delta}\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}, & \Delta\neq 0, \\ \frac{1}{a^n(1-2n)}(x+\frac{b}{2a})^{1-2n}+C, & \Delta=0. \end{cases} \end{aligned} \quad \Box$$

(2) 计算不定积分

$$I_{m,n}:=\int\frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n},\quad m,n\in\mathbb{N}_+.$$

解: 如果 $a=b$, 则

$$I_{m,n}=\int\frac{dx}{(x+a)^{m+n}}=\frac{1}{1-m-n}(x+a)^{1-m-n}+C.$$

如果 $a\neq b$, 令 $t=\frac{x+a}{x+b}$ 则

$$I_{m,n}=\frac{1}{(b-a)^{m+n-1}}\int\frac{(1-t)^{m+n-2}}{t^m}dt. \quad \Box$$

(3) 计算不定积分

$$\int\frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}}dx,\quad \det P_n=n.$$

解: 根据Taylor 公式

$$P_n(x)=\sum_{0\le k\le n}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

得到

$$\begin{aligned} \int\frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}}dx &= \sum_{0\le k\le n}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k-n-1}dx \\ &= \sum_{0\le k\le n-1}\frac{-P_n^{(k)}(a)}{k!(n-k)(x-a)^{n-k}}+\frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}\ln|x-a|+C. \end{aligned} \quad \Box$$

(4) 计算不定积分

$$I_n = \int \frac{dx}{1+x^{2n}}, \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

解: 根据代数学基本定理得到 $1+x^{2n} = \prod_{1\le k\le 2n}(x-a_k)$ 其中 $a_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi + \sqrt{-1}\sin\frac{2k-1}{2n}\pi$. 所以

$$\frac{1}{1+x^{2n}} = -\frac{1}{2n}\sum_{1\le k\le 2n}\frac{a_k}{x-a_k} = \frac{1}{n}\sum_{1\le k\le n}\frac{1-(\cos\frac{2k-1}{2n}\pi)x}{x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1}.$$

故

$$\begin{aligned} I_n &= -\frac{1}{2n}\sum_{1\le k\le n}\left(\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\int\frac{2x-2\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1}dx\right) \\ &+\frac{1}{n}\sum_{1\le k\le n}\left[\sin^2\frac{2k-1}{2n}\pi\int\frac{dx}{\left(x-\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right)^2+\sin 62\frac{2k-1}{2n}\pi}\right] \\ &= -\frac{1}{2n}\sum_{1\le k\le n}\left[\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\cdot\ln\left(x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1\right)\right] \\ &+\frac{1}{n}\sum_{1\le k\le n}\left(\sin\frac{2k-1}{2n}\pi\cdot\tan^{-1}\frac{x-\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{\sin\frac{3k-1}{2n}\pi}\right)+C. \quad \square \end{aligned}$$

我们已经使用了**代数学基本定理**, 即任何非常数的 n 次多项式 $P(z)$ 由如下分解

$$P(z) = A\prod_{1\le k\le n}(z-\alpha_k), \quad A\in\mathbb{R},\ \alpha_k\in\mathbb{C}. \tag{5.2.7}$$

等价地, 任何非常数多项式 $P(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上至少有一个根 α. 否则的话 $P(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上没有根. 因此函数

$$f(z) := \frac{1}{P(z)}$$

是全纯的. 当 $|z|\to+\infty$, $|P(z)|\to+\infty$ 和 $|f(z)|\to 0$。所以全纯函数 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有界. 由 Lioullie 定理得到 $f(z)\equiv C$, 对任意 $z\in\mathbb{C}$ 都成立.

§5.2.5 形如 $\int R(\sin x,\cos x)dx$ 的原函数

同样给定有理函数

$$R(u,v) := \frac{P(u,v)}{Q(u,v)}, \quad \text{其中 } P, Q \text{ 是关于 } u, v \text{ 的多项式}. \tag{5.2.8}$$

考察如下三角有理函数的不定积分

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx. \tag{5.2.9}$$

利用变量替换

$$t := \tan\frac{x}{2}$$

得到

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt. \tag{5.2.10}$$

如果函数 $R(u,v)$ 满足一定的函数结构, 可以利用其它简单的变量替换.

(1) $R(-u,v)=R(u,v)$. 此时 $R(u,v)=R_1(u^2,v)$ 且

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx = \int R_1(1-\cos^2 x, \cos x)\,dx = \int \frac{-R_1(1-t^2,t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}}. \tag{5.2.11}$$

(2) $R(u,-v)=-R(u,v)$. 此时 $R(u,v)=R_2(u,v^2)$ 且

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx = \int R_2(\sin x, 1-\sin^2 x)\,dx = \int \frac{R_2(t,1-t^2)\,dt}{\sqrt{1-t^2}}. \tag{5.2.12}$$

(3) $R(-u,v)=-R(u,v)$. 此时 $R(u,v)=uR_1^*(u^2,v)$ 且

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx = \int \sin x R_1^*(\sin^2 x, \cos x)\,dx = \int -R_1^*(1-t^2,t)\,dt. \tag{5.2.13}$$

(4) $R(u,-v)=-R(u,v)$. 此时 $R(u,v)=vR_2^*(u^2,v)$ 且

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx = \int \cos x R_2^*(\sin x, \cos^2 x)\,dx = \int R_2^*(t,1-t^2)\,dt. \tag{5.2.14}$$

(5) $R(-u,-v)=R(u,v)$. 此时 $R(u,v)=R((u/v)v,v)=R^*(u/v,v)$ 从而

$$R^*(u/v,-v)=R^*((-u/-v),-v)=R(-u,-v)=R^*(u/v,v).$$

所以得到 $R(u,v)=R^*(u/v,v)=R_3(u/v,v^2)$ 且

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx = \int R_3(\tan^2 x, \cos^2 x)\,dx = \int R_3\left(t, \frac{1}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}. \tag{5.2.15}$$

(6) 一般情形. 对任意 $R(u,v)$ 可写成

$$R(u,v)=\frac{R(u,v)-R(-u,v)}{2}+\frac{R(-u,v)-R(-u,-v)}{2}+\frac{R(-u,-v)+R(u,v)}{2}.$$

即可以写成 (4), (5), (6) 的组合.

(7) $R(u,v)=R^*(u^2,v^2)$. 此时只要作变量替换 $t=\sin x$ 便得到

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx = \int R^*(t^2,1-t^2)\frac{dt}{\sqrt{2-t^2}}. \tag{5.2.16}$$

作为一个典型例子考虑

$$\int \sin^\nu x \cos^\mu x\,dx, \quad \mu,\nu\in\mathbb{Q} \text{ 且 } 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

作变量替换 $z=\sin x$ 得到

$$\sin^{\nu}x\cos^{\mu}x\,dx=\frac{1}{2}\sin^{\nu-1}x(1-\sin^2 x)^{\frac{\mu-1}{2}}2\sin x\,d\sin x=\frac{1}{2}(1-z)^{\frac{\mu-1}{2}}z^{\frac{\nu-1}{2}}dz.$$

例5.2.8. (1) 计算不定积分

$$I_n:=\int\frac{dx}{\sin^n x},\quad J_n:=\int\frac{dx}{\cos^n x}.$$

解: 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$\begin{aligned}I_n &= \int\frac{\sin x\,dx}{\sin^{n+1}x} = -\int\frac{d\cos x}{\sin^{n+1}x}\\ &= -\frac{\cos x}{\sin^{n+1}x}+\int\cos x\left[-(n+1)\sin^{-n-2}x\cdot\cos x\right]dx\\ &= -\frac{\cos x}{\sin^{n+1}x}-(n+1)\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^{n+2}x}dx = -\frac{\cos x}{\sin^{n+1}x}-(n+1)(I_{n+2}-I_n)\end{aligned}$$

从而

$$I_n=-\frac{-\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}.$$

类似地得到

$$J_n=\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}J_{n-2}.\quad\square$$

(2) 计算不定积分

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x},\quad (a>0 \text{ 且 } |b|<|a|).$$

解: 利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{a}\int\frac{dx}{1+\epsilon\cos x}\quad (\epsilon:=b/a\in(-1,1))\\ &= \frac{2}{a}\int\frac{d\tan\frac{x}{2}}{(1+\epsilon)+(1-\epsilon)\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2}{a(1-\epsilon)}\int\frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}\right)^2}\\ &= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right)+C.\quad\square\end{aligned}$$

(3) 计算不定积分

$$\int P(x)e^{ax}dx,\quad \int P(x)\sin bx\,dx,\quad \int P(x)\cos(bx)\,dx$$

可归结到计算如下两个不定积分 (其中 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$)

$$I_n:=\int x^n e^{ax}\sin bx\,dx,\quad J_n:=\int x^n e^{ax}\cos bx\,dx.$$

利用分部积分 (5.2.2) 得到

$$\begin{aligned} I_n &= -\frac{1}{b}\int x^n e^{ax} d\cos bx \\ &= -\frac{1}{b}\left[x^n e^{ax}\cos bx - \int \cos bx\left(nx^{n-1}e^{ax} + ax^n e^{ax}\right)dx\right] \\ &= -\frac{1}{b}x^n e^{ax}\cos bx + \frac{n}{b}J_{n-1} + \frac{a}{b}J_n \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{1}{b}\int x^n e^{ax} d\sin bx \\ &= \frac{1}{b}\left[x^n e^{ax}\sin bx - \int \sin bx\left(nx^{n-1}e^{ax} + ax^n e^{ax}\right)dx\right] \\ &= \frac{1}{b}x^n e^{ax}\sin bx - \frac{n}{b}I_{n-1} - \frac{a}{b}I_n. \end{aligned}$$

所以推出

$$I_n = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left[(a+n)x^{n-1}\sin bx - bx^n\cos bx\right] - \frac{2na}{a^2+b^2}I_{n-1} - \frac{n(n-1)}{a^2+b^2}I_{n-2}.$$

请诸位补充完整 J_n 的表达式.

§5.2.6 形如 $\int R(x,y(x))dx$ 的原函数

同样给定有理函数

$$R(u,v) := \frac{P(u,v)}{Q(u,v)}, \quad \text{其中 } P,Q \text{ 是关于 } u,v \text{ 的多项式.} \tag{5.2.17}$$

考察如下形式的有理函数的不定积分

$$\int R(x,y(x))dx.$$

此时作变量替换要根据所给函数 $y(x)$ 的结构来从优选择.

(I) $y(x) = \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$**, 其中** $m \in \mathbb{N}_+$ **且** $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$**.** 此时令

$$t := \omega(t) = \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{1}{m}}, \quad t^m = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}, \quad x = \varphi(t) = \frac{\delta t^m - \beta}{\alpha - \gamma t^m}.$$

则

$$\int R(x,y(x))dx = \int R(\varphi(t),t)\varphi'(t)dt. \tag{5.2.18}$$

(II) $R(x,y) = x^m(a+bx^n)^p$**, 这里** $m,n,p \in \mathbb{Q}$ **且** $a,b \in \mathbb{R}$**.** 如果 $p \in \mathbb{Z}$, 得到

$$R(x,y(x)) = x^{\frac{m_1}{m_2}}\left(a + bx^{\frac{n_1}{n_2}}\right)^p$$

其中 $p=p_1/p_2, m=m_1/m_2, n=n_1/n_2$. 令

$$\lambda := [m_2, n_2], \quad t := x^{\frac{1}{\lambda}},$$

得到

$$\int R(x,y(x))dx = \int t^{\frac{\lambda}{m_2}m_1}\left(a+bt^{\frac{\lambda}{n_2}n_1}\right)^p \lambda t^{\lambda-1}dt = \int R^*(t)dt. \tag{5.2.19}$$

如果 $p \notin \mathbb{Z}$, 令 $z=x^n$ 得到

$$R(x,y(x))dx = \frac{1}{n}(a+bz)^p z^q dz, \quad q := \frac{m+1}{n} - 1.$$

从而

$$\int R(x,y(x))dx = \frac{1}{n}\int (a+bz)^p z^q dz. \tag{5.2.20}$$

如果 $q \in \mathbb{Z}$ 则令

$$t := \sqrt[\nu]{a+bz}, \quad p := \frac{p_1}{\nu},$$

上述不定积分可化简为

$$\int R(x,y(x))dx = \int \frac{t^{\nu p}}{n}\left(\frac{t^\nu - a}{b}\right)^q \frac{\nu t^{\nu-1}}{b}dt = \int R^*(t)dt. \tag{5.2.21}$$

如果 $q \notin \mathbb{Z}$, 把 (5.2.20) 写成

$$\int R(x,y(x))dx = \frac{1}{n}\int \left(\frac{a+bz}{z}\right)^p z^{p+q}dz.$$

如果 $p+q \in \mathbb{Z}$ 令

$$t = \sqrt[\nu]{\frac{a+bz}{z}}, \quad p = \frac{p_1}{\nu}$$

得到

$$\int R(x,y(x))dx = \frac{1}{n}\int t^{\nu p} z^{p+q} dz = \int R^*(t,z)dz. \tag{5.2.22}$$

下面结论Newton 最早知道, 但是由Chebeshev 给出了严格证明.

不定积分

$$\int R(x,y(x))dx$$

可以用初等函数表示, 如果 $p, q, p+q$ 中有一个是整数, 或者 p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n}+p$ 中有一个是整数.

例5.2.9. (1) 计算不定积分

$$J_{p,q} := \int (a+bz)^p z^q dz.$$

解: 因为

$$((a+bz)^p z^q)' = p(a+bz)^{p-1}bz^q + q(a+bz)^p z^{q-1}$$

和

$$(a+bz)^{p+1}z^q = (a+bz)(a+bz)^p z^q,$$

得到

$$\begin{aligned} J_{p+1,q} &= aJ_{p,q} + bJ_{p,q+1}, \\ (a+bz)^{p+1}z^{q+1} &= (p+1)bJ_{p,q+1} + (q+1)J_{p+1,q}. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} J_{p,q} &= -\frac{(a+bz)^{p+2}z^{q+1}}{a(p+1)} + \frac{p+q+2}{a(p+1)}J_{p+1,q} \quad (p \neq -1) \\ &= \frac{(a+bz)^{p+2}z^{q+1}}{a(q+1)} - b\frac{p+q+2}{a(q+1)}J_{p,q+1} \quad (q \neq -1) \\ &= \frac{(a+bz)^p z^{p+1}}{p+q+1} + \frac{ap}{p+q+1}J_{p-1,q} \quad (p+q+1 \neq 0) \\ &= \frac{(a+bz)^{p+1}z^q}{b(p+q+1)} - \frac{aq}{b(p+q+1)}J_{p,q-1} \quad (p+q \neq -1). \quad \square \end{aligned}$$

(2) 计算不定积分

$$H_m := \int \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

解: 如果 m 是奇数, 则 $\frac{m+1}{2} \in \mathbb{Z}$; 如果 m 是偶数, 则 $\frac{m+1}{2} + q = \frac{m+1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{m}{2} \in \mathbb{Z}$. 所以任意 m 上述不定积分可用初等函数表示. 若 $m \geq 2$,

$$\begin{aligned} H_m &= \frac{1}{2}\int (1-z)^{-1/2} z^{\frac{m-1}{2}} dz = \frac{1}{2}J_{-\frac{1}{2},\frac{m-1}{2}} \\ &= -\frac{1}{m}x^{m-1}\sqrt{1-x^2} + \frac{m-1}{m}H_{m-2}. \end{aligned}$$

这里

$$H_1 = -\sqrt{1-x^2} + C, \quad H_0 = \arcsin x + C.$$

如果 $m < -1$, 可记 $m = -\mu$ 其中 $\mu > 1$, 从而

$$H_m = \frac{1}{2}J_{-\frac{1}{2},\frac{m-1}{2}} = -\frac{x^{-(\mu-1)}\sqrt{1-x^2}}{\mu-1} + \frac{\mu-2}{\mu-1}H_{-(\mu-2)}.$$

这里

$$H_{-1} = \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C, \quad H_{-2} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C. \quad \square$$

(III) $R(x, y(x)) = R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, 其中 $a, b, c \in \mathbb{R}$. 此时一般的变量替换, 即**Euler 替换**:

情形 1: $a > 0$. 此时考虑

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x \tag{5.2.23}$$

从而得到 $bx+c=t^2-2\sqrt{a}tx$ 且

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b},\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}.$$

最后得到

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$$

$$=\int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b},\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}\right)2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt \quad = \quad \int R^*(t)dt.$$

情形 2: $c>0$**.** 此时考虑

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c} \tag{5.2.24}$$

从而得到 $ax+b=xt^2+2\sqrt{c}t$ 且

$$x=\frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2},\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{c}t^2-bt+\sqrt{c}a}{a-t^2}.$$

最后得到

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$$

$$=\int R\left(\frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2},\frac{\sqrt{c}t^2-bt+\sqrt{c}a}{a-t^2}\right)2\frac{\sqrt{c}t^2-bt+\sqrt{c}a}{(a-t^2)^2}dt \quad = \quad \int R^*(t)dt.$$

观察到

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{x^2\left(\frac{c}{x^2}+\frac{b}{x}+a\right)}$$

且

$$R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right) \quad = \quad R\left(x,x\sqrt{\frac{c}{x^2}+\frac{b}{x}+a}\right)=R^*\left(z,\sqrt{cz^2+bz+a}\right),$$

其中 $z=1/x$, 所以**情形 1** 和**情形 2** 等价.

情形 3: $ax^2+bx+c=a(x-\lambda)(x-\mu)$**, 其中** $\lambda\neq\mu$ **且** $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$**.** 此时考虑

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\lambda),\quad t=\sqrt{a\frac{x-\mu}{x-\lambda}},\quad dx=\frac{2a(\mu-\lambda)t}{(t^2-a^2)^2}dt. \tag{5.2.25}$$

一般地不定积分

$$I:=\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$$

可以归结到如下三个不定积分

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx, \\ I_2 &:= \int \frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}, \\ I_3 &:= \int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}. \end{aligned}$$

例5.2.10. 计算不定积分

$$I := \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}.$$

解: 作变量替换 $\sqrt{x^2-x+1}=t-x$ 得到

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2t^2-2t+2}{t(2t-1)^2}dt = \int \left[\frac{2}{t}-\frac{3}{2t-1}+\frac{3}{(2t-1)^2}\right]dt \\ &= -\frac{3}{2}\frac{1}{2t-1}+2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|2t-1|+C \\ &= -\frac{3}{2}\frac{1}{2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1}+2\ln\left|x+\sqrt{x^2-x+1}\right| \\ &\quad -\frac{3}{2}\ln\left|2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1\right|+C. \ \Box \end{aligned}$$

对不定积分 I_1 只要考虑

$$V_m := \int \frac{x^m}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{x^m}{\sqrt{Y}}dx, \quad Y := ax^2+bx+c. \tag{5.2.26}$$

由于

$$\begin{aligned} \left(x^{m-1}\sqrt{Y}\right)' &= (m-1)x^{m-2}\sqrt{Y}+\frac{x^{m-1}Y'}{2\sqrt{Y}} \\ &= \frac{2(m-1)x^{m-2}(ax^2+bx+c)+x^{m-1}(2ax+b)}{2\sqrt{Y}} \\ &= ma\frac{x^m}{\sqrt{Y}}+\left(m-\frac{1}{2}\right)b\frac{x^{m-1}}{\sqrt{Y}}+(m-1)c\frac{x^{m-2}}{\sqrt{Y}}. \end{aligned}$$

所以得到

$$x^{m-1}\sqrt{Y} = maV_m+\left(m-\frac{1}{2}\right)bV_{m-1}+(m-1)cV_{m-2}$$

且

$$V_1 = \frac{1}{a}\sqrt{Y}-\frac{b}{2a}V_0, \quad V_2 = \frac{2a-3b}{4a^2}\sqrt{Y}+\frac{b^2-4ac}{8a^2}V_0.$$

所以

$$V_m = p_{m-1}(x)\sqrt{Y}+\lambda_m V_0, \tag{5.2.27}$$

其中 $\deg p_{m-1} = m-1$ 且 $\lambda_m \in \mathbb{R}$. 最后一点是如何计算

$$V_0 := \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

显然这个不定积分可归结到

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm \alpha^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm\alpha^2}\right| + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\alpha} + C \quad (\alpha > 0).$$

对不定积分 I_2 作变量替换 $x-\alpha = 1/t$ 得到

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{Y}} = \int \frac{t^{k-1}dt}{\sqrt{(a\alpha^2+b\alpha+c)t^2+(2a\alpha+b)t+a}}. \tag{5.2.28}$$

这就转化成不定积分 I_1.

对不定积分 I_3 分两种情形考虑. 情形 1: $a(x^2+px+c) = ax^2+bx+c$. 此时

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \frac{a^m(Ax+B)}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m+1}{2}}}dx = \int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m+1}{2}}}dx \\ &= \frac{M}{2a}\int \frac{(2ax+b)dx}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m+1}{2}}} + \left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m+1}{2}}} \\ &= \frac{M}{2a}\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{m-\frac{1}{2}}}\frac{1}{-m+\frac{1}{2}} + \left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m+1}{2}}}. \end{aligned}$$

所以就归结到求不定积分

$$J := \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{m+\frac{1}{2}}} = \int \frac{dx}{Y^{m+\frac{1}{2}}}. \tag{5.2.29}$$

考虑**Abel 变换**:

$$t := (\sqrt{Y})' = \frac{Y'}{2\sqrt{Y}} = \frac{ax+\frac{b}{2}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad Y = \frac{4ac-b^2}{4(a-t^2)}. \tag{5.2.30}$$

因此得到

$$J = \left(\frac{4}{4ac-b^2}\right)^m \int (a-t^2)^{m-1}dt. \tag{5.2.31}$$

情形 2: 一般得有 $ax^2+bx+c = a(x^2+p'x+q')$, 这里 $x^2+p'x+q' \neq x^2+px+q$. 此时想法是把线性项去掉. 当 $p \neq p'$ 时考虑变量替换

$$x = \frac{\mu t+\nu}{t+1}.$$

得到

$$x^2+px+q = \frac{(\mu^2+p\mu+q)t^2+[2\mu\nu+(\mu+\nu)+2q]t+(\nu^2+p\nu+q)}{(t+1)^2}.$$

对 $x^2+p'x+q'$ 也有类似的表达式, 只要把上述等式中 p,q' 换成 p',q' 即可. 令线性项为零就得到 μ,ν 所要满足的条件

$$2\mu\nu+p(\mu+\nu)+2q=0=2\mu\nu+p'(\mu+\nu)+2q'.$$

由此得到

$$\mu+\nu=-2\frac{q-q'}{p-p'},\quad \mu=\frac{p'q-pq'}{p-p'}$$

而且 μ,ν 是

$$(p-p')u^2+2(q-q')u+(p'q-pq')=0$$

得两个实根. 根据二项式判别法知道

$$\mu\neq\nu \quad\Longleftrightarrow\quad (q-q')^2-(p-p')(p'q-pq')>0.$$

利用如上选择的 μ,ν 计算得到, 其中 $\deg P=2m-1$ 且 $\lambda>0$,

$$\begin{aligned}\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}dx &= \int\frac{P(t)\,dt}{(t^2+\lambda)^m\sqrt{\alpha t^2+\beta}}\\ &= \sum_i\int\frac{A_it+B_i}{(t^2+\lambda)^{k_i}\sqrt{\alpha t^2+\beta}}dt \quad (1\le k_i\le m).\end{aligned}$$

对每个不定积分有

$$\int\frac{At+B}{(t^2+\lambda)^k\sqrt{\alpha t^2+\beta}}dt=\frac{A}{\alpha}\int\frac{\alpha t\,dt}{(t^2+\lambda)^k\sqrt{\alpha t^2+\beta}}+B\int\frac{dt}{(t^2+\lambda)^k\sqrt{\alpha t^2+\beta}}$$

其中对第一个不定积分作变量替换 $u=\sqrt{\alpha t^2+\beta}$ 和对第二个不定积分作变量替换 $u=\alpha t/\sqrt{\alpha t^2+\beta}$ 得到

$$\int\frac{At+B}{(t^2+\lambda)^k\sqrt{\alpha t^2+\beta}}dt=\int\frac{A\alpha^{k-1}du}{(u^2+\alpha\lambda-\beta)^k}+\int\frac{B\alpha^k(\alpha-u^2)^{k-1}du}{[(\beta-\alpha\lambda)u^2+\lambda\alpha^2]^k}.$$

即可以归结到有理函数的不定积分.

当 $p=p'$ 时, 作变量替换 $x=t-\frac{p}{2}$ 得到

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m\sqrt{a(x^2+px+q')}}dx=\int\frac{Ax+(B-\frac{Ap}{2})}{\left(t^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^m\sqrt{at^2+a\left(q'-\frac{p^2}{4}\right)}}dt.$$

§5.2.7 * 椭圆积分

在 1694 年研究弹性问题时, Jacob Bernoulli 考虑了如下无理函数的不定积分

$$\int\frac{a^2}{\sqrt{a^4-r^4}}dr,$$

并猜测这不能初等函数来表示. 在十七世纪求椭圆周长是出现了如下不定积分

$$\int \frac{a(1-k^2t^2)dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

而在求单摆的周期问题是出现了不定积分

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}.$$

Euler 在 1744 年研究了

$$\int \frac{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)dx}{\sqrt{a^4-(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^2}}.$$

上面这些不定积分叫**椭圆积分 (elliptic integrals)**, 得名于计算椭圆的周长.

椭圆积分权威性的工作是Legendre 从 1786 年开始的, 他写了两篇基本的文章 (1786)、撰写了三卷本的《Exercices de calcul intégral》(1811、1817、1826)、撰写了二卷本的《Traité des fonctions elliptiques》(1825 - 1826)、撰写了三篇对Abel 和Jacobi 在 1829 年和 1832 年的工作的注释和补充.

Abel 把椭圆积分推广到现在称之为的**Abel 积分 (Abel's integrals)**:

$$\int R(x,y)dx, \quad P(x,y)=0 \tag{5.2.32}$$

其中 $R(x,y)$ 是关于 x,y 的有理函数, 多项式 $P(x,y)$ 满足条件 $P\in\mathbb{Z}[x,y]$ 且 $\deg P\geq 2$. Abel 和Liouville 证明了

一般情况下 (5.2.32) 不能同初等函数来表示.

Abel 积分的特殊情形就是椭圆积分

$$\int R\left(x,\sqrt{P(x)}\right)dx, \quad \deg P=3 \text{ 或 } 4. \tag{5.2.33}$$

如果 $\deg P=2$ 前面已经讨论过. 多项式次数 ≥ 5 时相应的不定积分称为**超椭圆积分 (hyperelliptic integrals)**

$$\int R\left(x,\sqrt{P(x)}\right)dx, \quad \deg P\geq 5. \tag{5.2.34}$$

对 (5.2.33) 只要考虑 $\deg P=4$ 的情形:

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}\right)dx. \tag{5.2.35}$$

根据代数学基本定理

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=a(x^2+px+q)(x^2+p'x+q'). \tag{5.2.36}$$

情形 1: $p = p'$. 此时

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e = a\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right]\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q'-\frac{p^2}{4}\right]. \tag{5.2.37}$$

令

$$x = t-\frac{p}{2} \qquad t = x+\frac{p}{2}, \tag{5.2.38}$$

得到

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e = a\left(t^2+q-\frac{p^2}{4}\right)\left(t^2+q'-\frac{p^2}{4}\right)$$

且

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}\right)dx = \int R^*\left(t, \sqrt{a(t^2+\alpha)(t^2+\beta)}\right)dt. \tag{5.2.39}$$

情形 2: $p \neq p'$. 此时令

$$x = \frac{\mu t+\nu}{t+1} \quad 或 \quad t = \frac{x-\nu}{\mu-x} \tag{5.2.40}$$

得到

$$x^2+px+q = \frac{(\mu^2+p\mu+q)t^2+[2\mu\nu+p(\mu+\nu)+2q]t+(\nu^2+p\nu+q)}{(t+1)^2}.$$

选择 μ, ν 使得

$$2\mu\nu+p(\mu+\nu)+2q = 0 = 2\mu\nu+p'(\mu+\nu)+2q'.$$

进一步有

$$\mu \neq \nu \text{ 且为实的} \quad \Longleftrightarrow \quad (q-q')^2-(p-p')(p'q-pq') > 0.$$

从而得到

$$\begin{aligned}
&\int R\left(x, \sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}\right)dx \\
=& \int R\left(\frac{\mu t+\nu}{t+1}, \frac{\sqrt{(M+Nt^2)(M'+N't^2)}}{(t+1)^2}\right)\frac{\mu-\nu}{(t+1)^2}dt \\
=& \int \widetilde{R}\left(t, \sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}\right)dt.
\end{aligned}$$

令

$$Y := A(1+mt^2)(1+m't^2), \quad y := \sqrt{Y}.$$

得到

$$\widetilde{R}(t,y) = \frac{P_1(t)+P_2(t)y}{P_3(t)+P_4(t)y} = \widetilde{R}_1(t)+\widetilde{R}_2(t)y = \widetilde{R}_1(t)+\frac{y^2\widetilde{R}_2(t)}{y}.$$

这样就归结到求以下不定积分

$$\int \frac{R^*(t)}{\sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}}dt. \tag{5.2.41}$$

考虑分解

$$R^*(t) = \frac{R^*(t)+R^*(-t)}{2} + \frac{R^*(t)-R^*(-t)}{2} := R_1^*(t) + R_2^*(t),$$

这里显然成立 $R_1^*(-t) = R_1^*(t)$ 和 $R_2^*(-t) = -R_2^*(t)$. 所以

$$R_1^*(t) = R_1(t^2), \quad R_2^*(t) = tR_2(t^2).$$

因此进一步归结到如下两个不定积分

$$\int \frac{R_1(t^2)dt}{\sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}} + \int \frac{R_2(t^2)\,tdt}{\sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}} \tag{5.2.42}$$

或者, 对第二个不定积分作变量替换 $t^2 = u$ 后, 归结到如下积分

$$\int \frac{R_3(t^2)dt}{\sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}}, \quad y := \sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}, \tag{5.2.43}$$

其中不妨假设 $A = \pm 1$ 和 $t > 0$.

(1) 首先我们证明 (5.2.43) 可化简为**标准形式**

$$\int \frac{R(z^2)\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \tag{5.2.44}$$

这里 k 是分数且 $0 < k < 1$.

情形 1: $A = +1, m = -h^2, m' = -h^2$ $(h > h' > 0)$. 此时 $t < 1/h$ 或 $t > 1/h'$. 令

$$ht = z \quad \left(0 < t < 1 \text{ 或 } z > \frac{h}{h'}\right).$$

则得到

$$\frac{dt}{y} = \frac{dz}{h\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{h'^2}{h^2}z^2\right)}}, \quad \int \frac{R_3(t^2)dt}{\sqrt{y}} = \int \frac{R(z^2)dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

情形 2: $A = +1, m = -h^2, m' = h^2$ $(h, h' > 0)$. 此时 $t < 1/h$. 令

$$ht = \sqrt{1-z^2} \quad (0 < z \leq 1).$$

则得到

$$\frac{dt}{y} = \frac{-1}{\sqrt{h^2+h'^2}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{h'^2}{h^2+h'^2}z^2\right)}}.$$

情形 3: $A=+1, m=h^2, m'=h^2\ (h>h'>0)$. 此时令

$$ht=\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\quad(0\le z<1),\quad z=\frac{ht}{\sqrt{1+h^2t^2}}.$$

则得到

$$\frac{dt}{y}=\frac{dz}{h\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{h^2-h'^2}{h^2}z^2\right)}}.$$

情形 4: $A=-1, m=-h^2, m'=h^2\ (h,h'>0)$. 此时 $t>1/h$. 令

$$ht=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad(0<z<1).$$

则得到

$$\frac{dt}{y}=\frac{dz}{\sqrt{h^2+h'^2}\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{h^2}{h^2+h'^2}z^2\right)}}.$$

情形 5: $A=-1, m=-h^2, m'=-h^2\ (h>h'>0)$. 此时 $1/h<t<1/h'$. 令

$$h't=\sqrt{1-\frac{h^2-h'^2}{h^2}z^2}\quad(0<z<1).$$

则得到

$$\frac{dt}{y}=\frac{-dz}{h\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{h^2-h'^2}{h^2}z^2\right)}}.$$

(2) **第一类、第二类、第三类椭圆积分.** 根据上面讨论可知

$$\int\frac{R(z^2)dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=I_n\text{ 和 }H_n\text{ 的线性组合}\tag{5.2.45}$$

这里 $n\in\mathbb{N}$ 和 $m\in\mathbb{Z}_+$, 且

$$\begin{aligned}I_n &:= \int\frac{z^{2n}dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},\quad n\in\mathbb{N},\\ H_m &:= \int\frac{dz}{(z^2-a)^m\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},\quad m\in\mathbb{Z}_+,\ a\in\mathbb{C}.\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}&\left[z^{2n-3}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}\right]'\\ =\ &(2n-3)z^{2n-4}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}+z^{2n-3}\frac{2k^2z^3-(k^2+1)z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\\ =\ &\frac{(2n-1)k^2z^{2n}-(2n-2)(k^2+1)z^{2n-2}+(2n-3)z^{2n-4}}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\end{aligned}$$

所以得到递推关系

$$(2n-1)k^2I_n-(2n-2)(k^2+1)I_{n-1}+(2n-3)I_{n-2}=z^{2n-3}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)} \tag{5.2.46}$$

等价地

$$I_n=\alpha I_0+\beta_n I_1+q_{2n-3}(z)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}, \tag{5.2.47}$$

其中 $\alpha_n,\beta_n\in\mathbb{R}$, $\deg(q_{2n-3})=2n-3$, 且

$$I_0 \quad := \quad \int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},\quad \text{第一类椭圆积分}, \tag{5.2.48}$$

$$I_1 \quad := \quad \int\frac{z^2dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},\quad \text{第二类椭圆积分}. \tag{5.2.49}$$

对 $z(z^2-a)^{-m+1}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$ 微分得到

$$\begin{aligned}(2m-2)&\left[-a+(k^2+1)a^2-k^2a^3\right]H_m-(2m-3)\left[1-2a(k^2+1)+3k^2a^2\right]H_{m-1}\\&+(2m-4)[(k^2+1)-3k^2a]H_{m-2}-(2m-5)k^2H_{m-3}\\&=\frac{z}{(z^2-a)^{m-1}}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}.\end{aligned}$$

最终得到结论: H_m 唯一被

$$\begin{aligned}H_1 &:= \int\frac{dz}{(z^2-a)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\\ &\sim \int\frac{dz}{(1+hz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},\quad \text{第三类椭圆积分},\\ H_0 &:= I_0,\\ H_{-1} &:= \int\frac{(z^2-a)dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = I_1-aI_0\end{aligned}$$

所决定, 即

所有的椭圆积分被 I_0,I_1,H_1 所唯一确定.

(3) **Legendre 型椭圆积分.** 对上述三类椭圆积分作变量替换 $z=\sin\varphi$ 得到

$$I_0 = \int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} := F(k,\varphi), \tag{5.2.50}$$

$$\begin{aligned}I_1 &= \int\frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{k^2}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}-\frac{1}{k^2}\int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi\\ &= \frac{E(k,\varphi)-E(k,\varphi)}{k^2},\end{aligned} \tag{5.2.51}$$

这里

$$E(k,\varphi):=\int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi. \tag{5.2.52}$$

对第三类椭圆积分有

$$H_1=\int\frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{5.2.53}$$

例5.2.11. (1) 非初等函数:

$$\mathbf{Ei}(x):=\int\frac{e^x}{x}dx,\quad \mathbf{li}(x):=\int\frac{dx}{\ln x},$$

$$\mathbf{Si}(x):=\int\frac{\sin x}{x}dx,\quad \mathbf{Ci}(x):=\int\frac{\cos x}{x}dx,$$

$$\mathbf{Shi}(x):=\int\frac{\sinh x}{x}dx,\quad \mathbf{Chi}(x):=\int\frac{\cosh x}{x}dx,$$

$$\mathbf{S}(x):=\int\sin(x^2)dx,\quad \mathbf{C}(x)=\int\cos(x^2)dx,\quad \textbf{Fresnel 积分},$$

$$\Phi(x):=\int e^{-x^2}dx,\quad \textbf{Euler-Poisson 积分}.$$

(2) 计算积分

$$I_n:=\int_0^1\frac{t^ndt}{\sqrt{t(1-t)}}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi,\quad n\in\mathbb{N}.$$

实际上

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{2n}\theta\cdot 2\sin\theta\cos\theta d\theta}{\sin\theta\cos\theta}=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}\theta d\theta.$$

利用分布积分计算得到

$$\begin{aligned}I_n &= -2\int_0^{\pi/2}\sin^{n-1}\theta d\cos\theta = 2\int_0^{\pi/2}\cos\theta(2n-1)\sin^{2n-2}\theta\cos\theta d\theta\\ &= 2(2n-1)\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2\theta)\sin^{2n-2}\theta d\theta = (2n-1)(I_{n-1}-I_n)\end{aligned}$$

故

$$I_n=\frac{2n-1}{2n}I_{n-1}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}I_0=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi.$$

接下来计算

$$F(\lambda):=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-\lambda t)}}.$$

根据Taylor 公式得到

$$(1-\lambda t)^{-1/2}=\sum_{n\geq 0}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\lambda^nt^n$$

从而推出

$$
\begin{aligned}
F(\lambda) &= \int_0^1 \left[\sum_{n\geq 0}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\lambda^n\frac{t^n dt}{\sqrt{t(1-t)}}\right] \\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\lambda^n I_n = \sum_{n\geq 0}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\pi\lambda^n
\end{aligned}
$$

最后一个级数就是所谓的**超几何级数 (hypergeometric series)**. 上述计算过程的第二个等式, 即求积分与求级数可以相互交换需要确认是否成立 (参见 §14.2.2). 把 $F(\lambda)$ 重新写成

$$
\begin{aligned}
F(\lambda) &= \pi\sum_{n\geq 0}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+n-1\right)\right]^2\frac{\lambda^n}{(n!)^2} \\
&= \pi\sum_{n\geq 0}\frac{\binom{1/2}{n}\binom{1/2}{n}}{n!}\frac{\lambda^n}{n!}. \qquad (5.2.54)
\end{aligned}
$$

§5.2.8 * 超几何级数

在这一小节我们来简单介绍下超几何级数的定义和性质, 当然假定知道反常积分的定义 (参见 §5.5).

定义5.2.12. Γ 函数 (Γ **function**) 定义为

$$
\Gamma(z) := \int_0^\infty r^{-t}t^{z-1}dt, \quad \mathrm{Re}(z) > 0. \qquad (5.2.55)
$$

之后的章节中我们会证明如下关于 $\Gamma(z)$ 的性质:

(1) $\Gamma(x) \in C^1((0,+\infty)), \Gamma(1+n) = n!, \Gamma'(1) = \gamma$.

(2) $\mathrm{Re}(z) > 0 \Longrightarrow \Gamma(1+z) = z\Gamma(z)$.

(3) $\Gamma(z)$ 可以解析延拓到 $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_-$ 且

$$
\lim_{z\to -n}(z+n)\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}.
$$

(4) $\forall\, z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$,

$$
\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.
$$

(5) $\forall\, z \in \mathbb{C}\setminus\{0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, -2, \cdots\}$,

$$
\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}2^{1-2z}\Gamma(2z).
$$

(6) $(2n-1)!! = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}}\Gamma(n+1/2)$ 故

$$
\frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(1/2)} = \binom{1/2}{n}.
$$

定义5.2.13. Gauss 引入了如下的**超几何级数 (hypergeometric series)**

$$\begin{aligned} F(\alpha,\beta,\gamma,x) &:= 1+\sum_{n\geq 1}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots+(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}\frac{x^n}{n!} \\ &= 1+\sum_{n\geq 1}\frac{\binom{\alpha}{n}\binom{\beta}{n}}{\binom{\gamma}{n}}\frac{x^n}{n!}. \end{aligned} \tag{5.2.56}$$

注意到函数 F 满足常微分方程

$$x(x-1)y''-[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]y'+\alpha\beta y=0. \tag{5.2.57}$$

定义5.2.14. 令

$$(a)_k := \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}, \quad a,k\in\mathbb{C} \tag{5.2.58}$$

并定义**(广义) 超几何级数**如下

$${}_pF_q\left[\begin{matrix}\alpha_1,\cdots,\alpha_p\\ \beta_1,\cdots,\beta_q\end{matrix}\,\middle|x\right] := \sum_{n\geq 0}\frac{(\alpha_1)_n\cdots(\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n\cdots(\beta_q)_n}\frac{x^n}{n!}. \tag{5.2.59}$$

其中

$$p,q\in\mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \alpha_1,\cdots,\alpha_p,\beta_1,\cdots,\beta_q\in\mathbb{C}.$$

当 $p=q+1$ 时可以证明 ${}_pF_q$ 对任意 α_i,β_j 都收敛, 如果 $|x|<1$. 并且 ${}_{q+1}F_q$ 可解析延拓到 $\mathbb{C}\setminus[1,+\infty)$. 如果 $x=1$ 此时级数当 $\mathrm{Re}(\alpha_1+\cdots+\alpha_{q+1})<\mathrm{Re}(\beta_1+\cdots+\beta_q)$ 时收敛; 如果 $x=-1$ 此时级数当 $\mathrm{Re}(\alpha_1+\cdots+\alpha_{q+1})<\mathrm{Re}(\beta_1+\cdots+\beta_q)+1$ 时收敛.

定义5.2.15. 定义Ψ 函数如下

$$\Psi(z) := -\gamma-\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{n\geq 1}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{z+n}\right]. \tag{5.2.60}$$

可以证明如下结论:

$$\Psi(z+1)-\Psi(z)=\frac{1}{z}, \quad \Psi(1-z)-\Psi(z)=\pi\cot(\pi z),$$

$$\Psi'(z)=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(z+n)^2}, \quad \Psi(z)=\frac{1}{2}\left[\Psi\left(\frac{z}{2}\right)+\Psi\left(\frac{z+1}{2}\right)\right]+\ln 2,$$

$$\Psi(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z), \tag{5.2.61}$$

Ψ 仅有实根; Ψ 在区间 $(0,+\infty)$ 和每个区间 $(-n-1,-n)$ $(n\in\mathbb{N})$; 仅在区间 $(1,2)$ 内存在唯一的实根; 在每个区间 $(-n-1,-n)$ 内存在根; $\lim_{x\to\infty}[\Psi(x)-\ln x]=0$.

例5.2.16. 定义函数

$$z := {}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\1\end{matrix}\middle|x\right] = {}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|1\middle|x\right), \tag{5.2.62}$$

$$y := \pi\frac{{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\1\end{matrix}\middle|1-x\right]}{{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\1\end{matrix}\middle|x\right]} = \pi\frac{{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|1\middle|1-x\right)}{{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|1\middle|x\right)}. \tag{5.2.63}$$

第一类完备椭圆积分 (complete elliptic integral of first kind) 定义为

$$K \equiv K(x) := \int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-x\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|1\middle|x\right) = \frac{\pi}{2}z, \tag{5.2.64}$$

而**第二类完备椭圆积分(complete elliptic integral of first kind)** 定义为

$$E \equiv E(x) := \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-x\sin^2\varphi}d\varphi = \pi x(1-x)z' + \frac{\pi z(1-x)}{2}. \tag{5.2.65}$$

其实可以证明

$$K = \frac{\pi}{2}\sum_{n\geq 0}\left[\binom{1/2}{n}\right]^2\frac{x^n}{(n!)^2}. \tag{5.2.66}$$

例5.2.17. (1) $\mathrm{Re}(2x+n+2) > 0 \Longrightarrow$

$$\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n+k}\right)\frac{(-1)^k(-x)_k}{(x+n+1)_k} = \Psi(x+n+1)-\Psi(n+1).$$

(2) $\mathrm{Re}(2x+2y+n+2) > 0 \Longrightarrow$

$${}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{n}{2}+1,n,-x,-y\\ \frac{n}{2},x+n+1,y+n+1\end{matrix}\middle|-1\right] = \frac{\Gamma(x+n+1)\Gamma(y+n+1)}{\Gamma(x+y+n+1)\Gamma(n+1)}.$$

(3) 取 $n=-x=-y=\frac{1}{2}$ 得到

$$\frac{2}{\pi} = 1-5\left(\frac{1}{2}\right)^3+9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3-\cdots = \sum_{n\geq 0}(-1)^n(4n+1)\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^3. \tag{5.2.67}$$

(4) Ramanujan 证明了:

$$\mu := \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma^2(3/4)} = 1.180340599016096, \tag{5.2.68}$$

$$\nu := \frac{\Gamma^2(3/4)}{\pi^{3/2}} = 0.269676300594190, \tag{5.2.69}$$

$$\begin{aligned}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\\1\end{matrix}\middle|\frac{1}{2}+\frac{x}{1+x^2}\right] &= \mu\sqrt{1+x^2}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{4}\\\frac{3}{4}\end{matrix}\middle|x^4\right]\\ &\quad + x(1+x^2)^{3/2}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{3}{4}\\\frac{5}{4}\end{matrix}\middle|x^4\right].\end{aligned} \tag{5.2.70}$$

§5.3 定积分

本节我们引入 Riemann 积分, 其几何意义是函数所围的区域的面积. 微积分问题至少在十七世纪被一些数学家所探索过, 当然集大成者是Newton 和Leibniz. 十七世纪求面积、体积、重心等工作开始于Kepler[2], 他用无数个同维的无穷小元素和来确定曲边形面积和体积. 这个想法在Galileo[3]的著作《Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove scienze》(1636 年完成, 1638 年在荷兰出版) 中也有类似的体现. Cavalieri[4]在《Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota》(1635) 发表了和祖暅原理等价的定理 (却没有给出严格证明), 并依靠这个定理在《Centuria di varii problemi》(1639) 中计算了曲线 $y = x^n, n = 1, \cdots, 9$, 所围的面积

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}, \quad n = 1, \cdots, 9.$$

Fetmat 在 1636 年之前就已经知道对任何 $n \neq -1$ 的有理数有

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}, \quad -1 \neq n \in \mathbb{Q}.$$

这个结果也由Roberval[5]、Torricelli[6]、Cavalieri 各自独立获得, 虽然有些仅仅是几何的形式而有些是对 n 加了限制.

[2]Johannes Kelper, 1571 年 12 月 27 日 - 1630 年 11 月 15 日, 今德国符腾堡威尔德斯达特镇人, 德国天文学家、物理学家和数学家. 他最重要的工作是发现了行星运动的三大定律, 分别是轨道定律、面积定律和周期定律. 著有《Mysterium cosmographicum》(1596),《Astronomia nova》(1604),《Harmonices mundi》(1618) 等.

[3] Galileo Galilei, 1564 年 2 月 15 日 - 1642 年 1 月 8 日, 今意大利比萨人, 意大利天文学家、物理学家和哲学家. 近代实验科学德先驱者, 在 1589 年 - 1591 年确立了自由落体定律, 他对运动基本概念 (重心、速度、加速度等) 作了详细研究并给出了严格的数学表达式. 他是利用望远镜观测天体取得大量成果的第一位科学家, 发现了月球表面凹凸不平、木星有四个卫星、太阳黑子和太阳的自转等; 他用实验验证了Kopernik 的"地动说"彻底否定了Aristotle 和Ptolemy 的"天动说". 1633 年 2 月以"反对教皇, 宣扬邪学"被罗马宗教裁判所处终身监禁. 1638 年以后, 双目逐渐失明, 晚景凄凉, 1642 年 1 月 8 日凌晨 4 点在比萨逝世. 1979 年 11 月 10 日, 罗马教皇不得不在公开集会上宣布: 1633 年对Galileo 的宣判是不公正的.

[4] Bonaventura Cavalieri, 1598 年 - 1647 年 11 月 30 日, 今意大利米兰人, 意大利数学家. 他是Galileo 的学生, 独立发现了和祖暅原理等价的定理.

[5]Robertval, 1602 年 - 1675 年, 今法国桑利人, 法国数学家. 他是巴黎科学院的创始院士, 主要数学贡献在几何学和代数学方面, 并在微积分创立前为之做了大量的先驱性工作. 他解决了一些等周形作图和极值解问题，独立于Cavalieri 提出了无穷小几何的思想, 并比卡瓦列里更接近定积分概念, 运用"不可分原理"解决了许多面积和体积问题.

[6] Evangelista Torricelli, 1608 - 1647 年, 今意大利法恩扎人, 意大利物理学家和数学家. 他以发明气压计而闻名, 是Galileo 的学生和晚年的助手, 1642 年继承Galileo 任弗洛伦萨学院数学教授. Torricelli 在数学上最大的贡献是进一步发展了Cavalieri 的"不可分原理", 帮它走向后来Newton 和Leibniz 所创立的微积分学. 他还将Cavalieri 的不可分原理以通俗易懂的方式写得颇受广大读者欢迎, 对不可分原理的普及起了推动作用.

Gregory 在其著作《Opus geometricum》(1647) 中给直角双曲线和对数函数之间的重要联系提供了根据. 他用穷竭法证明了

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x.$$

第一个注意到面积可以解释对数的人是Gregory 的学生Sarasa[7], 他在其著作《Solutio problematis a Mersenno propositi》(1649) 中给出了相应的解释.

Leibniz 将积分定义为无限多个无穷小的被加数的和并用符号 $\int$ 来表示, 人们一直把积分看成是微分的逆过程, 比如Euler 在其三卷本的《Institutiones calculi integralis》(1768 - 1770) 中给出了如下定义:

> **定义** 积分学是从给定微分的变量寻找变量自身的方法, 产生这种变量的运算称为积分.

Cauchy 不同意Euler 的这种观点, 认为积分必须是独立存在的且有相应的定义. Cauchy 在其著作《Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal》(1823) 中对定积分做了做系统的开创性工作, 对连续函数 $f(x)$ 给出了定积分作为和的极限的确切定义.

如果区间 $[x_0, X]$ 为 x 的值 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 所分割, 则积分是

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{1\le i\le n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}), \quad \text{其中 } x_n = X,$$

这里最大子区间的长度趋于零. Cauchy 证明了无论证明选取 x_i, 积分都存在. 但是他的证明是不严密的, 原因是当时没有一直连续的概念. Cauchy 采用Fourier 的建议用记号

$$\int_{x_0}^X f(x)\,dx$$

来表示定积分. Cauchy 证明了对连续函数 $f(x)$, 存在 $\theta \in [0,1]$ 使得等式

$$\int_{x_0}^X f(x)\,dx = (X - x_0) f[x_0 + \theta(X - x_0)]$$

成立; 这就是我们之后将会证明的**积分中值定理**. Cauchy 定义了

$$F(x) := \int_{x_0}^x f(t)\,dt.$$

利用刚才提到的积分中值定理, 他证明了 $F(x)$ 在 $[x_0, X]$ 上是连续的. 根据

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

[7] Alphonsw Antonio de Sarasa, 1618 年 - 1667 年, 今比利时西佛兰德省尼乌波特人, 比利时数学家. 在数学上德主要贡献是理解对数, 特别是双曲线下的面积.

并利用积分中值定理, Cauchy 证明了

$$F'(x) = f(x)$$

这就是**微积分基本定理**. Cauchy 的表示方法是微积分基本定理的第一个证明. 他还把不定积分定义为

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(x)\,dx + C$$

并指出如果 $f'(x)$ 连续则

$$\int_a^b f'(x)\,dx + f(b) - f(a).$$

对函数在积分区间上的某些点取无穷大或者积分区间趋于无穷大, Cauchy 给出了相应的积分定义. 比如, 对函数 $f(x)$ 在 $x = c$ 点不连续 (而在这点除 $f(x)$ 可以有界的也可以无界的), Cauchy 把此时的积分定义为

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\epsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\epsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\epsilon_2 \to 0} \int_{c+\epsilon_2}^b f(x)\,dx,$$

如果右边两个极限都存在. 当 $\epsilon_1 = \epsilon_2$ 时得到了**Cauchy 主值积分**的定义.

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的有限个点 $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$ 处不连续, 我们遵循Cauchy 的想法可定义

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \sum_{1 \le i \le n-1} \int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)\,dx + \int_{c_n}^b f(x)\,dx.$$

如果连续函数在区间 $[a, b]$ 上有无限多个不连续点时, Cauchy 积分就失效了. Dirichlet 提出可以用一种新的更加广泛的积分理论来处理这类函数, 但是他本人从来就没有建立过这个积分理论, 但是他给出了 Cauchy 积分失效的一个例子 – Dirichlet 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

这个函数不仅处处不连续, 而且在 Cauchy 积分意义下是不存在.

Dirichlet "新的积分理论" 于 1854 年被Riemann 在其大学哲学系的就职申请报告《Ueber die darstellbarkeit einer function durch eine trigonometrische reihe》[8]中所给出. 我们把Riemann 报告中的第四节《关于定积分的概念及其使用范围》摘抄如下 (个别地方用了现代表述):

[8]Bernhard Riemann 著 (李培廉 译): **黎曼全集**(第一卷), 高等教育出版社, 2016.

如何理解 $\int_a^b f(x)\,dx$?. 在区间 $[a,b]$ 内任取有限个点 $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b$, 并记

$$\delta_1 = x_1 - a, \quad \delta_2 = x_2 - x_1, \quad \cdots, \quad \delta_n = b - x_{n-1}.$$

对 $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n \in (0,1)$ 考虑有限和

$$S = \sum_{1\le i\le n} \delta_i f(x_{i-1} + \epsilon_i \delta_i), \quad x_0 := a.$$

如果这个和具有如下性质: 无论 δ_i 和 ϵ_i 如何选取, 只要所有的 δ_i 趋于无穷小它就会无限地接近一个确定地极限 A, 那么我们就把这个极限 A 记为 $\int_a^b f(x)dx$. 如果这个和不具备这样地性质, 记号 $\int_a^b f(x)dx$ 就没有定义.

在上面情况下一个函数可以积分, 什么情况下不可以积分? 假设和 S 在所有的 δ 都变为无穷小时收敛. 因此如果我们用 D_i 表示函数在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的最大振幅 (即在这个区间上的最大值和最小值的差), $1 \le i \le n$, 则

$$\sum_{1\le i\le n} \delta_i D_i$$

必会随着所有 δ 一起变成无穷小. 再进一步假设, 只要所有的 δ 小于 d, 我们所能得到的这个和的最大值为 Δ; 这样 Δ 是 d 的函数, 它随着 d 的减少而减少, 并且随着这个量一起变成无穷小. 而如果那些振幅大于 σ 的区间的长度之和等于 s, 则得到

$$\sigma s \le \sum_{1\le i\le n} \delta_i D_i \le \Delta \quad \Longrightarrow \quad s \le \frac{\Delta}{\sigma}.$$

而如果 σ 已给定, 则 Δ/σ 就可以通过适当地选取 d 使其任意小; 因此就可以使得 s 也是任意小. 这样就得到如下结论: 为使和 S 在所有的 δ 变为无穷小时能够收敛, 除了要求函数为有限之外, 还要求那些振幅大于给定 σ 的区间的长度之和可以通过适当选取 d 做到任意小.

这个定理的逆定理也是正确的: 如果函数 $f(x)$ 有限, 而且在所有 δ 变成无穷小时, 函数 $f(x)$ 的振幅大于给定 σ 的区间的长度之和也变成无穷小, 那么和 S 在所有 δ 都变成无穷小时必收敛.

这样我们就得到了函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上积分存在的充要条件.

Darboux 在 1875 年简化和完善了Riemann 的理论, 并提出了 Darboux 上下和的概念. 它同时证明了只要 $f'(x)$ 在 Riemann 积分意义下时可积的, 则有

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Volterra[9] 在 1881 年, 高中毕业三年后, 对 Riemann 积分引入了上积分和下积分的概念, 并指出在Darboux 上述定理中, 不能把 "$f'(x)$ 在 Riemann 积分意义下可积" 减弱为 "$f'(x)$ 有界". Volterra 构造了一个导数处处存在且有界 (-1.013 到 1.023 之间) 但是在 Riemann 积分意义下不可积的病态函数[10].

Riemann 积分的概念还可以推广到无界函数甚至各种"广义积分"上去, 比如Stieltjes[11] 于 1894 年在《Recherches sur les fractions contionues》中引入了 Riemann-Stieltjes 积分, 但是其中最有意义的是Lebesgue[12]在 1902 年的博士论文《Intégrale, longueur, aire》中提出了 Lebesgue 积分和在 1904 年《Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives》(博士论文的扩充) 提出的 Lebesgue 测度. Lebesgue 证明了一个闭区间 $[a, b]$ 上的有界函数 $f(x)$ 是 Riemann 可积的当且仅当它的不连续点构成的集合是零测度的.

在他的博士论文中, Lebesgue 证明了现在称之为的**Lebesgue 控制收敛定理**, 并利用它证明了在上述 Darboux 定理中可以把 "$f'(x)$ 在 Riemann 积分意义下可积" 减弱为 "$f'(x)$ 有界, 只要关于 $f'(x)$ 的积分是在 Lebesgue 积分意义下". Lebesgue 同时指出, 如果 $f'(x)$ 无界则情况要复杂得多.

Radon[13] 建立了包含 Riemann - Steiltjes 积分和 Lebesgue 积分的**Radon 积分**或**Lebesgue - Stieltjes 积分**, 这种积分在概率论、随机过程、调和分析及遍历理论等中有着广泛的应用.

§5.3.1 Riemann 积分的定义

我们将沿着 Riemann - Darboux 积分理论的脚印, 来引入 Riemann 积分.

定义5.3.1. (1) 闭区间 $[a, b]$ 的**划分 (partition)** T 是该区间内的一组有限个点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 满足

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

[9]Vito Volterra, 1860 年 5 月 3 日 - 1940 年 10 月 11 日, 今意大利马尔凯区安科纳省安科纳人, 意大利数学家. 他在数学上的主要贡献是早年间对 Riemann 积分理论的研究、积分方程 (Volterra 积分方程) 和生物数学 (著名的 Lotka - Volterra 方程) 等, 被认为是泛函分析的创始人之一.

[10]具体构造可参见:
https://www.macalester.edu/ bressoud/talks/AlleghenyCollege/Wrestling.pdf

[11] Thomas Joannes Stieltjes, 1856 年 12 月 29 日 - 1894 年 12 月 31 日, 今荷兰上艾瑟尔省兹沃勒人, 荷兰数学家. 他在数学上的主要贡献是引入了 Riemann-Stieltjes 积分.

[12]Henri Léon Lebesgue, 1875 年 6 月 28 日 - 1941 年 7 月 26 日, 今法国瓦兹省博韦人, 法国数学家. 他最有名的贡献是 1902 年在其博士论文《Intégrale, longueur, aire》中提出了 Lebesgue 积分.

[13]Johann Karl August Radon, 1887 年 12 月 16 日 - 1956 年 5 月 25 日, 今捷克拉贝河畔乌斯季州杰钦人, 奥地利数学家. 他最有名的贡献是 Radon - Nikodym 定理、Radon 测度、Radon 变换等.

区间 $[x_{i-1}, x_i], 1 \le i \le n$, 统称为 T 的区间. 记

$$\Delta x_i := x_i - x_{i-1}, \quad ||T|| := \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i$$

其中把 $||T||$ 称为 T 的**模 (norm)**.

(2) 闭区间 $[a, b]$ 上的**带点划分 (partition with distinguished points)** 是指偶对 $(T, \boldsymbol{\xi})$, 它是由划分 $T : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 和点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $1 \le i \le n$ 所组成. 这里 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

(3) 假设函数 f 定义在闭区间 $[a, b]$ 上且 $(T, \boldsymbol{\xi})$ 是 $[a, b]$ 上的带点划分, 则有限和

$$\sigma(f; T, \boldsymbol{\xi}) := \sum_{1 \le i \le n} f(\xi_i) \Delta x_i \tag{5.3.1}$$

称为函数 f 相对于 $[a, b]$ 上的带点划分 $(T, \boldsymbol{\xi})$ 的**Riemann 和 (Riemann sum)**.

(4) I 称为闭区间 $[a, b]$ 上函数 f 的**Riemann 积分 (Riemann integral)** 或者函数 f 在 $[a, b]$ 上的**定积分 (definite integral)** 如果

$$I = \lim_{||T|| \to 0} \sigma(f; T, \boldsymbol{\xi}) = \lim_{||T|| \to 0} \sum_{1 \le i \le n} f(\xi_i) \Delta x_i, \tag{5.3.2}$$

也就是说

$$\begin{gathered}\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, [a, b] \text{ 上的带点划分 } (T, \boldsymbol{\xi}) \text{ 只要 } ||T|| < \delta \text{ 有} \\ \text{不等式 } \left|\textstyle\sum_{1 \le i \le n} f(\xi_i) \Delta x_i - I\right| < \epsilon \text{ 成立.}\end{gathered} \tag{5.3.3}$$

Riemann 积分通常记作

$$I = \int_a^b f(x)\, dx, \tag{5.3.4}$$

这里 a 和 b 分别是**积分下限 (lower limit of integration)** 和**积分上限 (upper limit of integration)**, x 是**积分变量 (variable of integration)**, $f(x)$ 是**被积函数 (integrand)**. 此时函数 f 称为 $[a, b]$ 上**Riemann 可积的 (Riemann integrable)**.

(5) 引入**Riemann 可积空间 (Riemann integrable space)** 如下

$$R([a, b]) := \left\{[a, b] \text{ 上所有 Riemann 可积的函数}\right\}. \tag{5.3.5}$$

之后我们将会证明包含关系: $C([a, b]) \subsetneq R([a, b])$, 到此为止三个重要的函数空间 $C([a, b])$, $D([a, b])$, $R([a, b])$, 它们之间的关系如下:

$$D([a, b]) \subsetneq C([a, b]) \subsetneq R([a, b]). \tag{5.3.6}$$

注5.3.2. (1) Riemann 积分和积分变量无关, 即

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(y)\, dy = \int_a^b f(t)\, dt.$$

(2) 为了方便期间引入记号

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \quad \int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx \quad (a < b).$$

例5.3.3. (1) 证明

$$\int_0^1 c\,dx = c.$$

证: 令函数 $f(x) = c, x \in [0,1]$. 对任何带点划分 $(T, \boldsymbol{\xi})$ 都有

$$\sigma(f; T, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{1 \le i \le n} f(\xi_i)\Delta x_i = c \sum_{1 \le i \le n} \Delta x_i = c(1-0) = c. \quad \square$$

(2) 证明

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}, \quad \int_a^b \frac{dx}{x^2} = -\frac{b-a}{ab} \quad (0 < a < b).$$

证: 对任何 $[a,b]$ 上的带点划分 $(T, \boldsymbol{\xi})$ 有

$$\sigma(f; T, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{1 \le i \le n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

$\underline{f(x) = x}$: 此时

$$\sigma(f; T, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{1 \le i \le n} \xi_i \Delta x_i.$$

为了便于计算首先选取特殊点 $\tilde{\xi}_i$ 如下

$$\tilde{\xi}_i := \frac{x_{i-1} + x_i}{2}.$$

从而得到

$$\sigma(f; T, \tilde{\xi}) = \sum_{1 \le i \le n} \frac{x_{i-1} + x_i}{2}(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{2}\sum_{1 \le i \le n}\left(x_i^2 - x_{i-1}^2\right) = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

对一般的 $\boldsymbol{\xi}$ 利用

$$\sigma(f; T, \boldsymbol{\xi}) - \sigma(f; T, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) = \sum_{1 \le i \le n} (\xi_i - \tilde{\xi}_i)\Delta x_i$$

得到

$$\left|\sigma(f; T, \boldsymbol{\xi}) - \sigma(f; T, \tilde{\boldsymbol{\xi}})\right| \le ||T|| \sum_{1 \le i \le n} \Delta x_i = ||T||(b-a)$$

即可得到相应的积分值

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{||T|| \to 0} \sigma(f; T, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

$\underline{f(x) = \frac{1}{x^2}}$: 此时

$$\sigma(f; T, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{1 \le i \le n} \frac{\Delta x_i}{\xi_i^2}.$$

为了便于计算首先选取特殊点 $\tilde{\xi}_i$ 如下

$$\tilde{\xi}_i := \sqrt{x_{i-1}x_i}.$$

从而得到

$$\sigma(f;T,\tilde{\xi}) = \sum_{1\le i\le n} \frac{x_i - x_{i-1}}{2}(x_{i-1}x_i) = \sum_{1\le i\le n}\left(\frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i}\right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

对一般的 $\boldsymbol{\xi}$ 得到

$$\begin{aligned}\left|\sigma(f;T,\boldsymbol{\xi}) - \sigma(f;T,\tilde{\boldsymbol{\xi}})\right| &= \left|\sum_{1\le i\le n}\left(\frac{1}{\xi_i^2} - \frac{1}{\tilde{\xi}_i^2}\right)\Delta x_i\right| \le \sum_{1\le i\le n}\left|\frac{\tilde{\xi}_i^2 - \xi_i^2}{\xi_i^2\tilde{\xi}_i^2}\Delta x_i\right| \\ &\le \sum_{1\le i\le n}\frac{|\tilde{\xi}_i^2 - \xi_i^2|\Delta x_i}{a^4} \le \sum_{1\le i\le n}\frac{2b}{a^4}|\xi_i - \tilde{\xi}_i|\Delta x_i \le \frac{2b}{a^4}(b-a)||T||.\end{aligned}$$

从而得到相应的积分值

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{||T||\to 0}\sigma(f;T,\tilde{\boldsymbol{\xi}}) = \frac{b-a}{ab}. \quad \square$$

(3) 计算积分

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx, \quad a > 0.$$

证: 这个积分是半径为 a 的圆盘位于第一象限内的面积, 所以

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{4}\pi a^2 = \frac{\pi a^2}{4}. \quad \square.$$

(4) 计算积分

$$\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}dx, \quad a < b.$$

证: 利用恒等式得到

$$\begin{aligned}\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}dx &= \int_a^b \sqrt{-x^2 - ab + (a+b)x}dx \\ = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}dx &= \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \frac{\pi(b-a)^2}{8}\end{aligned}$$

这是因为积分是以 $((a+b)/2, 0)$ 为中心半径为 $(b-a)/2$ 的圆盘位于第一象限内的面积. $\square$

(5) 根据对称性得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0.$$

(6) Dirichlet 函数 $D(x) \notin R([0,1])$.

证: 对 $[0,1]$ 上的任何带点划分 $(T,\boldsymbol{\xi})$ 有

$$\sigma(D;T,\boldsymbol{\xi})=\sum_{1\le i\le n}D(\xi_i)\Delta x_i.$$

如果所有 $\xi_i\in\mathbb{Q}$, 则 $D(\xi_i)=1$ 从而

$$\sigma(D;T,\boldsymbol{\xi})=\sum_{1\le i\le n}\Delta x_i=1-0=1.$$

如果所有 $\xi_i\notin\mathbb{Q}$, 则 $D(\xi_i)=0$ 从而

$$\sigma(D;T,\boldsymbol{\xi})=\sum_{1\le i\le n}0=0.$$

因此 $D(x)\notin R([0,1])$. □

§5.3.2 可积的必要条件

首先我们证明闭区间上的可积函数必有界.

定理5.3.4. *$f\in R([a,b])\Rightarrow f$ 在 $[a,b]$ 上有界.*

证: 根据假设条件 $f\in R([a,b])$, 得到存在 $I\in\mathbb{R}$ 和存在 $\delta>0$, 对任意带点划分 $(T,\boldsymbol{\xi})$ 都有不等式

$$\left|\sum_{1\le i\le n}f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<1$$

成立. 如果函数 f 在 $[a,b]$ 上无界, 存在 i_0 使得函数 f 在 $[x_{i_0-1},x_{i_0}]$ 上必无界. 从而存在 $\xi_{i_0}\in[x_{i_0-1},x_{i_0}]$ 使得不等式

$$|f(\xi_{i_0})\Delta x_{i_0}|>1+|I|+\left|\sum_{1\le i\ne i_0\le n}f(\xi_i)\Delta x_i\right|$$

成立. 但是由下面计算

$$\begin{aligned}1+|I|+\left|\sum_{1\le i\ne i_0\le n}f(\xi_i)\Delta x_i\right| &< |f(\xi_{i_0})\Delta x_{i_0}|\\ =\left|\left[\sum_{1\le i\le n}f(\xi_i)\Delta x_i-I\right]-\sum_{1\le i\ne i_0\ne n}f(\xi_i)\Delta x_i+I\right| &\\ \le\ 1+|I|+\left|\sum_{1\le i\ne i_0\le n}f(\xi_i)\Delta x_i\right| &\end{aligned}$$

却推出矛盾! □

注5.3.5. *函数 f 在 $[a,b]$ 上有界$\not\Rightarrow f\in R([a,b])$.* 反例就是**例 5.3.3** 中的Dirichlet 函数 $f(x)=D(x)$.

§5.3.3 可积的充分条件

给定 $[a,b]$ 上的划分 T: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. 回忆下记号 $\Delta_i := [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$, $1 \le i \le n$.

(1) 称 $[a,b]$ 上的划分 $\widetilde{T}$ 是 T 的**加细 (refinement)** 如果它可以由 T 添加一些新的分点而得到.

(2) 假设 $\widetilde{T}$ 是 T 的加细. 根据定义在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 内有若干个新增加的分点 $x_{i,j}$ $(0 \le j \le n_i)$:

$$x_{i-1} = x_{i,0} < x_{i,1} < \cdots < x_{i,n_i} = x_i$$

并记 $\Delta_{i,j} := [x_{i,j-1}, x_{i,j}]$ 和 $\Delta x_{i,j} := x_{i,j} - x_{i,j-1}$. 观察到

$$\sum_{0 \le j \le n_i} \Delta x_{i,j} = \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

(3) 给定 $[a,b]$ 上两个划分 T' 和 T'', 存在 $[a,b]$ 上的划分 $\widetilde{T}$ 使得它分别是 T' 和 T'' 的加细,

$$\widetilde{T} = T' \cup T'',$$

即取划分 T' 和 T'' 的所有点 (注意: 有可能 T' 和 T'' 部分分点是重合的).

(4) 定义函数 f 在 Δ_i 上的**振幅 (oscillation)** 如下:

$$\omega(f;\Delta_i) := \sup_{x',x'' \in \Delta_i} |f(x') - f(x'')|. \tag{5.3.7}$$

定理5.3.6. *如果函数 f 在 $[a,b]$ 上有界且满足下列条件*

$$\left(\begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, [a,b] \text{ 上的划分 } T \text{ 只要满足 } ||T|| < \delta \text{ 有不等式} \\ \sum_{1 \le i \le n} \omega(f;\Delta_i)\Delta x_i < \epsilon \end{array} \right),$$

则 $f \in R([a,b])$.

证: 根据Cauchy 判别法则得到

$$\lim_{||T|| \to 0} \sum_{1 \le i \le n} f(\xi_i)\Delta x_i \text{ 存在 } \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, ||T'|| < \delta \text{ 和 } ||T''|| < \delta \text{ 有} \\ |\sigma(f;T',\boldsymbol{\xi}') - \sigma(f;T'',\boldsymbol{\xi}'')| < \epsilon \end{array} \right).$$

(1) 设 T 是 $[a,b]$ 的划分且 $\widetilde{T}$ 是 T 的加细, 则得到

$$|\sigma(f;\widetilde{T},\widetilde{\boldsymbol{\xi}}) - \sigma(f;T,\boldsymbol{\xi})| = \left| \sum_{1 \le i \le n} \sum_{1 \le j \le n_i} f(\xi_{i,j})\Delta x_{i,j} - \sum_{1 \le i \le n} f(\xi_i)\Delta x_i \right|$$

$$= \left| \sum_{1 \le i \le n} \sum_{1 \le j \le n_i} [f(\xi_{i,j}) - f(\xi_i)]\Delta x_{i,j} \right| \le \sum_{1 \le \le n} \sum_{1 \le j \le n_i} |f(\xi_{i,j}) - f(\xi_i)|\Delta x_{i,j}$$

$$\leq \sum_{1\leq i\leq n}\sum_{1\leq j\leq n_i}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_{i,j} \;=\; \sum_{1\leq i\leq n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i,$$

这里 $\xi_{i,j}\in\Delta_{i,j}$ 和 $\xi_i\in\Delta_i$.

对任意 $\epsilon>0$ 存在 $\delta>0$ 使得不等式

$$|\sigma(f;\widetilde{T},\widetilde{\xi})-\sigma(f;T,\xi)|<\frac{\epsilon}{2}$$

对 $[a,b]$ 上的任意带点划分 (T,ξ) 和 (T,ξ) 的任意带点加细 $(\widetilde{T},\widetilde{\xi})$ 都成立.

(2) 对任意 $[a,b]$ 上的带点划分 (T',ξ') 和 (T'',ξ'') 只要满足条件 $||T'||<\delta$ 和 $||T''||<\delta$ 根据 (1) 就有

$$|\sigma(f;\widetilde{T},\widetilde{\xi})-\sigma(f;T',\xi')|<\frac{\epsilon}{2},\quad |\sigma(f;\widetilde{T},\widetilde{\xi})-\sigma(f;T'',\xi'')|<\frac{\epsilon}{2},$$

其中 $\widetilde{T}=T'\cup T''$. 所以

$$|\sigma(f;T',\xi')-\sigma(f;T'',\xi'')|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.\quad\square$$

推论5.3.7. $C([a,b])\subsetneq R([a,b])$.

证: 给定连续函数 $f\in C([a,b])$. 则根据Cantor 定理知道函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上一致连续. 对任意 $\epsilon>0$ 存在 $\delta>0$ 使得不等式

$$\omega(f;\Delta)<\frac{\epsilon}{b-a}$$

对任何满足条件 $|\Delta|<\delta$ 的闭子区间 $\Delta\subset[a,b]$ 都成立. 从而对任意划分 T 只要 $||T||<\delta$ 就有

$$\sum_{1\leq i\leq n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i<\sum_{1\leq i\leq n}\frac{\epsilon}{b-a}\Delta x_i=\frac{\epsilon}{b-a}(b-a)=\epsilon.\quad\square$$

推论5.3.8. *如果有界函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上除了有限个点外是连续的, 则 $f\in R([a,b])$.*

证: 根据有界性得到 $\omega(f;[a,b])\leq C<+\infty$. 假设函数 f 有 k 个不连续点 $y_1,\cdots,y_k\in[a,b]$. 下面我们将证明

$$\left(\begin{array}{c}\forall\,\epsilon>0\,\exists\,\delta>0\,\forall\,[a,b]\text{ 的划分 }T\text{ 只要 }||T||<\delta\text{ 有}\\ \sum_{1\leq i\leq n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i<\epsilon\end{array}\right).$$

上述断言结合**定理**5.3.6 足可以保证 $f\in R([a,b])$.

对任意给定 $\epsilon>0$ 取 $\delta_1:=\epsilon/8Ck$. 对函数 f 的每个不连续点 y_j 构造其 δ_1- 领域, 即 $U(y_j,\delta_1):=(y_j-\delta_1,y_j+\delta_1)\cap[a,b]$. 不失一般性不妨假设

$$a<y_1<\cdots<y_k<b$$

且 ϵ 足够小使得 $(y_j-\delta_1, y_j+\delta_1)=U(y_j,\delta_1)$ 且互不相交. 则

$$[a,b]\setminus\bigcup_{1\le j\le k}U(y_j,\delta_1)$$

是 $k+1$ 个互不相交的闭区间 $B_1,\cdots,B_{k+1}$ 的并; 在每个这样的闭区间上函数 f 是连续的从而是一致连续的. 存在 $\delta_2>0$ 使得不等式

$$\omega(f;\Delta)<\frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

对任何满足条件 $|\Delta|<\delta_2$ 且包含在某个闭区间 B_j, $1\le j\le k+1$, 的闭子区间 Δ 都成立.

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. 对 $[a,b]$ 上满足条件 $||T||<\delta$ 的任何划分 T 都有

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i\le n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i &= \sum_{\Delta_i\cap U_j=\emptyset,\,\forall j}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i+\sum_{\Delta_i\cap U_j\ne\emptyset,\,\exists j}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i\\ &< \frac{\epsilon}{2(b-a)}\sum_{\Delta_i\cap U_j=\emptyset,\,\forall j}\Delta x_i+C\sum_{\Delta_i\cap U_j\ne\emptyset,\,\exists j}\Delta x_i\\ &< \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a)+C(\delta+2\delta_1+\delta)k \;<\; \frac{\epsilon}{2}+4kC\frac{\epsilon}{8kC}\;=\;\epsilon.\ \square\end{aligned}$$

推论5.3.9. *闭区间 $[a,b]$ 上的单调函数 f 一定是可积的.*

证: 不失一般性不妨假设 $f(b)\ne f(a)$. 如果函数 f 单调则 $\omega(f;[a,b])=|f(b)-f(a)|>0$. 对任意 $\epsilon>0$ 存在 $\delta=\epsilon/|f(b)-f(a)|>0$, $[a,b]$ 上满足条件 $||T||<\delta$ 的任何划分 T 都有

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i\le n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i &< \delta\sum_{1\le i\le n}\omega(f;\Delta_i) = \delta\sum_{1\le i\le n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\\ &= \delta|f(b)-f(a)| = \epsilon.\ \square\end{aligned}$$

注5.3.10. 闭区间上的单调函数可能会有可数多个不连续点. 比如考察函数

$$f(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{2^{n-1}}, & 1-\frac{1}{2^{n-1}}\le x<1-\frac{1}{2^n},\ n\ge 1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

这就促使我们思考这样的问题: 闭区间上有可数多个不连续点的连续函数是否 Riemann 可积? 答案是肯定的, 参见**定理** 5.3.16.

定义5.3.11. 假设函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的有界函数. 记

$$M\equiv M_f:=\sup_{[a,b]}f,\quad m\equiv m_f:=\inf_{[a,b]}f. \tag{5.3.8}$$

对 $[a,b]$ 上的任意划分 T: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 引入记号

$$M_i:=\sup_{\Delta_i}f,\quad m_i:=\inf_{\Delta_i}f,\quad 1\le i\le n, \tag{5.3.9}$$

这里 $\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$.

(1) 函数 f 相对于划分 T 的下 **Darboux 和 (lower Darboux sum)** 定义为

$$\underline{S}(f;T) := \sum_{1\le i\le n} m_i \Delta x_i. \tag{5.3.10}$$

(2) 函数 f 相对于划分 T 的上 **Darboux 和 (upper Darboux sum)** 定义为

$$\overline{S}(f;T) := \sum_{1\le i\le n} M_i \Delta x_i. \tag{5.3.11}$$

(3) 观察到如下不等式

$$m(b-a) \le \underline{S}(f;T) \le \sigma(f;T,\boldsymbol{\xi}) \le \underline{S}(f;T) \le M(b-a). \tag{5.3.12}$$

(4) 断言:

$$\underline{S}(f;T) = \inf_{\boldsymbol{\xi}} \sigma(f;T,\boldsymbol{\xi}), \quad \overline{S}(f;T) = \sup_{\boldsymbol{\xi}} \sigma(f;T,\boldsymbol{\xi}). \tag{5.3.13}$$

证: 根据 (5.3.12) 得到

$$\underline{S}(f;T) \le \inf_{\boldsymbol{\xi}} \sigma(f;T,\boldsymbol{\xi}), \quad \overline{S}(f;T) \ge \sup_{\boldsymbol{\xi}} \sigma(f;T,\boldsymbol{\xi}).$$

给定 $\epsilon > 0$. 对任意 $i \in \{1, \cdots, n\}$ 存在 $\xi_i \in \Delta_i$ 满足 $M_i < f(\xi_i) + \frac{\epsilon}{b-a}$. 因此

$$\sum_{1\le i\le n} M_i \Delta x_i < \sum_{1\le i\le n} \left[f(\xi_i) + \frac{\epsilon}{b-a} \right] \Delta x_i = \sum_{1\le i\le n} f(\xi_i)\Delta x_i + \epsilon.$$

即 $\underline{S}(f;T) = \sup_{\boldsymbol{\xi}} \sigma(f;T,\boldsymbol{\xi})$. $\square$

(5) 断言: 对 $[a,b]$ 上的任意划分 T_1 和 T_2 有

$$\underline{S}(f;T_1) \le \overline{S}(f;T_2). \tag{5.3.14}$$

证: 令 $T := T_1 \cup T_2$. 则 T 是 T_1 和 T_2 的加细. 根据下面要证明的断言(6) 得到

$$\underline{S}(f;T_1) \le \underline{S}(f;T) \le \overline{S}(f;T) \le \overline{S}(f;T_2). \quad \square$$

(6) 假设划分 $\widetilde{T}$ 是 $[a,b]$ 上的划分 T 的加细, 并记 $\Delta_{i_1}, \cdots, \Delta_{i_k}$ 是划分 T 的区间使得它们包含属于划分 $\widetilde{T}$ 而不属于划分 T 的点. 则

$$0 \le \overline{S}(f;T) - \overline{S}(f;\widetilde{T}) \le \omega(f;[a,b]) \sum_{1\le j\le k} \Delta x_{i_j}, \tag{5.3.15}$$

$$0 \le \underline{S}(f;\widetilde{T}) - \underline{S}(f;T) \le \omega(f;[a,b]) \sum_{1\le j\le k} \Delta x_{i_j}. \tag{5.3.16}$$

证:

$$\overline{S}(f;T)-\overline{S}(f;\widetilde{T})=\sum_{1\leq j\leq k}\left(M_{i_j}\Delta x_{i_j}-\sum_{1\leq \ell\leq L_{i_j}}M_{i_j}^{(\ell)}|\Delta_{i_j}^{(\ell)}|\right)$$

这里 $\sum_{1\leq\ell\leq L_{ij}}\Delta_{i_j}^{(\ell)}=\Delta_{i_j}$ 是根据 Δ_{i_j} 内 $\widetilde{T}$ 的点进行划分而得到的, 而 $M_{i_j}^{(\ell)}$ 是相应区间 $\Delta_{i_j}^{(\ell)}$ 上的上确界. 因此得到

$$\overline{S}(f;T)-\overline{S}(f;\widetilde{T})=\sum_{1\leq j\leq k}\sum_{1\leq\ell\leq L_{i_j}}\left[M_{i_j}-M_{i_j}^{(\ell)}\right]|\Delta_{i_j}^{(\ell)}|\geq 0.$$

另一方面, 有

$$\overline{S}(f;T)-\overline{S}(f;\widetilde{T})\leq\sum_{1\leq j\leq k}\sum_{1\leq\ell\leq L_{i_j}}\omega(f;[a,b])|\Delta_{i_j}^{(\ell)}|\leq\omega(f;[a,b])\sum_{1\leq j\leq k}\Delta x_{i_j}.$$

同理可证第二个不等式. □

(7) 函数 f 的**下 Darboux 积分 (lower Darboux integral)** 和**上 Darboux 积分 (upper Darboux integral)** 分别定义为

$$\underline{I}:=\sup_T\underline{S}(f;T),\quad \overline{I}:=\inf_T\overline{S}(f;T).\tag{5.3.17}$$

实际上, 在给出定义之前首先要证明 sup 和 inf 的存在性. 引入偏序关系 $\prec$ 如下:

$$T_1\prec T_2\quad\Leftrightarrow\quad T_2\text{ 是 }T_1\text{ 的加细.}$$

则根据 (6) 得到

$$T_1\prec T_2\quad\Rightarrow\quad\underline{S}(f;T_1)\leq\underline{S}(f;T_2),\quad\overline{S}(f;T_2)\leq\overline{S}(f;T_1).$$

从 (5) 和Zorn 引理得到 $\underline{S}(f;T)$ 相对于偏序 $\prec$ 是递增有上界而 $\overline{S}(f;T)$ 相对于偏序 $\prec$ 是递减有下界, 从而 $\underline{I}$ 和 $\overline{I}$ 都存在且满足 $\underline{I}\leq\overline{I}$.

(8) **(Darboux 定理)** 我们有

$$\underline{I}=\lim_{||T||\to 0}\underline{S}(f;T),\quad\overline{I}=\lim_{||T||\to 0}\overline{S}(f;T).\tag{5.3.18}$$

证: 对任意 $\epsilon>0$ 存在划分 T_1 满足 $\overline{S}(f;T_1)<\overline{I}+\frac{\epsilon}{2}$. 对任意划分 T, $\widetilde{T}:=T\cup T_1$ 是 T 的加细. 在 (6) 中的记号得到

$$\overline{S}(f;T)-(M-m)k||T||\leq\overline{S}(f;\widetilde{T})\leq\overline{S}(f;T_1).$$

当 $||T|| < \delta := \epsilon/[2(M-m+1)k]$(这里 k 依赖于 T_1) 时, 我们得到

$$\begin{aligned}\overline{I} &\leq \overline{S}(f;T) \leq \overline{S}(f;T_1)+(M-m)k||T|| \\ &< \overline{S}(f;T_1)+\frac{M-m}{2(M-m+1)}\epsilon < \overline{S}(f;T_1)+\frac{\epsilon}{2} < \overline{I}+\epsilon.\end{aligned}$$

因此 $\lim_{||T||\to 0}\overline{S}(f;T)=\overline{I}$. □

(9) 有界函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上可积 $\Leftrightarrow$ $\underline{I}$ 和 $\overline{I}$ 都存在且 $\underline{I}=\overline{I}$. 此时有

$$\underline{I}=\overline{I}=I=\int_a^b f(x)dx.$$

证: $\Rightarrow$: $f\in R([a,b])$ 推出 $\lim_{||T||\to 0}\sigma(f;T,\xi)=I$. 根据

$$\underline{S}(f;T)\leq\sigma(f;T,\xi)\leq\overline{S}(f;T)$$

和 (8) 得到不等式 $\underline{I}\leq I\leq\overline{I}$. 另一方面对任意 $\epsilon>0$, 由 (4) 可知, 存在 T_1, T_2 使得

$$\sigma(f;T_1,\xi)\leq\underline{S}(f;T_1)+\epsilon,\quad \overline{S}(f;T_2)\leq\sigma(f;T_2,\xi)+\epsilon$$

成立. 根据 (5) 得到

$$\sigma(f;T_1,\xi)\leq\underline{S}(f;T_1)+\epsilon\leq\overline{S}(f;T_2)+\epsilon\leq\sigma(f;T_2,\xi)+3\epsilon.$$

从而得到 $I\leq\underline{I}\leq\overline{I}\leq I$.

$\Leftarrow$: 反之从 $\underline{S}(f;T)\leq\sigma(f;T,\xi)\leq\overline{S}(f;T)$ 得到 $\underline{I}=I=\overline{I}$. □

(10) $f\in R([a,b])\Leftrightarrow$ 对任意 $\epsilon>0$ 存在划分 T 满足 $\overline{S}(f;T)-\underline{S}(f;T)<\epsilon$.

证: $f\in R([a,b])\Leftrightarrow\underline{I}=\overline{I}$. □

(11) $f\in R([a,b])\Leftrightarrow\lim_{||T||\to 0}\sum_{1\leq i\leq n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i=0$.

证: $\Leftarrow$: **定理** 5.3.6.

$\Rightarrow$: 因为 $\omega(f;\Delta_i)=M_i-m_i$ 所以

$$\sum_{1\leq i\leq n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i=\overline{S}(f;T)-\underline{S}(f;T).$$

根据 (9) 或 (10), 若 $f\in R([a,b])$, 则 $\lim_{||T||\to 0}\sum_{1\leq i\leq n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i=0$. □

定理5.3.12. **($R([a,b])$ 是向量空间)** $f,g\in R([a,b])\Rightarrow$

(1) $f+g\in R([a,b])$.

(2) $\alpha f\in R([a,b])$, 任意 $alpha\in\mathbb{R}$.

(3) $|f|\in R([a,b])$.

(4) $f|_{[c,d]} \in R([c,d])$, 任意 $[c,d] \subseteq [a,b]$.

(5) $fg \in R([a,b])$.

证: (1) 根据定义

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g)(x)dx &= \lim_{||T|| \to 0} \sum_{1 \le i \le n} (f+g)(\xi_i)\Delta x_i \\ = \lim_{||T|| \to 0} \sum_{1 \le i \le n} [f(\xi_i) + g(\xi_i)]\Delta x_i &= \int_a^b f(x)dx + \int_x^b g(x)dx.\end{aligned}$$

(2) 根据定义

$$\begin{aligned}\int_a^b (\alpha f)(x)dx &= \lim_{||T|| \to 0} \sum_{1 \le i \le n} (\alpha f)(\xi_i)\Delta x_i \\ = \lim_{||T|| \to 0} \sum_{1 \le i \le n} \alpha f(\xi_i)\Delta x_i &= \alpha \int_a^b f(x)dx.\end{aligned}$$

(3) 根据定义

$$\int_a^b |f|(x)dx = \lim_{||T|| \to 0} \sum_{1 \le i \le n} |f|(\xi_i)\Delta x_i.$$

由于

$$\sum_{1 \le i \le n} \omega(|f|; \Delta_i)\Delta x_i \le \sum_{1 \le i \le n} \omega(f; \Delta_i)\Delta x_i,$$

利用**定理 5.3.6** 得到 $|f| \in R([a,b])$.

(4) 因为 $[c,d]$ 上任何划分 $\widehat{T}$ 都可以延拓成 $[a,b]$ 上的划分 T, 所以 $||T|| \le ||\widehat{T}||$. 从而得到

$$\sum_{\widehat{T}} \omega(f|_{[c,d]}; \Delta_i)\Delta x_i \le \sum_{T} \omega(f; \Delta_i)\Delta x_i$$

其中左边是对 $\widehat{T}$ 的区间求和, 而右边是对 T 的区间求和. 因此 $f \in R([a,b])$ 推出 $f|_{[c,d]} \in R([c,d])$.

(5) 对任何 $f, g \in R([a,b])$ 有

$$fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2].$$

根据 (1) 和 (2) 只要证明

$$f \in R([a,b]) \quad \Rightarrow \quad f^2 \in R([a,b]).$$

因为 $f \in R([a,b])$, 所以 $|f| \le C$ 从而得到

$$|f^2(x_1) - f^2(x_2)| = |[f(x_1) + f(x_2)][f(x_1) - f(x_2)]| \le 2C|f(x_1) - f(x_2)|$$

和

$$\sum_{1 \le i \le n} \omega(f^2; \Delta_i)\Delta x_i \le 2C \sum_{1 \le i \le n} \omega(f; \Delta_i)\Delta x_i$$

因此 $f^2 \in R([a,b])$. $\square$

§5.3.4 * Lebesgue 判别法则: 可积的充要条件

在给出可积的充要条件之前, 我们先引入在 Lebesgue 意义集合测度为零的概念.

定义5.3.13. 集合 $E \subseteq \mathbb{R}$ 称为**测度为零 (measure zero)** 或**零测集 (measure zero set)**(在 Lebesgue 意义下) 如果对任意 $\epsilon > 0$ 存在可数个开区间 $(I_k)_{k\geq 1}$ 使得

$$E \subseteq \bigcup_{k\geq 1} I_k \quad \text{和} \quad \sum_{k\geq 1} |I_k| < \epsilon$$

成立.

注5.3.14. (1) (a) 单点集和有限集都是零测集.

(b) 有限个或可数多个零测集的并也是零测集.

(c) 零测集的子集自身也是零测集.

证: (a) 任意 $x \in \mathbb{R}$, 取 $I_k = (x - \epsilon/2^k, x + \epsilon/2^k)$ 得到 $\sum_{k\geq 1} |I_k| = 2\epsilon$.

(b) 假设 $E = \cup_{n\geq 1} E_n$, 其中 E_n 是零测集. 对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $(I_{n,k})_{k\geq 1}$ 满足

$$E_n \subseteq \bigcup_{k\geq 1} I_{n,k} \qquad \sum_{k\geq 1} |I_{n,k}| \leq \frac{\epsilon}{2^n}.$$

因此

$$E \subseteq \bigcup_{n,k\geq 1} I_{n,k} \qquad \sum_{n,k\geq 1} |I_{n,k}| = \sum_{n\geq 1} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon.$$

(c) 显然. □

(2) $\mathbb{Q}$ 是零测集.

定义5.3.15. 如果性质/条件/结论对集合 X 中的点, 可能除了一个零测集外, 都成立, 称该性质/条件/结论在 X 上**几乎处处 (almost everywhere)** 成立.

定理5.3.16. (Lebesgue, 1902) $f \in R([a,b]) \Leftrightarrow f$ 在 $[a,b]$ 上有界且几乎处处连续.

证: 我们之后会给出证明. □

例5.3.17. (1) 对 $[0,1]$ 上的Riemann 函数

$$R(x) := \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}\ ((p,q) = 1), \\ 1, & x = 0, 1, \\ 0, & x \in (0,1) \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

有 $R \in R([0,1])$ 和

$$\int_0^1 R(x)dx = 0.$$

证: $\{R$ 的不连续点$\} = \mathbb{Q}\cap[0,1]$. 根据**定理** 5.3.16, 得到 R 是可积的. 进一步

$$\int_0^1 R(x)dx = \sup_T \underline{S}(R;T) = \sup_T \left(\sum_{1\le i\le n} \inf_{\xi_i} R(\xi_i)\Delta x_i\right) = \sup_T \sum_{1\le i\le n} 0\Delta x_i = 0.$$

(2) $f\in C([a,b])$, $\varphi\in R([\alpha,\beta])$, $a\le\varphi(t)\le b$, 任意 $t\in[\alpha,\beta] \Rightarrow f\circ\varphi\in R([a,b])$.

证: 因为 f 有界所以 $f\circ\varphi$ 也有界. 令

$$\begin{aligned} D_\varphi &:= \{t\in[\alpha,\beta]:\varphi \text{ 任意 } t\in[\alpha,\beta]\}, \\ D_{f\circ\varphi} &:= \{t\in[\alpha,\beta]: f\circ\varphi \text{ 任意 } t\in[\alpha,\beta]\}. \end{aligned}$$

因为 φ 在 t 连续得到 $f\circ\varphi$ 在 t 连续, 从而 $D_{f\circ\varphi}\subseteq D_\varphi$. 根据**注** 5.3.14, $D_{f\circ\varphi}$ 是零测集. □

(3) $f\in R([a,b])$, $\varphi\in R([\alpha,\beta])$, $a\le\varphi(t)\le b$, 任意 $t\in[\alpha,\beta] \not\Rightarrow f\circ\varphi\in R([\alpha,\beta])$.

反例: $f(x)=\mathrm{sgn}(x)$, $\varphi(t)=R(t)$, $0\le t\le 1$.

$$f\circ\varphi(t) = \begin{cases} 1, & t\in[0,1]\cap\mathbb{Q}, \\ 0, & t\in[0,1]\setminus\mathbb{Q} \end{cases} = D(t)|_{[0,1]}. \quad \Box$$

(4) $f\in R([a,b])$, $\varphi\in C([\alpha,\beta])$, $a\le\varphi(t)\le b$, 任意 $t\in[\alpha,\beta] \not\Rightarrow f\circ\varphi\in R([\alpha,\beta])$.

反例: 记 C 为Cantor 集, 则 $[0,1]\setminus C = \cup_{n\ge1}(a_n,b_n)$. 考察函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x=0, \\ 1, & 0<x\le 1, \end{cases} \qquad \varphi(t) = \begin{cases} 0, & t\in C, \\ \frac{b_n-a_n}{2} - |t-\frac{b_n+a_n}{2}|, & a_n<t<b_n. \end{cases}$$

则

$$f\circ\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t\in C, \\ 1, & t\in[0,1]\setminus C. \end{cases} \quad \Box$$

定理5.3.18. (充要条件) 假设函数 f 在 $[a,b]$ 上有界, 则下面断言等价:

(1) $f\in R([a,b])$,

(2) $\underline{I}=\overline{I}$,

(3) 对任意 $\epsilon>0$ 存在 $[a,b]$ 上的划分 T 满足

$$\overline{S}(f;T) - \underline{S}(f;T) < \epsilon,$$

(4) $\lim_{||T||\to0}[\overline{S}(f;T) - \underline{S}(f;T)] = 0$,

(5) 存在 $[a,b]$ 上的一组划分 $(T_m)_{m\geq 1}$ 满足

$$\lim_{m\to\infty}[\overline{S}(f;T_m)-\underline{S}(f;T)_m]=0,$$

(6) f 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续,

(7) 对任意 $\epsilon>0$ 和任意 $\eta>0$ 存在 $[a,b]$ 上的划分 T 满足

$$\sum_{\omega(f;\Delta_i)\geq\epsilon}\Delta x_i<\eta,$$

(8) **(du Bois-Reymond)** 对任意 $\epsilon>0$, 任意 $\delta>0$ 和任意 $E\subset[a,b]$ 只要满足条件 $\omega(f;E)\geq\epsilon$, 就存在 $I_1,\cdots,I_n$ 使得 $E\subset\cup_{1\leq k\leq n}I_k$ 和 $\sum_{1\leq k\leq n}|I_k|<\delta$ 成立.

证: 只需证明 (1) $\Leftrightarrow$ (7). 由于 (1) $\Leftrightarrow$ (3), 所以只要验证 (3) $\Leftrightarrow$ (7).

(3) $\Rightarrow$ (7): 对任意 $\epsilon>0$ 和任意 $\eta>0$ 存在 $[a,b]$ 上的划分 T 满足

$$\sum_{1\leq i\leq n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i<\epsilon\eta.$$

因此

$$\epsilon\sum_{\omega(f;\Delta_i)\geq\epsilon}\Delta x_i\leq\sum_{\omega(f;\Delta_i)\geq\epsilon}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i<\sum_{1\leq i\leq n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i<\epsilon\eta.$$

即

$$\sum_{\omega(f;\Delta_i)\geq\epsilon}\Delta x_i<\eta$$

成立.

(7) $\Rightarrow$ (3): 对任意 $\epsilon>0$, 取 $\epsilon'=\epsilon/2(b-a)>0$ 和 $\eta'=\epsilon/2(M-m+1)>0$. 存在 $[a,b]$ 上的划分 T 满足

$$\sum_{\omega(f;\Delta_i)\geq\epsilon'}\Delta x_i<\eta'.$$

从而

$$\begin{aligned}\overline{S}(f;T)-\underline{S}(f;T) &= \sum_{1\leq i\leq n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i\\ &= \sum_{\omega(f;\Delta_i)\geq\epsilon'}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i+\sum_{\omega(f;\Delta_i)<\epsilon'}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i\\ &\leq (M-m)\eta'+(b-a)\epsilon' < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon.\ \square\end{aligned}$$

例5.3.19. (1) 假设 $f \in R([0,1])$ 且

$$\int_0^1 f(x)dx = I > 0.$$

证明存在闭子区间 $[\alpha,\beta] \subseteq [0,1]$ 使得对任何点 $x \in [\alpha,\beta]$ 都有 $f(x) > \frac{1}{2}I$.

证: 否则的话, 对任何闭子区间 $[\alpha,\beta] \subseteq [0,1]$ 存在点 $\xi \in [\alpha,\beta]$ 使得 $f(\xi) \le \frac{1}{2}I$ 成立. 则

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{||T||\to 0} \sum_{1\le i\le n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \lim_{||T||\to 0} \sum_{1\le i\le n} \frac{1}{2}I\Delta x_i = \frac{1}{2}I. \quad \square$$

(2) 假设 $f \in R([0,1])$ $f \ge 0$, 且

$$\int_0^1 f(x)dx = 0.$$

证明对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $[\alpha,\beta] \subseteq [0,1]$ 使得对任何点 $x \in [\alpha,\beta]$ 都有 $f(x) < \epsilon$.

证: 否则的话, 存在 $\epsilon_0 > 0$ 对任意 $[\alpha,\beta] \subseteq [0,1]$ 存在 $\exists\, \xi \in [\alpha,\beta]$ 满足 $f(\xi) \ge \epsilon_0$. 则得到

$$0 = \int_0^1 f(x)dx = \lim_{||T||\to 0} \sum_{1\le i\le n} f(\xi_i)\Delta x_i \ge \lim_{||T||\to 0} \sum_{1\le i\le n} \epsilon_0\Delta x_i = \epsilon_0 > 0. \quad \square$$

(3) $f \in R([a,b])$ 且 $|f| \ge C > 0 \Rightarrow \frac{1}{f} \in R([a,b])$.

§5.4 定积分的基本性质

这节主要来证明积分中值定理和微积分基本定理, 最后一个定理的直接推论就是众所周知的**Newton-Leibniz 公式**. 另一方面, Newton-Leibniz 公式可以看成高维版本的 Stokes 公式的一维表现. 具体细节要在微分流形课上给出.

§5.4.1 基本性质

根据求和及求极限的线性, 我们得到如下基本性质.

定理5.4.1. (被积函数线性) $f, g \in R([a,b])$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g \in R([a,b])$ 且

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx. \tag{5.4.1}$$

定理5.4.2. (积分区间可加性) $f \in R([a,b])$, 任意 $c \in [a,b] \Rightarrow f|_{[a,c]} \in R([a,c])$, $f|_{[c,b]} \in R([c,b])$, 且

$$\int_a^b f(x)dfx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{5.4.2}$$

证: 结论 $f|_{[a,c]} \in R([a,c])$ 和 $f|_{[c,b]} \in R([c,b])$ 已证明. 令 $M = \sup_{[a,b]} f$ 和 $m = \inf_{[a,b]} f$. 对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta_k > 0$, 使得对任意划分 T_k 只要满足 $||T_k|| < \delta_k, 1 \le k \le 2$ 就有

$$\left| \sum_{T_k} f(\xi_i)\Delta x_i - I_k \right| < \epsilon,$$

这里

$$I_1 = \int_a^c f(x)dx, \quad I_2 = \int_c^b f(x)dx.$$

给定 $[a,b]$ 上任意划分 $T : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 且满足条件 $||T|| < \delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \epsilon/(M-m)\}$. 如果 $c = x_i$, 则 $T = T_1 \cup T_2$, 这里

$$T_1 : a = x_0 < \cdots < x_i = c, \quad T_2 : c = x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b.$$

因此

$$\sum_T f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{T_1} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{T_2} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

如果 $c \in (x_{i-1}, x_i)$, 则

$$\sum_T f(\xi_j)\Delta x_j = \sum_{j<i} f(\xi_j)\Delta x_j + \sum_{j>i} f(\xi_j)\Delta x_j + f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

不失一般性不妨假设 $x_{i-1} < \xi_i \le c < x_i$. 此时

$$\begin{aligned}\sum_T f(\xi_j)\Delta x_j &= \sum_{j<i} f(\xi_j)\Delta x_j + f(\xi_i)(c - x_{i-1}) + \sum_{j>i} f(\xi_j)\Delta x_j + f(c)(x_i - c) \\ &\quad + [f(\xi_i) - f(c)](x_i - c) \\ &:= \sum_{T_1} f(\xi_j)\Delta x_j + \sum_{T_2} f(\xi_j)\Delta_j + [f(\xi_i) - f(c)](x_i - c).\end{aligned}$$

综上所述, 我们总有

$$\left| \sum_T f(\xi_i)\Delta x_i - (I_1 + I_2) \right| \le 2\epsilon + (M-m)||T|| < 3\epsilon. \quad \square$$

定理5.4.3. (单调性) $f, g \in R([a,b])$ 且在 $[a,b]$ 上满足不等式 $f \le g \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx. \tag{5.4.3}$$

特别地

$$0 \le f \in R([a,b]) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \ge 0. \tag{5.4.4}$$

证: 根据假设条件得到

$$\sum_{1\le i\le n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{1\le i\le n} g(\xi_i)\Delta x_i. \quad \square$$

定理5.4.4. *$f\in R([a,b]) \Rightarrow |f|\in R([a,b])$ 且*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx. \tag{5.4.5}$$

证: 根据初等不等式得到

$$\sum_{1\le i\le n} \omega(|f|;\Delta_i)\Delta x_i \le \sum_{1\le i\le n} \omega(f;\Delta_i)\Delta x_i.$$

故 $|f|\in R([a,b])$. 进一步

$$\left|\sum_{1\le i\le n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \le \sum_{1\le i\le n} |f(\xi_i)|\Delta x_i. \quad \square$$

§5.4.2 积分中值定理

和微分中值定理, §4.5, 对应的是**积分中值定理 (mean-value theorem for definite integrals)**.

定理5.4.5. (积分第一中值定理) (First mean-value theorem for definite integrals) *假设 $f\in R([a,b])$, $m=\inf_{[a,b]} f$, $M=\sup_{[a,b]} f \Rightarrow$ 存在 $\mu\in[m,M]$ 满足*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a). \tag{5.4.6}$$

特别地

$$f\in C([a,b]) \quad\Rightarrow\quad \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a),\ \text{存在}\ \xi\in[a,b]. \tag{5.4.7}$$

证: 根据假设条件得到

$$m\le f\le M \quad\Rightarrow\quad m(b-a)\le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a),$$

所以

$$m\le \mu := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M.$$

如果 $f\in C([a,b])$, 则 $f\in R([a,b])$ 且根据连续函数的介值定理, **定理** 3.3.18, 存在 $\xi\in[a,b]$ 满足 $\mu=f(\xi)$. $\square$

定理5.4.6. (广义积分第一中值定理) (General first mean-value theorem for definite integrals) *假设 $f,g\in R([a,b])$, $m=\inf_{[a,b]} f$, $M=\sup_{[a,b]} f$, 在 $[a,b]$ 上恒有 $g\ge 0$ 或者恒有 $g\le 0 \Rightarrow$ 存在 $\mu\in[m,M]$ 满足*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu\int_a^b g(x)\,dx. \tag{5.4.8}$$

特别地如果 $f\in C([a,b])$ 则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx,\quad 存在\ \xi\in[a,b]. \tag{5.4.9}$$

证: 不失一般性不妨假设在 $[a,b]$ 上恒有 $g\ge 0$. 如果 $\int_a^b g(x)dx\ne 0$, 从不等式

$$mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x)$$

得到

$$m\le \mu:=\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\le M.$$

如果 $\int_a^b g(x)dx=0$, 则显然有 $\int_a^b f(x)dx=0$. □

给定两组有限数 $a_1,\cdots,a_n$ 和 $b_1,\cdots,b_n$ 引入如下的**Abel 变换**:

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i\le n}a_ib_i &= \sum_{1\le i\le n}(A_i-A_{i-1})b_i = \sum_{1\le i\le n}A_ib_i-\sum_{0\le i\le n-1}A_ib_{i+1}\\ &= A_nb_n-A_0b_1+\sum_{1\le i\le n-1}A_i(b_i-b_{i+1}) = \sum_{1\le i\le n-1}A_i(b_i-b_{i+1})+A_nb_n,\end{aligned}$$

这里 $A_k:=\sum_{1\le i\le k}a_i$ 且 $A_0:=0$. 当

$$m\le A_k\le M\ \ (1\le k\le n),\quad b_i\ge 0\ \ (1\le i\le n)\ 且\ b_i\ge b_{i+1}\ \ (1\le i\le n-1),$$

此时必有不等式

$$mb_1\le \sum_{1\le i\le n}a_ib_i\le Mb_1. \tag{5.4.10}$$

引理5.4.7. $f\in R([a,b])\Rightarrow$ 对任意 $x\in[a,b]$ 有

$$F(x):=\int_a^x f(t)dt\in C([a,b]). \tag{5.4.11}$$

证: 首先得到 $|f|\in R([a,b]$. 对任意 $x\in[a,b]$ 有 $f|_{[a,x]}\in R([a,x])$. 从而对任意 $x,x+h\in[a,b]$ 得到

$$|F(x+h)-F(x)|=\left|\int_x^{x+h}f(t)dt\right|\le\left|\int_x^{x+h}|f(t)|dt\right|\le M|h|,$$

这里 $M=\sup_{[a,b]}|f|$. 故函数 F 连续. □

定理5.4.8. (积分第二中值定理) (Second mean-value theorem for definite integrals) 假设 $f,g\in R([a,b])$ 且 $g\ge 0$.

(1) g 单调递减 $\Rightarrow$ 存在 $\xi\in[a,b]$ 满足

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx. \tag{5.4.12}$$

(2) g 单调递增 $\Rightarrow$ 存在 $\eta \in [a,b]$ 满足

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_\eta^b f(x)dx. \tag{5.4.13}$$

证: (1) 任取 $[a,b]$ 的划分 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. 根据**定理 5.4.2** 得到

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &= \sum_{1\le i\le n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)dx \\ &= \sum_{1\le i\le n} g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx + \sum_{1\le i\le n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[g(x)-g(x_{i-1})]f(x)dx.\end{aligned}$$

由于 $f \in R([a,b])$ 则存在某个正常数 C 满足 $\sup_{[a,b]}|f| \le C$ 从而得到

$$\begin{aligned}\left|\sum_{1\le i\le n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[g(x)-g(x_{i-1})]f(x)dx\right| &\le \sum_{1\le i\le n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|g(x)-g(x_{i-1})||f(x)|dx \\ &\le C\sum_{1\le i\le n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|g(x)-g(x_{i-1})|dx \le C\sum_{1\le i\le n}\omega(g;\Delta_i)\Delta x_i.\end{aligned}$$

但是 $g \in R([a,b])$ 所以必有

$$\lim_{||T||\to 0}\sum_{1\le i\le n}\omega(g;\Delta_i)\Delta x_i = 0,$$

从而导致

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \lim_{||T||\to 0}\sum_{1\le i\le n} g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx.$$

引入函数

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt.$$

根据**引理 5.4.7**, 可知 $F \in C([a,b])$ 且 $F(a) = 0$. 定义

$$m_F := \min_{[a,b]} F \qquad M_F := \max_{[a,b]} F.$$

利用 Abel 变换得到

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i\le n} g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx &= \sum_{1\le i\le n} g(x_{i-1})[F(x_i)-F(x_{i-1})] \\ &= \sum_{1\le i\le n-1} A_i(b_i - b_{i+1}) + A_n b_n\end{aligned}$$

这里

$$a_i := F(x_i) - F(x_{i-1}), \quad b_i := g(x_{i-1}) \ge 0, \quad A_k := \sum_{1\le i\le k} a_i = F(x_k).$$

故得到
$$m_F g(a) \le \sum_{1\le i\le n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \le M_F g(a)$$
和
$$m_F g(a) \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M_F g(a).$$
如果 $g(a)=0$, 则
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0.$$
如果 $g(a)>0$, 则
$$m_F \le \frac{1}{g(a)} \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M_F.$$
根据 F 的连续性, 存在 $\xi \in [a,b]$ 满足
$$\frac{1}{g(a)} \int_a^b f(x)g(x)\,dx = F(\xi) = \int_a^\xi f(x)\,dx.$$

(2) 若 $g \ge 0$ 且递增, 和 (1) 类似地, 可得到
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\,dx &= \sum_{1\le i\le n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)f(x)\,dx \\ &= \sum_{1\le i\le n} g(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx + \sum_{1\le i\le n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [g(x)-g(x_i)]f(x)\,dx.\end{aligned}$$
则
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \lim_{||T||\to 0} \sum_{1\le i\le n} g(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx.$$
令
$$\widetilde{F}(x) := \int_x^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt - F(x).$$
从而 $\widetilde{F} \in C([a,b])$ 且 $\widetilde{F}(b)=0$. 定义
$$m_{\widetilde{F}} := \min_{[a,b]} \widetilde{F}, \quad M_{\widetilde{F}} := \max_{[a,b]} \widetilde{F}.$$
得到
$$\begin{aligned}\sum_{1\le i\le n} g(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx &= \sum_{1\le i\le n} g(x_i)[\widetilde{F}(x_{i-1}) - \widetilde{F}(x_i)] \\ &= \sum_{1\le i\le n-1} A_i[b_{i+1}-b_i] + A_0 b_1\end{aligned}$$
其中
$$a_i := \widetilde{F}(x_{i-1}) - \widetilde{F}(x_i), \quad b_i := g(x_i) \ge 0, \quad A_k := \sum_{k+1\le i\le n} a_i - \widetilde{F}(x_k).$$

因此

$$m_{\widetilde{F}}b_n \le \sum_{1\le i\le n} g(x_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \le M_{\widetilde{F}}b_n$$

和

$$m_{\widetilde{F}}g(b) \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M_{\widetilde{F}}g(b).$$

如果 $g(b)=0$, 则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

如果 $g(b)>0$, 则

$$m_{\widetilde{F}} \le \frac{1}{g(b)}\int_a^b f(x)g(x)dx \le M_{\widetilde{F}}.$$

从而存在 $\eta\in[a,b]$ 满足

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_\eta^b f(x)dx. \quad \square$$

定理5.4.9. (广义积分第二中值定理) (Generalized second mean-value theorem for definite integrals) *$f,g\in R([a,b])$ 且 g 在 $[a,b]$ 上单调 $\Rightarrow$ 存在 $\xi\in[a,b]$ 满足*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx. \tag{5.4.14}$$

证: (1) 假设 g 在 $[a,b]$ 上递增. 令 $G(x):=g(b)-g(x)$. 则在 $[a,b]$ 上 $G\ge 0$, 递减且可积. 根据**定理 5.4.8**, 存在 $\xi\in[a,b]$ 满足

$$\int_a^b G(x)f(x)dx = G(a)\int_a^\xi f(x)dx.$$

另一方面

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)G(x)dx &= g(b)\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx,\\ G(a)\int_a^\xi f(x)dx &= g(b)\int_a^\xi f(x)dx - g(a)\int_a^\xi f(x)dx,\end{aligned}$$

从而得到 (5.4.14).

(2) 如果 g 在 $[a,b]$ 上递减, 考虑函数 $\widetilde{G}(x):=g(x)-g(b)$. $\square$

例5.4.10. (1) 任意 $\beta\ge 0$ 和 $b>a>0$ 证明

$$\left|\int_a^b e^{-\beta x}\frac{\sin x}{x}dx\right| \le \frac{2}{a}.$$

证: 根据**定理** 5.4.8 得到

$$\int_a^b e^{-\beta x}\frac{\sin x}{x}dx = \int_a^b \frac{e^{-\beta x}}{x}\sin x dx = \frac{e^{-a\beta}}{a}\int_a^\xi \sin x dx.$$

因此

$$\left|\int_a^b e^{-\beta x}\frac{\sin x}{x}dx\right| \le \frac{2}{ae^{\beta a}} \le \frac{2}{a}. \ \square$$

(2) $f \in R([a,b]) \Rightarrow$ 存在 $\xi \in [a,b]$ 满足

$$\int_a^\xi f(x)dx = \int_\xi^b f(x)dx.$$

证: 定义函数

$$g(x) := \begin{cases} -1, & x = a, \\ 0, & a < x < b, \\ 1, & x = b. \end{cases}$$

因为 g 的不连续点集是 $\{a,b\}$ 且 g 单调递增, 所以 $g \in R([a,b])$. 根据**定理** 5.4.9, 存在 $\xi \in [a,b]$ 满足

$$0 = \int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx. \ \square$$

(3) 假设 $f \in C([a,b])$ 且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b xf(x)dx = 0.$$

证明存在 $x_1, x_2 \in (a,b)$ 使得 $f(x_1) = f(x_2) = 0$ 成立.

证: 因为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分为 0, 故存在 $x_0 \in (a,b)$ 使得 $f(x_0) = 0$ 成立. 否则的话, 在整个区间上 $f > 0$ 或者 $f < 0$. 利用函数的连续性得到 $f \ge \min_{[a,b]} f > 0$ 或者 $f \le \max_{[a,b]} f < 0$ 从而 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 的积分 < 0 或者 > 0, 矛盾. 假设 $f(x)$ 只有一个零点 $x_0 \in (a,b)$. 根据函数连续性和积分为零, 不妨假设 $f(x)$ 在区间 $[a,x_0]$ 上非负而在 $[x_0,b]$ 上非正. 根据前面所证必有

$$\int_a^{x_0} f(x)dx = -\int_{x_0}^b f(x)dx \ne 0.$$

根据**定理** 5.4.6 得到

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b xf(x)dx = \int_a^{x_0} xf(x)dx + \int_{x_0}^b xf(x)dx \\ &= \xi_1\int_a^{x_0} f(x)dx + \xi_2\int_{x_0}^b f(x)dx \quad (\exists\, a \le \xi_1 \le x_0 \le \xi_2 \le b) \\ &= (\xi_1 - \xi_2)\int_a^{x_0} f(x)dx \ne 0. \end{aligned}$$

这是因为 $\xi_1 \ne x_0$ 且 $\xi_2 \ne x_0$. 因为函数 $(x_0 - x)f(x)$, $x \in [a,x_0]$, 是非负且不恒为零, 所以

$$0 < \int_a^{x_0}(x_0 - x)f(x)dx = x_0\int_a^{x_0} f(x)dx - \int_a^{x_0} xf(x)dx.$$

所以 $\xi_1 \neq x_0$. 同理可证 $\xi_2 \neq x_0$. □

(4) 若 $a > 0$ 且 $f \in C^1([0,a]) \Rightarrow$

$$|f(0)| \le \frac{1}{a}\int_0^a |f(x)|dx + \int_0^a |f'(x)|dx.$$

证: 根据**定理** 5.4.5 得到

$$\int_0^a f(x)dx = f(\zeta)a \ \ (\exists\, 0 \le \zeta \le a), \quad f(\zeta) - f(0) = \int_0^\zeta f'(x)dx.$$

因此

$$\begin{aligned} |f(0)| &\le |f(\zeta)| + \int_0^\zeta |f'(x)|dx \le \left|\frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx\right| + \int_0^a |f'(x)|dx \\ &\le \frac{1}{a}\int_0^a |f(x)|dx + \int_0^a |f'(x)|dx. \ \ \square \end{aligned}$$

(5) 假设 $f \in D([0,1])$ 且

$$f(1) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx.$$

证明

$$f'(\zeta) = -\frac{f(\zeta)}{\zeta}, \quad \exists\, \zeta \in (0,1).$$

证: 存在 $\eta \in [0, \frac{1}{2}]$ 满足

$$f(1) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx = 2\eta f(\eta)\frac{1}{2} = \eta f(\eta).$$

定义函数

$$F(x) := xf(x), \quad \eta \le x \le 1.$$

因为 $F \in C([\eta,1]) \cap D((\eta,1))$ 且 $F(\eta) = F(1)$, 则存在 $\zeta \in (\eta,1) \subseteq (0,1)$ 满足 $0 = F'(\zeta) = \zeta f'(\zeta) + f(\zeta)$. □

(6) **(Jacobson, 1982)** $f \in C([a,x]) \Rightarrow$ 存在 $c_x \in (a,x)$ 满足

$$\int_a^x f(t)dt = f(c_x)(x-a).$$

进一步, 如果 f 在 a 处可导且 $f'(a) \neq 0$, 则

$$\lim_{x\to a+} \frac{c_x - a}{x-a} = \frac{1}{2}.$$

证: 根据**定理** 5.4.5 得到 c_x 的存在性. 定义

$$I := \lim_{x\to a+} \frac{1}{(x-a)^2}\left[\int_a^x f(t)dt - xf(a) + af(a)\right].$$

首先利用L'Hôpital 法则得到

$$I = \lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{2(x-a)} = \frac{1}{2}f'(a).$$

另一方面

$$I = \lim_{x\to a+} \frac{f(c_x)(x-a)-f(a)(x-a)}{(x-a)^2} = f'(a)\lim_{x\to a+}\frac{c_x-a}{x-a}.$$

由于 $f'(a)\neq 0$, 结论得证. □

(7) $f\in D^2([a,b]) \Rightarrow$ 存在 $\xi\in(a,b)$ 满足

$$f''(\xi) = \frac{25}{(b-a)^3}\int_a^b \left[f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]dx.$$

证: 利用Taylor 公式展开得到

$$f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\eta_x)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

两边积分得到

$$\int_a^b\left[f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]dx = \frac{1}{2}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\eta_x)dx.$$

根据**定理** 5.4.4 可知存在 $\xi\in(a,b)$ 满足

$$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\xi_x)dx = f''(\eta)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx.$$

故

$$\int_a^b\left[f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]dx = \frac{1}{2}f''(\eta)\frac{2}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 = \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3. \ \square$$

(8) 假设 $f\in C([0,1])$ 且在 $[a,b]$ 上 $f>0 \Rightarrow$ 对任意 $n\geq 1$ 存在 ξ_n 满足

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\int_0^1 f(x)dx &= \int_0^{\xi_n} f(x)dx+\int_{1-\xi_n}^1 f(x)dx,\\ \lim_{n\to\infty} n\xi_n &= \frac{1}{f(0)+f(1)}\int_0^1 f(x)dx.\end{aligned}$$

证: 令

$$F(x) := \int_0^x f(t)dt+\int_{1-x}^1 f(t)dt \in C([0,1]).$$

注意到

$$F(0)=0,\quad F(1)=2\int_0^1 f(t)dt.$$

因为

$$F(0)=0<\frac{1}{n}\int_0^1 f(t)dt<2\int_0^1 f(t)dt = F(1),$$

根据连续函数的介值性可知存在 $\xi_n \in (0,1)$ 满足

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\int_0^1 f(t)dt &= F(\xi_n) = \int_0^{\xi_n} f(t)dt + \int_{1-\xi_n}^1 f(t)dt \\ &= f(\eta_n')\xi_n + \xi_n f(\eta_n'')\end{aligned}$$

这里 $0 \le \eta' \le \xi_n$ 和 $1-\xi_n \le \eta_n'' \le 1$. 因此

$$\lim_{n\to\infty} n\xi_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{f(\eta_n')+f(\eta_n'')}\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{f(0)+f(1)}\int_0^1 f(t)dt$$

这是因为 $\xi_n \to 0$. □

(9) 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+3} x\sin\frac{1}{x}dx = 3.$$

证: 存在 $\xi_n \in [n, n+3]$ 满足

$$\int_n^{n+3} x\sin\frac{1}{x}dx = 3\xi_n\sin\frac{1}{\xi_n}.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+3} x\sin\frac{1}{x}dx = 3\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{\xi_n}}{\frac{1}{\xi_n}} = 3. \quad \square$$

(10) 假设 $f \in C([0,1])$ 且

$$\int_0^x f(t)dt \ge f(x) \ge 0, \quad \forall\, x \in [0,1].$$

证明 $f \equiv 0$.

证: 定义函数

$$F(x) := \int_0^x f(t)dt.$$

则可知 $F(0)=0$, $F \ge 0$ 且 $F \in D([0,1])$. 从不等式

$$F'(x) = f(x) \le \int_0^x f(t)dt = F(x)$$

得到

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}F(x)\right) = e^{-x}\left(-F(x)+F'(x)\right) \le 0.$$

故 $e^{-x}F(x) \le 0$, 即 $F(x) \le 0$ 所以 $F \equiv 0$. 再次利用不等式得到 $f \equiv 0$. □

例5.4.11. (1) **(Cauchy-Schwarz 不等式)** $f, g \in R([a,b]) \Rightarrow$ 我们有

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \left[\int_a^b f^2(x)dx\right]\left[\int_a^b g^2(x)dx\right]. \tag{5.4.15}$$

证: 对 $[a,b]$ 的任意划分 T 得到

$$\left(\sum_{1\le i\le n} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i\right)^2 = \left(\sum_{1\le i\le n} f(\xi_i)\sqrt{\Delta x_i}\cdot g(\xi_i)\sqrt{\Delta x_i}\right)^2$$
$$\le \left(\sum_{1\le i\le n} f^2(\xi_i)\Delta x_i\right)\left(\sum_{1\le i\le n} g^2(\xi_i)\Delta x_i\right).$$

令 $||T||\to 0$ 得到不等式. □

(2) $f\in R([a,b])\Rightarrow$ 我们有

$$\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)dx.$$

(3) $f\in R([a,b])$ 且 $f\ge m>0\Rightarrow$ 我们有

$$\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b \frac{dx}{f(x)} \ge (b-a)^2.$$

(4) **(Minkowski 不等式)** $f,g\in R([a,b])\Rightarrow$ 我们有

$$\left[\int_a^b (f(x)+g(x))^2dx\right]^{1/2} \le \left[\int_a^b f^2(x)dx\right]^{1/2} + \left[\int_a^b g^2(x)dx\right]^{1/2}. \tag{5.4.16}$$

证: 利用 (5.4.15). □

(5) **(Hölder 不等式)** $f,g\in R([a,b])$, $p,q>1$, 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\Rightarrow$ 我们有

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^pdx\right)^{1/p}\left(\int_a^b |g(x)|^qdx\right)^{1/q}. \tag{5.4.17}$$

(6) **(Minkowski 不等式)** $f,g\in R([a,b])$ 且 $p\ge 1\Rightarrow$ 我们有

$$\left(\int_a^b |f(x)+|g(x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f(x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{5.4.18}$$

如果 $0<p<1$ 则不等式反号.

(7) **(Jensen 不等式)** 假设函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是连续的且凸的, 且 $\varphi\in C((-\infty,+\infty))\Rightarrow$

$$f\left(\frac{1}{c}\int_0^c \varphi(t)dt\right) \le \frac{1}{c}\int_0^c f(\varphi(t))dt. \tag{5.4.19}$$

证: 对 $[0,c]$ 上的任意划分 T 得到

$$f\left(\frac{1}{c}\sum_{1\le i\le n}\varphi(\xi_i)\Delta x_i\right) \le \sum_{1\le i\le n}\frac{\Delta x_i}{c}f(\varphi(\xi_i)).$$

令 $||T|| \to 0$ 得到不等式. □

(8) **(Hadamard 不等式)** 函数 f 在 $[a,b]$ 上是连续的和凸的 $\Rightarrow$ 对任意 $a \le x_1 < x_2 \le b$ 有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{1}{x_1-x_2}\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}. \tag{5.4.20}$$

证: 令 $t := x_1+\lambda(x_2-x_1)$, $0 \le \lambda \le 1$, 得到

$$\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt = \int_0^1 F(\lambda)d\lambda, \quad F(\lambda) := f[x_1+\lambda(x_2-x_1)].$$

对任意 $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ 和 $0 \le a_1, a_2 \le 1$ 且满足 $a_1+a_2=1$, 我们得到

$$\begin{aligned} F(a_1\lambda_1+a_2\lambda_2) &= f[x_1+(a_1\lambda_1+a_2\lambda_2)(x_2-x_1)] \\ = f\left(a_1(x_1+\lambda_1(x_2-x_1))+a_2(x_1+\lambda_2(x_2-x_1))\right) &\le a_1F(\lambda_1)+a_2F(\lambda_2). \end{aligned}$$

故 F 也是凸的. 因此根据 (7) 得到

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) = F\left(\int_0^1 \lambda d\lambda\right) \le \int_0^1 F(\lambda)d\lambda = \frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt.$$

另一方面

$$\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \le \int_0^1 [(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)]d\lambda = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}. \quad \square$$

§5.4.3 微积分基本定理

本小节我们证明微积分基本定理. 首先回顾下面定义.

定义5.4.12. 假设 $f \in R([a,b])$. 则对任意 $x \in [a,b]$ 都有 $f|_{[a,x]} \in R([a,x])$. 从而可以定义

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a,b], \tag{5.4.21}$$

称为函数 f 的**变上限积分 (integral with variable upper limit)**. 根据引理 5.4.7 可知 F 在 $[a,b]$ 上连续.

定理5.4.13. (微积分基本定理: 第一部分) (The fundamental theorem of calculus, Part 1) $f \in R([a,b])$ 且 f 在 $x_0 \in [a,b]$ 处连续 $\Rightarrow$ F 在 x_0 处可导且

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

证: 如果 $f \in C([a,b])$ 则利用积分第一中值定理得到

$$F(x_0+\Delta x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)\Delta x.$$

但是现在 f 只假设在 x_0 处连续, 上述方法不能用. 对任意 $\epsilon > 0$, 根据函数 f 在 x_0 处连续, 存在 $\delta > 0$ 使得 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ 对任意 $|x - x_0| < \delta$ 和 $x \in [a, b]$ 都成立. 故

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{x-x_0}\left[\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right] - f(x_0)\right| \\ = \left|\frac{1}{x-x_0}\left[\int_{x_0}^x f(t)\,dt - \int_{x_0}^x f(x_0)\,dt\right]\right| &< \frac{\epsilon}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^x dt\right| = \epsilon. \quad \square\end{aligned}$$

推论5.4.14. $f \in C([a, b]) \Rightarrow F'(x) = f(x)$, 任意 $x \in [a, b]$. 即

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x). \tag{5.4.22}$$

推论5.4.15. $f \in C([a, b]), \alpha, \beta \in D([c, d])$, 且 $a \le \alpha(x), \beta(x) \le b \Rightarrow$ 我们有

$$\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt\right)' = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x). \tag{5.4.23}$$

证: 这是因为

$$\begin{aligned}\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt\right)' &= \left(\int_a^{\beta(x)} f(t)\,dt\right)' - \left(\int_a^{\alpha(x)} f(t)\,dt\right)' \\ = \frac{d}{dx}\left[F(\beta(x)) - F(\alpha(x))\right] &= F'(\beta(x))\beta'(x) - F'(\alpha(x))\alpha'(x) \\ &= f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x). \quad \square\end{aligned}$$

例5.4.16. (1) 计算

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^3}\int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\,dt.$$

解:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{3x^2}\left(\int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\,dt\right)' = \lim_{x\to 0+} \frac{2x\cdot\sin x}{3x^2} = \frac{2}{3}.$$

(2) 寻找 $a, b > 0$ 使得下列极限存在

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{bx - \sin x}\int_0^x \frac{t^2\,dt}{\sqrt{a+t}} = 1.$$

解: 积分第一中值定理告诉我们

$$\int_0^x \frac{t^2\,dt}{\sqrt{a+t}} = \frac{\xi^2}{\sqrt{a+\xi}}x, \quad \xi \in [0, x].$$

故

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\int_0^x \frac{t^2\,dt}{\sqrt{a+t}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{3x^2\sqrt{a+x}} = \frac{1}{3\sqrt{a}} > 0.$$

另一方面

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)=1-\frac{x^2}{6}+o(x^4).$$

从而得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2dt}{\sqrt{a+t}}&=\frac{x^3}{bx-\sin x}\cdot\frac{1}{x^3}\int_0^x\frac{t^2dt}{\sqrt{a+t}}\\&=\frac{x^2}{b-\frac{\sin x}{x}}\cdot\frac{1}{x^3}\int_0^x\frac{t^2dt}{\sqrt{a+t}}.\end{aligned}$$

所以必须有

$$b-1=0\ \text{且}\ \frac{6}{3\sqrt{a}}=1\quad\Rightarrow\quad(a,b)=(4,1).\ \square$$

(3) $f\in R([a,b])$ 且在 $[a,b]$ 上 $f>0\Rightarrow$ 存在 $\xi\in(a,b)$ 满足

$$\int_a^\xi f(x)dx=\int_\xi^b f(x)dx=\frac{1}{2}f(x)dx.$$

证: 定义

$$F(x):=\int_a^x f(t)dt-\int_x^b f(t)dt\in C([a,b]).$$

则

$$F(a)=-\int_a^b f(t)dt<0,\quad F(b)=\int_a^b f(t)dt>0.$$

存在 $\xi\in(a,b)$ 满足

$$0=F(\xi)=\int_a^\xi f(x)dx-\int_\xi^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx.\ \square$$

(4) $f\in C([0,1])\Rightarrow$ 存在 $\xi\in(0,1)$ 满足

$$\xi f(\xi)=\int_\xi^1 f(x)dx.$$

证: 定义

$$F(x):=x\int_x^1 f(t)dt,\quad x\in[0,1].$$

则

$$F(0)=0=F(1)\quad\Rightarrow\quad 0=F'(\xi)=\int_\xi^1 f(x)dx-\xi f(\xi).\ \square$$

(5) $f\in C([a,b])$ 且 $0=\int_a^b f(x)dx\Rightarrow$ 存在 $\xi\in(a,b)$ 满足

$$\int_a^\xi f(x)dx=f(\xi).$$

证: 定义

$$F(x):=e^{-x}\int_a^x f(t)dt.$$

则

$$F(a)=0=F(b)\quad\Rightarrow\quad 0=F'(\xi)=e^{-\xi}\left[f(\xi)-\int_a^{\xi}f(t)dt\right].\ \square$$

(6) $f\in C([a,b])$, $a>0$ 且 $0=\int_a^b f(x)dx\Rightarrow$ 存在 $\xi\in(a,b)$ 满足

$$\xi f(\xi)=\int_a^{\xi}f(x)dx.$$

证: 定义

$$F(x):=\frac{1}{x}\int_a^x f(t)dt\in C([a,b])\cap D((a,b)).$$

则

$$F(a)=0=F(b)\quad\Rightarrow\quad 0=F'(\xi)=\frac{1}{\xi^2}\left[\xi f(\xi)-\int_a^{\xi}f(t)dt\right].\ \square$$

(7) $f\in C([a,b])$, $g\in C([a,b])\Rightarrow$ 存在 $\xi\in(a,b)$ 满足

$$g(\xi)\int_a^{\xi}f(x)dx=f(\xi)\int_{\xi}^b g(x)dx.$$

证: 定义

$$F(x):=\int_a^x f(t)dt\cdot\int_x^b g(t)dt.$$

则

$$F(a)=0=F(b)\quad\Rightarrow\quad 0=F'(\xi)\ \ (\exists\,\xi\in[a,b]).$$

但是

$$F'(x)=f(x)\int_x^b g(t)dt+\int_a^x f(t)dt(-g(x)).\ \square$$

(8) $f,g\in C([a,b])$ 且在 $[a,b]$ 上有 $f,g>0\Rightarrow$ 存在 $\xi\in(a,b)$ 满足

$$\frac{f(\xi)}{\int_a^{\xi}f(x)dx}-\frac{g(\xi)}{\int_{\xi}^b g(x)dx}=1.$$

证: 这等价于证明

$$0=f(\xi)\int_{\xi}^b g(x)dx-g(\xi)\int_a^{\xi}f(x)dx-\int_a^{\xi}f(x)dx\int_{\xi}^b g(x)dx.$$

定义

$$F(x):=e^{-x}\int_a^x f(t)dt\int_x^b g(t)dt.$$

则

$$F(a)=0=F(b)\quad\Rightarrow\quad 0=F'(\xi).\ \square$$

(9) $f\varphi, g\varphi \in C([a,b])$ 且在 (a,b) 内 $\varphi \neq 0 \Rightarrow$ 存在 $\xi \in (a,b)$ 满足

$$g(\xi)\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\varphi(x)dx.$$

证: 定义

$$F(x) := \left[\int_a^b f(t)\varphi(t)dt\right]\int_a^x g(t)\varphi(t)dt - \left[\int_a^b g(t)\varphi(t)dt\right]\int_a^x f(t)\varphi(t)dt.$$

则

$$F(a) = 0 = F(b) \quad \Rightarrow \quad \text{存在 } \xi \in (a,b) \text{ 满足 } 0 = F'(\xi). \ \square$$

(10) 一般求极限和求积分不能相交换:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx \neq \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx, \quad f_n \in R([a,b]).$$

比如考察函数列

$$f_n(x) := \begin{cases} n, & 0 < x \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & x = 0, \\ 0, & \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

则

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \quad \int_0^1 f_n(x)dx = 1.$$

如果函数列是一致连续的话, 在 §14.2.2, 我们将证明此时求积分和求极限可以交换 (参见**定理** 14.2.5).

(11) $f \in C([-1,1])$, f 在 $x = 0$ 处可导, $f(0) = 0$, 且 $f'(0) \neq 0 \Rightarrow$ 求极限

$$I := \lim_{x\to 0+}\frac{\int_0^x (x^2 - t^2)f(t)dt}{\int_0^x tf(x^2 - t^2)dt}.$$

证: 做变量替换 $u := x^2 - t^2$ 或 $x = \sqrt{u + t^2}$ 得到

$$\int_0^x tf(x^2 - t^2)dt = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)du.$$

所以

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to 0+}\frac{\int_0^x (x^2 - t^2)f(t)dt}{\frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(t)dt} = \lim_{x\to 0+}\frac{\int_0^x 2xf(t)dt}{xf(x^2)} = \lim_{x\to 0+}\frac{2}{f(x^2)}\int_0^x f(t)dt \\ &= 2\lim_{x\to 0+}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}\cdot\frac{1}{\frac{f(x^2)-f(0)}{x^2}} = \frac{1}{f'(0)}\lim_{x\to 0+}\frac{2\int_0^x f(t)dt}{x^2} \\ &= \frac{1}{f'(0)}\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{f'(0)}\lim_{x\to 0+}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f'(0)}{f'(0)} = 1. \ \square \end{aligned}$$

(12) $f \ge 0$, $f \in C([0,1])$ 且

$$f^2(x) \le 1 + 2\int_0^x f(t)\,dt.$$

证明不等式

$$f(x) \le 1 + x, \quad 0 \le x \le 1.$$

证: 令

$$G(x) := \int_0^x f(t)\,dt.$$

则

$$[G'(x)]^2 = f^2(x) \le 1 + 2G(x) \quad \Rightarrow \quad 0 \le \frac{G'(x)}{\sqrt{1+2G(x)}} \le 1.$$

两边积分得到

$$0 \le \int_0^x \frac{2dG(t)}{\sqrt{1+2G(t)}} \le 2x \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1+2G(x)} - 1 \le 2x.$$

即 $f(x) \le 1 + x$. □

(13) $f \in C([0,1]) \cap D((0,1))$, $f(0) = f(\frac{1}{4}) = 0$, 且

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(y)\,dy = \frac{1}{2} f(1).$$

证明存在 $\xi \in (0,1)$ 满足 $f''(\xi) = 0$.

证: 首先存在 $\xi_1 \in (0, \frac{1}{4})$ 满足 $f'(\xi_1) = 0$. 根据积分第一中值定理, **定理 5.4.5**, 存在 $\xi_2 \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ 满足 $f(\xi_2) = f(1)$; 从而存在 $\xi_3 \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ 满足 $f'(\xi_3) = 0$. 故存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0,1)$ 满足 $f''(\xi) = 0$. □

§5.4.4 Newton-Leibniz 公式

微积分基本定理的第二部分就是经典的**Newton-Leibniz 公式**.

定理5.4.17. (1) $f \in C([a,b])$, F 是 f 在 $[a,b]$ 上的原函数 $\Rightarrow$ 我们有

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{5.4.24}$$

(2) $f \in C([a,b] \setminus \{x_1, \cdots, x_k\})$, F 是 f 在 $[a,b] \setminus \{x_1, \cdots, x_k\}$ 上的原函数且 $F \in C([a,b]) \Rightarrow$ (5.4.24) 仍然成立.

证: (1) 令

$$\widetilde{F}(x) := \int_a^x f(t)\,dt.$$

则

$$F'(x) = f(x) = \widetilde{F}'(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = \widetilde{F}(x) + C.$$

从而

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx = \widetilde{F}(b) = F(b) - C = \widetilde{F}(b) - \widetilde{F}(a)\\ = F(b) - C - F(a) + C = F(b) - F(a).\end{aligned}$$

(2) 不妨假设 $x_1 < \cdots < x_k$ 并延拓成划分 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < \cdots < x_n = b$. 我们可进一步假设 $||T||$ 足够小, 否则的话在把区间细分直到新的划分的模足够小. 存在 $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ 满足

$$f(\xi_i) = F'(\xi_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

使得

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(\xi_i)\Delta x_i, \quad 1 \le i \le n.$$

故

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{||T||\to 0} \sum_{1\le i\le n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \lim_{||T||\to 0} \sum_{1\le i\le n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] = F(b) - F(a). \quad \square$$

注5.4.18. 在定理 5.4.17 (2) 中, 条件 $F \in C([a,b])$ 是必须的. 反例如下

$$f(x) = 0, \quad F(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

则 $F'(x) = f(x)$ 对任意 $x \neq 0$ 都成立且 $f \in C([-1,1])$, 然而

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = 0 \neq F(1) - F(-1) = 1 - 0 = 1. \quad \square$$

例5.4.19. (1) 证明

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \pi\delta_{m,n}$$

且

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0, \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N}.$$

证: 利用三角函数积化和差公式:

$$\begin{aligned}\cos mx \cos nx &= \frac{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x}{2},\\ \sin mx \sin nx &= \frac{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x}{2},\\ \sin mx \cos nx &= \frac{\sin(m+n)x + \sin(m+n)x}{2}. \quad \square\end{aligned}$$

(2) 计算

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}, \quad p > -1.$$

解: 根据Stolz 定理推出

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p}{(p+1)n^p+\frac{(p+1)p}{2}n^{p-1}+\cdots}=\frac{1}{p+1}.$$

如果利用Newton-Leibniz 公式就得到

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{1\le i\le n}\left(\frac{i}{n}\right)^p=\int_0^1 x^p dx=\frac{1}{p+1}.\ \square$$

(3) $f\in C^1([a,b])$ 且 $f(a)=0\Rightarrow$ 我们有

$$\max_{[a,b]} f^2\le (b-a)\int_a^b [f'(x)]^2dx,\quad \int_a^b f^2(x)dx\le\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2dx.$$

证: 利用Newton-Leibniz 公式得到

$$\begin{aligned} f^2(x) &= [f(x)-f(a)]^2 = \left[\int_a^x f'(t)dt\right]^2 \\ &\le \left[\int_a^x (f'(x))^2dx\right]\left(\int_a^x dt\right) = (x-a)\int_a^x [f'(t)]^2dt. \end{aligned}$$

特别地,

$$\max_{[a,b]} f^2\le (b-a)\int_a^b [f'(x)]^2dx$$

和

$$\int_a^b f^2(x)dx\le\left[\int_a^b (x-a)dx\right]\int_a^b [f'(t)]^2dt.\ \square$$

(4) $f\in C^1([0,1])$, $f(0)=0$, $f(1)=1\Rightarrow$ 我们有

$$\int_0^1 |f(x)-f'(x)|dx\ge\frac{1}{e}.$$

证:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x)-f'(x)|dx &\ge \int_0^1 e^{-x}[f'(x)-f(x)]dx \\ &= \int_0^1 [e^{-x}f(x)]'dx = e^{-1}f(1)-e^0f(0) = \frac{1}{e}.\ \square \end{aligned}$$

(5) $f\in C^1([0,1])$, $f(0)=0$, 且在 $[0,1]$ 上 $0\le f'\le 1\Rightarrow$ 我们有

$$\int_0^1 f^3(x)dx\le\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2.$$

证: 定义

$$F(t):=\left[\int_0^t f(x)dx\right]^2-\int_0^t f^3(x)dx.$$

则 $F(0)=0$ 且

$$F'(t) = 2f(t)\int_0^t f(x)dx-f^3(t) = f(t)G(t)$$

这里

$$G(t) := 2\int_0^t f(x)\,dx - f^2(t).$$

因为

$$G(0) = 0,\quad G'(t) = 2f(t) - 2f(t)f'(t) = 2f(t)[1 - f'(t)] \geq 0$$

所以 $G(t) \geq G(0) = 0$. 因此 $F(t) \geq F(0) = 0$ 从而得到结论. $\square$

(6) 证明不等式

$$\ln(1+n) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n. \tag{5.4.25}$$

证: 显然有如下严格的不等式（为什么？请思考）

$$\frac{1}{k+1} < \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}$$

故

$$\sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{k} < 1 + \sum_{2\leq k\leq n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t} = 1 + \int_1^n \frac{dt}{t} = 1 + \ln n.\ \square$$

(7) $f \in C^2([0,1])$, $f(0) = f(1) = 0$, 且在 $(0,1)$ 内 f 不为 $0 \Rightarrow$ 我们有

$$\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx \geq 4.$$

证: 不失一般性不妨假设在 $(0,1)$ 内 $f > 0$. 从而

$$\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx = \int_0^1 \frac{|f''(x)|}{f(x)} dx.$$

存在 $c \in (0,1)$ 满足 $f(c) = \max_{[0,1]} f > 0$. 故得到

$$\frac{f(c)}{c} = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = f'(a),\quad -\frac{f(c)}{1-c} = \frac{f(1) - f(c)}{1-c} = f'(b)$$

对某个 $a \in (0,c)$ 和某个 $b \in (c,1)$ 都成立. 所以

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx &\geq \frac{1}{f(c)}\int_0^2 |f''(x)| dx \geq \frac{1}{f(c)}\left|\int_a^b f''(x)\,dx\right| \\
&= \frac{|f'(b) - f'(a)|}{f(c)} = \left|\frac{-1}{1-c} - \frac{1}{c}\right| = \frac{1}{c(1-c)} \geq 4.\ \square
\end{aligned}$$

(8) 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx.$$

解: 因为

$$\int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = \sin \xi_n \int_n^{n+p} \frac{dx}{x} = \sin \xi_n \cdot \ln \frac{n+p}{n}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=0.\quad\square$$

(9) $f\in D([a,b])$ 且 $f'\in R([a,b])\Rightarrow$ 我们有

$$\max_{[a,b]}|f|\le\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|+\int_a^b|f'(x)|dx.$$

证: 对任意 $x,y\in[a,b]$ 得到

$$f(y)=f(x)+\int_x^y f'(t)dt.$$

两边对 x 积分得到, 存在 $\xi\in[x,y]$,

$$(b-a)f(y)=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b\left[\int_x^y f'(t)dt\right]dx.$$

利用积分第一中值定理, **定理** 5.4.5, 得到

$$(b-a)f(y)\le\int_a^b f(x)dx+(b-a)\int_\xi^y f'(t)dt$$

即得到所求的不等式. □

§5.4.5 分部积分法

不定积分中的分部积分法可以平行地挪到定积分中来.

定理5.4.20. $u,v\in C^1([a,b])\Rightarrow$ 我们有

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)dx. \tag{5.4.26}$$

等价地可以简写成

$$\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du. \tag{5.4.27}$$

证: 因为

$$\int_a^b[u(x)v'(x)+u'(x)v(x)]dx=\int_a^b[u(x)v(x)]'dx.\quad\square$$

定理5.4.21. (带积分型余项的 Taylor 公式) $f\in C^{n+1}([x_0,x_0+\delta])\Rightarrow$ 对任意 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 都有

$$f(x)=P_n(x)+r_n(x) \tag{5.4.28}$$

成立, 这里

$$P_n(x)\equiv P_n(x;f,x_0):=f(x_0)+\sum_{1\le i\le n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$$

且

$$r_n(x):=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt. \tag{5.4.29}$$

证: 首先来看 $n=1$ 情形然后做到一般情形:

$$f(x)-f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt = -\int_{x_0}^{x} f'(t)(x-t)'dt$$

$$= f'(x_0)(x-x_0)+\int_{x_0}^{x}(x-t)f''(t)dt$$

$$= f'(x_0(x-x_0)-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f''(t)\left((x-t)^2\right)'dt$$

$$= f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2-\frac{1}{3!}\int_{x_0}^{x} f'''(t)\left((x-t)^3\right)'dt = \cdots$$

$$= \sum_{1\le k\le n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt. \quad \square$$

因为 $f^{(n+1)}$ 连续, 故得到Lagrange 型余项

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0}^{x}(x-t)^n dt=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}.$$

同理得到Cauchy 型余项

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n\int_{x_0}^{x}dt=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0).$$

例5.4.22. (1) 计算定积分

$$I_n:=\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx,\quad J_n:=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx.$$

解: 首先注意到

$$I_0=J_0=1,\quad I_1=J_1=\frac{\pi}{2}.$$

对任意 $n\ge 2$ 根据

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\,d\sin x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)\cos^{n-2}x\sin^2 x\,dx=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$$

得到

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

所以

$$I_n=\begin{cases}\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{\pi}{2}, & n=2m,\\ \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & n=2m+1.\end{cases} \tag{5.4.30}$$

类似地可证明

$$J_n=\frac{n-1}{n}J_{n-2}$$

所以 J_n 的通项公式也由 (5.4.30) 所给出.

(2)**(Wallis 公式, 1655)** 考察定积分

$$J_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x \sin x dx.$$

利用不等式

$$J_{2n+1} \le J_{2n} \le J_{2n-1}$$

得到

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \le \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} \le \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

即

$$\frac{2n}{2n+1}\frac{\pi}{2} \le \frac{[(2n)!!]^2}{(2n+1)[(2n-1)!!]^2} \le \frac{\pi}{2}.$$

最后得到

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{[(2n)!!]^2}{(2n+1)[(2n-1)!!]^2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots. \tag{5.4.31}$$

(3) **(Stirling 公式, 1730; 也叫 Stirling - de Moivre 公式)** 对任意 n 有

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi} \tag{5.4.32}$$

实际上可以证明

$$\sqrt{2n\pi}\, n^n e^{-n} < n! \le \sqrt{2n\pi}\, n^n e^{-n}\left(1 + \frac{1}{4n}\right). \tag{5.4.33}$$

进一步得到 (参见 (15.4.165) 和 (15.4.167))

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}} \ (\text{存在 } \theta_n \in (0,1)) \quad \sim \quad \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n+\frac{1}{12n}-\frac{1}{360n^3}}. \tag{5.4.34}$$

对 $n = 10$ 比较如下:

$$10! = 3628800, \quad \left(\frac{10}{e}\right)^{10}\sqrt{20\pi} = 3598695.6,$$

$$\sqrt{20\pi}10^{10}e^{-10+\frac{1}{120}} = 3628810.032, \quad \sqrt{20\pi}\left(\frac{10}{e}\right)^{10} e^{\frac{1}{120}-\frac{1}{360000}} = 3628799.9714.$$

证: 考察积分

$$A_n := \int_1^n \ln x dx = x\ln x\Big|_1^n - n = n\ln n - n + 1.$$

因为

$$\ln n! = \sum_{2\le k\le n} \ln k > A_n > \ln[(n-1)!] = \sum_{2\le k\le n-1} \ln k$$

得到

$$n! > n^n e^{-n+1} > (n-1)! \quad \Rightarrow \quad e\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < ne\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

另一方面, 利用梯形面积近似代替得到

$$A_n \approx \sum_{1\le k\le n-1} \frac{\ln k + \ln(k+1)}{2} =: B_n = \sum_{1\le k\le n-1} \ln k + \frac{1}{2}\ln n.$$

定义

$$a_n := A_n - B_n, \quad B_n = A_n\left(1 - \frac{a_n}{A_n}\right) \ (n\ge 1).$$

注意到

$$a_{k+1} - a_k = (A_{k+1} - A_k) - (B_{k+1} - B_k) > 0$$

且

$$a_n = \sum_{1\le k\le n-1} (a_{k+1} - a_k) + a_1 \quad \Rightarrow \quad \{a_n\}_{n\ge 1} \text{ 递增}.$$

但是

$$a_{k+1} - a_k < \frac{\ln(k+\frac{1}{2}) - \frac{1}{2k+1} + \ln(k+\frac{1}{2}) + \frac{1}{2k+1}}{2} - \frac{\ln k + \ln(k+1)}{2}$$

$$= \ \ln\left(k+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln k - \frac{1}{2}\ln(k+1) \ = \ \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{2k+1}\right).$$

故得到

$$a_{k+1} - a_k < \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right) - \frac{1}{2}\ln\left[1+\frac{1}{2(k+1)}\right]$$

和

$$a_n < \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) < \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ 存在且 } a - a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{n\le k\le m} (a_{k+1} - a_k) < \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{12n}\right).$$

由 $A_n - B_n = a_n$ 得到

$$\ln n! = (1-a_n) + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n \quad \Rightarrow \quad n! = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{1-a_n}.$$

令

$$b_n := e^{1-a_n} \quad \Rightarrow \quad n! = b_n e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}.$$

因为 a_n 递增趋于 a 而 b_n 递减趋于 $e^{1-a} =: b$, 从而得到

$$1 < \frac{b_n}{b} = e^{a-a_n} < e^{\frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{2n})} = \sqrt{1+\frac{1}{2n}} < 1 + \frac{1}{4n}.$$

故
$$bn^{n+\frac{1}{2}}e^{-n} < n! > bn^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\left(1+\frac{1}{4n}\right).$$
最后来估计 b. 利用Wallis 公式 (5.4.31) 推出
$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{[n!]^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}\frac{(b_n e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}})^2}{b_{2n}e^{-2n}(2n)^{2n+\frac{1}{2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{b_n^2}{b_{2n}\sqrt{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}}.$$
所以 $b=\sqrt{2\pi}$. □

(4) $\pi \notin \mathbb{Q}$.

证: 假设 $\pi = a/b$ 是有理数 ($a, b \in \mathbb{N}$ 且 $(a,b)=1$). 考虑函数
$$f(x) := \frac{1}{n!}x^n(a-bx)^n, \quad g(x) := \sum_{0\le k\le n}(-1)^k f^{(2k)}(x).$$
则得到
$$g''(x) = \sum_{0\le k\le n}(-1)^k f^{(2k+2)}(x) = \sum_{1\le k\le n+1}(-1)^{k+1}f^{(2k)}(x)$$
和 $g''(x)+g(x)=f(x)$ 和
$$[g'(x)\sin x - g(x)\cos x]' = [g''(x)+g(x)]\sin x = f(x)\sin x.$$
故
$$\int_0^{\pi} f(x)\sin x dx = g(\pi)+g(0).$$
但是
$$f(\pi - x) = f\left(\frac{a}{b}-x\right) = \frac{1}{n!}\left(\frac{a}{b}-x\right)^n[a-(a-bx)]^n = f(x)$$
得到
$$f^{(2k)}(\pi - x) = f^{(2k)}(x), \quad f(\pi)=f(0), \quad f^{(2k)}(\pi) = f^{(2k)}(0)$$
和
$$g(\pi) = g(0)\in\mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\pi} f(x)\sin x dx \in \mathbb{Z}.$$
根据 $0<\sin x\le 1$ $(0<x\le\pi)$, 推出
$$0 < f(x)\sin x < \frac{\pi^n a^n}{4^n n!}, \quad 0 < \int_0^{\pi} f(x)\sin x dx < \frac{\pi^n a^n}{4^n n!} \to 0$$
当 $n\to\infty$ 时. □

(5) $\pi^2 \notin \mathbb{Q}$.

证: 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 定义

$$I_n := \frac{1}{n!}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^n \cos t\, dt.$$

则

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n+1} d\sin t \\ &= -\frac{1}{(n+1)!}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin t\cdot(n+1)\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^n(-2t)\,dt \\ &= \frac{2}{n!}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} t\sin t\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^n dt = \frac{-2}{n!}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} t\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^n d\cos t \\ &= \frac{2}{n!}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos t\left[\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^n - 2nt^2\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-1}\right]dt \\ &= \frac{2}{n!}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-1}\cos t\left[\frac{\pi^2}{4}-(2n+1)t^2\right]dt \end{aligned}$$

所以得到

$$I_{n+1} = 2(2n+1)I_n - \pi^2 I_{n-1} \quad\Rightarrow\quad I_n P_n(\pi^2)$$

这里 P_n 是次数不超过 n 的整系数多项式. 注意到

$$I_0 = 2,\quad I_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)\cos t\, dt = 4.$$

假设 $\pi^2 = p/q$ 则得到

$$\mathbb{N} \ni q^n P_n\left(\frac{p}{q}\right) = q^n I_n \to 0,$$

矛盾! □

(6) 令

$$I_n := e^{n/4} n^{-\frac{n+1}{2}}\left(1\times 2^2\times 3^3\times\cdots\times n^n\right)^{1/n}.$$

证明

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 1.$$

证: 取对数得到

$$\begin{aligned} \ln I_n &= \frac{n}{4} + \frac{1}{n}\sum_{1\le k\le n} k\ln k - \frac{n+1}{2}\ln n \\ &= n\left(\frac{1}{n}\sum_{1\le k\le n}\frac{k}{n}\ln\frac{k}{n} - \int_0^1 x\ln x\, dx\right) \end{aligned}$$

$$= n\sum_{1\le k\le n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(\frac{k}{n}\ln\frac{k}{n}-x\ln x\right)dx-n\int_0^{\frac{1}{n}}x\ln x dx$$

$$=\sum_{1\le k\le n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(\frac{k}{n}-x\right)[1+\ln\theta_n(x)]\,dx-n\int_0^{\frac{1}{n}}x\ln xdx\ \left(\frac{k}{n}\le\theta_n(x)\le x\right).$$

考虑

$$1+\ln\xi_k=\min_{[k/n,(k+1)/n]}(1+\ln x),\quad 1+\ln\eta_k=\max_{[k/n,(k+1)/n]}(1+\ln x).$$

所以

$$\begin{aligned}(1+\ln\xi_k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(\frac{k}{n}-x\right)dx\ &\ge\ \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(\frac{k}{n}-x\right)[1+\ln\theta_k(x)]\,dx\\&\ge\ (1+\ln\eta_k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(\frac{k}{n}-x\right)dx\end{aligned}$$

和

$$-\frac{1}{2}\sum_{2\le k\le n}\frac{1}{n}(1+\ln\eta_k)\le\ln I_n+n\int_0^{\frac{1}{n}}x\ln xdx\le-\frac{1}{2}\sum_{2\le k\le n}\frac{1}{n}(1+\ln\xi_k).$$

因此得到

$$\lim_{n\to\infty}\left[\ln I_n+n\int_0^{\frac{1}{n}}x\ln xdx\right]=-\frac{1}{2}\int_0^1(1+\ln x)dx.$$

根据

$$\begin{aligned}\int_0^1(1+\ln x)dx\ &=\ 1-\int_0^1dx\ =\ 0,\\\int_0^{\frac{1}{n}}x\ln xdx\ &=\ \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{n}}\ln xdx^2\ =\ \frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n^2}-\int_0^{\frac{1}{n}}xdx\right)\\&=\ \frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n^2}-\frac{1}{2n^2}\right),\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\ln I_n=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n}-\frac{1}{2n}\right)=0,\quad I_n\to1.\ \Box$$

§5.4.6 变量替换法

定积分的变量替换法可叙述如下.

定理5.4.23. (1) 假设函数 $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ 连续可导, $(\varphi(\alpha),\varphi(\beta))=(a,b)\Rightarrow$ 对任意$f\in C([a,b])$, 有 $f(\varphi(t))\varphi'(t)\in C([\alpha,\beta])$ 和

$$\int_a^bf(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.\qquad(5.4.35)$$

(2) 假设函数 $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ 连续可导且严格单调, $(\varphi(\alpha),\varphi(\beta))=(a,b)$ 或 $(b,a)\Rightarrow$ 对任意$f\in R([a,b])$, 有 $f(\varphi(t))\varphi'(t)\in R([\alpha,\beta])$ 和

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{5.4.36}$$

证: (1) 存在 F 满足 $F'(x)=f(x)$. 因此

$$[F(\varphi(t))]'=F'(\varphi(t))\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Newton-Leibniz 公式告诉我们

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt &= F(\varphi(t))\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))\\ &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.\end{aligned}$$

(2) 不失一般性不妨假设 $\varphi'>0$. 对任意 $\epsilon>0$ 存在 $\delta_1>0$ 有

$$|\varphi'(t')-\varphi'(t'')|<\frac{\epsilon}{3M+1}, \quad 任意\ t',t''\in[\alpha,\beta]\ 满足\ |t'-t''|<\delta_1,$$

这里 $M:=\sup_{[a,b]}|f|$. 根据 $f\in R([a,b])$ 得到存在 $\delta_2>0$ 对 $[a,b]$ 上的任意划分 T 只要 $||T||<\delta_2$ 就有

$$\sum_{1\le i\le n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i<\frac{\epsilon}{3}$$

和

$$\left|\sum_{1\le i\le n} f(\xi_i)\Delta x_i-\int_a^b f(x)dx\right|<\frac{\epsilon}{3}, \quad \forall\, xi_i\in[x_{i-1},x_i].$$

对 $[a,b]$ 上的任意划分 $W:\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$ 和任意 $\tilde{\tau}_i\in[t_{i-1},t_i]$, 令 $x_i:=\varphi(t_i)$, 则存在 $\tau_i\in[t_{i-1},t_i]$ 满足

$$x_i-x_{i-1}=\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})=\varphi'(\tau)(t_i-t_{i-1})>0$$

(这里用到了假设条件 $\varphi'>0$). 取

$$\delta:=\min\left\{\delta_1,\frac{\delta_2}{1+K}\right\}, \quad K:=\max_{[\alpha,\beta]}|\varphi'|.$$

则当 $||W||<\delta$ 时得到

$$||T||\le K||W||\le K\frac{\delta_2}{1+K}<\delta_2$$

和

$$\left|\sum_{1\le i\le n} f(\varphi(\tilde{\tau}_i))\varphi'(\tilde{\tau}_i)\Delta t_i-\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\le \sum_{1\le i\le n} |f(\varphi(\tilde{\tau}_i))| \left|\varphi'(\tilde{\tau}_i)-\varphi'(\tau_i)\right| \Delta t_i + \sum_{1\le i\le n} |f(\varphi(\tilde{\tau}_i))-f(\varphi(\tau_i))| \varphi'(\tau_i)\Delta t_i$$
$$+\left|\sum_{1\le i\le n} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i - \int_a^b f(x)dx\right|$$
$$< M\frac{\epsilon}{1+3M}+\sum_{1\le i\le n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i+\frac{\epsilon}{3} \quad < \quad \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3} \quad = \quad \epsilon. \quad \square$$

例5.4.24. (1) 对任意 $m,n\in\mathbb{N}$ 计算

$$I_{m,n}=\int_0^{\pi/2}\cos^m x\sin^n x dx.$$

解:

$$I_{m,n} \quad = \quad \frac{1}{n+1}\int_0^{\pi/2}\cos^{m-1} xd\sin^{n+1} x$$
$$= \quad \frac{1}{n+1}\left[\cos^{m-1} x\sin^{n+1} x\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}(m-1)\cos^{m-2} x(-\sin^{n+2} x)dx\right]$$
$$= \quad \frac{m-1}{n+1}\int_0^{\pi/2}\cos^{m-2} x\sin^n x(1-\cos^2 x)dx \quad = \quad \frac{m-1}{n+1}(I_{m-2,n}-I_{m,n}).$$

因此

$$I_{m,n}=\frac{m-1}{m+n}I_{m-2,n}.$$

所以最后得到

$$I_{m,n}=\begin{cases}\frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}\frac{\pi}{2}, & m,n \text{ 都是偶数},\\ \frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}, & m,n \text{ 至少有一个是奇数}.\end{cases}$$

(2) $f\in R([-a,a])\Rightarrow$ 证明

$$\int_{-a}^a f(x)dx=\begin{cases}2\int_0^a f(x)dx, & f \text{ 是偶的},\\ 0, & f \text{ 是奇的}.\end{cases}$$

(3) $f\in R([0,T])$, T 是周期 $\Rightarrow$ 对任意 $a\in\mathbb{R}$ 有

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx.$$

证:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx \quad = \quad \int_a^0 f(x)dx+\int_0^T f(x)dx+\int_T^{a+T} f(x)dx$$
$$= \quad -\int_0^a f(x)dx+\int_0^T f(x)dx+\int_0^a f(x+T)dx \quad = \quad \int_0^T f(x)dx. \quad \square$$

(4) $f\in C((-\infty,+\infty))$ 且 T 是 f 的周期 $\Rightarrow$ 证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt.$$

证: 对任意 $x > T$ 存在 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $(n-1)T < x \le nT$, 从而得到

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)dt &= \int_0^{(n-1)T} f(t)dt + \int_{(n-1)T}^x f(t)dt \\ &= (n-1)\int_0^T f(t)dt + \int_0^{x-(n-1)T} f(t)dt.\end{aligned}$$

如果 $\int_0^T f(t)dt \ge 0$ 则

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \le \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt + \frac{1}{x}\int_0^{x-(n-1)T} f(t)dt$$

且

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \ge \frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt + \frac{1}{x}\int_0^{x-(n-1)T} f(t)dt.$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\int_0^{x-(n-1)T} f(t)dt - \frac{1}{nT}\int_0^T f(t)dt &\le \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt - \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \\ &\le \frac{1}{x}\int_0^{x-(n-1)T} f(t)dt.\end{aligned}$$

令

$$m := \min_{[0,T]} f, \quad M := \max_{[0,T]} f.$$

则

$$m[x-(n-1)T] \le \int_0^{x-(n-1)T} f(t)dt = f(\xi)[x-(n-1)T] \le M[x-(n-1)T]$$

从而

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^{x-(n-1)T} f(t)dt = 0. \quad \square$$

§5.5 反常积分

反常积分是定积分的自然推广, 最常见的是两类, 即无穷积分和瑕积分. 当然在实际应用中还有 Cauchy 主值积分.

§5.5.1 反常积分 I

本小节引入无穷积分和瑕积分的概念.

定义5.5.1. 假设函数 $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ 满足如下性质: 对任意 $A > a$ 都有 $f \in R([a, A])$. 如果极限

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$$

存在, 称

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx \tag{5.5.1}$$

是函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上的**反常积分 (improper integral of type I)**. 如果极限有限, 称反常积分**收敛**. 反之称反常积分**发散**.

类似地可以定义

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx := \lim_{A\to-\infty}\int_A^a f(x)dx. \tag{5.5.2}$$

如果极限存在且有限, 称反常积分收敛.

现在考虑函数 $f:(-\infty,+\infty)\to\mathbb{R}$. 如果 $\forall\, c\in\mathbb{R}$, 反常积分

$$\int_{-\infty}^c f(x)dx \quad 和 \quad \int_c^{+\infty} f(x()dx$$

都收敛, 则称反常积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx \tag{5.5.3}$$

收敛. 实际上, (5.5.3) 中只要对某个 c 成立即可.

性质5.5.2. (1) $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ 在任何 $[a,A]$ $(A>a)$ 上都可积, 则对任意 $b>a$ 有

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛} \quad\Leftrightarrow\quad \int_b^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛}$$

且

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx.$$

(2) $f:(-\infty,+\infty)\to\mathbb{R}$ 在任何 $[-A,A]$ $(A>0)$ 上都可积, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛} \quad\Leftrightarrow\quad \text{存在 } c\in\mathbb{R} \text{ 使得 } \int_{-\infty}^c f(x)dx \text{ 和 } \int_c^{+\infty} f(x)dx \text{ 都收敛.}$$

证: (1) 显然.

(2) $\Rightarrow$: 根据定义. $\Leftarrow$: 对任意 $c'\neq c$ 我们得到

$$\int_{c'}^{+\infty} f(x)dx \text{ 和 } \int_{-\infty}^{c'} f(x)dx \text{ 都收敛.}$$

进一步

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{c'} f(x)dx + \int_{c'}^{+\infty} f(x)dx\\ = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{c'} f(x)dx + \int_{c'}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx. \quad\Box\end{aligned}$$

例5.5.3. (1) 计算

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

解:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1, \\ +\infty, & p \le 1. \end{cases}$$

故反常积分只在 $p > 1$ 收敛. □

(2) 计算

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

解:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^p}$$

所以反常积分只在 $p > 1$ 收敛. □

(3) 计算

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

解:

$$I = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi. \quad \square$$

(4) 计算

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx, \quad a \in \mathbb{R}.$$

解:

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-ax} dx = \begin{cases} \frac{1}{a}, & a > 0, \\ +\infty, & a \le 0. \end{cases} \quad \square$$

(5) 计算

$$I = \lim_{n \to \infty} \sin \frac{\pi}{n} \left(\sum_{1 \le k \le n} \frac{1}{3 + \sin \frac{k\pi}{n}} \right).$$

解:

$$I = \lim_{n \to \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \cdot \frac{\pi}{n} \sum_{1 \le k \le n} \frac{1}{3 + \sin \frac{k\pi}{n}} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{3 + \sin x}$$

$$= 2 \int_0^{+\infty} \frac{du}{3 + 2u + 3u^2} \quad \left(u = \tan \frac{x}{2} \right) = \frac{2}{3} \int_0^{+\infty} \frac{d(u + \frac{1}{3})}{(u + \frac{1}{3})^2 + (\frac{2\sqrt{2}}{3})^2}$$

$$= \frac{2}{3}\frac{3}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{u+\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{2\sqrt{2}}\right). \quad \square$$

(6) 证明

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

证: 因为

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{1+x^4} &= \int\frac{dx}{(1+x^2)^2-(\sqrt{2}x)^2}\\ &= \int\frac{dx}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}\\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\int\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)dx\\ &+\frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}+\frac{1}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}\right]dx\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\arctan(\sqrt{2}x+1)+\arctan(\sqrt{2}x-1)\right]+C.$$

故

$$I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \quad \square$$

(7) 计算

$$I:=\int_0^{+\infty}e^{-bx}\sin(ax)dx,\quad J:=\int_0^{+\infty}e^{-bx}\cos(ax)dx,\quad a,b>0.$$

解: 分部积分得到

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-bx}}{-a}d\cos(ax)=\frac{-\cos(ax)}{ae^{bx}}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{b}{a}\cos(ax)e^{-bx}dx=\frac{1}{a}-\frac{b}{a}J$$

和

$$J=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-bx}}{a}d\sin(ax)=\frac{\sin(ax)}{ae^{bx}}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{b}{a}\sin(ax)e^{-bx}dx=\frac{b}{a}I.$$

从而得到

$$I=\frac{a}{a^2+b^2},\quad J=\frac{b}{a^2+b^2}. \quad \square$$

注5.5.4. (1) 有如下等价刻画

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx \text{ 收敛} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx \text{ 存在且有限.}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c}\forall\,\epsilon>0\,\exists\,A>0\,\forall\,A_1>A_2>A \text{ 有}\\ \left|\int_{A_2}^{A_1}f(x)dx\right|=\left|\int_A^{A_1}f(x)dx-\int_A^{A_2}f(x)dx\right|<\epsilon\end{array}\right)$$

(2) 类似地得到如下等价刻画

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx \text{ 收敛} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{a} f(x)dx \text{ 存在且有限.}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c} \forall\, \epsilon>0\ \exists\, A<0\ \forall\, A_1<A_2<A \text{ 有} \\ \left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right| = \left|\int_{A_1}^{a} f(x)dx - \int_{A_2}^{a} f(x)dx\right| < \epsilon \end{array}\right)$$

(3) 有如下关系:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛} \quad \Rightarrow \quad \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)dx$$

但是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛} \quad \not\Leftarrow \quad \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)dx.$$

反例: $f(x)=\sin x$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

例5.5.5. (1) **(Poisson 积分)** 证明

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}dx = 2\pi, \quad 0<r<1. \tag{5.5.4}$$

证: 做变量替换 $t=\tan\frac{x}{2}$ 得到

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-r^2}{1-2r\frac{1-t^2}{1+t^2}+r^2}\frac{2dt}{1+t^2} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2(1-r^2)}{(1-r)^2+(1+r)^2t^2}dt \\ &= 2\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}t\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 2\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 2\pi. \quad \square \end{aligned}$$

(2) **(Euler-Poisson 积分)** 证明

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{5.5.5}$$

证: 利用多变量积分理论 (参见 (13.3.13)) 得到

$$I^2 = \iint_{[0,+\infty]^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{+\infty}e^{-r^2}rdr = \int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

第二个证明要利用Wallis 公式 (5.4.31). 考察函数

$$\varphi(x) := e^{-x^2}-(1-x^2) \quad \Rightarrow \quad \varphi'(x) = 2x(1-e^{-x^2})>0 \ \ (x>0).$$

因此

$$e^{-x^2}>1-x^2, \quad x>0.$$

从而得到

$$e^{-nx^2} > (1-x^2)^n \ (0 < x < 1),$$

且

$$e^{x^2} > 1+x^2, \quad e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}, \quad e^{-nx^2} < \frac{1}{(1+x^2)^n}, \quad x > 0.$$

特别地

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx < \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2} t dt = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2}$$

和

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx > \int_0^1 e^{-nx^2} dx > \int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^1 \cos^{2n+1} t dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

根据

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt, \quad t = \sqrt{n} x,$$

得到

$$n \left[\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \right]^2 < \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 < n \left[\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \right]^2 \frac{\pi^2}{4}.$$

例 5.4.22 (2) 推出

$$\lim_{n\to+\infty} n \left[\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \right]^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

且

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n \left[\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \right]^2 \frac{\pi^2}{4} &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 (2n+1) \cdot \frac{\pi^2}{4} \frac{n(2n)^2}{(2n+1)(2n-1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2}{\pi} \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi}{4}. \quad \square \end{aligned}$$

定义5.5.6. (1) 假设函数 $f(x)$ 定义在区间 $[a,b)$ 上且在 b 的任何领域内无界, 但是在任何闭子区间 $[a,b'] \subset [a,b)$ 上可积. 称

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{b'\to b} \int_a^{b'} f(x) dx = \lim_{\eta\to 0+} \int_a^{b-\eta} f(x) dx \tag{5.5.6}$$

为 f 在 $[a,b)$ **上的瑕积分 (improper integra of type** II**)**. 如果极限存在则称瑕积分**收敛**, 反之称为**发散**.

(2) 类似地, 如果函数 $f(x)$ 定义在区间 $(a,b]$ 上且在 a 的任何邻域内无界, 但是在任何闭子区间 $[a', b' \subset (a,b]$ 上可积, 定义瑕积分如下

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{a'\to a+} \int_{a'}^b f(x) dx = \lim_{\eta\to 0+} \int_{a+\eta}^b f(x) dx. \tag{5.5.7}$$

如果极限存在则称瑕积分**收敛**, 反之称为**发散**.

(3) 如果函数 $f(x)$ 定义在区间 (a,b) 上但是在内点 $c\in(a,b)$ 的任何邻域内无界, 此时定义

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{5.5.8}$$

称瑕积分 $\int_a^b f(x)$ **收敛**如果瑕积分 $\int_a^c f(x)dx$ 和 $\int_c^b f(x)dx$ 都收敛.

例5.5.7. (1) 计算

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}, \quad p\in\mathbb{R}.$$

解: 显然当 $p<1$ 时瑕积分收敛. □

(2) 计算

$$\int_{-1}^1 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx.$$

解: 根据定义得到

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx &= \int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx + \int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx = \lim_{\epsilon\to0+}\int_{-1}^{-\epsilon}\frac{e^{1/x}}{x^2}dx + \lim_{\eta\to0+}\int_\eta^1 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx \\ &= \lim_{\epsilon\to0+}\left(-e^{1/x}\right)\Big|_{-1}^{-\epsilon} + \lim_{\eta\to0+}\left(-e^{1/x}\right)\Big|_\eta^1 \\ &= \frac{1}{e} - \lim_{\epsilon\to0+} e^{-1/\epsilon} - e + \lim_{\eta\to0+} e^{1/\eta} = +\infty. \quad \square\end{aligned}$$

(3) 计算

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

解: $\pi/2$. □

(4) 计算

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad n\ge1.$$

解:

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{u\to1-}\int_0^u \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi/2}\sin^n t\,dt = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}, & n\text{ 偶数}, \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{ 奇数}. \end{cases} \quad \square$$

定义5.5.8. (1) 假设函数 f 定义在 $[a,\infty)$ 上且 f 在 a 的任何领域内都无界. 称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **收敛**如果反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 和瑕积分 $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ 对 $\forall\, b>a$ 都收敛. 此时定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx. \tag{5.5.9}$$

显然上述值和 $b>a$ 的选取无关.

(2) 假设函数 f 定义在 $[a,+\infty)$ 上, $c>a$, 且 f 在 c 的任何领域内都无界. 定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx \tag{5.5.10}$$

如果上述两个积分都收敛.

假设函数 f 定义在区间 $[a,b)$ 上且 f 在 b 的任何领域内都无界. 做变量替换 $y := \frac{1}{b-x}$, $a \le x < b$, 得到

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{\eta\to 0+}\int_a^{b-\eta} f(x)dx \\ &= \lim_{\eta\to 0+}\int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\eta}} \frac{1}{y^2} f\left(b-\frac{1}{y}\right)dy = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \frac{1}{y^2} f\left(b-\frac{1}{y}\right)dy.\end{aligned}$$

这个说明瑕积分可化成无穷区间上的反常积分.

定理5.5.9. (1) **(被积函数线性)** 如果反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 和 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 都收敛, 则对任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 反常积分 $\int_a^{+\infty}[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx$ 也收敛且

$$\int_a^{+\infty}[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx = \alpha\int_a^{+\infty} f(x)dx + \beta\int_a^{+\infty} g(x)dx. \tag{5.5.11}$$

(2) **(Newton-Leibnitz 公式)** $f\in C([a,+\infty))$, F 是 f 在 $[a,+\infty)$ 上的原函数 $\Rightarrow$ 如果极限

$$F(+\infty) := \lim_{x\to+\infty} F(x)$$

存在 (有限或无限), 则

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty)-F(a). \tag{5.5.12}$$

(3)**(分部积分法)** $u,v\in C^1([a,+\infty)) \Rightarrow$ 如果极限 $\lim_{x\to+\infty} u(x)v(x)$ 存在, 则

$$\int_a^{+\infty} u\,dv = uv\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} v\,du. \tag{5.5.13}$$

(4) **(变量替换法)** $f\in C([a,b))$, $x=\varphi(t)\in C^1([\alpha,\beta)) \Rightarrow$ 我们有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \tag{5.5.14}$$

如果 $\varphi((\alpha,\beta))\subset(a,b)$, $\varphi(\alpha)=a$, 且 $\varphi(\beta-)=b$.

证: 证明和定积分相应的性质几乎一样. □

例5.5.10. (1) 计算

$$I = \int_0^1 \ln x\,dx.$$

解: 利用分部积分得到

$$I = x\ln x\Big|_0^1 - \int_0^1 dx = 0 - 1 = -1. \quad \square$$

(2) 计算

$$I_n := \int_0^{+\infty} e^{-x}x^n dx, \quad n \geq 1.$$

解: 分部积分得到

$$\begin{aligned} I_n &= -\int_0^{+\infty} x^n de^{-x} = -x^n e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} nx^{n-1}e^{-x}dx \\ &= nI_{n-1} = \cdots = n!I_0 = n!. \quad \square \end{aligned}$$

(3) 计算**Euler 积分**

$$I := \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx, \quad J := \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)dx. \tag{5.5.15}$$

解: 分部积分得到

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)dx \\ &= \frac{\pi}{2}\ln 2 + \int_0^{\pi/2} \ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)dx + \int_0^{\pi/2} \ln\left(\cos\frac{x}{2}\right)dx \\ &= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\pi/4} \ln(\sin x)dx + 2\int_0^{\pi/4} \ln(\cos x)dx. \end{aligned}$$

对第二个积分做变量替换 $t = \frac{\pi}{2} - x$ 得到

$$\int_0^{\pi/4} \ln(\cos x)dx = \int_{\pi/2}^{\pi/4} -\ln(\sin x)dx$$

从而得到

$$I = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2I \quad \Rightarrow \quad I = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

对 (5.5.15) 中第二个积分做变量替换 $u = \frac{\pi}{2} - x$ 就得到第一个积分. $\square$

(4) 计算

$$I = \int_0^{\pi} x\ln(\sin x)dx.$$

解: 利用变量替换 $x = \frac{\pi}{2} - u$ 得到

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - u\right)\ln(\cos u)(-du) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - u\right)\ln(\cos u)du \\ &= \frac{\pi}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln(\cos u)du = \pi\int_0^{\pi/2} \ln(\cos u)du = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2. \quad \square \end{aligned}$$

(5) 假设
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$
收敛且 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \in \mathbb{R} \Rightarrow A = 0$.

证: 否则的话不妨假设 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A > 0$. 存在 $\Delta > \max\{a, 0\}$ 使得不等式
$$f(x) > \frac{A}{2} > 0, \quad \forall\, x > \Delta,$$
成立. 因此对任意 $b > a$ 有
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\Delta f(x)dx + \int_\Delta^b f(x)dx > \int_a^\Delta f(x)dx + \frac{A}{2}(b-\Delta) \to +\infty,$$
当 $b \to +\infty$. 这就产生了矛盾! □

(6) 假设函数 $f \in D([a, +\infty))$ 且反常积分
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad 和 \quad \int_a^{+\infty} f'(x)dx$$
都收敛 $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

证: 对任意 $b > a$ 有
$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$
所以得到
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f'(t)dt = \int_a^{+\infty} f'(t)dt < +\infty.$$
根据 (5) 得到 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. □

(7) 计算
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}.$$

解: 利用变量替换 $y = 1/x$ 得到
$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{dy}{(1+y^2)(1+y^{-\alpha})} + \int_1^{+\infty} \frac{dy}{(1+y^2)(1+y^\alpha)} \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan 1. \quad \square \end{aligned}$$

(8) 假如反常积分
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

收敛, 则
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

证: 首先注意到
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx = \int_{0}^{+\infty} f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx + \int_{-\infty}^{0} f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx.$$
其次把第一个积分写成
$$\int_{0}^{+\infty} f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx = \int_{0}^{1} f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx + \int_{1}^{+\infty} f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx.$$
做变量替换 $t = x - 1/x$ 得到
$$\begin{aligned}\int_{0}^{1} f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} f\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right)dt,\\ \int_{1}^{+\infty} f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx &= \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} f(t)\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right)dt.\end{aligned}$$
类似地可得到
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx &= \int_{-\infty}^{-1} f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx + \int_{-\infty}^{0} f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx,\\ \int_{-1}^{0} f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx &= \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} f(t)\left(1-\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right)dt,\\ \int_{-\infty}^{-1} f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} f(t)\left(1-\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right)dt.\end{aligned}$$
相加得到最后结论. □

(9) 给定 $a, b > 0$ 并假设反常积分
$$\int_{0}^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx$$
收敛 ⇒ 我们有
$$\int_{0}^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx = \frac{1}{a}\int_{0}^{+\infty} f\left(\sqrt{x^2+4ab}\right)dx.$$

证: 考虑变量替换 $t = ax - b/x$ 则得到
$$x = \frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{2a}, \quad dx = \frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{2a\sqrt{t^2+4ab}}dt.$$
故
$$\int_{0}^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\sqrt{t^2+4ab}\right)\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}dt$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\int_{-\infty}^{0}+\int_{0}^{+\infty}\right) f\left(\sqrt{t^2+4ab}\right)\frac{\sqrt{t^2+4ab}+t}{\sqrt{t^2+4ab}}dt$$
$$= \frac{1}{a}\int_{0}^{+\infty} f\left(\sqrt{t^2+4ab}\right)dt. \quad \square$$

(10) 假设函数 f 定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上, 且对任意 $[a,b]\subset(-\infty,+\infty)$ 都有 $f\in R([a,b]) \Rightarrow$ 如果极限 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$ 和 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=B$ 都存在, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x+t)-f(x)]dx=(A-B)t, \quad t>0.$$

证: 首先注意到

$$\begin{aligned}\int_a^b[f(x+t)-f(x)]dx &= \int_b^{b+t} f(x)dx-\int_a^{a+t} f(x)dx\\ &= \int_b^{b+t}[f(x)+A-A]dx-\int_a^{a+t}[f(x)+B-B]dx\\ &= (A-B)t+\int_b^{b+t}[f(x)-A]dx-\int_a^{a+t}[f(x)-B]dx.\end{aligned}$$

对任意 $\epsilon>0$ 存在 $X,-Y$ $(X,Y>0)$ 使得不等式

$$\int_b^{b+t}|f(x)-A|dx<\epsilon \;\; (b>X) \quad 且 \quad \int_a^{a+t}|f(x)-B|dx<\epsilon \;\; (a<-Y)$$

成立. 从而对任意 $a<-Y$ 和 $b>X$ 得到

$$\int_a^b[f(x+t)-f(x)]dx-(A-B)t\to 0,$$

当 $a\to-\infty$ 和 $b\to+\infty$ 时. $\square$

(11) 注意

$$f\in C([a,+\infty)) \text{ 且 } \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛 } \not\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

反例: 考察函数 $f(x)=x\cos(x^4)$. 则得到

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(x)dx &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\cos(x^4)dx^2 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\cos(x^2)dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\cos t\cdot\frac{1}{2}t^{-1/2}dt = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt.\end{aligned}$$

利用下一小节的Abel-Dirichlet 判别法, **定理** 5.5.17, 可证最后这个反常积分是收敛的.

(12) 注意

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛 } \not\Rightarrow \int_1^{+\infty} f^3(x)dx \text{ 和 } \int_1^{+\infty}\frac{|f(x)|}{x^2}dx \text{ 收敛}.$$

反例: 考察函数

$$f(x)=\begin{cases} n, & n\le xc\le n+\frac{1}{n^3},\\ 0, & \text{其它情形}. \end{cases}$$

和函数 $f(x)=x^2\sin(x^4)$. □

(13) 假设函数 f 定义在 $[0,+\infty)$ 上, $0<f<1$, 且

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛}, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

则反常积分

$$I:=\int_0^{+\infty}\ln[1-f(x)] \text{ 收敛}.$$

证: 利用Taylor 展开得到

$$\ln(1-t)=\ln(1-t)-\ln(1-0)=\frac{-1}{1-\theta t}(t-0)=\frac{-t}{1-\theta t}$$

从而

$$|\ln(1-t)|=\frac{t}{1-\theta t}<\frac{t}{1-t}, \quad 0<\theta<1.$$

存在 $M>0$ 使得不等式 $1-f(x)>\frac{1}{2}$ 对任意 $x>M$ 都成立. 因此得到

$$\int_M^{+\infty}|\ln[1-f(x)]|\,dx\le\int_M^{+\infty}\frac{f(x)dx}{1-f(x)}\le 2\int_M^{+\infty}f(x)dx<+\infty. \quad \square$$

(14) 证明

$$I(s):=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{x}{s}-\frac{1}{x}}}{x}dx\sim\ln s$$

当 $s\to+\infty$ 时.

证: 因为 $x/s=1/x\Rightarrow x=\sqrt{s}$ 把积分分成两部分

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\sqrt{s}}\frac{e^{-\frac{x}{s}-\frac{1}{x}}}{x}dx+\int_{\sqrt{s}}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{x}{s}-\frac{1}{x}}}{x}dx \\ &= \int_{\sqrt{s}}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{t}{s}-\frac{1}{t}}}{t}dt+\int_{\sqrt{s}}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{x}{s}-\frac{1}{x}}}{x}dx \quad \left(x:=\frac{s}{t},\ e^{-1/x}=1+O(s^{-1/2})\right) \\ &= 2\int_{\sqrt{s}}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{x}{s}-\frac{1}{x}}}{x}dx \;=\; 2\left[1+O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)\right]\int_{\sqrt{s}}^{+\infty}\frac{e^{-x/s}}{x}dx \\ &= 2\left[1+O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)\right]\int_{s^{-1/2}}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt \;=\; 2\left[1+O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)\right]\left[\frac{\ln s}{2}+\int_{s^{-1/2}}^{+\infty}e^{-t}\ln t\,dt\right] \\ &= \ln s+o(1)\ \ (s\to+\infty). \quad \square \end{aligned}$$

(15) 计算

$$I=\int_0^1\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx.$$

解: 对任意 $0 < \epsilon < 1$ 考察定积分

$$I_\epsilon := \int_\epsilon^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx.$$

分部积分得到

$$\begin{aligned}
I_\epsilon &= -\int_\epsilon^1 \ln x d\left(\frac{1}{1+x}\right) = -\left[\frac{\ln x}{1+x}\Big|_\epsilon^1 - \int_\epsilon^1 \frac{dx}{x(1+x)}\right] \\
&= \frac{\ln\epsilon}{1+\epsilon} + \ln\frac{x}{x+1}\Big|_\epsilon^1 = \frac{\ln\epsilon}{1+\epsilon} - \ln 2 - \ln\frac{\epsilon}{1+\epsilon} \\
&= -\frac{\epsilon\ln\epsilon}{1+\epsilon} - \ln 2 + \ln(1+\epsilon) \to -\ln 2,
\end{aligned}$$

当 $\epsilon \to 0$ 时. □

(16) 计算

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}, \quad a > 1.$$

解: 先做变量替换 $x = \sin\theta$ 得到

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\theta d\theta}{(a-\sin\theta)\cos\theta} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{a-\sin\theta}.$$

再做变量替换 $t = \tan\theta/2$ 得到

$$\begin{aligned}
I &= 2\int_{-1}^1 \frac{dt}{at^2-2t+a} = \frac{2}{a}\int_{-1}^1 \frac{dt}{(t-\frac{1}{a})^2+1-(\frac{1}{a})^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \arctan\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\left(t-\frac{1}{a}\right)\Bigg|_{-1}^1 \\
&= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\left(\arctan\sqrt{\frac{a-1}{a+1}} + \arctan\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}. \quad \square
\end{aligned}$$

(17) 计算

$$I_n = \int_0^1 x^n(1-x)^p dx, \quad p > -1.$$

解: 注意到

$$I_0 = \int_0^1 (1-x)^p dx = \frac{1}{p+1}.$$

对一般的 n 有

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 t^p(1-t)^n dt = \int_0^1 t^p \sum_{0\le k\le n}\binom{n}{k}(-1)^k t^k dt \\
&= \sum_{0\le k\le n}\binom{n}{k}(-1)^k \frac{1}{p+k+1}.
\end{aligned}$$

另一方面定义

$$I_{n,p} := \int_0^1 x^n(1-x)^p dx.$$

则得到

$$\begin{aligned} I_{n,p} &= \frac{-1}{p+1}\int_0^1 x^n d\left((1-x)^{p+1}\right) \\ &= \frac{n}{p+1}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{p+1}dx = \frac{n}{p+1}I_{n-1,p+1}. \end{aligned}$$

因此

$$I_n = I_{n,p} = \frac{n!}{(p+1)\cdots(p+n)}I_{0,p+n} = \frac{n!}{(p+1)\cdots(p+n+1)}.$$

作为一个副产品得到如下的组合恒等式

$$\sum_{0\le k\le n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{p+k+1} = \frac{n!}{(p+1)\cdots(p+n+1)}. \tag{5.5.16}$$

§5.5.2 收敛判别法

因为

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \int_{-a}^{+\infty} f(-t)dt \quad (t=-x)$$

及

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

所以对无穷区间上的反常积分的收敛性，只要考虑 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 的收敛性即可.

(I) 反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 的收敛性. 我们首先给出非负反常积分的判断方法.

定理5.5.11. 给定函数 $f:[a,+\infty)\to[0,+\infty)$，即函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上非负.

(1) **(有界判别法)**

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛} \quad \Leftrightarrow \quad I(A) := \int_a^A f(x)dx \text{ 有界.}$$

(2) **(比较判别法 1)** 如果 $0\le f(x)\le K\varphi(x)$ $(K>0)$，则

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 发散} \quad &\Rightarrow \quad \int_a^{+\infty}\varphi(x)dx \text{ 发散}, \\ \int_a^{+\infty}\varphi(x)dx \text{ 收敛} \quad &\Rightarrow \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛}. \end{aligned}$$

(3) **(比较判别法 2 或比较判别法的极限形式)** 如果 $\varphi : [a, +\infty) \to [0, +\infty)$ 且

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = K \geq 0,$$

则

(a) $0 < K < +\infty$:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛} \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^{\infty} \varphi(x)dx \text{ 收敛};$$

(b) $K = 0$:

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx \text{ 收敛} \quad \Rightarrow \quad \int_a^{\infty} f(x)dx \text{ 收敛};$$

(c) $K = +\infty$:

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx \text{ 发散} \quad \Rightarrow \quad \int_a^{\infty} f(x)dx \text{ 发散}.$$

(4) **(Canchy 判别法 1)** 如果 $a > 0$ 则

$$f(x) \leq \frac{K}{x^p}\ (K > 0,\ p > 1) \quad \Rightarrow \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛},$$
$$f(x) \geq \frac{K}{x^p}\ (K > 0,\ p \leq 1) \quad \Rightarrow \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 发散}.$$

(5) **(Canchy 判别法 2 或 Cauchy 判别法的极限形式)** 如果 $a > 0$ 且

$$\lim_{x\to+\infty} x^p f(x) = K \geq 0,$$

则

(a) $0 \leq K < +\infty$ 且 $p > 1$:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \text{ 收敛};$$

(b) $0 < K \leq +\infty$ 且 $p \leq 1$:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \text{ 发散}.$$

证: (1) 利用单调函数极限存在的充要条件.

(2) 这是因为

$$I(A) \leq K \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx \text{ 有界} \quad \Rightarrow \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛}.$$

(3) 如果 $0 < K < +\infty \Rightarrow \frac{K}{2}\varphi(x) \leq f(x) \leq \frac{3K}{2}\varphi(x)$, 对任意 $x > a' > a$ 都成立. 如果 $K = 0$, 则得到 $f(x) \leq \varphi(x)$ 对任意 $x > a' > a$ 都成立. 如果 $K = +\infty$, 则得到 $f(x) \geq \varphi(x)$ 对任意 $\forall\, x > a' > a$ 都成立.

(4) 在 (2) 中取 $\varphi(x) = 1/x^p$.

(5) 在 (3) 中取 $\varphi(x) = 1/x^p$. □

例5.5.12. (1) 判断如下反常积分的收敛性:

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^5+1}},\quad \int_1^{+\infty}x^pe^{-x}dx\ (p\geq 0),\quad \int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx,$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{r^{\ln x}}\ (r>0),\quad \int_2^{+\infty}\frac{dx}{(\ln x)^{\ln x}},\quad \int_3^{+\infty}\frac{dx}{(\ln x)^{\ln\ln x}},$$

$$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x^{1+\frac{1}{\ln\ln x}}},\quad \int_2^{+\infty}\frac{dx}{(\ln x)^{(\ln x)^\alpha}}\ (1\neq\alpha>0),\quad \int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx,$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{x-\sin x}{x^3}dx,\quad \int_2^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}dx\ (2p>1),\quad \int_2^{+\infty}\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)dx,$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{2x^5-1}}dx,\quad \int_2^{+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)^p\ln\frac{x+1}{x-1}dx,\quad \int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}.$$

解:

(a) $\lim_{x\to+\infty}x^p\frac{1}{\sqrt{x^5+1}}=1$ $(p=\frac{5}{2}>1)\Rightarrow$ 收敛.

(b) $\lim_{x\to+\infty}x^q(x^pe^{-x})=0$ $(q\geq 0)\Rightarrow$ 收敛.

(c) $\lim_{x\to+\infty}x^q\frac{\arctan x}{x^p}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x}{x^{p-q}}=\frac{\pi}{2}$ $(q=p)\Rightarrow$ 如果 $p>1$ 则收敛; 如果 $p\leq 1$ 则发散.

(d) 因为

$$r^{\ln x}=e^{\ln x\ln r}=e^{\ln x^{\ln r}}=x^{\ln r}$$

故

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{r^{\ln x}}=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\ln r}}=\begin{cases} r>e, & \text{收敛},\\ r\leq e, & \text{发散}.\end{cases}$$

(e) 如果 $x\geq e^{e^2}$ 则

$$\ln\ln x\geq\ln\ln\left(e^{e^2}\right)\geq\ln(e^2)\geq 2$$

从而

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(\ln x)^{\ln x}}=\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^{\ln\ln x}}\quad\Rightarrow\quad\text{收敛}.$$

(f)

$$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{(\ln x)^{\ln\ln x}}=\int_3^{+\infty}\frac{dx}{e^{(\ln\ln x)^2}}>\int_3^{+\infty}\frac{dx}{e^{\ln x}}>\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x}\quad\Rightarrow\quad\text{发散}.$$

(g) 因为

$$x^{\frac{1}{\ln\ln x}}=e^{\frac{\ln x}{\ln\ln x}}=e^{\frac{\ln x\ln\ln x}{(\ln\ln x)^2}}$$

故

$$x^{\frac{1}{\ln\ln x}}=\exp\left[(\ln\ln x)^{\frac{\ln x}{(\ln\ln x)^2}}\right]=(\ln x)^{\frac{\ln x}{(\ln\ln x)^2}}.$$

从而得到

$$\text{任意 } x\geq 3\quad\Rightarrow\quad\frac{\ln x}{(\ln\ln x)^2}>2\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{x^{1+\frac{1}{\ln\ln x}}}\leq\frac{1}{x\ln^2 x}\quad\Rightarrow\quad\text{收敛}.$$

(h) 因为

$$(\ln x)^{(\ln x)^\alpha} = e^{(\ln x)^\alpha \ln\ln x} = e^{\ln x \frac{(\ln x)^\alpha \ln\ln x}{\ln x}} = x^{\frac{\ln\ln x}{(\ln x)^{1-\alpha}}},$$

所以

$$\alpha > 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\ln\ln x}{(\ln x)^{1-\alpha}} = \ln\ln x \cdot (\ln x)^{\alpha-1} > 2\ (x\ 充分大) \quad \Rightarrow \quad 收敛,$$

$$\alpha \le 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\ln\ln x}{(\ln x)^{1-\alpha}}\ (\to 0) \le \frac{1}{2}\ (x\ 充分大) \quad \Rightarrow \quad 发散.$$

(i) $\lim_{x\to/+\infty} \frac{x^p}{e^{x^2}} = 0\ (p \in \mathbb{R}) \Rightarrow$ 收敛.

(j) 因为 $\lim_{x\to 0+} \frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0+} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$ 所以函数 $\frac{x-\sin x}{x^3}$ 可以连续地延拓到 $x=0$ 处. 从而得到

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sin x}{x} = 1 - \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 1-0-1,$$

故收敛.

(k) 注意到

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin^2 x dx}{x^p(x^p+\sin x)} \le \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p(x^p-1)},$$

所以 $2p > 1 \Rightarrow$ 收敛.

(l) 根据 $1-\cos\frac{2}{x} = 2\sin^2\frac{1}{x} \sim \frac{2}{x^2}$ 得到 $\lim_{x\to+\infty} x^2(1-\cos\frac{2}{x}) = 2$. 因此收敛.

(m) 因为

$$\frac{x^2}{\sqrt{2x^5-1}} \sim \frac{x^2}{\sqrt{2}x^{5/2}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}x^{1/2}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} x^{12} \frac{x^2}{\sqrt{2x^5-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad 发散.$$

(n) 因为

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}, \quad \ln\frac{x+1}{x-1} = \ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right),$$

所以得到

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty} x^q \left((\sqrt{x+1}-\sqrt{x})^p \ln\frac{x+1}{x-1}\right) \\ =& \lim_{x\to+\infty} \frac{x^q}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^p} \ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right) \\ =& \lim_{x\to+\infty} \frac{x^q}{2^p x^{p/2}} \frac{2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^{1-p}}{x^{1+\frac{p}{2}-q}} \quad \left(q \ge 0\ 且取\ q = \frac{p}{2}+1\right). \end{aligned}$$

则 $q = \frac{p}{2}+1 > 1\ (\Leftrightarrow p > 0)$: 收敛; $q = \frac{p}{2}+1 \le 1\ (\Leftrightarrow p \le 0)$: 发散.

(o) 首先注意到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^r}{x^p(\ln x)^q} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{r-p}}{(\ln x)^q} = \begin{cases} +\infty, & r=p>0, \\ +\infty, & r-p=0 \text{ 且 } q<0, \\ 0, & r-p=0 \text{ 且 } q>0, \\ 0, & r-p<0, \\ 1, & r-p=0 \text{ 且 } q=0, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} +\infty, & r>p \text{ 或 } (r=p \text{ 且 } q<0), \\ 1, & r=p \text{ 且 } q=0, \\ 0, & r<p \text{ 或 } (r=p \text{ 且 } q>0). \end{cases}$$

当 $p>1$:

$$\lim_{x\to+\infty} x^p\frac{1}{x^p(\ln x)^q} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(\ln x)^q} = 0\ (q>0).$$

如果 $q\geq 0$: 收敛;

如果 $q<0$:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1+p}{2}}\frac{1}{x^p(\ln x)^q} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\frac{p-1}{2}}(\ln x)^q} = 0 \quad\Rightarrow\quad \text{收敛}.$$

当 $p=1$:

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^q x} = \int_2^{+\infty}\frac{d\ln x}{\ln^q x} = \int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{dt}{t^q} = \begin{cases} \text{收敛}, & q>1, \\ \text{发散}, & q\leq 1. \end{cases}$$

当 $p<1$:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1+p}{2}}\frac{1}{x^p\ln^q x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1-p}{2}}}{\ln^q x} = +\infty \quad\Rightarrow\quad \text{发散}.$$

因此

$p>1$ 或 $(p=1$ 且 $q>1)$: 收敛; $p<1$ 或 $(p=1$ 且 $q\leq 1)$: 发散.

(2) 假设在 $[1,+\infty)$ 上 $f>0$ 且反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow$

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{f(x)}}{x^p}dx\ (2p>1) \text{ 收敛},\quad \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2 f(x)} \text{ 发散},$$

且

$$\int_1^{+\infty}\sqrt{f(x)f(x+x_0)}dx \text{ 收敛}.$$

证: 这些结论根据下列不等式

$$0\leq\int_1^A\frac{\sqrt{f(x)}}{x^p}dx\leq\left(\int_1^A f(x)dx\right)^{1/2}\left(\int_1^A\frac{dx}{x^{2p}}\right)^{1/2},$$

$$f(x)+\frac{1}{x^2f(x)}\geq 2\sqrt{f(x)\frac{1}{x^2f(x)}}=\frac{2}{x},$$
$$\sqrt{f(x)f(x+x_0)}\leq\frac{f(x)+f(x+x_0)}{2}$$

得到. □

(3) 假设函数 f 定义在 $[1,+\infty)$, 非负, 且递减趋于 0. 则

$$\int_1^{+\infty}\frac{f^{p-1}(x)}{x^{1/p}}dx\ (p>1)\text{ 收敛 }\quad\Rightarrow\quad\int_1^{+\infty}f^p(x)dx\text{ 收敛}.$$

证: 因为函数 $f^{p-1}(x)/x^{1/p}$ 单调递减, 得到

$$\int_{\frac{x}{2}}^{x}\frac{f^{p-1}(t)}{t^{1/p}}dt\geq\frac{f^{p-1}(x)}{x^{1/p}}(2x-x)\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to+\infty}x\frac{f^{p-1}(x)}{x^{1/p}}=0$$

从而

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{p-1}(x)}{x^{\frac{1-p}{p}}}=0\quad\Rightarrow\quad x^{1/p}f(x)\to 0.$$

另一方面

$$\lim_{x\to+\infty}x^{1/p}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f^p(x)}{\frac{f^{p-1}(x)}{x^{1/p}}},$$

所以 $f^p(x)\leq f^{p-1}(x)/x^{1/p}$ 对充分大的 x 都成立. 根据比较判别法可知反常积分 $\int_1^{+\infty}f^p(x)dx$ 收敛. □

(4) $f\in C([1,+\infty))$, $f>0$, 且

$$F(x):=\int_1^x f(t)dt.$$

则

$$\int_1^{+\infty}f(x)dx=+\infty\quad\Rightarrow\quad I\text{ 发散但是 }J\text{ 收敛},$$

其中

$$I:=\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{F(x)\ln F(x)}dx,\quad J:=\int_2^{+\infty}\frac{f(x)}{F(x)\ln^2F(x)}dx.$$

证: 给定任意 $p>0$. 存在常数 a 使得 $F(a)>e$. 所以

$$\int_a^{+\infty}\frac{f(x)}{F(x)\ln^pF(x)}dx=\int_a^{+\infty}\frac{dF(x)}{F(x)\ln^pF(x)}=\int_{F(a)}^{+\infty}\frac{dt}{t\ln^pt}=\int_{\ln F(a)}^{+\infty}\frac{du}{u^p}.$$

故 $p>1$ 收敛; $p\leq 1$ 发散.

(5) $f\in C^1((0,+\infty))$, $f>0$ 和 $f'>0$, 则

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{f(x)+f'(x)}\text{ 收敛}\quad\Rightarrow\quad\int_1^{+\infty}\frac{dx}{f(x)}\text{ 收敛}.$$

证: 注意到

$$0 < \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x)+f'(x)} = \frac{f'(x)}{f^2(x)+f(x)f'(x)} \le \frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

且

$$\int_1^A \frac{f'(x)dx}{f^2(x)} = \int_1^A \frac{df(x)}{f^2(x)} = \frac{1}{f(1)} - \frac{1}{f(A)}.$$

故 $\lim_{x\to+\infty} 1/f(x)$ 存在且 $\int_0^{+\infty} f'(x)dx/f^2(x)$ 收敛. $\square$

(6) 如果 $f \in C^2([a,+\infty))$ 则

$$\int_a^{+\infty} f^2(x)dx \text{ 且 } \int_a^{+\infty} [f''(x)]^2 dx \text{ 都收敛} \quad \Rightarrow \quad \int_a^{+\infty} [f'(x)]^2 dx \text{ 也收敛.}$$

证: 观察到

$$\int_a^A f(x)f''(x)dx = \int_a^A f(x)df'(x) = f(A)f'(A) - f(a)f'(a) - \int_a^A [f'(x)]^2 dx.$$

另一方面

$$\int_a^{+\infty} [f^2(x) + (f''(x))^2]dx \ge 2\int_a^{+\infty} |f(x)f''(x)|dx \ge 2\left|\int_a^{+\infty} f(x)f''(x)dx\right|$$

推出

$$\int_a^{+\infty} f(x)f''(x)dx$$

收敛. 故要证明结论, 只要说明 $f(x)f'(x)$ 有界即可. 考虑

$$f^2(A) - f^2(a) = \int_a^A df^2(x) = 2\int_a^A f(x)f'(x)dx$$

并结合 $f^2(x)$ 有界可知 $f(x)f'(x)$ 也有界.

(7) 假设函数 $f : [1,+\infty) \to [e,+\infty)$ 递增, 则

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{f(x)} = +\infty \quad \Rightarrow \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\ln f(x)} = +\infty$$

但是有可能

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\ln f(x)\ln\ln f(x)} < +\infty.$$

证: 假设

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\ln f(x)} < +\infty.$$

则

$$+\infty > \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\ln f(e^t)} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln f(e^x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\ln x}{\ln f(x)} \to 0$$

从而得到

$$\frac{\ln x}{\ln f(x)} < \frac{1}{2} \ (x \text{ 充分大}) \Rightarrow f(x) > x^2 \Rightarrow \int_a^{+\infty} \frac{dx}{f(x)} < \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty.$$

取

$$a_n := \exp\left(\exp\left(e^n\right)\right), \quad n = 0, 1, 2, \cdots; \quad f(x) := a_n \quad (a_{n-1} \le x < a_n).$$

则计算得到

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} \to 0,$$

$$\int_{e^e}^{+\infty} \frac{dx}{f(x)} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{1\le n\le N} \int_{a_{n-1}}^{a_n} \frac{dx}{f(x)} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{1\le n\le N} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n} = +\infty,$$

但是

$$\int_{e^e}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln f(x) \ln\ln f(x)} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{1\le n\le N} \int_{a_{n-1}}^{a_n} \frac{dx}{x e^{e^n} e^n}$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \sum_{1\le n\le N} \frac{e^{e^n} - e^{e^{n-1}}}{e^{e^n} e^n} < \lim_{N\to\infty} \sum_{1\le n\le N} \frac{1}{e^n} = \frac{1}{e-1} < +\infty. \quad \square$$

利用函数极限的 Cauchy 准则得到

定理5.5.13. (Cauchy 准则) 下列断言等价

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, A_0 \ge a\ \forall\, A_1, A_2 \ge A_0 \text{ 有} \\ \left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right| < \epsilon. \end{array} \right)$$

作为直接推论得到

推论5.5.14. 我们有

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx \text{ 收敛} \quad \Rightarrow \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛}.$$

定义5.5.15. 假设对任何闭子区间 $[a, A] \subset [a, \infty)$ 都有 $f \in R([a, A])$.

(1) 称函数 f 在 $[a, +\infty)$ 上是**绝对可积的 (absolutely integrable)** 或反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 是**绝对收敛的 (absolutely convergent)** 若 $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 收敛.

(2) 称函数 f 在 $[a, +\infty)$ 上是**条件可积的 (conditionally integrable)** 或反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 是**条件收敛的 (conditionally convergent)** 如果反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛但不是绝对收敛.

例5.5.16. (1) 判断如下反常积分的收敛性（包括条件收敛和绝对收敛）:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx \ (p>1), \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{x} \arctan\frac{1}{\sqrt{x}} dx,$$

$$\int_1^{+\infty} \sin(x^2)\, dx, \quad \int_2^{+\infty} \left(\cos\frac{1}{x} - 1\right) dx.$$

解: (a) 因为

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{1+x^2}\right| dx \le \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

所以是绝对收敛.

(b) 因为 $|\cos x/x^p| \le 1/x^p$, 所以绝对收敛.

(c) 因为

$$\left|\frac{\sin\sqrt{x}}{x} \arctan\frac{1}{\sqrt{x}}\right| \le \frac{\sqrt{x}}{x}\frac{1}{x} = \frac{1}{x^{3/2}}$$

所以绝对收敛.

(d) 做变量替换 $t = x^2$ 得到

$$\int_1^A \sin(x^2)\, dx = \int_1^{A^2} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt = \int_1^{A^2} \frac{-1}{2\sqrt{t}} d\cos t$$

$$= \frac{-\cos t}{2\sqrt{t}}\bigg|_1^{A^2} - \frac{1}{4}\int_1^A \frac{\cos t}{t^{3/2}} dt,$$

因此收敛. 但是根据 $|\sin(x^2)| \ge (\sin(x^2))^2 = [1-\cos(2x^2)]/2$ 而且

$$\int_1^A \frac{\cos(2x^2)}{2} dx = \frac{1}{8}\int_1^A \frac{d\sin(2x^2)}{x}$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{\sin(2A^2)}{A} - \frac{\sin 2}{1} + \int_1^A \frac{\sin(2x^2)}{x^2} dx\right],$$

从而推出原来反常积分是条件收敛.

(e) 因为 $\cos(1/x) - 1 \le 0$ 故

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to 0+} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2},$$

我们推出原来反常积分是绝对收敛.

(2) 判断反常积分

$$I := \int_1^{+\infty} x \sin x \sin x^4\, dx$$

的敛散性（包括绝对收敛和条件收敛）.

解: 对任何 $A>1$ 有

$$\begin{aligned} I_A &= -\int_1^A \frac{\sin x}{4x^2} d\cos x^4 \\ &= -\frac{1}{4}\left[\frac{\sin x\cos x^4}{x^2}\Big|_1^A - \int_1^A \cos x^4 \frac{x^2\cos x - 2x\sin x}{x^4} dx\right] \\ &= -\frac{1}{4}\left[\frac{\sin x\cdot\cos x^4}{x^2}\Big|_1^A - \int_1^A \frac{\cos x^4\cdot\cos x}{x^2}dx + 2\int_1^A \frac{\cos x^4\cdot\sin x}{x^3}dx\right], \end{aligned}$$

从而是绝对收敛.

定理5.5.17. (Abel - Dirichlet 判别法) 假设

(1) **(Abel)** 反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad \text{收敛且}$$

函数 $g(x)$ 单调有界, 或者

(2) **(Dirichlet)** 函数

$$F(A) := \int_a^A f(x)dx \quad \text{有界且}$$

函数 $g(x)$ 单调且 $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. 则反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \quad \text{收敛.}$$

证: (1) 假设 $|g(x)|\le M$ 对任何 $x\ge a$ 都成立, 这里 M 是某个正数. 则对任意 $\epsilon>0$ 存在 $A_0>a$, 对任意 $A_2>A_1>A_0$ 有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right| < \frac{\epsilon}{2M}.$$

根据**定理 5.4.9** 可知存在 $\xi\in[A_1,A_2]$ 满足

$$\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx = g(A_1)\int_{A_1}^{\xi} f(x)dx + g(A_2)\int_{\xi}^{A_2} f(x)dx.$$

因此

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx\right| \le M\frac{\epsilon}{2M} + M\frac{\epsilon}{2M} = \epsilon.$$

(2) 假设

$$\left|\int_a^A f(x)dx\right| \le M, \quad \forall\, A>a.$$

对任意 $\epsilon>0$ 存在 $A_0>a$, 对任意 $A_2>A_1>A_0$ 有

$$|g(A_2)| < \frac{\epsilon}{4M}, \quad |g(A_1)| < \frac{\epsilon}{4M}.$$

根据**定理 5.4.9** 可知存在 $\zeta\in[A_1,A_2]$ 满足

$$\begin{aligned}\left|\int_{A_1}^{A_2}f(x)g(x)dx\right| &\le \frac{\epsilon}{4M}\left|\int_{A_1}^{\zeta}f(x)dx\right|+\frac{\epsilon}{4M}\left|\int_{\zeta}^{A_2}f(x)dx\right| \\ &\le \frac{\epsilon}{4M}2M+\frac{\epsilon}{4M}2M = \epsilon.\ \square\end{aligned}$$

例5.5.18. (1) 判断下列反常积分的敛散性（包括绝对收敛和条件收敛）:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx,\quad \int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx\ (p>0),\quad \int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx.$$

解: (a) 和 (c): 因为 $\lim_{x\to0+}\sin x/x=1$, 所以 $\sin x/x$ 可以延拓到 0. 做分解

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx+\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx,$$

其中第二个是定积分. 在第一个积分里面

$$\left|\int_1^A f(x)dx\right|=\left|\int_1^A\sin x\,dx\right|=|\cos A-\cos 1|\le 2,\quad \forall\, A\ge 1,$$

且 $1/x$ 单调趋于 0. 利用Dirichlet 判别法可知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛. 然而

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right|\ge\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1-\cos 2x}{2x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x},$$

且（利用相同的判别法）

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx\quad 收敛.$$

故该反常积分是条件收敛.

(b) 根据Dirichlet 判别法可知该反常积分收敛. 但是从

$$\frac{1}{x^p}\ge\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\ge\frac{\sin^2 x}{x^p}=\frac{1}{x^p}-\frac{\cos 2x}{2x^p}$$

推出

$$p>1:\ 绝对收敛;\quad 0<p\le:\ 条件收敛;\quad p\le 0:\ 发散.\ \square$$

(2) 判断反常积分的敛散性（包括绝对收敛和条件收敛）:

$$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx,\quad \int_0^{+\infty}x\sin(x^4)dx,\quad \int_0^{+\infty}\cos(x^2)dx.$$

解: 都是条件收敛, 细节请诸位自行给出. $\square$

(3) 判断下列反常积分的敛散性:

$$\int_1^{+\infty}\tan\left(\frac{\sin x}{x}\right)dx,\quad \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)dx,\quad \int_0^{+\infty}x^p\sin x\,dx\ (p>0),$$

$$\int_1^{+\infty} e^{\sin x}\frac{\sin(2x)}{x^p}dx\ (p>0),\ \int_0^{+\infty}\sin^3(x^2+2x)dx,\ \int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha-\sin x}dx\ (\alpha>0),$$

$$\int_0^{+\infty} x^2\sin\left(\frac{\cos x^3}{1+x}\right)dx,\quad \int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\arctan x\,dx\ (p>0),$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{x+1}}\sin(x^2)dx,\quad \int_1^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^p+x^q}dx\ \ (\max(p,q)>1).$$

解: (a) 因为

$$\tan\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{\sin x}{x}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)=\text{条件收敛}+\text{绝对收敛},$$

所以是条件收敛.

(b) 因为

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)dx=-\int_1^{+\infty}-\frac{1}{x^p}\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)dx,$$

且

$$-\frac{\ln\cos\frac{1}{x}}{x^p}=-\frac{\ln[1-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})]}{x^p}=-\frac{-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})}{x^p}=\frac{1}{2x^{2+p}}+o\left(\frac{1}{x^{2+p}}\right),$$

推出当 $p>-1$ 时条件收敛; 当 $p\le -1$ 时发散.

(c) 取数列 $x_n=2n\pi+\frac{\pi}{4}$ 和 $y_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ 得到

$$\left|\int_{x_n}^{y_n}x^p\sin x\,dx\right|\ge\left(2n\pi+\frac{\pi}{4}\right)^p\int_{x_n}^{y_n}\sin x\,dx\ge n^p\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin x\,dx=\frac{n^p}{\sqrt{2}}\to+\infty.$$

(d) 取 $f(x)=e^{\sin x}\sin(2x)$ 和 $g(x)=1/x^p$ 得到

$$\int_1^A f(x)dx=-2\int_1^A e^{\sin x}d\cos x=-2\int_{\sin 1}^{\sin A}e^t t\,dt$$

$$-2\int_{\sin 1}^{\sin A}t\,de^t=-2\left[te^t\Big|_{\sin 1}^{\sin A}-\int_{\sin 1}^{\sin A}e^t dt\right]\ \Rightarrow\ \text{收敛},$$

且 $g(x)$ 单调趋于 0. 从而该反常积分收敛.

(e) 做变量替换 $x=\sqrt{1+t}-1$ 得到

$$\int_0^{+\infty}\sin^3(x^2+2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 t}{\sqrt{1+t}}dt\ \Rightarrow\ \text{收敛}$$

利用Dirichlet 判别法.

(f) 注意到

$$\frac{\sin x}{x^{\alpha}-\sin x}=\frac{\sin x}{x^{\alpha}}\left(\frac{1}{1-\frac{\sin x}{x^{\alpha}}}\right)=\frac{\sin x}{x^{\alpha}}\left[1+\frac{\sin x}{x^{\alpha}}+o\left(\frac{1}{x^{\alpha}}\right)\right]$$

$$=\frac{\sin x}{x^{\alpha}}+\frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right)$$

$$=\frac{\sin x}{x^{\alpha}}+\frac{1}{2x^{2\alpha}}-\frac{\cos(2x)}{2x^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right).$$

所以当 $\alpha>1/2$ 时收敛, 当 $\alpha\leq 1/2$ 时发散.

(g) 因为

$$x^2\sin\left(\frac{\cos x^3}{1+x}\right)=x^2\left[\frac{\cos x^3}{1+x}-\frac{(\cos x^3)^3}{3!(1+x)^3}+o\left(\frac{1}{x^5}\right)\right]$$

$$=\frac{x^2\cos x^3}{1+x}-\frac{1}{6}\frac{x^2\cos^3 x^3}{(1+x)^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

所以该反常积分收敛.

(h) 利用Abel 判别法可知该反常积分收敛.

(i) 做变量替换 $t=x^2$ 得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{x+1}}\sin(x^2)dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\sqrt{t}+1}}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{1/4}}\frac{\sqrt{\sqrt{t}}}{\sqrt{\sqrt{t}+1}}dt.$$

根据Abel 判别法可知该反常积分收敛.

(j) 不失一般性不妨假设 $p\geq q$ 和 $p>1$. 从

$$\int_1^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^p+x^q}dx=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{p-1}}\frac{dx}{1+x^{q-p}}$$

和Abel 判别法可知该反常积分收敛. □

(4) 假设函数 $f\in C^1([1,+\infty))$ 且 $|f'|\leq M$, 则

$$\int_1^{+\infty}|f(x)|dx \text{ 收敛 } \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

证: 根据假设条件可知

$$\int_1^{+\infty}|f(x)f'(x)|dx$$

收敛. 另一方面

$$\int_1^A f(x)f'(x)dx = \int_1^A f(x)df(x) = \frac{1}{2}f^2(A) - \frac{1}{2}f^2(1).$$

故 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ 存在且有限. 根据**例 5.5.10** (5) 推出 $L = 0$. □

(5) $f \in C([0,+\infty))$ 且反常积分 $\int_0^{+\infty} g(x)dx$ 绝对收敛, 则

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} f\left(\frac{x}{n}\right) g(x)dx = f(0)\int_0^{+\infty} g(x)dx.$$

证: 做变量替换 $x = \sqrt{n}t$ 得到

$$\left|\int_0^{\sqrt{n}} f\left(\frac{x}{n}\right) g(x)dx - \int_0^{\sqrt{n}} f(0)g(x)dx\right| \le \int_0^{\sqrt{n}} \left|f\left(\frac{x}{n}\right) - f(0)\right| |g(x)|dx$$

$$= \int_0^1 \left|f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - f(0)\right| |g(\sqrt{n}t)|\sqrt{n}dt = \left|f\left(\frac{\xi_n}{\sqrt{n}}\right) - f(0)\right| \int_0^1 |g(\sqrt{n}t)|\sqrt{n}dt$$

$$= \left|f\left(\frac{\xi_n}{\sqrt{n}}\right) - f(0)\right| \int_0^{\sqrt{n}} |g(x)|dx \le \left|f\left(\frac{\xi_n}{\sqrt{n}}\right) - f(0)\right| \int_0^{+\infty} |g(x)|dx.$$

因为函数 f 在 0 点连续, 所以对任何 $\epsilon > 0$ 存在 $N \in \mathbb{N}$ 满足对任意 $n > N$ 都有

$$\left|f\left(\frac{\xi_n}{\sqrt{n}}\right) - f(0)\right| < \epsilon.$$

故, 当 $n > N$ 时,

$$\left|\int_0^{\sqrt{n}} f\left(\frac{x}{n}\right) g(x)dx - f(0)\int_0^{\sqrt{n}} g(x)dx\right| < \epsilon \int_0^{+\infty} g(x)dx. \quad \square$$

(6) 如果函数 $f \in D([a,+\infty))$, $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$, 且 f' 严格递增, 则

$$\int_a^{+\infty} \sin[f(x)]dx \quad \text{收敛}.$$

证: 根据假设函数 $t = f(x)$ 存在反函数 $x = f^{-1}(t)$ 从而得到

$$\int_a^{+\infty} \sin[f(x)]dx = \int_{f(a)}^{+\infty} \frac{\sin t}{f'[f^{-1}(t)]}dt = \int_{f(a)}^{+\infty} \sin t \frac{1}{f'[f^{-1}(t)]}dt.$$

根据Dirichlet 判别法该反常积分收敛. □

(7) 假设函数 $f > 0$ 且反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 则存在 $\xi \in (1,+\infty)$ 满足

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x}dx = \int_1^{\xi} f(x)dx.$$

证: 首先根据Dirichlet 判别法可知反常积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx = \int_1^{+\infty} f(x) \frac{1}{x} dx$$

收敛. 对任意 $n \in \mathbb{Z}_+$ 有

$$\int_1^n \frac{f(x)}{x} dx = \int_1^{\xi_n} f(x) dx, \quad \text{存在 } \xi_n \in (1, n).$$

我们可以进一步要求 ξ_n 递增, 这时因为

$$\int_1^n \frac{f(x)}{x} dx = \int_1^{n-1} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{n-1}^n \frac{f(x)}{x} dx = \int_1^{n-1} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{n-1}^{\xi_n} \frac{f(x)}{x} dx,$$

导致 $1 < \xi_{n-1} < \xi_n < n$. 如果数列 $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ 有界, 则存在收敛子列 $\{\xi_{n_k}\}_{k \geq 1}$ 满足 $\lim_{k \to +\infty} \xi_{n_k} = \xi \geq 1$, 因此 $\xi > 1$ 且

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx = \lim_{k \to +\infty} \int_1^{\xi_{n_k}} f(x) dx = \int_1^{\xi} f(x) dx.$$

如果数列 $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ 无界, 则存在子列 $\xi_{n_k} \to +\infty$ 且

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx = \lim_{k \to +\infty} \int_1^{n_k} f(x) dx = \lim_{k \to +\infty} \int_1^{\xi_{n_k}} f(x) dx = \int_1^{+\infty} f(x) dx.$$

故

$$0 = \int_1^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) f(x) dx \quad \Rightarrow \quad f \equiv 0. \ \square$$

II) 瑕积分 $\int_a^b f(x) dx$ 的收敛性 (b 是瑕点). 如下总是假设函数 $f(x)$ 定义在区间 $[a, b)$ 上且 b 是其唯一的瑕点.

定理5.5.19. 假设函数 $f : [a, b) \to [0, +\infty)$ 只有唯一的瑕点 b.

(1) **(比较判别法 1)** 如果 $0 \leq f(x) \leq K\varphi(x)$ $(K > 0)$, 则

$$\int_a^b f(x) dx \text{ 发散} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b \varphi(x) dx \text{ 发散},$$

且

$$\int_a^b \varphi(x) dx \text{ 收敛} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x) dx \text{ 收敛}.$$

(2) **(比较判别法 2)** 如果函数 $\varphi : [a, b) \to [0, +\infty)$ 满足

$$\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = K \geq 0,$$

则

$$0 < K < +\infty : \quad \int_a^b f(x) dx \text{ 和 } \int_a^b \varphi(x) dx \text{ 具有相同的敛散性},$$

$$K=0: \int_a^b \varphi(x)dx \text{ 收敛} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \text{ 收敛},$$

$$K=+\infty: \int_a^b \varphi(x)dx \text{ 发散} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \text{ 发散}.$$

(3) **(Cauchy 判别法 1)**

$$f(x) \le \frac{K}{(b-x)^p}\ (K>0 \text{ 且 } p<1) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \text{ 收敛},$$

$$f(x) \le \frac{K}{(b-x)^p}\ (K>0 \text{ 且 } p\ge 1) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \text{ 发散}.$$

(4) **(Cauchy 判别法 2)** 如果

$$\lim_{x\to b-}(b-x)^p f(x) = K \ge 0,$$

则

$$0 \le K < +\infty \text{ 且 } p<1 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \text{ 收敛},$$

$$0 < L \le +\infty \text{ 且 } p\ge 1 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \text{ 发散}.$$

证: 证明思路和**定理** 5.5.11 的证明类似. □

定理5.5.20. (Abel-Dirichlet 判别法) 假设

(1) **(Abel)** 函数 $g(x)$ 在 $[a,b)$ 上单调有界且瑕积分

$$\int_a^b f(x)dx \text{ 收敛},$$

或

(2) **(Dirichlet)** 函数 $g(x)$ 单调且当 $x\to b-$ 时 $g(x)\to 0$, 且函数

$$F(\eta) := \int_a^{b-\eta} f(x)dx \text{ 有界},$$

则瑕积分

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \text{ 收敛}.$$

证: 证明思路和**定理** 5.5.17 的证明类似. □

例5.5.21. (1) 判断如下瑕积分的敛散性:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}dx\ (p<2),\quad \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p}dx\ (p>0),\quad \int_0^1 \frac{\cos^1(1/x)}{\sqrt{x}}dx,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}},\quad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x}-2x+\sqrt{x}},\quad \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}}dx,$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}dx,\quad \int_0^2 \frac{\sqrt{x}dx}{e^{\sin x}-1},\quad \int_0^1 \frac{\arctan(x^2+x^{2\alpha})}{x\ln^\alpha(1+x)}dx,$$

$$\int_0^1 x^\alpha \ln^\beta x\,dx,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x-e^{-x^2}}{x^\alpha \tan x}dx,\quad \int_0^1 e^{\frac{\alpha}{x}}(\cos x)^{\frac{1}{x^3}}dx,$$

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\ln x\,dx,\quad \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{dx}{1-x},\quad \int_0^1 \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2}dx,$$

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)\frac{dx}{x^a}\ (a>0),\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(\frac{1}{\sin x}\right)\frac{dx}{x^a}\ (a>0),\ \int_0^1 \frac{x^a}{e^x-1}\sin\frac{1}{x}dx,$$

$$\int_0^1 x^p(1+x)^{\frac{1}{x}}\cos\frac{1}{x^2}dx\ (p>-3),\quad \int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}|\ln x|^q dx,\quad \int_0^1 \frac{\cos(\frac{1}{1-x})}{\sqrt[p]{1-x^2}}dx.$$

解: (a) 注意到

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}dx=\int_0^1 \frac{1}{x^{p-2}}\cdot\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx=\int_0^1 g(x)\cdot f(x)dx.$$

当 $p<2$ 时, $g(x)$ 单调递减趋于 0, 且

$$\int_\eta^1 f(x)dx=-\int_\eta^1 \sin\frac{1}{x}d\frac{1}{x}\le 2.$$

根据Dirichlet 判别法可知

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}dx \text{ 收敛}.$$

另一方面,

$$x^q\frac{1}{x^p}\left|\sin\frac{1}{x}\right|=0\quad (q-p>0 \text{ 且 } q<1).$$

故 $p<1$, 绝对收敛; $1\le p<2$, 条件收敛.

(b) $p\ge 2$, 发散; $1<p<2$, 条件收敛; $p\le 1$, 绝对收敛.

(c) 收敛.

(d) 收敛.

(e) 收敛.

(f) 收敛.

(g) 收敛.

(h) 收敛.

(i) $a < 2$, 收敛; $s \geq 2$, 发散.

(j) 仅在 $\alpha > -1$ 和 $\beta > -1$ 时收敛.

(k) 仅在 $a < 4$ 时收敛.

(l) 收敛.

(m) 仅在 $m > 0$ 和 $n > -1$ 时收敛.

(n) 条件收敛.

(o) 条件收敛.

(p) $\alpha < 1$, 绝对收敛; $1 \leq \alpha < \frac{3}{2}$, 条件收敛.

(q) $\alpha < 1$, 绝对收敛; $1 \leq \alpha < 2$, 条件收敛.

(r) $\alpha > 0$, 绝对收敛; $-1 < \alpha \leq 0$, 条件收敛.

(s) 收敛.

(t) $p > 0$ 或者, $p = 0$ 且 $q < -1$, 收敛.

(u) $2p > 1$ 时收敛. □

例5.5.22. (1) 假设函数 f 在 $(0,1]$ 上单调且瑕积分 $\int_0^1 x^\alpha f(x)dx$ 收敛, 则

$$\lim_{x\to 0+} x^{\alpha+1} f(x) = 0.$$

证: 不失一般性假设存在 $x_0 \in (0,1]$ 使得对任意 $x \in (0, x_0]$ 都有 $f(x) > 0$

成立. 如果 f 单调递增则

$$\int_x^{2x} t^\alpha f(t)dt > \begin{cases} f(x)x^\alpha x, & \alpha \geq 0, \\ f(x)(2x)^\alpha \cdot x, & \alpha < 0. \end{cases}$$

如果 f 单调递减则

$$\int_x^{2x} t^\alpha f(t)dt > \begin{cases} f(2x)x^\alpha \cdot x, & \alpha \geq 0, \\ f(2x)(2x)^\alpha \cdot x, & \alpha < 0. \end{cases}$$

从而 $\lim_{x\to 0+} x^{\alpha+1}f(x) = 0$. □

(2) 如果函数 $f \in C([0,1])$, $f \geq 0$, 且 f 单调递增, 则

$$I := \lim_{x\to 0+} x^\alpha \int_{0-}^1 \frac{f(t)dt}{t^{\alpha+1}} = \frac{f(0)}{\alpha} \quad (\alpha > 0).$$

证: 如果 $f(0) > 0$, 则

$$\int_x^1 \frac{f(t)dt}{x^{\alpha+1}} \geq f(0) \iint_x^1 \frac{dt}{t^{\alpha+1}} \to +\infty$$

故

$$I = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^{-\alpha}} \int_x^1 \frac{f(t)dt}{t^{\alpha+1}} = \lim_{x\to 0+} \frac{-f(x)/x^{\alpha+1}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \frac{f(0)}{\alpha}.$$

如果 $f(0) = 0$ 则对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使得 $f(x) < \alpha\epsilon$ 对任何 $x \in (0,\delta)$ 都成立, 从而得到

$$x^\alpha \int_x^\delta \frac{f(t)dt}{t^\alpha + 1} < \alpha\epsilon x^\alpha \int_x^\delta \frac{dt}{t^{\alpha+1}} = \epsilon \quad (0 < x < \delta).$$

因此

$$\begin{aligned} x^\alpha \int_x^1 \frac{f(t)dt}{t^{\alpha+1}} &= x^\alpha \left[\int_x^\delta \frac{f(t)dt}{t^{\alpha+1}} + \int_\delta^1 \frac{f(t)dt}{t^{\alpha+1}} \right] \\ &< \epsilon + x^\alpha f(1) \int_\delta^1 \frac{dt}{t^{\alpha+1}} = \epsilon + x^\alpha f(1) \frac{1}{\alpha\delta^\alpha} \to 0, \end{aligned}$$

当 $x \to 0+$. 所以结论成立. □

(3) 假设函数 f 在 $(0,1)$ 上单调且瑕积分 $\int_0^1 f(x)dx$ 收敛, 则

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{1\leq k\leq n-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

证: 不失一般性假设函数 f 单调递增. 故得到

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} f(x)dx = \sum_{1\leq k\leq n-1} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx \leq \sum_{1\leq k\leq n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$$\leq \sum_{2\leq k\leq n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx \;=\; \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,dx. \;\square$$

(4) 计算极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{1\leq k\leq n}(\ln k)^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{1\leq k\leq n}\ln k\right)^2\right].$$

解: 因为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{1\leq k\leq n}(\ln k)^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{1\leq k\leq n}\ln k\right)^2\\
=\;&\frac{1}{n}\sum_{1\leq k\leq n}\left(\ln\frac{k}{n}+\ln n\right)^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{1\leq k\leq n}\left(\ln\frac{k}{n}+\ln n\right)\right)^2\\
=\;&\frac{1}{n}\sum_{1\leq k\leq n}\left(\ln\frac{k}{n}\right)^2+(\ln n)^2+\frac{2\ln n}{n}\sum_{1\leq k\leq n}\ln\frac{k}{n}\\
&-\frac{1}{n^2}\left[\left(\sum_{1\leq k\leq n}\ln\frac{k}{n}\right)^2+2\sum_{1\leq k\leq n}\ln n\cdot n\cdot\ln\frac{k}{n}+\left(\sum_{1\leq k\leq n}\ln n\right)^2\right]\\
=\;&\sum_{1\leq k\leq n}\left(\ln\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n}\sum_{1\leq k\leq n}\ln\frac{k}{n}\right)^2\;\to\;\int_0^1\ln^2 x\,dx-\left(\int_0^1\ln x\,dx\right)^2.
\end{aligned}$$

故最后极限等于 1. $\square$

(5) 证明

$$\lim_{n\to+\infty} I_n=\pi,\quad I_n:=\sum_{1\leq k\leq n-1}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}.$$

证: 因为

$$I_n=\sum_{1\leq k\leq n-1}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})}}\cdot\frac{1}{n}\longrightarrow\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}},$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty} I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin t\cos t\,dt}{\sqrt{\sin^2 t\cdot\cos^2 t}}=2\times\frac{\pi}{2}=\pi.\;\square$$

§5.5.3 反常积分 II: Cauchy 主值积分

我们知道无穷积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\text{ 收敛}\quad\Longleftrightarrow\quad\lim_{A,B\to+\infty}\int_{-B}^{A} f(x)\,dx\text{ 存在}.$$

特别地得到极限

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)\,dx\quad\text{存在}.$$

函数 $f(x)=\sin x$ 表明反之则不一定成立.

引入函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的**Cauchy 主值积分(Cauchy principal value integral)**:

$$(\mathbf{P.V.})\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx:=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}f(x)dx.$$

同样对瑕积分 (这里仅是 c 为瑕点)

$$\int_a^b f(x)dx\text{ 收敛}\iff\lim_{\eta\to0+}\int_a^{c-\eta}f(x)dx\text{ 和 }\lim_{\eta'\to0+}\int_{c+\eta'}^{b}f(x)dx\text{ 都收敛.}$$

定义函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**Cauchy 主值积分(Cauchy principal value integral)**:

$$(\mathbf{P.V.})\int_a^b f(x)dx:=\lim_{\eta\to0+}\left[\int_a^{c-\eta}f(x)dx+\int_{c+\eta}^{b}f(x)dx\right].$$

比如之前提到的函数 (1.6.6).

令 $C_c^\infty(\mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}$ 上所有具有紧支撑集 (即集合 $\{x\in\mathbb{R}:f(x)\neq0\}$ 的闭包是紧的, 闭包和紧集的定义参见 §11.1.3) 的光滑函数的全体. 定义映射

$$(\mathbf{P.V.})\left(\frac{1}{x}\right):C_c^\infty(\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R}$$

为

$$\begin{aligned}\left[(\mathbf{P.V.})\left(\frac{1}{x}\right)\right](f)&:=(\mathbf{P.V.})\int_{\mathbb{R}}\frac{f(x)}{x}dx\\&=\lim_{\epsilon\to0+}\int_{\mathbb{R}\setminus[-\epsilon,\epsilon]}\frac{f(x)}{x}dx=\int_0^\infty\frac{f(x)-f(-x)}{x}dx.\end{aligned}$$

因为

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{f'(x)+f'(-x)}{1}=2f'(0)$$

所以得到积分

$$\int_0^1\frac{f(x)-f(-x)}{x}dx$$

存在且满足

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1\frac{f(x)-f(-x)}{x}dx\right|&\le\int_0^1\frac{|f(x)-f(-x)|}{x}dx\\&\le\int_0^1\frac{2x}{x}\left(\sup_{\mathbb{R}}|f'(x)|\right)dx=2\sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|.\end{aligned}$$

另一方面

$$\left|\int_1^{+\infty}\frac{f(x)-f(-x)}{x}dx\right|=\left|\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\cdot x[f(x)-f(-x)]dx\right|$$

$$\leq \left(2\sup_{x\in\mathbb{R}}|xf(x)|\right)\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = 2\sup_{x\in\mathbb{R}}|xf(x)|.$$

因此只要函数 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 满足 f' 和 xf 都是有界的, 则 $(\mathbf{P.V.})(1/x)$ 是有定义的. 满足上述两个有界性条件的子空间可取 Schwarz 空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, 具体定义参见 §16.3.2.

这样我们得到了线性泛函 $(\mathbf{P.V.})(1/x) : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, 称为**缓增分布 (tempered distribution)**.

在计算 Cauchy 主值积分时, 使用变量替换法要格外小心. 比如计算

$$I := (\mathbf{P.V.})\int_{-2}^{1}\frac{10+4x}{x^3(5+x)^3}dx.$$

由于 0 是瑕点, 故

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\epsilon\to0+}\left[\int_{-2}^{-\epsilon}\frac{10+4x}{x^3(5+x)^3}dx + \int_{\epsilon}^{1}\frac{10+4x}{x^3(5+x)^3}dx\right] \\ &= \lim_{\epsilon\to0+}\left[\frac{-1}{x^2(5+x)^2}\bigg|_{-2}^{-\epsilon} + \frac{-1}{x^2(5+x)^2}\bigg|_{\epsilon}^{1}\right] \\ &= \lim_{\epsilon\to0+}\frac{-20\epsilon}{\epsilon^2(5-\epsilon)^2(5+\epsilon)^2} = -\infty. \end{aligned}$$

但是若作变量替换 $u = 5x + x^2$ 则得到

$$\begin{aligned} I = (\mathbf{P.V.})\int_{-6}^{6}\frac{2}{u^3}du &= \lim_{\epsilon 0+}\left(\int_{-6}^{-\epsilon}\frac{2}{u^3}du + \int_{\epsilon}^{6}\frac{2}{u^3}du\right) \\ &= \lim_{\epsilon\to0+}\left(\frac{-1}{u^2}\bigg|_{-6}^{-\epsilon} + \frac{-1}{u^2}\bigg|_{\epsilon}^{6}\right) = 0. \end{aligned}$$

究其原因是作变量替换后把不对称的积分区域变成对称区域了.

§5.5.4 * Euler 积分和 Γ 函数的刻画

Euler 积分包括 (按照Legendre 的叫法) **Gamma 函数 (Gamma function)** 和**Beta 函数 (Beta function)**. 首先我们引入 Gamma 函数

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty x^{s-1}e^x dx, \quad s \in \mathbb{R}. \tag{5.5.17}$$

这是Euler 在 1781 年 (1794 年发表) 给出的, 其等价定义早在 1729 年 10 月 13 日出现在给Goldbach 的信中. 在未证明反常积分收敛性之前, 根据定义显然有

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}\bigg|_1^\infty = 1. \tag{5.5.18}$$

下面我们来证明$\Gamma(s)$ 仅在 $s>0$ 时收敛. 事实上, 把 $\Gamma(s)$ 分解如下

$$\Gamma(s)=\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx+\int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}dx=:I_1+I_2.$$

当 $x\to 0$ 时, 由于 $x^{1-s}(x^{s-1}e^{-x})\to 1$, 我们得到 I_1 收敛仅当 $1-s<1$. 对 I_2, 当 $x\to\infty$ 时, $x^2(x^{s-1}e^{-x})\to 0$, 从而 I_1 对任意 $s\in\mathbb{R}$ 都收敛. 因此 $\Gamma(s)$ 仅当 $s>0$ 时候收敛.

根据分部积分, 我们马上得到递推公式

$$\Gamma(1+s)=s\Gamma(s),\quad s>0. \tag{5.5.19}$$

特别地,

$$\Gamma(1+n)=n!. \tag{5.5.20}$$

利用递推公式可以定义

$$\Gamma(s):=\frac{\Gamma(1+s)}{s},\quad s>-1.$$

从而可以把 Γ 函数的定义域从 $s>0$ 延拓到 $s\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,\cdots\}$.

另一个非常重要的性质是

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin(\pi s)},\quad s\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}. \tag{5.5.21}$$

一个简单证明需要用到复变函数知识, 具体证明在之后的章节给出. 其它证明参见 (6.4.28).

其次, 我们引入**Beta 函数**

$$B(a,b):=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx,\quad a,b>0. \tag{5.5.22}$$

在 (13.4.7) 利用重积分可证Euler 恒等式 (1771)

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \tag{5.5.23}$$

考虑函数

$$f(x):=\frac{\Gamma(x)\Gamma(x+1/2)}{\Gamma(2x)},\quad x>0.$$

因为

$$\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(1/2)}{B(x,1/2)},\quad \Gamma(2x)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{B(x,x)},\quad \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi},$$

最后等式见 (13.4.4), 所以

$$f(x)=\frac{\sqrt{\pi}B(x,x)}{B(x,1/2)}.$$

下面来计算比值 $B(x,x)/B(x,1/2)$. 根据定义得到

$$
\begin{aligned}
B(x,x) &= \int_0^1 v^{x-1}(1-c)^{x-1}dv = \int_0^1 (v-v^2)^{x-1}dv \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-v\right)^2\right]^{x-1} dv = 2\int_0^{1/2}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-v\right)^2\right]^{x-1} dv \\
&= \frac{1}{4^{x-1}}\int_0^1 (1-u)^{x-1}\frac{du}{2\sqrt{u}} = 2^{1-2x}B(x,1/2), \quad \frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-v\right)^2 = \frac{1-u}{4}.
\end{aligned}
$$

最后得到

$$
f(x) = \sqrt{\pi}2^{1-2x}.
$$

从而结合 Gamma 函数的延拓, 推出了**Legendre 加倍公式(Legendre doubling formula)**

$$
\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}2^{1-2s}\Gamma(2s), \quad s\in\mathbb{R}\setminus(\mathbb{Z}_{\leq 0}/2). \tag{5.5.24}
$$

这个公式首先是Legendre 在 1811 年所给出的. 之后, Gauss 在 1813 年作了如下推广:

$$
\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(s+\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}\frac{\Gamma(ns)}{n^{ns-1}}.
$$

定理5.5.23. (Γ 函数的刻画) 假设函数 $F\in C^1((0,+\infty))$ 满足

(1) $F(x+1) = xF(x)$,

(2) $F(x)$ 恒不为零,

(3) $F(x)F(x+1/2) = \sqrt{\pi}2^{1-2x}F(2x)$,

则 $F(x)\equiv\Gamma(x)$, $x>0$.

证: 因为 $\Gamma(x)$ 满足上述三条性质, 所以考虑商 $q(x) := F(x)/\Gamma(x)$. 则得到

$$
q(x+1) = q(x), \quad q\left(x+\frac{1}{2}\right) = q(2x).
$$

定义

$$
p(x) := \frac{q(x)}{q(x)} \in C((0,+\infty)).
$$

计算得到

$$
p(x+1) = p(x), \quad p(x) + p\left(x+\frac{1}{2}\right) = 2p(2x).
$$

从而得到

$$
p(x) = \frac{1}{2}\left[p\left(\frac{x}{2}\right)+p\left(\frac{x+1}{2}\right)\right];
$$

但是

$$p\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[p\left(\frac{x}{4}\right)+p\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)\right]$$

和

$$p\left(\frac{x+1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[p\left(\frac{x+1}{4}\right)+p\left(\frac{x+3}{4}\right)\right]$$

带入得到

$$p(x)=\frac{1}{4}\left[p\left(\frac{x}{4}\right)+p\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\right)+p\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)+p\left(\frac{x}{4}+\frac{3}{4}\right)\right].$$

利用归纳假设易证

$$p(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{0\le k\le 2^n-1}p\left(\frac{x}{2^n}+\frac{k}{2^n}\right)\to\int_0^1 p(t)dt,\quad n\to+\infty,\quad x\in(0,1].$$

所以对任意 $x\in(0,1]$ 得到

$$p(x)=\int_0^1 p(t)dt=\ln|q(t)|\Big|_{t=0}^{t=1}=0.$$

故 $F(x)\equiv\Gamma(x), x\in(0,1]$. 利用假设条件 (1) 得到 $F(x)\equiv\Gamma(x), x>0$. □

§5.5.5 Frullani 积分

对任意 $a,b>0$, 函数 $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 的**Frullani 积分 (Frullani integrals)** 定义为

$$\mathbf{F}_{a,b}(f):=\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx. \tag{5.5.25}$$

定理5.5.24. *假设 $f\in C([0,+\infty))$.*

(1) **(Cauchy, 1823 和 1827)** *如果极限 $f(+\infty):=\lim_{x\to\infty}f(x)$ 存在且有限, 则*

$$\mathbf{F}_{a,b}(f)=[f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a}. \tag{5.5.26}$$

(2) **(Frullani, 1821 年提出 1828 年发表)** *如果极限 $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在但是反常积分*

$$\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$$

对某个 $A>0$ 收敛, 则

$$\mathbf{F}_{a,b}(f)=f(0)\ln\frac{b}{a}. \tag{5.5.27}$$

证明: 对任给一个闭区间 $[\alpha,\beta]\subseteq(0,+\infty)$, 我们得到

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx &= \int_{a\alpha}^{a\beta}\frac{f(t)}{t}dt-\int_{b\alpha}^{b\beta}\frac{f(t)}{t}dt\\ &= \int_{a\alpha}^{b\alpha}\frac{f(t)}{t}dt-\int_{a\beta}^{b\beta}\frac{f(t)}{t}dt = f(\xi)\int_{a\alpha}^{b\alpha}\frac{dt}{t}-f(\eta)\int_{a\beta}^{b\beta}\frac{dt}{t}\end{aligned}$$

其中 $\xi\in[a\alpha,b\alpha]$ 和 $\eta\in[a\beta,b\beta]$.

(1) 令 $\alpha\to0+$ 和 $\beta\to+\infty$, 我们得到

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{a,b}(f) &= \lim_{\alpha\to0+,\ \beta\to+\infty}\int_\alpha^\beta\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx\\ &= \left[\lim_{\xi\to0+}f(\xi)-\lim_{\eta\to+\infty}f(\eta)\right]\ln\frac{b}{a} = [f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a}.\end{aligned}$$

(2) 在这种情形, 注意到

$$\lim_{\beta\to+\infty}\int_{a\beta}^{b\beta}\frac{f(t)}{t}dt=0.$$

所以

$$\mathbf{F}_{a,b}(f)=\lim_{\alpha\to0+}\int_{a\alpha}^{b\alpha}\frac{f(t)}{t}dt=f(0)\ln\frac{b}{a}.\ \square$$

例5.5.25. 令 $a,b>0$, 计算下列反常积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx,\quad \int_0^{+\infty}\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}dx,\quad \int_0^{+\infty}\frac{b\sin(ax)-a\sin(bx)}{x^2}dx.$$

解: (1) 取 $f(x)=e^{-x}$ 从而得到 $\mathbf{F}_{a,b}(f)=[f(0)-f(\infty)]\ln\frac{b}{a}=\ln\frac{b}{a}$.

(2) 取 $f(x)=\cos x$ 从而得到 $\mathbf{F}_{a,b}(f)=f(0)\ln\frac{b}{a}=\ln\frac{b}{a}$.

(3) 可写成

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{b\sin(ax)-a\sin(bx)}{x^2}dx=ab\int_0^{+\infty}\frac{\frac{\sin(ax)}{ax}-\frac{\sin(bx)}{bx}}{x}dx.$$

取 $f(x)=\sin x/x$ 从而得到 $I=abf(0)\ln\frac{b}{a}=ab\ln\frac{b}{a}$. $\square$

§5.5.6 * 对数积分和素数基本定理

Gauss 引入的**对数积分**定义如下 (或参见 (1.6.5) – (1.6.8))

$$\mathbf{li}(x):=(\mathbf{P.V.})\int_0^x\frac{dt}{\ln t}=\lim_{\epsilon\downarrow0+}\left(\int_0^{1-\epsilon}+\int_{1+\epsilon}^x\right)\frac{dt}{\ln t},\quad c\geq2. \tag{5.5.28}$$

如上的积分可以写为

$$\mathbf{li}(x)=\lim_{\epsilon\to0+}\left(\int_0^{1-\epsilon}+\int_{1+\epsilon}^2\right)\frac{dt}{\ln t}+\mathbf{Li}(x), \tag{5.5.29}$$

其中

$$\mathbf{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\ln t} \tag{5.5.30}$$

是一个定积分. 为了证明 $\mathbf{li}(x)$ 中的第一部分是有定义的, 令 $s = 2 - t$ 得到

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0+}\left(\int_0^{1-\epsilon}+\int_{1+\epsilon}^2\right)\frac{dt}{\ln t} &= \lim_{\epsilon\to 0+}\left(\int_0^{1-\epsilon}\frac{dt}{\ln t}+\int_0^{1-\epsilon}\frac{ds}{\ln(2-s)}\right)\\ = \lim_{\epsilon\to 0+}\left(\int_\epsilon^1\frac{du}{\ln(1-u)}+\int_\epsilon^1\frac{du}{\ln(1+u)}\right) &= \int_0^1\left[\frac{1}{\ln(1-u)}+\frac{1}{\ln(1+u)}\right]du.\end{aligned}$$

根据

$$\begin{aligned}\lim_{u\to 0+} u^{1/2}\left[\ln\frac{1}{(1-u)}+\frac{1}{\ln(1+u)}\right] &= \lim_{u\to 0+}\frac{u^{-1/2}}{2}[-(1-u)+(1+u)]\\ &= \lim_{u\to 0+} u^{1/2} = 0,\end{aligned}$$

我们发现上述反常积分是收敛的, 从而 $\mathbf{li}(x)$ 对任意 $x \geq 2$ 都是有限的.

分部积分马上得到

$$\mathbf{Li}(x) = \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2} + \int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t} = \frac{x}{\ln x} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right). \tag{5.5.31}$$

著名的**素数分布定理 (prime number theorem)** 是说如下的渐进关系

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \sim \mathbf{Li}(x) \sim \mathbf{li}(x) \tag{5.5.32}$$

当 $x \to \infty$ 时成立, 这里函数 $\pi(x)$ 表示不超过 x 的所有素数之和. 在 1850 年, 俄国数学家Chebyshev 证明了不等式

$$c_1\frac{x}{\ln x} \leq \pi(x) \leq c_2\frac{x}{\ln x} \tag{5.5.33}$$

对所有 $x \geq 10$ 都成立, 这里

$$c_1 := \ln\frac{2^{1/2}3^{1/3}5^{1/5}}{30^{1/30}} \approx 0.921292 \quad 和 \quad c_2 := \frac{6}{5}c_1 \approx 1.1055 \tag{5.5.34}$$

是两个接近于 1 的常数.

§5.7 * Dirichlet 核

对任意 $x \in \mathbb{R}$, 令 $\omega := e^{ix}$. **Dirichlet 核 (Dirichlet kernel)** 定义为

$$D_N(x) := \sum_{-N\leq n\leq N}\omega^n, \quad N \in \mathbb{N}. \tag{5.5.35}$$

根据定义我们计算得到

$$\begin{aligned}D_N(x) &= \sum_{0\leq n\leq N}\omega^n + \sum_{-N\leq n\leq -1}\omega^n = \frac{1-\omega^{N+1}}{1-\omega}+\frac{\omega^{-N}-1}{1-\omega}\\ &= \frac{\omega^{-N}-\omega^{N+1}}{1-\omega} = \frac{\sin[(N+\frac{1}{2})x]}{\sin\frac{1}{2}x}.\end{aligned} \tag{5.5.36}$$

另一方面, 根据 $D_N(x)$ 的原始定义得到如下恒等式

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\,dx = 1 \tag{5.5.37}$$

对任意 $N\in\mathbb{N}$ 都成立. 然而, 我们可以证明如下关于 $|D_N(x)|$ 积分的下界

$$L_N := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_N(x)|\,dx \ge \frac{4}{\pi^2}\ln N + \frac{4}{\pi^2}\left(\gamma+\frac{1}{2N+1}\right) \tag{5.5.38}$$

其中 $\gamma := \lim_{N\to\infty} a_N$ 是 Euler 常数, 这里 $a_N := \sum_{1\le k\le N}\frac{1}{k} - \ln N$. 为了得到下界, 我们首先把 L_N 写成

$$L_N = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin[(N+\frac{1}{2})x]}{\sin\frac{1}{2}x}\right|dx.$$

对任意 $x\in[0,\pi/2]$, 我们有 $\frac{2}{\pi}x\le\sin x\le x$. 从而

$$\begin{aligned}
L_N &\ge \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin[(N+\frac{1}{2})x]|}{|x|}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{N\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin\theta|}{\theta}d\theta\\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{0\le k\le N-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin\theta|}{\theta}d\theta + \int_{N\pi}^{N\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin\theta|}{\theta}d\theta\\
&\ge \frac{2}{\pi}\sum_{0\le k\le N-1}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin\theta|\,d\theta + \frac{2}{\pi(2N+1)}\int_{N\pi}^{N\pi+\frac{\pi}{2}}|\sin\theta|\,d\theta\\
&= \frac{4}{\pi^2}\sum_{1\le k\le N}\frac{1}{k} + \frac{4}{\pi^2}\frac{1}{2N+1} \ge \frac{4}{\pi^2}\ln N + \frac{4}{\pi^2}\left(\gamma+\frac{1}{2N+1}\right).
\end{aligned}$$

进一步我们可以得到 L_N 一个上界

$$L_N \le \frac{2}{\pi}\ln N + 2\left(\frac{1}{\pi}+\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta}{\theta}d\theta\right). \tag{5.5.39}$$

事实上,

$$\begin{aligned}
L_N &\le \int_0^{\pi}\frac{|\sin[(N+\frac{1}{2})x]|}{|x|}dx = \int_0^{N\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin\theta|}{\theta}d\theta\\
&\le \sum_{1\le k\le N-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin\theta|}{\theta}d\theta + \int_0^{\pi}\frac{\sin\theta}{\theta}d\theta + \int_{N\pi}^{N\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin\theta|}{\theta}d\theta\\
&\le \sum_{1\le k\le N-1}\frac{2}{k\pi} + \frac{2}{N\pi} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{\theta}d\theta = \frac{2}{\pi}\sum_{1\le k\le N}\frac{1}{k} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{\theta}d\theta\\
&\le \frac{2}{\pi}(\ln N+1) + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{\theta}d\theta = \frac{2}{\pi}\ln N + 2\left(\frac{1}{\pi}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{\theta}d\theta\right).
\end{aligned}$$

结合上述两个不等式, 我们粗略地得到 (舍去那些常数因子)

$$L_N \approx \ln N \tag{5.5.40}$$

当 $N\to\infty$. 更进一步的精细计算我们可以断言 (参见**推论 16.2.24**)

$$L_N=\frac{4}{\pi^2}\ln N+O(1),\quad N\to\infty, \tag{5.5.41}$$

即存在一个常数 $C>0$ 使得不等式

$$\left|L_N-\frac{4}{\pi^2}\ln N\right|\le C \tag{5.5.42}$$

当 $N\to\infty$ 时成立.

§5.6 定积分的应用

本节主要讨论定积分在几何中的应用, 和利用级数来近似计算椭圆积分.

§5.6.1 面积

假设区域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 定义如下

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|a\le x\le b,\ 0\le g(x)\le y\le f(x)\}.$$

则 D 的面积为

$$|D|=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx. \tag{5.6.1}$$

如果区域 D 的参数化方程为

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad \alpha\le t\le\beta,$$

这里 $x,y\in C^1([\alpha,\beta])$, $x'(t)\ne 0$, $x(\alpha)=a$, 且 $x(\beta)=b$. 此时

$$|D|=\int_\alpha^\beta|y(t)x'(t)|dt=\int_\alpha^\beta|x(t)y'(t)|dt=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta|y(t)dx(x)-x(t)dy(t)|. \tag{5.6.2}$$

如果区域 D 在极坐标下可写成

$$r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta),\quad \alpha\le\theta\le\beta,\quad r\in C([\alpha,\beta]),\quad \beta-\alpha\le 2\pi,$$

则得到

$$|D|=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\left[r_2^2(\theta)-r_1^2(\theta)\right]d\theta. \tag{5.6.3}$$

另一方面如果区域 D 在极坐标下可写成

$$\theta_1(r)\le\theta\le\theta_2(r),\quad a\le r\le b,\quad \theta\in C([a,b]),$$

则得到

$$|D|=\int_a^b[\theta_2(r)-\theta_1(r)]\,rdr. \tag{5.6.4}$$

例5.6.1. (1) 计算由曲线 $y^2 = 2x$ 和直线 $y = x - 4$ 所围成的区域的面积.

解: 区域由两部分组成, 故

$$\begin{aligned}|D| &= \int_0^2 \left(\sqrt{2x}+\sqrt{2x}\right)dx + \int_2^4 \left[\sqrt{2x}-(x-4)\right]dx \\ &= 2\sqrt{2}\frac{3}{2}x^{3/2}\Big|_0^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}x^{3/2}\Big|_2^4 - \frac{(x-4)^2}{2}\Big|_2^4 = 18. \quad \square\end{aligned}$$

§5.6.2 弧长

考虑平面曲线

$$C:\ x = x(t),\quad y = y(t),\quad \alpha \le t \le \beta.$$

取任意分割 $T : \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ 并令 $||T|| := \max_{1\le i\le n} t_i$. 对每个 i 记

$$P_i := (x(t_i), y(t_i)).$$

称平面曲线 C 是**可求长的(rectifiable)** 如果极限

$$\lim_{||T||\to 0} \sum_{1\le i\le n} |P_{i-1}P_i|$$

存在且和分割 T 的选取无关. 这个极限称为平面曲线 C 的**弧长(arc length)** 并记作 $|C|$. 如果进一步假设 $x, y \in C^1([\alpha,\beta])$, 则得到

$$P_{i-1}P_i| = \sqrt{[x(t_i)-x(t_{i-1})]^2+[y(t_i)-y(t_{i-1})]^2} = \sqrt{|x'(\eta_i)|^2+|y'(\eta_i^*)|^2}\Delta t_i,$$

其中 $\eta_i, \eta_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$. 上式可写成

$$|P_{i-1}P_i| == \sqrt{|x_i'(\eta_i)|^2+|y'(\eta_i)|^2}\Delta t_i + \clubsuit_i,$$

其中

$$\spadesuit_i := \left(\sqrt{|x'(\eta_i)|^2+|y'(\eta_i^*)|^2} - \sqrt{|x'(\eta_i)|^2+|y'(\eta_i)|^2}\right)\Delta t_i.$$

因为 y' 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致连续, 对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 只要 $|\eta - \eta^*| < \delta$ 都有

$$\left|y'(\eta)^2 - y'(\eta^*)^2\right| < \left(\frac{\epsilon}{\beta-\alpha}\right)^2$$

成立, 从而得到

$$\sum_{1\le i\le n} |\clubsuit_i| \le \sqrt{|y'(\eta_i)|^2 - |y'(\eta_i^*)|^2}\Delta t_i \le \sum_{1\le i\le n} \frac{\epsilon\Delta t_i}{\beta-\alpha} = \epsilon.$$

如果 $x, y \in C^1([\alpha,\beta])$ 且

$$|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2 \ne 0,\quad \forall\, t \in [\alpha,\beta],$$

称曲线 $C : (x(t), y(t))$ 是**光滑曲线(smooth curve)**. 如果曲线是由有限多条光滑曲线所构成, 则该曲线称为**分段光滑的(piecewise smooth)**.

定理5.6.2. 如果 $C:(x(t),y(t))$, $\alpha\le t\le\beta$, 是分段光滑曲线, 则其是可求长的且弧长为

$$|C|=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt=:\int_\alpha^\beta ds, \tag{5.6.5}$$

其中 $ds=\sqrt{x'(t)^2+y'(*t)^2}dt$ 称为**弧长微元(arc length element)**.

特别地

(1) 如果 $y=f(x)$, $a\le x\le b$, 则

$$|C|=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}dx. \tag{5.6.6}$$

(2) 如果 $r=r(\theta)$, $\alpha\le\theta\le\beta$, 则 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 从而得到

$$\begin{aligned}|C| &= \int_\alpha^\beta\sqrt{[r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta]^2+[r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta]^2}d\theta\\ &= \int_\alpha^\beta\sqrt{|r(\theta)|^2+|r'(\theta)|^2}d\theta.\end{aligned} \tag{5.6.7}$$

例5.6.3. (1) 如果 $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $0\le t\le 2\pi$, 则得到

$$|C|=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2+b^2\cos^2 t}dt.$$

对 $\mathbb{R}^3$ 中的曲线 $C:(x,y,z)=(x(t),y(t),z(t))$, $\alpha\le t\le\beta$, 得到弧长公式

$$|C|=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}dt. \tag{5.6.8}$$

§5.6.3 曲率

给定平面上一条光滑曲线 C. 取定固定点 M 和动点 N, 则得到 $\widehat{MN}$ 的弧长 Δs. N 处和 M 处的切线与 x 正轴的夹角差记为 $\Delta\alpha$. 定义 M 处的曲率为

$$\kappa:=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|. \tag{5.6.9}$$

注意, 这里的曲率总为非负的. 但是在微分几何里, 曲率是带符号的.

现在假设光滑曲线 $C:(x,y)=(x(t),y(t))$, $\alpha\le t\le\beta$, 且 $x,y\in D^2([\alpha,\beta])$. 则得到

$$\tan\alpha:=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{dy}{dx}\quad\Longrightarrow\quad\alpha=\arctan\frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

因此

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{1}{1+\frac{y'(t)^2}{x'(t)^2}}\cdot\frac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{x'(t)^2}=\frac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{x'(t)^2+y'(t)^2}.$$

利用 $ds/dt = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ 得到

$$\kappa = \left| \frac{|d\alpha/dt|}{|ds/dt|} \right| = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{[x'(t)^2 + y'(t)^2]^{3/2}}. \tag{5.6.10}$$

特别地如果曲线 C 是由 $(x, y) = (x, y(x))$ 所给出, 则

$$\kappa = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}. \tag{5.6.11}$$

称 $R := 1/\kappa$ ($\kappa \neq 0$) 为曲线的**曲率半径(radius of curvature)**.

例5.6.4. (1) 球曲线 $xy = 4$ 在 $(1, 4)$ 处的曲率.

解: $\kappa = (8/x^3)/(1 + 16/x^4)^{3/2}$. 故 $\kappa_{(1,4)} = 8/17^{3/2}$. □

(2) 如果曲线在极坐标下写成 $r = r(\theta) \in D^2$, 则

$$\kappa = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}. \tag{5.6.12}$$

证: 计算得到

$$x' = r'\cos\theta - r\sin\theta, \quad x'' = r''\cos\theta - 2r'\sin\theta - r\cos\theta,$$

和

$$y' = r'\sin\theta + r\cos\theta, \quad y'' = r''\sin\theta + 2r'\cos\theta - r\sin\theta.$$

则得到

$$x'y'' - x''y' = r^2 + 2r'^2 - rr'', \quad x'^2 + y'^2 = r^2 + r'^2. \quad \square$$

(3) 计算曲线 $y = \ln x$, $x > 0$, 的曲率的最大值.

解: 计算得到

$$\kappa = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{1/x^2}{(1 + 1/x^2)^{3/2}} = \frac{x}{(1 + x^2)^{3/2}}$$

且

$$\kappa' = \frac{1 - 2x^2}{(1 + x^2)^{5/2}}.$$

因此 $\kappa_{\max} = \kappa_{1/\sqrt{2}} = 2/3\sqrt{3}$. □

(4) 求曲线 $r = a(1 + \cos\theta)$, $a > 0$, 在 $\theta = 0$ 处的曲率.

解: 计算得到 $\kappa = (3/2\sqrt{2}a)(1 + \cos\theta)^{-2}$, 故 $\kappa_0 = 3/4a$. □

§5.6.4 体积

假设 $\mathbb{R}^3$ 中的区域 Ω 定义为

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | a \le x \le b,\ (y,z) \in D_x\right\}$$

且 $|D_x| = A(x)$. 此时根据定积分定义得到区域 Ω 的

$$|\Omega| = \int_a^b A(x)\,dx. \tag{5.6.13}$$

现在考虑平面上曲线 $y = f(x), a \le x \le b$, 绕着 x 轴旋转一周后形成的区域 Ω 的体积. 此时对 $[a,b]$ 的任意分割 T, 小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 旋转一周后形成的区域的体积近似为

$$\pi f(\xi_i)^2 \Delta x_i, \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

从而 Ω 的体积为

$$|\Omega| = \lim_{||T|| \to 0} \sum_{1 \le i \le n} \pi f(\xi_i)^2 \Delta x_i = \int_a^b \pi f(x)^2 dx. \tag{5.6.14}$$

现在考虑平面上曲线 $y = f(x), a \le x \le b$, 绕着 y 轴旋转一周后形成的区域 Ω 的体积. 此时对 $[a,b]$ 的任意分割 T, 小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 旋转一周后形成的区域的体积近似的为

$$f(x_i)\pi x_i^2 - f(x_{i-1})\pi x_{i-1}^2 \approx f(\xi_i)\pi(x_i^2 - x_{i-1}^2) = 2\pi\xi_i f(\xi_i)\Delta x_i, \xi_i := \frac{x_i + x_{i+1}}{2}.$$

从而 Ω 的体积为

$$|\Omega| = \lim_{||T|| \to 0} \sum_{1 \le i \le n} \pi f(\xi_i)^2 \Delta x_i = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx. \tag{5.6.15}$$

例5.6.5. (1) 计算椭球体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

的体积.

解: 固定 $x \in (a,a)$ 得到

$$\frac{y^2}{b^2(1 - x^2/a^2)} + \frac{z^2}{c^2(1 - x^2/a^2)} = 1.$$

因此体积为

$$V = \int_a^b \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi bc \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc. \ \square$$

(2) 计算曲线 $y = e^x - 11, 0 \le x \le \ln 3$, 绕着 x 轴旋转一周后形成的区域的体积.

解: 计算得到

$$V=\int_0^{\ln 3}(e^x-1)^2dx=\pi\int_0^{\ln 3}\left(e^{2x}-2e^x+1\right)dx=\pi\ln 3.\quad \square$$

(3) 计算曲线 $y=\sin x$, $0\le x\le \pi$, 绕着 y 轴旋转一周后形成的区域的体积.

解: 计算得到

$$V=\int_0^{\pi}2\pi x\sin x\,dx=2\pi\int_0^{\pi}-x\,d\cos x=2\pi^2.\quad \square.$$

§5.6.5 旋转曲面的表面积

考虑曲线 $C:(x,y)=(x(t),y(t))$, $y\ge 0$, $\alpha\le t\le\beta$, 绕着 x 轴旋转一周后形成的曲面 Σ. 对任意分割 $T:\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$, 小区间 $[t_{i-1},t_i]$ 旋转一周后形成的曲面的表面积为

$$\pi[y(t_{i-1})+y(t_i)]\widehat{P_{i-1}P_i},\quad P_{i-1}:=(x(t_{i-1}),y(t_{i-1})),\quad P_i=(x(t_i),y(t_i)).$$

因此得到表面积为

$$S=|\Sigma|=\lim_{||T||\to 0}\sum_{1\le i\le n}\Delta S_i=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt. \tag{5.6.16}$$

特别地

(1) 如果 $(x,y)=(x,f(x))$, $a\le x\le b$, 则得到

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx. \tag{5.6.17}$$

(2) 如果 $(x,y)=(r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta)$, $\alpha\le\theta\le\beta$, 则得到

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta r(\theta)\sin\theta\sqrt{r(\theta)^2+r'(\theta)^2}d\theta. \tag{5.6.18}$$

§5.6.6 * 椭圆积分的级数求解

回顾三类椭圆不定积分 (5.2.49), (5.2.51) 和 (5.2.52). 椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad b>a>0,$$

的弧长为

$$L=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\,d\theta=4b\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta,$$

其中 $k:=\sqrt{b^2-a^2}/b$.

(1) **第 1 类完备椭圆积分**

$$\mathbf{K}(k) := \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \quad 0 \le k \le 1. \tag{5.6.19}$$

(2) **第 2 类完备椭圆积分**

$$\mathbf{E}(k) := \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\, d\theta, \quad 0 \le k \le 1. \tag{5.6.20}$$

从而

$$L = 4b\,\mathbf{E}\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}\right).$$

(3) **第 3 类完备椭圆积分**

$$\mathbf{II}(n,k) := \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\theta)(1-n\sin^2\theta)}}, \quad 0 \le k \le 1. \tag{5.6.21}$$

根据定义易证

$$\mathbf{E}' = \frac{\mathbf{E}-\mathbf{K}}{k}, \quad \mathbf{K}' = \frac{\mathbf{E}}{k(1-k^2)} - \frac{\mathbf{K}}{k}. \tag{5.6.22}$$

Gauss 给出了利用级数来近似求解 $\mathbf{K}$. 给定 $a_1 > b_1 > 0$ 并定义

$$a_{n+1} := \frac{a_n+b_n}{2}, \quad b_n := \sqrt{a_n b_n}.$$

则可证

- a_n 递减和 b_n 递增.
- $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n =: L(a_1,b_1)$ 存在.
- $L(a_1,b_1) = \pi/2G(a_1,b_1)$, 这里

$$G(a_1,b_1) := \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{a_1^2\cos^2 x + b_2^2\sin^2 x}} = \frac{1}{a_1}\mathbf{K}\left(\frac{\sqrt{a_1^2-b_1^2}}{a_1}\right).$$

事实上, 前面两个显然. 对第三个引入

$$\sin x := \frac{2a_1\sin t}{(a_1+b_1)+(a_1-b_1)\sin^2 t}, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}.$$

计算可得

$$\frac{dx}{\sqrt{a_1^2\cos^2 x + b_1^2\sin^2 x}} = \frac{dt}{\sqrt{a_2^2\cos^2 t + b_2^2\sin^2 t}}$$

从而

$$G(a_1,b_1)=\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{a_2^2\cos^2 t+b_2^2\sin^2 t}}=\cdots=\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{a_n^2\cos^2 x+b_n^2\sin^2 x}}.$$

因为 $a_n>b_n$, 所以 $\pi/2a_n\le G\le\pi/2b_n$ 故 $G=\pi/2L$.

比如取 $(a_1,b_1)=(\sqrt{2},1)$ 和 $n=5$ 得到

$$L(\sqrt{2},1)\approx 1.198154,\quad G(\sqrt{2},1)\approx 1.3110138.$$

§5.7 定积分的近似计算

假设 $f\in R([a,b])$, 考虑

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{5.7.1}$$

并令 (如果相应的导数存在且连续)

$$M_i:=\max_{x\in[a,b]}|f^{(i)}(x)|,\quad i\in\mathbb{N}. \tag{5.7.2}$$

我们将区间 $[a,b]$ 分成 n 等分, 则每一份的长度为 $(b-a)/n$. 为了方便期间记

$$x_i:=a+i\frac{b-a}{n},\quad 0\le i\le n.$$

因为

$$\ln 2=\int_1^2\frac{1}{x}dx, \tag{5.7.3}$$

我们用接下来介绍的三种常用的定积分近似算法来和精确值进行比较. 其实核心思想已经在 Riemann 积分的定义中就体现出来了.

§5.7.1 矩形法

考虑子区间 $[x_{i-1},x_i]$, $1\le i\le n$. 我们用矩形面积

$$(x_i-x_{i-1})\cdot f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)=\frac{b-a}{n}f\left(a+\frac{2i-1}{2n}(b-a)\right)$$

来近似代替由 $y=f(x)$、$y=0$、$x=x_{i-1}$ 及 $x=x_i$ 所围曲边形的面积. 故利用**矩形法 (rectangle rule)**

$$\begin{aligned}R_n &:= \sum_{1\le i\le n}f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)(x_i-x_{i-1})\\ &= \frac{b-a}{n}\sum_{1\le i\le n}f\left(a+\frac{2i-1}{2n}(b-a)\right)\end{aligned} \tag{5.7.4}$$

来近似的计算定积分 (5.7.1). 根据积分第一中值定理得到

$$f(x)=f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)+\frac{f'(\xi_i)}{1!}\left(x-\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right),\quad 存在\ \xi_i\in(x_{i-1},x_i)$$

以及

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-T_n\right|=\left|\sum_{1\le i\le n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[f(x)-f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\right]dx\right|$$

$$\le\sum_{1\le i\le n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}M_1\left|x-\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right|dx\le 2M_1\sum_{1\le i\le n}\int_0^{\frac{x_i-x_{i-1}}{2}}|x|dx$$

$$=2M\sum_{1\le i\le n}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2n}\right)^2=\frac{M_1}{4n}(b-a)^2.$$

根据 Taylor 公式得到

$$f(x)=f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)+f'\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\left(x-\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$$

$$+\frac{f''(\xi_i)}{2!}\left(x-\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)^2,\quad 存在\ \xi_i\in(x_{i-1},x_i);$$

两边在 $[x_{i-1},x_i]$ 上积分得到

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[f(x)-f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\right]dx=\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{f''(\xi_i)}{2}\left(x-\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)^2dx$$

$$\le\frac{M_2}{2}\int_{-\frac{x_i-x_{i-1}}{2}}^{\frac{x_i-x_{i-1}}{2}}x^2dx=\frac{M_2}{3}\left(\frac{b-a}{2n}\right)^3.$$

故

$$\left|\int_a^b f(x)dx-T_n\right|\le\frac{M_2}{24n^2}(b-a)^3.$$

定理5.7.1. 假设 $f\in C^i([a,b])$, $i=1,2$, 则对 (5.7.4) 中定义的 R_n 有如下误差估计

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-R_n\right|\le\frac{M_i}{4i(i+1)n^i}(b-a)^{i+1},\quad i=1,2. \tag{5.7.5}$$

即

$$\int_a^b f(x)\,dx=R_n+O\left(\frac{1}{n^i}\right),\quad i=1,2. \tag{5.7.6}$$

§5.7.2 梯形法

考虑子区间 $[x_{i-1}, x_i], 1 \le i \le n$. 我们用梯形面积

$$(x_i - x_{i-1}) \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

来近似代替由 $y = f(x)$、$y = 0$、$x = x_{i-1}$ 及 $x = x_i$ 所围曲边形的面积. 故利用**梯形法 (trapezoidal rule)**

$$\begin{aligned} T_n &:= \sum_{1\le i\le n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{b-a}{n}\left[\sum_{1\le i\le n-1} f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) + \frac{f(a)+f(b)}{2}\right] \end{aligned} \tag{5.7.7}$$

来近似的计算定积分 (5.7.1). 因此得到

$$\int_a^b f(x)dx - T_n = \sum_{1\le i\le n} g_i$$

其中

$$\begin{aligned} g_i &:= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1}) \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i-1}+\frac{b-a}{n}} f(x)dx - \frac{f(x_{i-1}) + f(x_{i-1} + \frac{b-a}{n})}{2} \cdot \frac{b-a}{n}. \end{aligned}$$

为了方便起见, 引入如下函数

$$g_i(t) := \int_{x_{i-1}}^{x_{i-1}+t} f(x)dx - \frac{f(x_{i-1}) + f(x_{i-1}+t)}{2}t, \quad 0 \le t \le \frac{b-a}{n}.$$

则得到

$$g_i = g_i\left(\frac{b-a}{n}\right), \quad g_i(0) = g_i'(0) = 0$$

和

$$g_i'(t) = f(x_{i-1}+t) - \frac{f(x_{i-1}) + f(x_{i-1}+t)}{2} - \frac{f'(x_{i-1}+t)}{2}t$$

以及

$$g_i''(t) = -\frac{f''(x_{i-1}+t)}{2}t.$$

根据定义 (5.7.2) 可知

$$|g_i')t)| \le 2M_0 + \frac{M_1}{2}t, \quad |g_i''(t)| \le \frac{M_2}{2}t.$$

从微积分基本定理

$$g_i(t) = \int_0^t g_i'(x)dx, \quad g_i'(t) = \int_0^t g_i''(x)dx$$

我们推出

$$|g_i(t)| \le 2M_0 t + \frac{M_1}{4} t^2$$

和

$$|g_i'(t)| \le \frac{M_2}{4} t^2, \quad |g_i(t)| \le \frac{M_2}{12} t^3.$$

从而我们得到

$$|g_i| \le 2M_0 \left(\frac{b-a}{n}\right) \frac{M_1}{4} \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \quad 或 \quad |g_i| \le \frac{M_2}{12} \left(\frac{b-a}{n}\right)^3.$$

如果仅考虑函数 $f(x)$ 的一阶导数, 显然误差是很大的. 如果 $f \in C^2([a,b])$, 则得到

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - T_n \right| \le \frac{M_2}{12n^2}(b-a)^3.$$

定理5.7.2. 假设 $f \in C^2([a,b])$, 则对 (5.7.7) 中定义的 R_n 有如下误差估计

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - T_n \right| \le \frac{M_2}{12n^2}(b-a)^3, \quad i = 1,2. \tag{5.7.8}$$

即

$$\int_a^b f(x)\,dx = T_n + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad i = 1,2. \tag{5.7.9}$$

§5.7.3 Simpson 法

这个方法, 也叫作**Simpson $\frac{1}{3}$- 法 (Simpson's $\frac{1}{3}$ rule)**, 出现在Simpson[14] 在 1750 年的著作《Doctrine and application of fluxions》中. 但是该方法早在 100 多年前就已经被Kepler 所发现, 德语叫法是“Keplersche Fassregel”(Kepler's barrel rule).

考虑子区间 $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \le i \le n$. 我们用经过三点

$$(x_{i-1}, f(x_{i-1})), \quad \left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}, f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\right) = (x_i^*, f(x_i^*)), \quad (x_i, f(x_i)),$$

的抛物线 $P_2(x)$ 的面积来近似代替由 $y = f(x)$、$y = 0$、$x = x_{i-1}$ 及 $x = x_i$ 所围曲边形的面积. 考虑经过上述三点的二次插值多项式

$$\begin{aligned} P_2(x) \quad := \quad & \frac{(x-x_i^*)(x-x_i)}{(x_{i-1}-x_i^*)(x_{i-1}-x_i)} f(x_{i-1}) + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_i^*-x_{i-1})(x_i^*-x_i)} f(x_i^*) \\ & + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i^*)}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_i^*)} f(x_i). \end{aligned} \tag{5.7.10}$$

[14] Thomas Simpson, 1710 8 月 20 日 - 1761 年 5 月 14 日, 今英国莱斯特郡欣克利 - 博斯沃思区萨顿切尼镇人, 英国数学家. 以发明 Simpson 法来逼近定积分而闻名.

直接在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上积分得到

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} P_2(x)dx = \frac{x_i - x_{i-1}}{6}\left[f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + f(x_i)\right].$$

故利用**Simpson 法 (Simpson's rule)**

$$\begin{aligned} S_n &:= \sum_{1\le i\le n} \frac{b-a}{6n}\left[f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + f(x_i)\right] \\ &= \frac{b-a}{6n}\sum_{1\le i\le n}\left[f\left(a + \frac{i-1}{n}(b-a)\right)\right. \\ &\quad \left. +\ 4f\left(a + \frac{2i-1}{2n}(b-a)\right) + f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right)\right] \end{aligned} \tag{5.7.11}$$

得到

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S_n\right| = \left|\sum_{1\le i\le n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x) - P_2(x)]dx\right|.$$

任取 $c \neq x_{i-1}, x_i^*, x_i$ 并考虑函数差

$$R_2(x) := f(x) - P_2(x), \quad R_2^*(x) := R_2(x) - \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i^*)(x-x_i)}{(c-x_{i-1})(c-x_i^*)(c-x_i)}R_2(c),$$

其中 $x \in [x_{i-1}, x_i]$. 因为

$$R_2^*(x_{i-1}) = R_2^*(x_i^*) = R_2^*(x_i) = R_2^*(c) = 0,$$

所以根据 Rolle 定理, **定理 4.5.1**, 得到

$$0 = (R_2^*)'''(\xi_i) = f'''(\xi_i) - \frac{6R_2(c)}{(c-x_{i-1})(c-x_i^*)(c-x_i)}, \quad 存在\ \xi_i \in (x_{i-1}, x_i).$$

故得到

$$R_2^*(x) = R_2(x) - \frac{f'''(\xi_i)}{6}(x-x_{i-1})(x-x_i^*)(x-x_i);$$

特别地

$$R_2(c) = \frac{f'''(\xi_i)}{6}(c-x_{i-1})(c-x_i^*)(c-x_i).$$

但是上面式子对 $c = x_{i-1}, x_i^*, x_i$ 也成立, 从而, 把 c 换成 x, 得到

$$\begin{aligned} f(x) - P_2(x) &= R_2(x) \\ &= \frac{f'''(\xi_i)}{6}(x-x_{i-1})\left(x - \frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)(x-x_i), \quad x \in [x_{i-1}, x_i]. \end{aligned} \tag{5.7.12}$$

两边积分得到

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x) - P_2(x)|dx \le \frac{M_3}{6}\cdot\frac{(x_i - x_{i-1})^4}{32} = \frac{M_3}{192}\left(\frac{b-a}{n}\right)^4.$$

定义

$$\widetilde{R}_2(x) := R_2(x) - R_2'(x_i^*)\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_i^*-x_{i-1})(x_i^*-x_i)}(x-x_i^*).$$

直接计算得到

$$\widetilde{R}_2(x_{i-1}) = \widetilde{R}_2(x_i) = 0, \quad \widetilde{R}_2(x_i^*) = \widetilde{R}_2'(x_i^*) = 0.$$

和 $R_2^*(x)$ 的定义类似, 任取 $c \neq x_{i-1}, x_i^*, x_i$ 我们考虑函数差

$$\widetilde{R}_2^*(x) := \widetilde{R}_2(x) - \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i^*)^2(x-x_i)}{(c-x_{i-1})(c-x_i^*)^2(c-x_i)}\widetilde{R}_2(c).$$

所以根据 Rolle 定理, **定理 4.5.1**, 得到

$$0 = (\widetilde{R}_2^*)^{(4)}(\xi_i) = f^{(4)}(\xi_i) - \frac{24\widetilde{R}_2(c)}{(c-x_{i-1})(c-x_i^*)^2(c-x_i)}, \quad \text{存在 } \xi_i \in (x_{i-1}, x_i).$$

故得到

$$R_2^*(x) = R_2(x) - \frac{f^{(4)}(\xi_i)}{24}(x-x_{i-1})(x-x_i^*)^2(x-x_i);$$

特别地

$$R_2(c) = \frac{f^{(4)}(\xi_i)}{24}(c-x_{i-1})(c-x_i^*)^2(c-x_i).$$

但是上面式子对 $c = x_{i-1}, x_i^*, x_i$ 也成立, 从而, 把 c 换成 x, 得到

$$\begin{aligned} f(x) - P_2(x) &= \frac{R_2'(x)}{(x_i^*-x_{i-1})(x_i^*-x_i)}(x-x_{i-1})(x-x_i^*)(x-x_i) \\ &\quad + \frac{f^{(4)}(\xi_i)}{24}(x-x_{i-1})\left(x-\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)^2(x-x_i), \quad x \in [x_{i-1}, x_i]. \end{aligned} \tag{5.7.13}$$

两边积分得到

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - P_2(x)|dx \leq \frac{M_4}{24} \cdot \frac{(x_i - x_{i-1})^5}{15 \cdot 2^3} = \frac{M_4}{2880}\left(\frac{b-a}{n}\right)^5.$$

定理5.7.3. 假设 $f \in C^i([a,b])$, $i = 3, 4$, 则对 (5.7.11) 中定义的 S_n 有如下误差估计

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S_n\right| \leq \frac{M_i}{4(i-2)(i-1)(i+1)!n^i}(b-a)^{i+1}, \quad i = 3, 4. \tag{5.7.14}$$

即

$$\int_a^b f(x)dx = S_n + O\left(\frac{1}{n^i}\right), \quad i = 3, 4. \tag{5.7.15}$$

例5.7.4. 取函数 $f(x) = 1/x, x \in [1,2]$. 则 (5.7.1) 给出了

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}.$$

根据**定理** 5.7.1、**定理** 5.7.2 和**定理** 5.7.3 我们得到

$$|\ln 2 - R_n| \le \frac{1}{8n}, \quad |\ln 2 - T_n| \le \frac{1}{6n^2},$$

和

$$|\ln 2 - S_n| \le \frac{1}{32n^3}, \quad |\ln 2 - S_n| \le \frac{1}{120n^4}.$$

§5.7.4 其它近似算法

除了上面介绍的三种近似算法外, 还有其它有效的方法, 比如

- **Newton-Cotes 法**,
- **Romberg 法**,
- **Gauss-Chebyshev 法**、**Gauss-Laguerre 法**、**Gauss-Hermite 法**等.

具体细节可查阅张平文和李铁军编著的《数值分析》(参见参考文献).

§5.8 参考文献

1. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis I*, Translated from the 1988 German original by Gary Brookfield, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. xiv+426 pp. ISBN: 3-7643-7153-6

2. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis II*, Translated from the 1999 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. xii+400 pp. ISBN: 978-3-7643-7472-3; 3-7643-7472-3

3. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis III*, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. xii+468 pp. ISBN: 978-3-7643-7479-2; 3-7643-7479-2

4. Koblitz, Neal. *Introduction to elliptic curves and modular forms*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics **97**, Springer-Verlag, New York, 1993. x+248 pp. ISBN: 0-387-97966-2

5. Robinson, R. Clark. *An introduction to dynamical systems - continuous and discrete*, Second Edition, Pure and Applied Undergraduate Texts, **19**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012. xx+733 pp. ISBN: 978-0-8218-9135-3

6. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis I*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+574 pp. ISBN: 3-540-40386-8

7. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis II*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xvi+681 pp. ISBN: 3-540-40633-6

8. 布鲁斯 · C. 伯恩特 (Bruce C. Berndt) 主编: **拉玛努金笔记**(第 1, 2, 3, 4 卷), 哈尔滨工业大学出版社, 2019.

9. 常庚哲, 史济怀 编: **数学分析教程** (上、下册), 高等教育出版社, 2003.

10. 陈天权 编著: **数学分析讲义** (第一、二、三册), 北京大学出版社, 2009.

11. 邓建平 编: **微积分 I 和 II**, 科学出版社, 2019.

12. Duhham, William 著 (李伯民, 汪军, 张怀勇 译): **微积分的历程 – 从牛顿到勒贝格**, 人民邮电出版社, 2013.

13. 吉米多维奇 著 (李荣涷, 李植 译): **数学分析习题集** (根据 2010 年俄文版翻译), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.

14. Kline, Morris 著 (张理京, 张炎热, 江泽涵等 译): **古今数学思想** (第一、二、三册), 上海科学技术出版社, 2014.

15. 李傅山, 王培合 编著: **数学分析习题课讲义** (1、2、3), 北京大学出版社, 2018.

16. 李逸 编著: **数学分析讲义**, 上海交通大学数学分析课讲义, 未出版, 2016.

17. 林源渠, 方企勤 编: **数学分析解题指南**, 北京大学出版社, 2003.

18. 梅加强 编著: **数学分析**, 高等教育出版社, 2015.

19. 裴礼文 编著: **数学分析中的典型问题与方法** (第二版), 高等教育出版社, 2015.

20. 汪林 著: **数学分析中的问题和反例**, 现代数学基础 **56**, 高等教育出版社, 2015.

21. Weir, D. Maurice; Hass, R. Joel; Giordano, R. Frank. *Thomas' calculus*, Eleventh Edition, (影印版, 上、下册), 高等教育出版社, 2016.

22. 徐森林, 薛春华 编著: **数学分析**, 清华出版社, 2005.

23. 杨小远, 孙玉泉, 薛玉梅, 杨卓琴 编著: **工科数学分析教程** (上、下册), 科学出版社, 2011.

24. 张福保, 薛金美, 潮小李 主编: **数学分析讲义**, 科学出版社, 2019.

25. 张平文, 李铁军 编著: **数值分析**, 北京大学数学教学系列丛书 (本科生数学基础课教材), 北京大学出版社, 2015.

26. 张筑生 编著: **数学分析新讲** (第一、二、三册), 北京大学出版社, 1990.

27. 周民强 编著: **数学分析习题演练** (第一、二、三册), 科学出版社, 2018.

28. 朱尧辰 编著: **数学分析例选通过范例学技巧**, 哈尔滨工业大学出版社, 2013.

第六章　级数理论

大学功夫即是明明德, 明明德只是固诚意, 诚意的工夫只是格物致知. 若以诚意为主, 去用格物致知的工夫, 即工夫始有下落, 即为善去恶无非是诚意的事. — -《传习录》理学编卷一

§6.1　数项级数

级数是一种特殊的极限过程, 在之前的章节中或多或少已经接触了一些级数. 本节我们来系统地研究数项级数的性质.

无穷级数, 通常以公比小于 1 的无穷几何级数的形式, 很早就出现在数学上了. Aristotle 在《Physica》中就已经认识到这种级数是存在 (有限) 和的. Oresme 在《Questions super geometriam Euclidis》(约 1360) 中就证明了调和级数 (参见**例 6.1.3**) 是发散的. Vieta 在《Varia responsa》(1593) 年给出了求无穷几何级数的和的公式. 他根据Euclid 的《Elements》知道几何级数 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 的前 n 项和 $S_n = \sum_{1\leq k\leq n} a_k$ 满足公式

$$\frac{S_n - a_n}{S_n - a_1} = \frac{a_1}{a_2}.$$

这样当 $a_1/a_2 > 1$ 时, 则当 $n \to \infty$ 时通项 $a_n \to 0$ 且

$$S_\infty = \sum_{n\geq 1} a_n = \frac{a_1^2}{a_1 - a_2} = \frac{a_1}{1 - a_2/a_1}.$$

James Gregory 在《Opus geometricum》中利用无穷几何级数证明了Achilles 追龟悖论, 而且他第一次明确指出无穷级数表示一个数即级数的和, 并且称之为级数的极限. Leibniz 在 1674 年给出了著名的公式

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

虽然在十七世纪已经有人观察到级数收敛和发散的区别, 但是这两个概念的正式出现是James Gregory 在 1668 年提出的的. Lebiniz 在 1713 年 10 月 25 日在给John Bernoulli 的信中提到了一个级数收敛的判别法, 即现在称之为的**Leibniz 判别法** (参见**定理 6.3.1**): 若级数的项的符号是交错出现的且绝对值是单调递减趋于 0, 则该级数是收敛的. Maclaurin 在其《Treatise of fluxions》(1742) 中把级数作为求积分的标准方法, 并独立于Cauchy 发现了无穷级数的积分判别法. Lagrange 在 1770 年的论文里说, 级数将表示数, 如果它的通项趋于 0. D'Alembert 在《Opuscules mathématiques》(1768) 提出了级数 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 绝对收敛的方法, 参见**定理 6.2.8**. Edward Waring 在 1776 年给出了比式判别法, 参见**定理 6.2.8**, 虽然现在人们将它归功于Cauchy.

§6.1.1 数项级数

考虑一个完整的披萨并假设其面积为 1. 现将这个披萨对半分, 每部分面积都为 1/2; 对其中的半分再对半分, 每部分面积都为 1/4; 这个过程继续下去就得到如下的公式

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots.$$

一般地, 给定数列 $\{a_n\}_{n\geq1}$, 形式和

$$\sum_{n\geq1}a_n:=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots, \tag{6.1.1}$$

称为**数项级数(numerical series)** 或者**无穷级数(infinite series)**, 并称 a_n 为**通项(general term)**. 为了简便就直接称为**级数(series)**.

但是 (6.1.1) 不一定有意义, 比如取 $a_n=1$, 则 $\sum_{n\geq1}n=+\infty$. 有时候把首项 a_1 的下标取成 0, 即首项为 a_0, 会更加方便, 特别是在考虑两个级数的乘积.

为了研究级数性质, 作截断得到**部分和(partial sum)**

$$S_n:=\sum_{1\leq k\leq n}a_k. \tag{6.1.2}$$

称级数 (6.1.1) 是**收敛的(convergent)** 如果部分和数列 $S_{n n\geq1}$ 是收敛的, 否则就称级数 (6.1.1) 是**发散的(divergent)**. 如果级数 (6.1.1) 收敛则

$$\sum_{n\geq1}a_n=S:=\lim_{n\to+\infty}S_n$$

称 S 为级数 (6.1.1) 的**和(sum)**.

§6.1.2 数项级数的 Cauchy 收敛

利用数列的 Cauchy 收敛原理得到了关于级数的 Cauchy 收敛判别法.

定理6.1.1. (Cauchy 收敛准则) *级数 (6.1.1) 收敛 $\Longleftrightarrow$ 对任意 $\epsilon>0$ 存在 $N\in\mathbb{N}$ 对任意 $n>N$ 和任意 $p\in\mathbb{N}$ 都有*

$$\left|\sum_{1\leq i\leq p}a_{n+i}\right|<\epsilon. \tag{6.1.3}$$

上述定理则给出了级数 (6.1.1) 不收敛的判别法则:

$$\text{(6.1.1) 不收敛}\quad\Longleftrightarrow\quad\left(\begin{array}{c}\exists\,\epsilon_0>0\,\forall\,N\in\mathbb{N}\,\exists\,n>N\\ \exists\,p\in\mathbb{N}\text{ 满足 }\left|\sum_{1\leq i\leq p}a_{n+i}\right|>\epsilon_0\end{array}\right).$$

作为直接推论得到

推论6.1.2. (1) **(级数收敛的必要条件)** 级数 (6.1.1) 收敛 $\Longrightarrow$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0. \tag{6.1.4}$$

(2) 在级数 (6.1.1) 中改变有限项 (去掉、增加、调整次序或改变这有限项的值) 并不改变其收敛性. 当然在收敛时可能会改变级数的和.

(3) 假设级数 (6.1.1) 收敛. 则对其任意添加括号 (但不改变次序) 后得到的级数也收敛且和保持不变.

证: (1) 记 $S = \sum_{n\geq 1} a_n$ 和 $S_n = \sum_{1\leq k\leq n} a_k$. 则得到 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 且 $lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$.

(2) 在定理 (6.1.1) 中取充分大的 N 避开这些有限项.

(3) 考虑添括号为

$$(a_1 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots + (a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}) + \cdots,$$

并记 $(n_0 := 0)$

$$b_k := a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}, \quad k \geq 1.$$

则得到级数 $\sum_{n\geq 1} b_n$ 和部分和 $T_n := b_1 + \cdots + b_n$. 因为

$$T_1 = S_{n_1}, \quad T_2 = S_{n_2}, \quad \cdots, \quad T_k = S_{n_k},$$

所以 $\{T_n\}_{n\geq 1}$ 是 $\{S_n\}_{n\geq 1}$ 的子列. 故 $\{T_n\}_{n\geq 1}$ 收敛且

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

从而级数 $\sum_{n\geq 1} b_n$ 收敛且 $\sum_{n\geq 1} b_n = \sum_{n\geq 1} a_n$. □

例6.1.3. (1) (6.1.3) $\not\Rightarrow$ (6.1.1), 比如考察级数 $\sum_{n\geq 1} a_n$, 其中 $a_n = 1/n$.

(2) 考虑**几何级数(geometric series)**:

$$\sum_{n\geq 0} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots.$$

因为部分和为

$$S_n = \sum_{0\leq k\leq n-1} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1, \\ n, & q = 1. \end{cases}$$

所以得到

$$\sum_{n\geq 0} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, & |q| < 1, \\ \text{发散}, & q = -1, \\ +\infty, & q = 1, \\ +\infty, & |q| > 1. \end{cases} \tag{6.1.5}$$

(3) 考虑**调和级数(harmonic series)**:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}, \quad S_n := 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

因为 $S_n - \ln n \to \gamma$ (Euler 常数, 参见 (2.3.9)), 所以 $\sum_{n\geq 1} 1/n$ 发散. 如果用 ϵ-δ 语言写出来如下:

$$\left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right| \geq \frac{1}{n+n}+\frac{1}{n+n}+\cdots+\frac{1}{n+n}=\frac{1}{2};$$

故存在 $\epsilon_0 = \frac{1}{2}$ 对任意 $N \in \mathbb{N}$ 存在 $n > N$ 和 $p = n \in \mathbb{N}$ 使得 $\sum_{1\leq i\leq n}\frac{1}{n+i} > \frac{1}{2}$.

1737 年Euler 在其论文《Variae observationes circa series infinitas》中证明了著名的**Euler 乘积公式 (Euler product formula)**:

$$\prod_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}, \quad s > 1.$$

证明想法是利用 (6.1.5) 作级数展开

$$\frac{1}{1-p^{-s}} = 1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{(p^2)^s}+\frac{1}{(p^3)^s}+\cdots.$$

故当素数 p 取遍素数集 $\mathbb{P}$ 无穷乘积 (参见 §6.4)$\prod_{p\in\mathbb{P}}(1-p^{-s})^{-1}$ 包含了所有形如

$$\frac{1}{(p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_r^{n_r})^s}$$

的项, 因此得到 $\sum_{n\geq 1} n^{-s}$.

在1859 年11 月提交给柏林科学院的月报[1]中, Riemann 创造性地把变量 s 放到复数域 $\mathbb{C}$ 里, 就得到了现在称之为的**Riemann ζ 函数(Riemann zeta function)**:

$$\zeta(z) := \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^z}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{6.1.6}$$

我们可以证明级数 (此时称为函数项级数, 因为既有 n 又有 z; 特别地, 当 $z > 1$ 时的证明参见**例** 14.2.12) (6.1.6) 收敛如果 $\mathrm{Re}(z) > 1$. 级数 (6.1.6) 是Riemann 引入来研究素数定理从而引出了著名的**Riemann 假设(Riemann hypothesis)**:

(6.1.6) 的非平凡零点只能位于 $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{1}{2}$ 处.

这里何为"非平凡零点"则需要进一步的复变知识来解释, 具体细节在之后的章节中给出. 注意到

$$\zeta(1) = \text{发散}, \quad \zeta(2) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{Euler}).$$

[1]Riemann, Brtnhard. *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859, 671-680.

$\zeta(2)$ 的收敛性可立即得到, 但是和的精确值在Fourier 级数这章给出, 当然也有其它方法得到 (参见 (2.3.2)). 可以证明:

$$\gamma = \sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n\zeta(n)}{n}, \tag{6.1.7}$$

$$\gamma = 1-\ln 2+\sum_{n\geq 2}(-1)^n\frac{\zeta(n)-1}{n} \quad (\text{Euler}), \tag{6.1.8}$$

$$\gamma = 1+\ln 2-\ln 3-\sum_{n\geq 1}\frac{\zeta(2n+1)-1}{(2n+1)4^n} \quad (\text{Stieltjes}). \tag{6.1.9}$$

虽然调和级数是发散, 但是如果从中选取部分项构成的级数有可能是收敛的. 比如

$$\sum_{m=k^n,\ k,n\geq 2}\frac{1}{m-1} = 2, \quad (\text{Goldbach}), \tag{6.1.10}$$

$$\sum_{m=(2k)^n,\ k\geq 1,n\geq 2}\frac{1}{m-1} = 2, \quad (\text{Euler}). \tag{6.1.11}$$

这里求和不是对 k 和 n 同时求和, 而是对形如 $m=k^n$ 或 $m=(2k)^n$ 的所有 m 求和. 更一般地, 固定正整数 a 和 b, 且 $b=a$ 或 $b=a+1$, 考虑集合

$$S_{a,b} := \{m\in\mathbb{N}|m=(ak+b)^n,\ \exists\, k\geq 0 \text{ 和 } n\geq 2\}.$$

则可证明

$$\sum_{m\in S_{a,b}}\frac{1}{m-1}=\frac{1}{a}\ln\frac{\Gamma(b/a)}{\Gamma((b-1)/a)}. \tag{6.1.12}$$

另一个简单例子是

$$\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2-1}=\frac{3}{4}. \tag{6.1.13}$$

作为直接推论得到

$$\zeta(2)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\leq 1+\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2-1}=\frac{7}{4}.$$

(4) 因为 $\lim_{n\to+\infty}(1-1/n)^n=1/e\neq 0$, 所以级数 $\sum_{n\geq 1}(1-1/n)^n$ 发散.

(5) 计算级数

$$\sum_{n\geq 1}\frac{2n-1}{2^n}.$$

利用 (6.1.5) 得到

$$\sum_{n\geq 1}\frac{2n-1}{2^n}=2\sum_{n\geq 1}\frac{n}{2^n}-\frac{1/2}{1-1/2}=2\sum_{n\geq 1}\frac{n}{2^n}-1.$$

因此只要计算级数

$$\sum_{n\geq 1}\frac{n}{2^n},\quad S_n:=\sum_{1\leq k\leq n}\frac{k}{2^k}.$$

即可. 根据部分和定义得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}S_n &= \sum_{1\le k\le n}\frac{k}{2^{k+1}} = \sum_{2\le \ell\le n+1}\frac{\ell-1}{2^\ell} = \sum_{2\le \ell\le n+1}\frac{\ell}{2^\ell} - \sum_{2\le \ell\le n+1}\frac{1}{2^\ell}\\ &= \left(\frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2} + S_n\right) - \left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\\ &= S_n - \frac{1}{2} + \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{\frac{1}{4}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}} = S_n - \frac{1}{2} + \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right).\end{aligned}$$

故

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \to 1 \quad\Longrightarrow\quad S_n \to 2.$$

最后得到

$$\sum_{n\ge 1}\frac{2n-1}{2^n} = 2\times 2 - 1 = 3.$$

在上述计算和证明过程中其实已经运用了如下定理.

定理6.1.4. 给定级数 $\sum_{n\ge 1} a_n$, $\sum_{n\ge 1} b_n$ 和常数 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

(1) 如果 $\alpha\ne 0$, $\sum_{n\ge 1} a_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n\ge 1}\alpha a_n$ 收敛.

(2) $\sum_{n\ge 1} a_n$ 和 $\sum_{n\ge 1} b_n$ 收敛 $\Longrightarrow$ $\sum_{n\ge 1}(\alpha a_n+\beta b_n)$ 收敛且

$$\sum_{n\ge 1}(\alpha a_n+\beta b_n) = \alpha\sum_{n\ge 1}a_n + \beta\sum_{n\ge 1}b_n.$$

证: 利用定义和数列的四则运算性质. □

注6.1.5. (1) $\lim_{n\to+\infty} na_n = a\ne 0 \Longrightarrow \sum_{n\ge 1} a_n$ 发散.

(2) $\sum_{n\ge 1} a_n$ 收敛, $a_n\ge 0$, 且 $\{a_n\}_{n\ge 1}$ 单调递减 $\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} na_n = 0$.

(3) $a_n\ge 0$ 且 $\sum_{n\ge 1}(a_n+a_{n+1})$ 收敛 $\Longrightarrow \sum_{n\ge 1} a_n$ 收敛.

(4) $\sum_{n\ge 1} a_n$ 收敛且 $a_n\ge 0 \Longrightarrow \sum_{n\ge 1} a_n^2$ 收敛.

(5) $\sum_{n\ge 1} a_n$ 收敛且 $a_n\ge 0 \Longrightarrow \sum_{n\ge 1}\sqrt{a_na_{n+1}}$ 收敛.

(6) $a_n\le c_n\le b_n$ 且 $\sum_{n\ge 1} a_n$ 和 $\sum_{n\ge 1} b_n$ 收敛 $\Longrightarrow \sum_{n\ge 1} c_n$ 收敛.

证: (1) 不妨假设 $a>0$. 因为 $a_n\sim\frac{a}{n}$ 所以 $\sum_{n\ge 1} a_n \sim a\sum_{n\ge 1}\frac{1}{n} = +\infty$. 换言之, 对任意 $\epsilon>0$ 存在 $N\in\mathbb{N}$ 对任意 $n\ge N$, 有 $|na_n-a|<\epsilon$. 特别地, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 对任意 $n\ge N$ 有 $a_n>a/2n$ 从而得到

$$\sum_{n\ge N} a_n \ge \sum_{n\ge N}\frac{a}{2n} = \frac{a}{2}\sum_{n\ge N}\frac{1}{n}\to+\infty.$$

(2) 对任意 p 和 n 有 $pa_{n+p}\le\sum_{n+1\le i\le n+p} a_i$. 特别地

$$2na_{2n}\le 2\sum_{n+1\le i\le 2n} a_i,\quad (2n+1)a_{2n+1}\le\frac{2n+1}{n+1}\sum_{n+1\le i\le 2n+1} a_i.$$

因此得到
$$0 \le na_n \le 2 \sum_{\lfloor n/2\rfloor+1\le i\le n} a_i.$$
由于级数 $\sum_{n\ge1} q_n$ 收敛, 所以 $\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$.

(3) 记 $T_n := \sum_{1\le k\le n}(a_k + a_{k+1})$, $S_n := \sum_{1\le k\le n} a_k$, $T := \lim_{n\to+\infty} T_n$. 则
$$T_n = S_n + \sum_{2\le k\le n+1} a_k = S_n + S_{n+1} - a_1 \quad\Longrightarrow\quad T_n = 2S_n + a_{n+1} - a_1$$
即
$$S_n = \frac{T_n + a_1 - a_{n+1}}{2}.$$
另一方面级数 $\sum_{n\ge1}(a_n + a_{n+1})$ 收敛得到 $\lim_{n\to+\infty}(a_n + a_{n+1}) = 0$; 但是 $a_n \ge 0$, 所以 $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. 因此
$$S_n \to \frac{T + a_1 - 0}{2} = \frac{T + a_1}{2}.$$

(4) 级数收敛推出 $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ 从而存在正数 $M > 0$ 使得 $0 \le a_n \le M$ 对所有 n 都成立. 因此 $\sum_{n+1\le i\le n+p} a_i^2 \le M\sum_{n+1\le i\le n+p} a_i$, 故收敛.

(5) 利用算术几何平均不等式 $2\sqrt{a_n a_{n+1}} \le a_n + a_{n+1}$.

(6) 对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $N \in \mathbb{N}$, 对任意 $n \ge N$ 和任意 $p \in \mathbb{N}$ 有
$$-\epsilon < \sum_{n+1\le i\le n+p} a_i, \quad \sum_{n+1\le i\le n+p} b_i < \epsilon.$$
从而得到 $-\epsilon < \sum_{n+1\le i\le n+p} c_i < \epsilon$. □

例6.1.6. (1) 注 6.1.5 (4) 中条件 $a_n \ge 0$ 不能去掉, 反例为 $a_n = (-1)^n/\sqrt{n}$, 其中级数 $\sum_{n\ge1}(-1)^n/\sqrt{n}$ 收敛性在 §6.3.2 中给出.

(2) 注 6.1.5 (4) 的逆命题不成立, 反例为, $a_n = 1/n$.

(3) $\sum_{n\ge1} a_n$ 和 $\sum_{n\ge1} b_n$ 发散$\not\Rightarrow$ $\sum_{n\ge1}(a_n + b_n)$ 发散. 反例为 $a_n = \frac{1}{n}$ 和 $b_n = -\frac{1}{n}$.

(4) $\sum_{n\ge1} a_n$ 和 $\sum_{n\ge1} b_n$ 收敛$\not\Rightarrow$ $\sum_{n\ge1} a_n b_n$ 收敛. 反例为 $a_n = \frac{(-1)^n}{n} = b_n$.

(5) $\sum_{n\ge1} a_n$ 和 $\sum_{n\ge1} b_n$ 发散$\not\Rightarrow$ $\sum_{n\ge1} a_n b_n$ 发散. 反例为 $a_n = (-1)^n$ 和 $b_n = \frac{1}{n}$.

(6) $\sum_{n\ge1} a_n$ 收敛和 $\sum_{n\ge1} b_n$ 发散$\not\Rightarrow$ $\sum_{n\ge1} a_n b_n$ 发散. 反例为 $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ 和 $b_n = n$.

(7) 如对每个固定 $p \in \mathbb{N}$ 都有
$\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}) = 0 \not\Rightarrow \sum_{n\ge} a_n$ 收敛. 反例为 $a_n = \frac{1}{n}$.

§6.2 正项级数

本节我们讨论**正项级数**收敛性的判别法则, 即考虑级数
$$\sum_{n\ge1} a_n, \quad a_n \ge 0.$$

此时部分和

$$S_n := \sum_{1\le k\le n} a_k$$

非负且单调递增. 因此得到

$$\text{正项级数收敛} \iff \text{部分和有界.}$$

为了得到更加有效和实用的判别法, 首先引入上、下极限.

§6.2.1 上极限和下极限

回顾

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a \iff \begin{pmatrix} \forall\,\epsilon>0\;\exists\, N\in\mathbb{N}\;\forall\, n\ge N \\ |x_n-a|<\epsilon \end{pmatrix}.$$

并且我们知道收敛数列必有界, 但反之不一定成立.

给定有界数列 $\{x_n\}_{n\ge1}$ 并令

$$\alpha_n := \inf_{k\ge n}\{x_n\}, \quad \beta_n := \sup_{k\ge n}\{x_n\}. \tag{6.2.1}$$

根据定义显然有 $\{\alpha_n\}_{n\ge1}$ 单调递增和 $\{\beta_n\}_{n\ge1}$ 单调递减. 从而根据**定理 2.3.1**得到

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, x_n \equiv \limsup_{n\to+\infty} x_n := \lim_{n\to+\infty}\beta_n, \quad \underline{\lim}_{n\to+\infty}\, x_n \equiv \liminf_{n\to+\infty} x_n := \lim_{n\to+\infty}\alpha_n \tag{6.2.2}$$

存在. 称 $\overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n$ 和 $\underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n$ 为数列 $\{x_n\}_{n\ge1}$ 的**上极限(upper limit)**和**下极限(lower limit)**.

如果数列 $\{x_n\}_{n\ge1}$ 只有下界而没有上界, 同理可定义

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, x_n := +\infty, \quad \underline{\lim}_{n\to+\infty}\, x_n = \lim_{n\to+\infty}\alpha_n.$$

如果数列 $\{x_n\}_{n\ge1}$ 只有上界而没有下界, 同理可定义

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, x_n = \lim_{n\to+\infty}\beta_n, \quad \underline{\lim}_{n\to+\infty}\, x_n := -\infty.$$

例6.2.1. (1) 求数列 $\{x_n=(-1)^n\}_{n\ge1}$ 的上、下极限.

解: $\alpha_n=-1$, $\beta_n=1$. 所以 $\overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = 1$ 和 $\underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = -1$. □

(2) 求数列 $\{x_n = n\sin\frac{n\pi}{2}\}_{n\ge1}$ 的上、下极限.

解: $\alpha_n=-\infty$, $\beta_n=+\infty$, 故 $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ 和 $\underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = -\infty$. □

定理6.2.2. 给定数列 $\{x_n\}_{n\ge1}$.

(1) $\underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n \le \overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n$.

(2) $\overline{\lim}_{n\to+\infty}(-x_n) = -\underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n$ 和 $\underline{\lim}_{n\to+\infty}(-x_n) = -\overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n$.

(3) 如果 $x_n > 0$, 则

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n}, \quad \underline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n}.$$

证: 直接利用定义可得到. □

定理6.2.3. (1) $x_n \le y_n \Longrightarrow$ 我们有

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} x_n \le \overline{\lim_{n\to+\infty}} y_n, \quad \underline{\lim_{n\to+\infty}} x_n \le \underline{\lim_{n\to+\infty}} y_n.$$

(2) 对任意数列 $\{x_n\}_{n\ge1}$ 和 $\{y_n\}_{n\ge1}$ 都有

$$\begin{aligned}
\underline{\lim_{n\to+\infty}} x_n + \underline{\lim_{n\to+\infty}} y_n &\le \underline{\lim_{n\to+\infty}} (x_n + y_n) \\
&\le \begin{cases} \underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n + \overline{\lim}_{n\to+\infty} y_n, \\ \overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n + \underline{\lim}_{n\to+\infty} y_n, \end{cases} \\
&\le \overline{\lim_{n\to+\infty}} (x_n + y_n) \le \overline{\lim_{n\to+\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to+\infty}} y_n.
\end{aligned}$$

(3) $x_n, y_n > 0 \Longrightarrow$ 我们有

$$\begin{aligned}
\underline{\lim_{n\to+\infty}} x_n \cdot \underline{\lim_{n\to+\infty}} y_n &\le \underline{\lim_{n\to+\infty}} x_n y_n \\
&\le \begin{cases} \underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n\to+\infty} y_n, \\ \overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n \cdot \underline{\lim}_{n\to+\infty} y_n, \end{cases} \\
&\le \overline{\lim_{n\to+\infty}} x_n y_n \le \overline{\lim_{n\to+\infty}} x_n \cdot \overline{\lim_{n\to+\infty}} y_n.
\end{aligned}$$

(4) 如果 $\lim_{n\to+\infty} x_n$ 存在, 则

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} (x_n + y_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n + \overline{\lim_{n\to+\infty}} y_n, \quad \underline{\lim_{n\to+\infty}} (x_n + y_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n + \underline{\lim_{n\to+\infty}} y_n.$$

(5) 如果 $\lim_{n\to+\infty} x_n = x \in (0, +\infty)$ 且 $y_n > 0$, 则

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} x_n y_n = \lim_{n\to+\infty} x_n \cdot \overline{\lim_{n\to+\infty}} y_n, \quad \underline{\lim_{n\to+\infty}} x_n y_n = \lim_{n\to+\infty} x_n \cdot \underline{\lim_{n\to+\infty}} y_n.$$

证: (1) – (3) 利用定义可得. (4) – (5) 分别利用 (2) 和 (3). □

定理6.2.4. (1) $\overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = a \Longleftrightarrow$ 我们有

$$\left(\begin{array}{l} (a)\ \exists \text{ 子列 } \{x_{n_k}\}_{k\ge1} \subset \{x_n\}_{n\ge1} \text{ 使得 } \lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = a \text{ 成立}, \\ (b)\ \forall \text{ 收敛子列 } \{x_{n'_k}\}_{k\ge} \subset \{x_n\}_{n\ge1} \text{ 有 } \lim_{k\to+\infty} x_{n'_k} =: a' \le a. \end{array} \right)$$

(2) $\underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = b \Longleftrightarrow$ 我们有

$$\begin{pmatrix} (a)\ \exists\ \text{子列}\ \{x_{n_k}\}_{k\geq 1} \subset \{x_n\}_{n\geq 1}\ \text{使得}\ \lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = b\ \text{成立}, \\ (b)\ \forall\ \text{收敛子列}\ \{x_{n'_k}\}_{k\geq} \subset \{x_n\}_{n\geq 1}\ \text{有}\ \lim_{k\to+\infty} x_{n'_k} =: b' \geq b. \end{pmatrix}$$

证: 因为 $\underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = -\overline{\lim}_{n\to+\infty}(-x_n)$, 所以只要证明 (1) 即可. 如果 $a = +\infty$ 或 $a = -\infty$, 结论显然成立.

下面假设 a 是有限数. 记 $\beta_n = \sup_{k\geq n}\{x_k\}$ 并假设 $\overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = a$ 成立. 则 $\lim_{n\to+\infty} \beta_n = a$. 根据定义存在 $m_1 \in \mathbb{N}$ 满足 $a - 1 < \beta_{n_1} < a + 1$, 因此

$$a - 1 < \sup_{k\geq m_1}\{x_k\} < a + 1.$$

从而存在 $n_1 > m_1$ 满足 $a - 1 < x_{n_1} < a + 1$. 同样可得到 $n_2 > n_1$ 满足 $a - \frac{1}{2} < x_{n_2} < a + \frac{1}{2}$. 这个过程一直下去就得到严格递增数列 n_k 满足

$$a - \frac{1}{k} < x_{n_k} < a + \frac{1}{k}.$$

即存在子列 $\{x_{n_k}\}_{k\geq 1} \subset \{x_n\}_{n\geq 1}$ 使得 $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = a$ 成立. 对任意收敛子列 $\{x_{n'_k}\}_{k\geq 1} \subset \{x_n\}_{n\geq 1}$ 有 $x_{n'_k} \leq \beta_{n'_k}$ 故得到

$$a' = \lim_{k\to+\infty} x_{n'_k} \leq \lim_{k\to+\infty} \beta_{n'_k} = \lim_{n\to+\infty} \beta_n = \overline{\lim_{k\to+\infty}}\, x_{n_k} = a.$$

反之假设 (1) 中的 (a) 和 (b) 都成立, 不失一般性不妨假设 a 有限. 根据 $x_{n_k} \leq \beta_{n_k}$ 得到

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, x_n = \lim_{n\to+\infty} \beta_n = \lim_{k\to+\infty} \beta_{n_k} \geq \lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = a.$$

如果 $\overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = c > a$, 则根据 (a) 得到收敛子列 $\{x_{n'_k}\}_{k\geq 1} \subset \{x_n\}_{n\geq 1}$ 使得 $\lim_{k\to+\infty} x_{n'_k} = c > a$ 成立. 但是这个假设条件 (b) 矛盾, 从而必有 $\overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = a$. □

定理6.2.5. *$\lim_{n\to+\infty} x_n$ 存在 $\Longleftrightarrow$ $\overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n$ 存在且相等.*

证: 假设 $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ 存在. 根据定义得到 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 的两个子列 $\{x_{n_k}\}_{k\geq 1}$ 和 $\{x_{n'_k}\}_{k\geq 1}$ 满足

$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \overline{\lim_{n\to+\infty}}\, x_n, \quad \lim_{k\to+\infty} x_{n'_k} = \underline{\lim_{n\to+\infty}}\, x_n.$$

因此 $\underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n$.

反之, 根据 $\alpha_n \leq x_n \leq \beta_n$ 和夹逼定理, **定理**2.2.3, 得到 $\lim_{n\to+\infty} x_n$ 的存在性. □

例6.2.6. (1) $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 有界且 $\lim_{n\to+\infty}(2x_n + x_{2n})$ 存在 $\Longrightarrow$ $\lim_{n\to+\infty} x_n$ 存在.

证: 令 $a := \lim_{n\to+\infty}(2x_n + x_{2n})$. 则得到

$$a = \varliminf_{n\to+\infty} \le 2 \varliminf_{n\to+\infty} x_n + \varlimsup_{n\to+\infty} x_{2n} \le 2 \varliminf_{n\to+\infty} x_n + \varlimsup_{n\to+\infty} x_n$$

和

$$a = \varlimsup_{n\to+\infty}(2x_n + x_{2n}) \ge 2 \varlimsup_{n\to+\infty} x_n + \varliminf_{n\to+\infty} x_{2n} \ge 2 \varlimsup_{n\to+\infty} x_n + \varliminf_{n\to+\infty} x_n.$$

故

$$\varliminf_{n\to+\infty} x_n \le \varlimsup_{n\to+\infty} x_n \le \varliminf_{n\to+\infty} x_n. \quad \square$$

§6.2.2 正项级数判别法

在给出判别法之前, 首先来看几个例子.

例6.2.7. (1) 考察实Riemann ζ 函数

$$\zeta(p) := \sum_{n\ge1} \frac{1}{n^p}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

证: 如果 $p = 1$, 即为调和级数, 故发散.

如果 $p < 1$, 部分和 $S_n > 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \to +\infty$.

如果 $p > 1$, 考察函数 $f(x) := 1/x^{p-1}, x > 0$. 因为 $f'(x) = (1-p)/x^p$, 根据微分中值定理, **定理** 4.5.3, 得到

$$f(n+1) - f(n) = \frac{1-p}{(n+\theta_n)^p}, \quad \exists\, \theta_n \in (0,1).$$

所以

$$\frac{1}{(n+1)^p} < \frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{(n+1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}}\right].$$

从而部分和有上界

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{1\le k\le n} \frac{1}{k^p} < 1 + \frac{1}{1-p} \sum_{2\le k\le n} \left[\frac{1}{k^{p-1}} - \frac{1}{(k-1)^{p-1}}\right] \\ &= 1 + \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{n^{p-1}}\right) < \frac{p}{p-1}. \quad \square \end{aligned}$$

(2) 证明

$$\sqrt{2} \le \sum_{n\ge1} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} \le 2.$$

证: 因为

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} &= \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+1}} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right),$$

所以

$$\sqrt{2}\sum_{1\le n\le N}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\le S_N\le 2\sum_{1\le n\le N}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right),\quad n\ge 1.$$

两边令 $N\to+\infty$ 得到所要的不等式. □

定理6.2.8. (1) **(比较判别法)** 如果 $a_n, b_n \ge 0$ 且 $a_n \le Mb_n$, 这里 $M>0$, 则

(1.1) $\sum_{n\ge1} b_n$ 收敛 $\Longrightarrow \sum_{n\ge1} a_n$ 收敛.

(1.2) $\sum_{n\ge1} a_n$ 发散 $\Longrightarrow \sum_{n\ge1} b_n$ 发散.

(2) **(比较判别法的极限形式; Cauchy - Waring)** 如果 $a_n, b_n > 0$ 且

$$l := \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}.$$

(2.1) $0<l<+\infty$: $\sum_{n\ge1} a_n$ 和 $\sum_{n\ge1} b_n$ 具有相同的敛散性.

(2.2) $l=0$: $\sum_{n\ge1} b_n$ 收敛 $\Longrightarrow \sum_{n\ge1} a_n$ 发散.

(2.3) $l=+\infty$: $\sum_{n\ge1} b_n$ 发散 $\Longrightarrow \sum_{n\ge1} a_n$ 发散.

(3) 如果 $a_n, b_n > 0$ 且当 n 充分大时 a_n/b_n 单调递减, 则

(3.1) $\sum_{n\ge1} b_n$ 收敛 $\Longrightarrow \sum_{n\ge1} a_n$ 收敛.

(3.2) $\sum_{n\ge1} a_n$ 发散 $\Longrightarrow \sum_{n\ge1} b_n$ 发散.

(4) **(Cauchy 判别法)** 如果 $a_n \ge 0$ 且 $\overline{\lim}_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho\ge 0$, 则

(4.1) $\rho<1$: $\sum_{n\ge1} a_n$ 收敛.

(4.2) $\rho>1$: $\sum_{n\ge1} a_n$ 发散.

(4.3) $\rho=1$: 无法判别.

(5) **(D'Alembert 判别法, 1768)** 如果 $a_n \ge 0$ 且

$$\overline{\rho} := \overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge \underline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n} =: \rho \ge 0,$$

则

(5.1) $\overline{\rho}<1$: $\sum_{n\ge1} a_n$ 收敛.

(5.2) $\underline{\rho}>1$: $\sum_{n\ge1} a_n$ 发散.

(5.3) $\overline{\rho} \geq 1$ 或 $\underline{\rho} \leq 1$: 无法判别.

(6) **(Cauchy - Maclaurin 积分判别法)** 假设非负函数 $fx)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 并令

$$a_n := f(n), \quad S_n := \sum_{1 \leq k \leq n} a_k, \quad T_n := \int_1^n f(x)dx.$$

则 $\{S_n - T_n\}_{n \geq 1}$ 收敛且

$$\sum_{n \geq 1} a_n \text{ 收敛} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛}.$$

证: (1) 可根据定义得出, 从而推出 (2) 和 (3).

(4) 假设 $\rho < 1$ 并取 $q = (1+\rho)/2 \in (\rho, 1)$. 根据**定理** 6.2.4 可知, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 对任意 $n > N$ 都有不等式 $\sqrt[n]{a_n} < q < 1$ 成立, 即 $a_n < q^n$, 只要 $n > N$. 由于 $\sum_{n \geq 1} q^n$ 收敛, 故 $\sum_{n \geq 1} a_n$ 收敛.

如果 $\rho > 1$, 则根据**定理** 6.2.4 存在严格递增数列 $\{n_k\}_{k \geq 1}$ 使得 $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1$ 对充分大的 k 成立. 特别地 $a_{n_k} > 1$ 因此 $\sum_{n \geq 1} a_n$ 发散.

最后当 $\rho = 1$ 时, 这个判别法失效, 比如考察级数 $\sum_{n \geq 1} 1/n$ 和 $\sum_{n \geq 1} 1/n^2$.

(5) 证明和 (4) 类似. 当 $\rho = 1$, 取 $q = (1+\rho)/2 \in (\rho, 1)$. 从而存在 $N \in \mathbb{N}$ 对任意 $n \geq N$ 有 $a_{n+1}/a_n < q$. 所以得到

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} < q, \ \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < q, \ \cdots, \quad \Longrightarrow \quad a_{N+p} < a_N q^p = \frac{a_N}{q^N} q^{N+p}.$$

令 $p \to +\infty$ 得到 $\sum_{n \geq 1} a_n$ 收敛.

当 $\rho > 1$ 时, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 对任意 $n \geq N$ 不等式 $a_{n+1}/a_n > 1$ 都成立. 因此 $a_{n+1} > a_n$ 从而 $a_n \nrightarrow 0$. 故级数发散.

当 $\underline{\rho} \geq 1$ 或 $\underline{\rho} \leq 1$ 时, 这个判别法失效, 比如考察级数 $\sum_{n \geq 1} 1/n$ 和 $\sum_{n \geq 1} 1/n^2$.

(6) 首先根据定义得到

$$a_{k+1} = f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k) = a_k.$$

故

$$S_n - T_n = \sum_{1 \leq k \leq n} a_k - \int_1^n f(x)dx = \sum_{1 \leq k \leq n-1} \left[a_k - \int_k^{k+1} f(x)dx\right] + a_n.$$

从而得到

$$0 \leq a_n \leq S_n - T_n \leq \sum_{1 \leq k \leq n-1} (a_k - a_{k+1}) + a_n \leq a_1,$$

即 $\{S_n - T_n\}_{n \geq 1}$ 有界. 另一方面

$$(S_{n+1} - T_{n+1}) - (S_n - T_n) = a_{n+1} - \int_n^{n+1} f(x)dx \leq 0,$$

所以 $\{S_n - T_n\}_{n\geq 1}$ 单调递减. 根据**定理** 2.3.1 可知 $\{S_n - T_n\}_{n\geq 1}$ 收敛. 直接推论得到了最后的等价性. □

例6.2.9. 判断如下级数的收敛性:

$$\sum_{n\geq 2}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}},\quad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{3^{\sqrt{n}}},\quad \sum_{n\geq 1}\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^p,\quad \sum_{n\geq 1}\frac{n^2(2+(-1)^n)^n}{2^{2n+1}},$$

$$\sum_{n\geq 1} n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}},\quad \sum_{n\geq 1}\frac{x^n n!}{n^n},\quad \sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(\ln n)^p}\ (p>0).$$

解: (1) 因为

$$(\ln n)^{\ln n} = e^{\ln n(\ln\ln n)} = n^{\ln\ln n} > n^2,\quad n > e^{e^2},$$

所以

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} < \frac{1}{n^2},\quad n > e^{e^2}.$$

因此级数收敛.

(2) 因为

$$\frac{1}{3^{\sqrt{n}}}\Big/\frac{1}{n^2} = \frac{n^2}{3^{\sqrt{n}}} \to 0,\quad n\to+\infty,$$

所以级数收敛.

(3) 利用Taylor 公式展开 (4.7.15) 得到

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln(1+\frac{1}{n})} = e^{n(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}))}$$

和

$$\begin{aligned}\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^p &= \left[e-e^{1-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})}\right]^p \\ = e^p\left[1-e^{-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})}\right]^p &= e^p\left[\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^p \sim (e/2)^p\frac{1}{n^p}.\end{aligned}$$

所以级数仅当 $p>1$ 时收敛.

(4) 因为

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{\frac{n^2(2+(-1)^n)^n}{2^{2n+1}}} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2 3^n}{2^{2n+1}}} = \frac{3}{4} < 1,$$

所以级数收敛.

(5) 因为

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}}{n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}} \to \frac{1}{2} < 1,\quad a_n := n\tan\frac{\pi}{2^{n+2}},$$

所以级数收敛.

(6) 因为

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n^n x}{(n+1)^n}=\frac{x}{(1+\frac{1}{n})^n}\to\frac{x}{e},\quad a_n:=\frac{x^n n!}{n^n},$$

所以当 $x<e$ 时级数收敛, 而当 $x>e$ 时级数发散. 如果 $x=e$, 则 $a_{n+1}/a_n=e/(1+1/n)^n>1$, 此时级数发散.

(7) 因为

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}dx=\begin{cases}+\infty, & 0<p\le 1,\\ \frac{1}{p-1}\frac{1}{(\ln 2)^{p-1}}, & p>1,\end{cases}$$

所以级数仅当 $p>1$ 时收敛.

§6.2.3 当 $\lim_{n\to+\infty}a_n/a_{n+1}=1$ 时的判别法

D'Alembert 判别法对满足条件 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=1$ 的正项级数 $\sum_{n\ge1}a_n$ 是失效的, 所以我们需要寻找更加精细的判别法.

定理6.2.10. (1) **(Kummer 判别法)** 假设 $a_n,b_n>0$.

(1.1) 如果存在 $\lambda>0$ 满足

$$\frac{1}{b_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{1}{b_{n+1}}\ge\lambda>0,\quad\forall\, n>N,$$

即 $\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{b_n}{b_{n+1}}\ge\lambda b_n$ 对任意 $n>N$ 都成立, 则 $\sum_{n\ge1}a_n$ 收敛.

(1.2) 如果 $\sum_{n\ge1}b_n$ 发散且

$$\frac{1}{b_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{1}{b_{n+1}}\le 0,\quad\forall\, n>N,$$

即 $\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{b_n}{b_{n+1}}\le 0$ 对任意 $n>N$ 都成立, 则 $\sum_{n\ge1}a_n$ 发散.

(2) **(Raabe 判别法)** 假设 $a_n>0$.

(2.1) $n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)\ge r>1$ 对任意 $n>N$ 都成立 $\Longrightarrow\sum_{n\ge1}a_n$ 收敛.

(2.2) $n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)\le 1$ 对任意 $n>N$ 都成立 $\Longrightarrow\sum_{n\ge1}a_n$ 发散.

(3) **(Rabbe 判别法的极限形式)** 假设 $a_n>0$.

(3.1) $\lim_{n\to+\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=r>1\Longrightarrow\sum_{n\ge1}a_n$ 收敛.

(3.2) $\lim_{n\to+\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=r<1\Longrightarrow\sum_{n\ge1}a_n$ 发散.

(4) **(Gauss 判别法)** 假设 $a_n>0$ 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\theta}{n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right),\quad\forall\, n>N.$$

则

(4.1) $\theta > 1 \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ 收敛.

(4.2) $\theta \leq 1 \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ 发散.

(5) **(Bertrand 判别法)** 假设 $a_n > 0$ 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\alpha_n}{n\ln n}, \quad \forall\, n > N.$$

则

(5.1) $\alpha_n \geq \mu > 1 \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ 收敛.

(5.2) $\alpha_n \leq 1 \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ 发散.

(6) **(Gauss 判别法的一般形式)** 假设 $a_n > 0$ 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}, \quad \forall\, n > N, \quad |\theta_n| \leq L.$$

则

(6.1) $\lambda > 1 \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ 收敛.

(6.2) $\lambda = 1$ 且 $\mu > 1 \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ 收敛.

(6.3) $\lambda = 1$ 且 $\mu \leq 1 \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ 发散.

(6.4) $\lambda < 1 \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ 发散.

(7) **(Ermakor 判别法)** 假设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续, 严格正, 且单调递减.

(7.1) 如果 $f(e^x)e^x/f(x) \leq q < 1$ (任意 $x \geq x_0 \geq 1$) $\Longrightarrow \sum_{n\geq 1} f(n)$ 收敛.

(7.2) 如果 $f(e^x)e^x/f(x) \geq 1$ (任意 $x \geq x_0 \geq 1$) $\Longrightarrow \sum_{n\geq 1} f(n)$ 发散.

证: (1) 在假设条件 (1.1) 下得到

$$a_{n+1} \leq \frac{1}{\lambda}\left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right), \quad \forall\, n \geq N.$$

所以

$$S_{n+1} \leq S_N + \frac{1}{\lambda}\sum_{N\leq k\leq n}\left(\frac{a_k}{b_k} - \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right) = S_N + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{a_N}{b_N} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right) \leq S_N + \frac{1}{\lambda}\frac{a_N}{b_N}.$$

数列 $\{S_n\}_{n\geq 1}$ 的有界性得到级数的收敛性.

在假设条件 (1.1) 下有 $a_n \geq (a_1/b_2)b_n$ 从而得到级数是发散的.

(2) 在 (1) 中取 $b_n = 1/n$.

(3) 显然.

(4) 在 (1) 中取 $b_n = 1/n\ln n$. 计算得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{b_n}\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} &= n\ln n\left[1+\frac{\theta}{n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right] - (n+1)\ln(n+1)\\ &= (n+\theta)\ln n - (n+1)\ln(n+1) + o(1).\end{aligned}$$

如果 $\theta > 1$, 则存在正常数 $\lambda > 0$ 使得

$$\frac{1}{b_n}\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} = (\theta-1)\ln n - (n+1)\ln\frac{n+1}{n} + o(1) \geq \lambda > 0,\ \forall\, b > N$$

成立, 这是因为

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)\ln\frac{n+1}{n} = \lim_{x\to 0+}\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(1+x) = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

如果 $\theta < 1$, 则

$$\frac{1}{b_n}\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_n} \leq 0,\quad \forall\, n > N.$$

如果 $\theta = 1$, 则

$$\frac{1}{b_n}\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} = (n+1)\ln\frac{n}{n+1} + o(1) \to -1$$

故级数发散.

(5) 在 (1) 中取 $b_n = 1/n\ln n$ 并计算得到

$$\frac{1}{b_n}\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} = \left[n\ln n\left(1+\frac{1}{n}+\frac{\alpha_n}{n\ln n}\right) - (n+1)\ln(n+1)\right]$$

$$= (n+1)\ln n + \alpha_n - (n+1)\ln(n+1) = (n+1)\ln\frac{n}{n+1} + \alpha_n.$$

如果 $\alpha_n \geq \mu > 1$, 则

$$\frac{1}{b_n}\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} = (\alpha_n - 1) + \left[1+(n+1)\ln\frac{n}{n+1}\right] \geq \lambda > 0,\quad \forall\, n > N.$$

此时级数收敛. 如果 $\alpha_n \leq 1$,

$$\frac{1}{b_n}\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} = \left[1+(n+1)\ln\frac{n}{n+1}\right] + \alpha_n - 1 \leq 0,\quad \forall\, n > N,$$

这是因为函数 $f(x+1) = (x+1)\ln\frac{x}{x+1}$ 在 $[1,+\infty)$ 是严格单调趋于 -1,

$$f'(x) = \ln\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > 0.$$

此时级数发散.

(6) 利用 D'Alembert 判别法和 Gauss 判别法.

(7) 根据积分判别法只要研究反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 是否收敛. 在假设条件 (7.1) 下得到

$$\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)dt = \int_{x_0}^{x} f(e^u)e^u du \le q\int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

所以得到

$$\begin{aligned}(1-q)\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)dt &\le q\left[\int_{x_0}^{x} f(t)dt - \int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)dt\right]\\ &\le q\left[\int_{x_0}^{e^x} f(t)dt - \int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)dt\right] \le q\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)dt.\end{aligned}$$

故

$$\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)dt \le \frac{q}{1-q}\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)dt$$

和

$$\int_{x_0}^{e^x} f(t)dt \le \frac{1}{1-q}\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)dt =: L.$$

根据 x 的任意性得到

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt \le L, \quad \forall\, x \ge x_0.$$

因此级数 $\sum_{n\ge1} f(n)$ 收敛.

在假设条件 (7.1) 下得到

$$\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)dt \ge \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

从而得到

$$\int_{x}^{e^x} f(t)dt \ge \int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)dt =: \gamma > 0.$$

定义数列 $x_n := e^{x_{n-1}}$, $n \ge 1$. 则得到

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t)dt \ge \gamma \implies \int_{x_0}^{x_n} f(t)dt \ge n\gamma \to +\infty.$$

此时级数发散. □

这里要注意的是, 没有最精确的敛散性判别法, 除了 Cauchy 收敛准则. 对每个收敛的正项级数 $\sum_{n\ge1} a_n$, 我们总可以找到比它收敛速度更慢正项级数 $\sum_{n\ge1} b_n$. 实际上, 令 $S_0 := 0$ 和

$$b_n := \sqrt{S-S_{n-1}} - \sqrt{S-S_n} \quad (n\ge1), \quad S_n := \sum_{1\le k\le n} a_k, \quad S := \lim_{n\to\infty} S_n.$$

因为数列 $\{S_n\}_{n\ge1}$ 非负递增, 所以 $\sum_{n\ge1} b_n$ 是正项级数且部分和为

$$T_n := \sum_{1\le k\le n} b_n = \sqrt{S} - \sqrt{S-S_n} \to \sqrt{S}, \quad n \ge 1.$$

因此级数 $\sum_{n\geq 1} b_n$ 收敛. 但是另一方面

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_n}{\sqrt{S-S_{n-1}}-\sqrt{S-S_n}}=\frac{a_n(\sqrt{S-S_{n-1}}+\sqrt{S-S_n})}{S_n-S_{n-1}}$$
$$=\sqrt{S-S_{n-1}}+\sqrt{S-S_n}\to 0,\quad n\to\infty.$$

例6.2.11. 判断如下级数的收敛性:

$$(1)\ \sum_{n\geq 1}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p,\quad (2)\ \sum_{n\geq 1}\frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}\ (\alpha>0),$$

$$(3)\ F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\sum_{n\geq 1}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{b!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n,$$

这里 $\alpha,\beta,\gamma,x>0$,

$$(4)\ \sum_{n\geq 1}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^s\frac{1}{2n+1},\quad (5)\ \sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(\ln n)^{1+\sigma}}\ (\sigma>0),\quad (6)\ \sum_{n\geq 3}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}.$$

其中 $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ 就是在 (5.2.55) 中引入的超几何级数.

$$(7)\ \sum_{n\geq 1}\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx,\quad (8)\ \sum_{n\geq 1}\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx.$$

解: (1) 因为

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^p\to 1,\quad n\to+\infty,$$

所以考虑

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\left[\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p-1\right]=n\left[\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p-1\right]\sim n\cdot\frac{p}{2n}\to\frac{p}{2}.$$

当 $p>2$ 时级数收敛, 当 $p<2$ 时级数发散. 当 $p=2$ 时,

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\frac{4n^2+3n}{4n^2+4n+1}<1,$$

所以级数发散.

(2) 因为

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\left(\frac{\alpha+n+1}{n+1}-1\right)=\frac{n}{n+1}\alpha\to\alpha,$$

所以当 $\alpha>1$ 时级数收敛, 当 $\alpha<1$ 时级数发散. 当 $\alpha=1$ 时

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\frac{n}{n+1}<1,$$

所以级数发散.

(3) 因为

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}x\to x,$$

所以当 $x<1$ 时级数收敛, 当 $x>1$ 时级数发散. 当 $x=1$ 时

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{\gamma}{n})}{(1+\frac{\alpha}{n})(1+\frac{\beta}{n})}=1+\frac{\gamma+1-\alpha-\beta}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

这里应用了展开

$$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{n}}=1-\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha^2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),\quad \frac{1}{1+\frac{\beta}{n}}=1-\frac{\beta}{n}+\frac{\beta^2}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

故此时级数收敛仅当 $\gamma-\alpha-\beta+1>1$ 时.

(4) 因为

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{2n+3}{2n+1}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^s=2+\frac{2+s}{2n+1}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=1+\frac{1+\frac{s}{2}}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

所以当 $s>0$ 时级数收敛, 当 $s\le 0$ 时级数发散.

(5) 因为

$$\frac{f(e^x)e^x}{f(x)}=\frac{(\ln x)^{1+\sigma}}{x^\sigma}\to 0,\quad x\to+\infty,$$

所以级数收敛.

(6) 因为

$$\frac{f(e^x)e^x}{f(x)}=\ln\ln x\to+\infty,\quad x\to+\infty,$$

所以级数发散.

(7) 因为当 $n\ge 2$ 时 $1-x\ge 1-\frac{1}{n}\ge\frac{1}{2}$ 从而

$$\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx\le\int\frac{1}{n}_0\sqrt{2x}dx=\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{1}{n^{3/2}}.$$

故级数

$$\sum_{n\ge 1}\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx\le\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx+\frac{2\sqrt{2}}{3}\sum_{n\ge 2}\frac{1}{n^{3/2}}$$

收敛.

(8) 由于

$$\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx>\frac{1}{4n^2\pi^2}\int_{n\pi}^{2n\pi}\sin^2 x\,dx=\frac{1}{8n\pi},$$

所以级数发散.

§6.3 任意项级数

在**例 6.1.6** (1) 中, 遗留一个问题即证明级数 $\sum_{n\geq 1}(-1)^n/\sqrt{n}$ 是收敛的. 本节主要研究通项不一定都为正的级数的敛散性.

§6.3.1 级数的绝对收敛和条件收敛

给定一般项级数 $\sum_{n\geq 1} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$. 称该级数是

- **收敛的(convergent)** 如果部分和数列 $\{S_n := \sum_{1\leq k\leq n} a_k\}_{n\geq 1}$ 是收敛的.
- **绝对收敛的(absolutely convergent)** 如果 $\sum_{n\geq 1}|a_n|$ 收敛.
- **条件收敛的(conditional convergent)** 如果 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 收敛但 $\sum_{n\geq 1}|a_n|$ 发散.

根据定义和数列的 Cauchy 收敛准则立即得到绝对收敛级数必是收敛的.

§6.3.2 交错级数和 Leibniz 判别法

交错级数(alternative series) 是指形如

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}a_n, \quad a_n > 0, \tag{6.3.1}$$

的级数.

定理6.3.1. (Leibniz 判别法, 1713) *如果数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 单调递减趋于 0, 则交错级数 (6.3.1) 收敛.*

证: 考察部分和

$$S_n := \sum_{1\leq k\leq n}(-1)^{k-1}a_k.$$

计算得到

$$S_4 = S_2 + (a_3 - a_4) \geq S_2, \quad S_3 = S_1 - (a_2 - a_3) \leq S_1.$$

一般地得到 $\{S_{2n}\}_{n\geq 1}$ 单调递增和 $\{S_{2n+1}\}_{n\geq 1|}$ 单调递减. 另一方面

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1,$$

$$S_{2n+1} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) + a_{2n+1} \geq 0.$$

故

$$S_{2n} \nearrow \text{且 } 0 \leq S_{2n} \leq a_1, \ S_{2n+1} \searrow \text{且 } 0 \leq S_{2n+1} \leq a_1, \ a_{2n+1} + S_{2n} = S_{2n+1}.$$

因此得到

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = S$$

存在.

从而根据**定理** 2.3.9 (5) 可知 $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$ 存在, 即 $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛. □

例6.3.2. 研究如下级数的敛散性:

(1) $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}/n^p$, $p>0$.

(2) $a_n\geq 0$, a_n 单调递减趋于 0, 考察级数

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}.$$

(3) $\sum_{n\geq 1}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

解: (1) $a_n:=1/n^p$ 单调递减趋于 0.

(2) 令

$$c_n:=\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}.$$

因为

$$c_n-c_{n-1}=\frac{(a_1-a_{n+1})+(a_2-a_{n+1})+\cdots+(a_n-a_{n+1})}{n(n+1)}>0,$$

所以 c_n 单调递减趋于 0.

(3) 化简得到

$$\begin{aligned}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) &= \sin\left(n\pi+\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi\right)\\ = \sin\left(n\pi+\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right) &= (-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}.\end{aligned}$$

因为 $\sin\pi/(\sqrt{n^2+1}+n)$ 单调递减趋于 0, 故级数收敛.

§6.3.3 Abel 判别法和 Dirichlet 判别法

在证明**定理 5.4.8** 中已经引入了 Abel 变换

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq k\leq n}a_kb_k &= A_nb_n+\sum_{1\leq k\leq n-1}A_k(b_k-b_{k+1}) && (6.3.2)\\ &= a_nB_n-\sum_{1\leq k\leq n-1}(a_{k+1}-a_k)B_k, && (6.3.3)\end{aligned}$$

其中

$$A_k:=\sum_{1\leq i\leq k}a_i,\quad B_k:=\sum_{1\leq i\leq k}b_i.$$

作为推论直接得到

引理6.3.3. (Abel) 若数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 单调且级数 $\sum_{n\geq 1}b_n$ 部分和 $B_n:=\sum_{1\leq k\leq n}b_k$ 有界 ($|B_n|\leq M$), 则

$$\left|\sum_{1\leq k\leq n}a_kb_k\right|\leq M\left(|a_1|+2|a_n|\right)$$

对任意 $n\geq 1$ 都成立.

证: 不妨假设数列 $\{a_n\}_{n\ge1}$ 单调递增. 根据 (6.3.3) 得到

$$\left|\sum_{1\le k\le n} a_k b_k\right| \le |a_n||B_n| + \sum_{1\le k\le n-1} |a_{k+1}-a_k||B_k|$$

$$\le M|a_n| + M\sum_{1\le k\le n-1}|a_{k+1}-a_k| = M\left(|a_n| + \sum_{1\le k\le n-1}(a_{k+1}-a_k)\right)$$
$$= M\left(|a_n| + a_n - a_1\right) \le M\left(|a_1| + 2|a_n|\right). \quad \square$$

定理6.3.4. 给定级数 $\sum_{n\ge1} a_n$ 和 $\sum_{n\ge1} b_n$. 如果

(1) **(Abel)** 数列 $\{a_n\}_{n\ge1}$ 单调有界且级数 $\sum_{n\ge1} b_n$ 收敛, 或者

(2) **(Dirichlet)** 数列 $\{a_n\}_{n\ge1}$ 单调趋于 0 且级数 $\sum_{n\ge1} b_n$ 的部分和有界,

则级数 $\sum_{n\ge1} a_n b_n$ 收敛.

证: (1) 假设 $|a_n| \le M$. 级数 $\sum_{n\ge1} b_n$ 收敛推出对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $N \in \mathbb{N}$ 对任意 $n > N$ 和任意 $p \in \mathbb{N}$ 有

$$\left|\sum_{n+1\le k\le n+p} b_k\right| < \epsilon.$$

根据**引理** 6.3.3 得到

$$\left|\sum_{n+1\le k\le n+p} a_k b_k\right| \le \epsilon\left(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|\right) \le 3M\epsilon.$$

从而级数 $\sum_{n\ge1} a_n b_n$ 收敛.

(2) 假设 $|B_n| \le M$, 其中 $B_n := \sum_{1\le k\le n} b_k$. 从而得到

$$\left|\sum_{n+1\le i\le n+k} b_i\right| \le \left|\sum_{1\le i\le n+k} b_i - \sum_{1\le i\le n} b_i\right| \le 2M.$$

因为 $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, 所以 $\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N}\, \forall\, n > N$ 有 $|a_n| < \epsilon$. 故再次利用**引理** 6.3.3 得到

$$\left|\sum_{n+1\le k\le n+p} a_k b_k\right| \le 2M\left(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|\right) \le 6M\epsilon. \quad \square$$

例6.3.5. 研究下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n\ge1} \sin(nx)/n$ 和 $\sum_{n\ge1} \cos(nx)/n$, 包括绝对收敛和条件收敛.
(2) $\sum_{n\ge1} (-1)^n (1+\frac{1}{n})^n/\sqrt{n}$, 包括绝对收敛和条件收敛.
(3) $\sum_{n\ge1} (-1)^{n-1}/n^p$, $p > 0$, 包括绝对收敛和条件收敛.
(4) $\sum_{n\ge1} x^n/n^p$, 包括绝对收敛和条件收敛.

(5) $\sum_{n\geq 1}\sin(nx)/n^p$, $p>0, 0<x<\pi$, 包括绝对收敛和条件收敛.

解: (1) 利用三角公式可证

$$2\sin\frac{x}{2}\sum_{1\leq k\leq n}\sin(kx)=\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x,\quad n\geq 1,\ x\in\mathbb{R}.$$

因此数列 $\{\sum_{1\leq k\leq n}\sin(kx)\}_{n\geq 1}$ 有界. 根据 Dirichlet 判别法可知 $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(nx)}{n}$ 收敛. 类似地可证 $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(nx)}{n}$ 也收敛.

但是这两个级数都不是绝对收敛, 比如

$$\sum_{1\leq k\leq n}\frac{|\sin(kx)|}{k}\geq\sum_{1\leq k\leq n}\frac{\sin^2(kx)}{k}=\sum_{1\leq k\leq n}\frac{1-\cos(2kx)}{2k},$$

这里第一个级数发散而第二个级数收敛. 故这两个级数都是条件收敛.

(2) 因为数列 $\{(1+1/n)^n\}_{n\geq 1}$ 单调递增趋于 e, 且级数 $\sum_{n\geq 1}(-1)^n/\sqrt{n}$ 收敛 (Dirichlet 判别法), 所以原来级数收敛. 另一方面,

$$\left|(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{\sqrt{n}}\right|=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\frac{1+1}{\sqrt{n}}\geq\frac{2}{n},$$

可知原级数仅是条件收敛.

(3) 显然当 $p>1$ 时是绝对收敛, $0<p\leq 1$ 时是条件收敛.

(4) 因为 $\overline{\lim}_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|x|^n/n^p}=|x|$, 根据 Cauchy 判别法得到

$$|x|>1\quad\Longrightarrow\quad\text{对任意 }p\text{都绝对收敛}.$$

因为 $\overline{\lim}_{n\to+\infty}|x|^n/n^p=+\infty$, 所以

$$|x|>1\quad\Longrightarrow\quad\text{对任意 }p\text{都发散}.$$

当 $x=1$ 时, 级数变为 $\sum_{n\geq 1}1/n^p$ 故

$$x=1\text{ 且 }p>1\quad\Longrightarrow\quad\text{绝对收敛},\quad x=1\text{ 且 }p\leq 1\quad\Longrightarrow\quad\text{发散}.$$

(5) 把 (1) 的推导稍作修改就得到, $p>1$ 时绝对收敛; $0<p\leq 1$ 时条件收敛.

§6.3.4 级数的乘法

首先考虑两个有限项级数的乘积

$$\sum_{0\leq k\leq n}a_k\cdot\sum_{0\leq k\leq n}b_k=\sum_{0\leq k\leq 2n}c_k=\sum_{0\leq k\leq n}d_k,$$

其中

$$c_k:=\begin{cases}\sum_{i+j=k}a_ib_j, & 0\leq k\leq n,\\ \sum_{i+j=k,\ i\geq k-n}a_ib_j, & n+1\leq k\leq 2n,\end{cases}\quad d_k:=\sum_{0\leq i\leq k-1}(a_ib_k+a_kb_i)+a_kb_k.$$

这两种不同的写法可用下面的图来表示:

$$\begin{array}{cccc} a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & \cdots \\ a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots \\ a_2b_0 & a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \quad c_0 = a_0b_0, \quad c_1 = a_0b_1 + a_1b_0,$$

和

$$\begin{array}{cccc} a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & \cdots \\ a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots \\ a_2b_0 & a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \quad d_0 = a_0b_0, \quad d_1 =_0 b_1 + a_1b_1 + a_1b_0.$$

类似地, 对无穷级数 $\sum_{n\ge1} a_n$ 和 $\sum_{n\ge1} b_n$ 的乘积, 我们有如下两种不同的定义:

- 按对角线 "/" 排列, 得到级数

$$\sum_{n\ge0} c_n, \quad c_n := \sum_{i+j=n} a_ib_j. \tag{6.3.4}$$

- 按曲边形 "⌟" 排列, 得到级数

$$\sum_{n\ge0} d_n, \quad d_n := \sum_{0\le k\le n-1} (a_kb_n + a_nb_k) + a_nb_n. \tag{6.3.5}$$

这样一个很自然的问题是, 这两个级数是否相等?

定理6.3.6. 给定级数 $\sum_{n\ge0} a_n$ 和 $\sum_{n\ge0} b_n$.

(1) 如果 $\sum_{n\ge0} a_n$ 和 $\sum_{n\ge0} b_n$ 收敛, 则 (6.3.5) 收敛且

$$\sum_{n\ge0} a_n \cdot \sum_{n\ge0} b_n = \sum_{n\ge0} d_n.$$

(2) 如果 $\sum_{n\ge0} a_n$ 和 $\sum_{n\ge0} b_n$ 绝对收敛, 则 (6.3.4) 绝对收敛且

$$\sum_{n\ge0} a_n \cdot \sum_{n\ge0} b_n = \sum_{n\ge0} c_n.$$

(3) 如果 $\sum_{n\ge0} a_n, \sum_{n\ge0} b_n$ 和 (6.3.4) 收敛, 则 (6.3.5) 收敛且

$$\sum_{n\ge0} a_n \cdot \sum_{n\ge0} b_n = \sum_{n\ge0} c_n = \sum_{n\ge0} d_n.$$

证: (1) 是显然的, 因为 $\sum_{1\le k\le n} d_k = (\sum_{1\le k\le n} a_k)(\sum_{1\le k\le n} b_k)$. (2) 和 (3) 可由**定理** 6.3.7 和**定理** 6.3.9 得到. □

定理6.3.7. (Cauchy) 如果 $\sum_{n\geq 0} a_n$ 和 $\sum_{n\geq 0} b_n$ 绝对收敛, 则 (6.3.4) 绝对收敛且

$$\sum_{n\geq 0} a_n \cdot \sum_{n\geq 0} b_n = \sum_{n\geq 0} c_n.$$

进一步地, 将 $a_i b_j$ 按任意方式排列求和而成的级数也绝对收敛, 且和也等式 $\sum_{n\geq 0} a_n \cdot \sum_{n\geq 0} b_n$.

证: 假设 $a_{i_1}b_{j_1}, a_{i_2}b_{j_2}, \cdots, a_{i_k}b_{j_k}$, 是任意一种排列, 对任意 n 令

$$N_n := \max_{1\leq k\leq n} \{i_k, j_k\}.$$

从而得到

$$\sum_{1\leq k\leq n} |a_{i_k} b_{j_k}| \leq \left(\sum_{0\leq i\leq N_n} |a_i|\right)\left(\sum_{0\leq j\leq N_n} |b_j|\right) \leq \left(\sum_{n\geq 0} |a_n|\right)\left(\sum_{n\geq 0} |b_n|\right).$$

因此 $\sum_{k\geq 1} a_{i_k} b_{j_k}$ 绝对收敛. 根据**定理** 6.3.11 得到

$$\sum_{k\geq 1} a_{i_k} b_{j_k} = \sum_{n\geq 0} d_n = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot \sum_{n\geq 0} b_n. \quad \square$$

上述两个级数都“绝对收敛”的条件可减弱为至少有一个是绝对收敛, 但此时结论也相应地减弱为收敛.

定理6.3.8. (Mertens) 如果 $\sum_{n\geq 0} a_n$ 和 $\sum_{n\geq 0} b_n$ 收敛, 且其中至少有一个级数绝对收敛, 则 (6.3.4) 收敛且

$$\sum_{n\geq 0} a_n \cdot \sum_{n\geq 0} b_n = \sum_{n\geq 0} c_n.$$

证: 假设级数 $\sum_{n\geq 0} a_n$ 绝对收敛. 令

$$A_n := \sum_{0\leq k\leq n} a_k, \quad B_n := \sum_{0\leq k\leq n} b_k, \quad C_n := \sum_{0\leq k\leq n} c_k.$$

则 A_n 收敛到 A 和 B_n 收敛到 B, 且

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{0\leq k\leq n} \sum_{i+j=k} a_i b_j = a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \cdots + a_n B_0 \\ &= a_0(B + B_n - B) + a_1(B + B_{n-1} - B) + \cdots + a_n(B + B_n - B) \\ &= (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)B + [a_0(B_n - B) + a_1(B_{n-1} - B) + \cdots + a_n(B_0 - B)] \\ &= A_n B + \delta_n, \end{aligned}$$

这里

$$\delta_n := a_0(B_n - B) + a_1(B_{n-1} - B) + \cdots + a_n(B_0 - B).$$

为了证明 (6.3.4) 现在只要证明 $\lim_{n\to+\infty}\delta_n=0$.

因为 $B_n\to B$, 所以存在 $K>0$ 使得 $|B_n-B|\le K$ 对任意 $n\ge 0$ 都成立. 另一方面, 级数 $\sum_{n\ge0}a_n$ 绝对收敛推出对任意 $\epsilon>0$ 存在 $N_1\in\mathbb{N}$, 对任意 $n>N_1$ 有

$$|a_{N_1+1}|+\cdots+|a_n|<\frac{\epsilon}{2K+1}.$$

令 $L:=|a_0|+\cdots+|a_{N_1}|$. 由于 $B_n-B\to0$, 故存在 $N_2\in\mathbb{N}$ 对任意 $n>N_2$ 有

$$|B_n-B|<\frac{\epsilon}{2L+1}.$$

从而对任意 $n>N_1+N_2$ 得到

$$\begin{aligned}|\delta_n| &\le \sum_{0\le k\le N_1}|a_k||B_{n-k}-B|+\sum_{N_1+1\le k\le n}|a_k||B_{n-k}-B|\\ &\le \frac{\epsilon}{2L+1}\left(|a_0|+\cdots+|a_{N_1}|\right)+\frac{\epsilon}{2K+1}K\\ &\le \frac{L}{2L+1}\epsilon+\frac{K}{2K+1}\epsilon \ < \ \epsilon. \ \square\end{aligned}$$

定理6.3.9. (Abel) 如果 $\sum_{n\ge0}a_n$, $\sum_{n\ge0}b_n$ 和 (6.3.4) 收敛, 则 (6.3.5) 收敛且

$$\sum_{n\ge0}a_n\cdot\sum_{n\ge0}b_n=\sum_{n\ge0}c_n=\sum_{n\ge0}d_n.$$

证: 首先证明如下引理:

$$\sum_{n\ge0}c_n=C\text{ 收敛}\quad\Longrightarrow\quad\lim_{x\to1-}f(x)=C,\quad f(x):=\sum_{n\ge0}c_nx^n\ (0\le x<1).$$

因为 $\sum_{n\ge0}c_n$ 收敛, 所以 $|c_n|\le K$ 对某个正常数 $K>0$ 成立. 根据计算

$$\sum_{n\ge0}|c_n|x^n\le K\sum_{n\ge0}x^n=\frac{K}{1-x},$$

可知 $\sum_{n\ge0}c_nx^n$ 绝对收敛. 令 $C_n:=\sum_{0\le k\le n}c_k$ 和 $C_{-1}=0$. 则 $C_n\to C$ 和

$$\begin{aligned}\sum_{0\le k\le n}c_kx^k &= \sum_{0\le k\le n}(C_k-C_{k-1})x^k=\sum_{0\le k\le n}C_kx^k-x\sum_{0\le k\le n-1}C_kx^k\\ &= C_nx^n+(1-x)\sum_{0\le k\le n-1}C_kx^k\\ &= C_nx^n+(1-x)\sum_{0\le k\le n-1}(C_k-C)x^k+C(1-x^n).\end{aligned}$$

令 $n\to+\infty$ 得到

$$f(x)=C+(1-x)\sum_{n\ge0}(C_n-C)x^n.$$

由于 $C_n \to C$, 所以对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $N \in \mathbb{N}$ 对任意 $n > N$ 有

$$|C_n - C| < \frac{\epsilon}{2}.$$

记 $M := \sum_{0 \le k \le N} |C_k - C|$. 则得到

$$\begin{aligned} |f(x) - C| &\le (1-x)\sum_{0\le k\le N}|C_k - C|x^k + (1-x)\sum_{n>N}|C_n - C|x^n \\ &\le M(1-x) + (1-x)\frac{\epsilon}{2}\cdot\frac{x^{N+1}}{1-x} \le M(1-x) + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

当 $x \in (1 - \epsilon/(2M+1), 1)$ 时得到 $|f()x) - C| < \epsilon$.

考虑 (6.3.4). 则

$$\sum_{n\ge 0} c_n x^n = \sum_{n\ge 0} a_n x^n \cdot \sum_{n\ge 0} b_n x^n.$$

利用上述引理, 当 $x \in [0,1)$ 时

$$\sum_{n\ge 0} c_n = \sum_{n\ge 0} a_n \cdot \sum_{n\ge 0} b_n. \quad \square$$

注6.3.10. (1) 如果级数 $\sum_{n\ge 0} a_n$ 和 $\sum_{n\ge 0} b_n$ 都是条件收敛, 则 (6.3.4) 不一定收敛. 比如考虑

$$a_n = b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}.$$

此时得到

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{i+j=n}\frac{(-1)^{i+j+2}}{\sqrt{(i+1)(j+1)}} = \sum_{i+j=n}\frac{(-1)^n}{\sqrt{(1+i)(1+j)}} \\ &= (-1)^n \sum_{0\le i\le n}\frac{1}{\sqrt{(i+1)(n+1-i)}} \\ &= (-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{3(n-1)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right). \end{aligned}$$

因为

$$\sum_{0\le i\le n}\frac{1}{\sqrt{(i+1)(n+1-i)}} \ge \sum_{0\le i\le n}\frac{1}{\sqrt{[(n+2)/2]^2}} = 2\frac{n+1}{n+2} \to 2, \quad n \to +\infty.$$

所以 $\lim_{n\to+\infty} c_n \ne 0$ 从而级数 $\sum_{n\ge 0} c_n$ 发散.

(2) 根据**定理** 6.3.8 和**定理** 6.3.9, 得到

$$\sum_{n\ge 0} a_n \text{ 和 } \sum_{n\ge 0} b_n \text{ 中至少有一个绝对收敛} \implies \sum_{n\ge 0} c_n = \sum_{n\ge 0} d_n \text{ 存在且相等.}$$

而且根据 (1) 可知“至少有一个级数是绝对收敛”的假设条件不能减弱为“两个级数都仅是条件收敛”.

§6.3.5 级数的重排

给定级数 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 和双射 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, 称级数 $\sum_{n\geq 1} a_{f(n)}$ 为级数 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 的**重排 (rearrangement)**.

定理6.3.11. (Dirichlet, 1829) 若级数 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 绝对收敛, 则任意重排 $\sum_{n\geq 1} a_{f(n)}$ 也绝对收敛且

$$\sum_{n\geq 1} a_n = \sum_{n\geq 1} a_{f(n)}. \tag{6.3.6}$$

证: (1) $a_n \geq 0$. 此时令

$$S_n := \sum_{1\leq k\leq n} a_k, \quad S := \sum_{n\geq 1} a_n, \quad S_n(f) = \sum_{1\leq k\leq n} a_{f(k)}.$$

此时

$$S_n(f) \leq \sum_{1\leq k\leq N} a_k = S_N \leq S, \quad N := \max_{1\leq k\leq n} f(k).$$

所以 $\sum_{n\geq 1} a_{f(n)} = S(f)$ 收敛且 $S(f) \leq S$. 另一方面, 因为 $k = f^{-1}(f(k))$, 所以 $S = (S(f))(f^{-1}) \leq S(f)$. 故 $S = S(f)$.

(2) 对一般情形, 作分解

$$a_n := \frac{a_n + |a_n|}{2} - \frac{|a_n| - a_n}{2} =: a_n^+ - a_n^-, \quad a_m^{\pm} \geq 0$$

和

$$a_{f(n)} = a_{f(n)}^+ - a_{f(n)}^-, \quad a_{f(n)}^{\pm} \geq 0.$$

根据观察

$$a_n^{\pm} = \frac{|a_n| + a_n}{2} \leq |a_n|, \quad |a_n| = a_n^+ + a_n^-,$$

得到 $\sum_{n\geq 1} a_n^{\pm}$ 收敛当且仅当 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 绝对收敛. 令

$$S^{\pm} := \sum_{n\geq 1} a_n^{\pm}.$$

从 (1) 得到 $\sum_{n\geq 1} a_{f(n)}^{\pm}$ 绝对收敛且

$$\sum_{n\geq 1} a_{f(n)}^{\pm} = \sum_{n\geq 1} a_n^{\pm} = S_n^{\pm}$$

从而

$$\sum_{n\geq 1} a_{f(n)} = \sum_{n\geq 1} a_{f(n)}^+ - \sum_{n\geq 1} a_{f(n)}^- = S^+ - S^- = \sum_{n\geq 1} a_n$$

绝对收敛. □

定理 6.3.11 告诉我们绝对收敛级数的任意重排也绝对收敛且值和原级数一样, 那么条件收敛级数的重排是否也有类似的现象呢? Riemann 在 1854 年的 Georg August University of Göttingen 哲学系就职申请报告中给出了一个令人吃惊的结果[2]: Riemann's Remarkable Rearrangement Result.

定理6.3.12. (Riemann, 1854) 假设级数 $\sum_{n\ge1}a_n$ 是条件收敛的. 则对任意常数 $b\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, 存在 $\sum_{n\ge1}a_n$ 的重排 $\sum_{n\ge1}a_{f(n)}$ 满足 $\sum_{n\ge1}a_{f(n)}=b$.

例6.3.13. 考虑定积分

$$\begin{aligned}\ln 2 &= \int_0^1\frac{dx}{1+x} = \int_0^1\sum_{n\ge0}(-x)^n dx\ (\text{下一步需要用到 (14.2.4)})\\ &= \sum_{n\ge0}\int_0^1(-x)^n dx = \sum_{n\ge0}\frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n\ge1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.\end{aligned}$$

考虑如下重排:

n	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
a_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{6}$	$\cdots$
$a_{f(n)}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{8}$	$\cdots$

即重排是按照 "1 个正项 + 2 个负项" 这样的次序, 从而得到

$$\begin{aligned}\sum_{n\ge0}a_{f(n)} &= \left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\cdots\\ &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\cdots\\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\right) = \frac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

上面重排可一般化, 即给定 $p,q\in\mathbb{N}$, 考虑重排

$$\sum_{n\ge0}a_{f(n)} := \Big[\underbrace{\text{正项}}_{p}+\underbrace{\text{负项}}_{q}\Big]+\cdots.$$

因此

$$\sum_{n\ge0}a_{f(n)}=\lim_{k\to+\infty}S_{(p+q)k},$$

这里

$$S_{(p+q)k} = \left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2p-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2q}\right)+\cdots$$

[2] Bernhard Riemann 著 (李培廉 译): **黎曼全集** (第一卷), 高等教育出版社, 2016.

$$
\begin{aligned}
&+\left[\frac{1}{2p(k-1)+1}+\cdots+\frac{1}{2pk-1}\right]-\left[\frac{1}{2q(k-1)+2}+\cdots+\frac{1}{2qk}\right]\\
=&\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2pk-1}+\frac{1}{2pk}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{pk}\right)\\
&\qquad -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{qk}\right).
\end{aligned}
$$

根据

$$\sum_{1\le k\le n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+r_n,\quad \lim_{n\to+\infty}r_n=0,$$

得到

$$
\begin{aligned}
S_{(p+q)k} &= \left[\ln(2pk)+\gamma+r_{2pk}\right]-\frac{1}{2}\left[\ln(pk)+\gamma+r_{pk}\right]-\frac{1}{2}\left[\ln(qk)+\gamma+r_{qk}\right]\\
&= \ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{q}{p}+r_{2pk}-\frac{1}{2}\left(r_{pk}+r_{qk}\right)\ \to\ \ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{q}{p}.
\end{aligned}
$$

因为 $q/p\in\mathbb{Q}$, 所以对形如 $b=\ln(2\sqrt{r})$, $r\in\mathbb{Q}$, **定理** 6.3.12 成立.

证明定理 6.3.12. (1) $b\in\mathbb{R}$. 不失一般性假设 $b>0$, 否则的话若 $b<0$, 则可事先考虑条件收敛级数 $\sum_{n\ge1}(-a_n)$ 和 $-b$; 如果 $b=0$, 则可事先考虑条件收敛级数 $\sum_{n\ge n_0+1}a_n$ 和 $b+a_{n_0}\ne0$. 作分解

$$a_n=\frac{a_n+|a_n|}{2}-\frac{|a_n|-a_n}{2}=:a_n^+-a_n^-,\quad a_n^\pm\ge0.$$

因为 $\sum_{n\ge1}|a_n|=+\infty$, 所以 $\sum_{n\ge1}a_n^\pm=+\infty$. 令

$$S_n^\pm:=\sum_{1\le k\le n}a_m^\pm\to+\infty.$$

故只要 n 充分大就得到 $S_n^+>b$; 从而存在 $\{n\in\mathbb{N}|S_n^+>b\}$ 中的最小元 m_1 使得

$$S_{m_1}^+>b>S_{m_1-1}^+=S_{m_1}^+-a_{m_1}^+$$

成立. 因为 $S_{m_1}^+-S_n^-<b$ 当 n 充分大时成立, 存在 $\{n\in\mathbb{N}|S_{m_1}^+-S_n^-<b\}$ 中的最小元 n_1 使得

$$S_{m_1}^+-S_{n_1}^-<b<S_{m_1}^+-S_{n_1}^-+a_{n_1}^-$$

成立. 继续这个过程就得到递增数列

$$m_1<m_2<\cdots,\quad n_1<n_2<\cdots,$$

使得

$$S_{m_k}^+-S_{n_k}^-<b<S_{m_k}^+-S_{n_k}^-+a_{n_k}^-,\quad S_{m_k}^+-S_{n_{k-1}}^->b>S_{m_k}^+-S_{n_{k-1}}^--a_{m_k}^+.$$

考虑级数

$$\begin{aligned}&(a_1^+ + \cdots + a_{m_1}^+) - (a_1^- + \cdots + a_{n_1}^-) + \left(a_{m_1+1}^+ + \cdots + a_{m_2}^+\right)\\ &- \left(a_{n_1+1}^- + \cdots + a_{n_2}^-\right) + \left(a_{m_2+1}^+ + \cdots + a_{m_3}^+\right) \quad =: \sum_{n\geq 1} b_n.\end{aligned}$$

其部分和 $\sum_{1\leq k\leq n} b_k$ 满足

$$\left|\sum_{1\leq k\leq n} b_k - b\right| \leq \begin{cases} a^+_{m_{\lfloor n/2\rfloor+1}}, & n \text{ 奇数},\\ a^-_{m_{\lfloor n/2\rfloor}}, & n \text{ 偶数}.\end{cases}$$

因为 $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, 所以 $\lim_{n\to+\infty} a_n^+ = \lim_{n\to+\infty} a_n^- = 0$. 从而得到 $\sum_{n\geq 1} a_{f(n)} = \sum_{n\geq 1} b_n = b$.

(2) $b = +\infty$. 此时 $\sum_{n\geq 1} a_n^+ = +\infty$. 存在 m_1 使得

$$S^+_{m_1} > 1 - a_1^-$$

成立. 因为 $S^+_m \to +\infty$, 当 $m_1 < m \to +\infty$ 时, 所以存在 $m_2 > m_1$ 使得

$$S^+_{m_2} > (1 - a_1^-) + (1 - a_2^-) = 2 - a_1^- - a_2^-$$

成立. 这个过程持续下去就得到严格递增趋于 $+\infty$ 的数列 $m_1 < m_2 < \cdots$ 使得

$$S^+_{m_k} > k - S^-_k$$

成立. 故得到 $\sum_{k\geq 1} a_k = +\infty$.

(3) $b = -\infty$. 此情形可转成称 (2). $\square$

例6.3.14. (1) $\sum_{n\geq 1} a_n$ 绝对收敛 $\Longrightarrow \sum_{n\geq 1} a_n(a_1 + \cdots + a_n)$ 收敛.

(2) $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0 \not\Longrightarrow \sum_{n\geq 2} |a_n - a_{n-1}| < +\infty$.

(3) $2|a_{n+1}| \leq |a_n| \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} |a_n$ 收敛.

(4) $\sum_{n\geq 1} b_n$ 收敛且 $\sum_{n\geq 1}(a_n - a_{n-1})$ 绝对收敛 $\Longrightarrow \sum_{n\geq 1} a_n b_n$ 收敛.

(5) $\sum_{n\geq 1} a_n$ 发散且 $a_n > 0 \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} a_n/S_n$ 发散但是 $\sum_{n\geq 1} a_n/S_n^2$ 收敛, 其中 $S_n = \sum_{1\leq k\leq n} a_k$.

(6) $\sum_{n\geq 1} a_n$ 收敛且 $a_n > 0 \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} q_n/r_n$ 发散, 其中 $r_n := \sum_{k\geq n} a_k$.

(7) $\sum_{n\geq 1} a_n/n^\alpha$ 收敛且 $\beta > \alpha \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} a_n/n^\beta$ 收敛.

(8) $\sum_{n\geq 1} a_n/n^\alpha$ 收敛且 $\alpha > 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}(a_1 + \cdots + a_n)/n^\alpha = 0$.

(9) 函数 f 在 $x = 0$ 附近二阶导数存在且连续, $\lim_{x\to 0} f(x)/x = 0 \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} f(1/n)$ 绝对收敛.

(10) 函数 f 在 $[0,+\infty)$ 上单调且反常积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 $\Longrightarrow$

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \lim_{h\to 0+} h\sum_{n\geq 1} f(nh).$$

(11) 求极限

$$\lim_{\to 1-}(1-t)\sum_{n\geq 1}\frac{t^n}{1+t^n}.$$

(12) 证明级数 $\sum_{n\geq 1}(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}/n$ 条件收敛.

(13) $\sum_{n\geq 1} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛且 $\lim_{n\to+\infty} na_n$ 存在 $\Longrightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ 收敛.

(14) $\sum_{n\geq 1} a_n$ 收敛且 $\lim_{n\to+\infty} na_n = 0 \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛且 $\sum_{n\geq 1} n(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n\geq 1} a_n$.

(15) 假设数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 单调递减且 $a_n > 0$. 如果级数 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 收敛, 证明极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}}{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}} = 1.$$

(16) **(Cauchy 并项判别法) (Cauchy condensation test)**假设数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 单调递减且 $a_n > 0$. 证明 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 和 $\sum_{n\geq 1} 2^n a_{2^n}$ 有相同的敛散性.

(17) 假设数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 递推定义

$$a_1 = 1,\quad a_2 = 2,\quad a_n = a_{n-2} + a_{n-1}\quad (n\geq 3).$$

证明级数 $\sum_{n\geq 1} 1/a_n$ 收敛.

证: (1) 根据假设级数 $\sum_{n\geq 1}|a_n|$ 收敛, 且 $\sum_{1\leq k\leq n}|a_k|$ 单调递增且有界, 根据 Dirichlet 判别法原级数收敛.

(2) 反例为 $a_n = (-1)^n n$.

(3) 只要说明 $S_n := \sum_{1\leq k\leq n}|a_k|$ 有界即可. 根据假设条件得到

$$S_{n-1} \leq S_n \leq |a_1| + \sum_{2\leq k\leq n}\frac{|a_{k-1}|}{2} = |a_1| + \frac{1}{2}\sum_{1\leq k\leq n-1}|a_k| = |a_1| + \frac{1}{2}S_{n-1}$$

所以 $S_{n-1}\leq 2|a_1|$.

(4) 因为 $\sum_{n\geq 2}|a_n - a_{n+1}|$ 收敛, 所以对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $N_1\in\mathbb{N}$ 对任意 $n > N_1$ 和任意 $p\in\mathbb{N}$, 有

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p} - a_{n+p-1}| < \epsilon$$

故 $|a_{n+p} - a_{n+1}| < \epsilon$. 从而存在常数 $M_1 > 0$ 使得 $|a_n|\leq M_1$ 对任意 $n\in\mathbb{N}$ 都成立.

因为 $\sum_{n\geq 1} b_n$ 收敛, 所以存在常数 M_2 使得 $|B_n|\leq M_2$ 对任意 n 都成立, 其中 $B_n := \sum_{1\leq k\leq n} b_k$. 除此之外, 对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $N_2\in\mathbb{N}$ 对任意 $n > N_2$ 和任意 $p\in\mathbb{N}$, 有

$$|B_{n+p} - B_n| < \epsilon.$$

最后对任意 $n > N := \max\{N_1, N_2\}$ 和任意 $p \in \mathbb{N}$ 有

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{1\le k\le p} a_{n+k}b_{n+k}\right| &= \left|a_{n+p}b_{n+p} + \sum_{n+1\le k\le n+p-1} B_k(a_k - a_{k+1}) - a_{n+1}B_n\right| \\
&\le \sum_{n+1\le k\le n+p-1} |B_k||a_k - a_{k+1}| + |a_{n+p}||B_{n+p} - B_n| + |a_{n+p} - a_{n+1}||B_n| \\
&\le M_2 \sum_{n+1\le k\le n+p-1} |a_k - a_{k+1}| + M_1|B_{n+p} - B_n| + \epsilon M_2 \le (M_1 + 2M_2)\epsilon.
\end{aligned}
$$

(5) $\sum_{n\ge1} a_n$ 发散且 $a_n > 0$ 推出 S_n 单调递增趋于 $+\infty$. 对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $p \in \mathbb{N}$ 满足 $S_{n+p} \ge 2S_n$. 故

$$
\sum_{n+1\le k\le n+p} \frac{a_k}{S_k} > \frac{1}{S_{n+p}} \sum_{n+1\le k\le n+p} a_k = \frac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}} = 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}} > \frac{1}{2}.
$$

根据 Cauchy 收敛准则知级数 $\sum_{n\ge1} a_n/S_n$ 发散.

但是级数 $\sum_{n\ge1} a_n/S_n^2$ 却是收敛的, 这是因为

$$
\sum_{n+1\le k\le n+p} \frac{a_k}{S_k^2} \le \sum_{n+1\le k\le n+p} \frac{S_k - S_{k-1}}{S_kS_{k-1}} = \sum_{n+1\le k\le n+p} \left(\frac{1}{S_{k-1}} - \frac{1}{S_k}\right) < \frac{1}{S_n}.
$$

(6) 因为 $\sum_{n\ge1} a_n$ 收敛且 $a_n > 0$, 所以 $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ 且 r_n 单调递减趋于 0. 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 存在 $p \in \mathbb{N}$ 满足 $r_{n+p}/r_n < 1/2$. 故

(7) 显然.

(8) 固定任意 $\epsilon > 0$. 存在 $N \in \mathbb{N}$ 对任意 $n > N$ 和任意 $p \in \mathbb{N}$ 有

$$
\left|\sum_{n+1\le k\le n+p} \frac{a_k}{k^\alpha}\right| < \epsilon.
$$

从而得到

$$
\left|\sum_{n+1\le k\le n+p} \frac{a_k}{(n+p)^\alpha}\right| = \left|\sum_{n+1\le k\le n+p} \frac{a_k}{k^\alpha}\left(\frac{k}{n+p}\right)^\alpha\right| \le 3\epsilon.
$$

因为对固定 n

$$
\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{(n+p)^\alpha} \sum_{1\le k\le n} a_k = 0,
$$

所以存在 $p \in \mathbb{N}$ 满足. .

$$
\left|\frac{1}{(n+p)^\alpha} \sum_{1\le k\le n} a_k\right| < \epsilon.
$$

最后得到

$$
\left|\sum_{1\le k\le n+p} \frac{a_k}{(n+p)^\alpha}\right| < \epsilon + 3\epsilon = 4\epsilon.
$$

(9) 不妨假设 $f \in C^2([-1,1])$. 则得到 $f(0)=f'(0)=0$ 且

$$f(x)=\frac{f''(\xi)}{2}x^2,\quad \exists\,|\xi|\le|x|<1.$$

二阶导数的连续性推出 $|f''(x)|\le M$ 从而 $|f(x)|\le Mx^2/2$. 因此

$$\sum_{n\ge1} f\left(\frac{1}{n}\right)\le\sum_{n\ge1}\frac{M}{2n^2}=\frac{\pi^2}{12}M.$$

(10) 不妨假设函数 f 单调递增. 因为 f 非负所以

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(x)dx &= \sum_{k\ge1}\int_{(k-1)h}^{kh} f(x)dx \le \sum_{k\ge1} hf(kh)\\ &\le \sum_{k\ge1}\int_{kh}^{(k+1)h} f(x)dx = \int_h^{+\infty} f(x)dx.\end{aligned}$$

所以得到

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx=\lim_{h\to0+} h\sum_{k\ge1} f(kh).$$

(11) 计算得到

$$\begin{aligned}\lim_{t\to1-}(1-t)\sum_{n\ge1}\frac{t^n}{1+t^n} &= \lim_{t\to1-}\left(1-e^{\ln t}\right)\sum_{n\ge1}\frac{e^{n\ln t}}{1+e^{n\ln t}}\\ &= \lim_{h\to0+}\frac{1-e^{-h}}{h}\cdot h\sum_{n\ge1}\frac{e^{-nh}}{1+e^{-nh}} \to \int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = \ln 2.\end{aligned}$$

(12) 显然级数不可能时绝对收敛. 计算

$$\sum_{n\ge1}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}=\sum_{k\ge1}(-1)^k\left[\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}\right]=:\sum_{k\ge1}(-1)^k a_k.$$

因为

$$\frac{2}{k+1}=\frac{2k}{k^2+2k}<a_k<\frac{2k}{k^2}=\frac{2}{k},$$

所以 a_k 单调递减趋于 0. 从而利用定理 6.3.1 可知原级数条件是收敛.

(13) 根据 Abel 变换得到

$$\sum_{1\le k\le n} a_k=\sum_{1\le k\le n} a_k\cdot 1=na_n+\sum_{1\le k\le n-1} k(a_k-a_{k-1})$$

故原级数收敛.

(14) 根据 Abel 变换得到

$$\sum_{1\le k\le n-1} k(a_k-a_{k-1})=\sum_{1\le k\le n} a_k-na_n\to\sum_{n\ge1} a_n.$$

故 $\sum_{n\geq 1} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛且和为 $\sum_{n\geq 1} a_n$.

(15) 单调递减推出

$$a_{2k} \leq a_{2k-1} \leq a_{2k-2}, \quad \forall\, k \geq 2.$$

因此得到

$$\sum_{1\leq k\leq n} a_{2k} \leq \sum_{1\leq k\leq n} a_{2k-1} \leq a_1 + \sum_{2\leq k\leq n} a_{2k-2} = a_1 - a_{2n} + \sum_{1\leq k\leq n} a_{2k}.$$

从而有

$$1 \leq \frac{\sum_{1\leq k\leq n} a_{2k-1}}{\sum_{1\leq k\leq n} a_{2k}} \leq 1 + \frac{a_1}{\sum_{1\leq k\leq n} a_{2k}}.$$

另一方面部分和 S_{2n} 满足

$$S_{2n} = \sum_{1\leq k\leq n} a_{2k-1} + \sum_{1\leq k\leq n} a_{2k} \leq a_1 + 2\sum_{1\leq k\leq n} a_{2k}$$

故有

$$\sum_{1\leq k\leq n} a_{2k} \geq \frac{S_{2n} - a_1}{2}.$$

因此得到

$$1 \leq \frac{\sum_{1\leq k\leq n} a_{2k-1}}{\sum_{1\leq k\leq n} a_{2k}} \leq 1 + \frac{2a_1}{S_{2n} - a_1} \to 1$$

这是因为 $S_n \to +\infty$.

(16) 基本想法和 (15) 类似.

(17) 首先断言

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \leq a_n \leq 2^n, \quad \forall\, n \geq 1.$$

假设断言对 $1, \cdots, n-1$ 都成立, 则

$$a_n \leq 2^{n-2} + 2^{n-1} = \frac{1}{4}2^n + \frac{1}{2}2^n \leq \frac{3}{4}2^n \leq 2^n$$

和

$$a_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^n\left(\frac{4}{9} + \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{10}{9} > \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

故得到

$$1 = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n} \leq \sum_{n\geq 1}\frac{1}{a_n} \leq \sum_{n\geq 1}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2/3}{1-2/3} = 2. \quad \square$$

Schlömilch[3] 将例 **6.3.14** (16) 推广如下. 假设 $\{u_n\}_{n\geq 1}$ 是严格单调递增数列且 $u_1 > 0$. 令

$$\Delta^+ u_n := u_{n+1} - u_n, \quad n \geq 1$$

且假设 $\Delta^+ u_{n+1}/\Delta^+ u_n \leq C$ 对任意 $n \geq 1$ 都成立. 则级数 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 收敛当且仅当 $\sum_{n\geq 1} \Delta^+ u_n a_{u_n}$ 收敛. 如果取 $u_n = 2^n$ 则 $\Delta^+ u_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n$ 就得到 Cauchy 的并项判别法.

[3]Oscar Schlömilch, 1823 年 4 月 13 日 - 1901 年 2 月 7 日, 德国数学家. 因 Schlömilch 函数闻名, 他在 1856 年创立了 Zeischrift für Mathematik und Physik 杂志.

§6.4 * 无穷级数和无穷乘积

对有限和 $\sum_{1\le k\le n} a_n$, 观察到

$$\sum_{1\le k\le n} a_k = \ln\left(\prod_{1\le k\le n} e^{a_k}\right).$$

因此我们可以通过研究 $\prod_{1\le k\le n} p_k$ 来研究 $\sum_{1\le k\le n} a_k$. 类似的想法可应用到无穷级数.

§6.4.1 * 无穷乘积

给定数列 $\{p_n\}_{n\ge1}$ 其中 $p_n\neq 0$. 形式乘积

$$\prod_{n\ge1} p_n := p_1\cdot p_2\cdots p_n\cdots \tag{6.4.1}$$

称为**无穷乘积(infinite product)**. 称 p_n 为无穷乘积的**通项(general term)**, 而把其**部分积(partial product)** 记作

$$P_n := \prod_{1\le k\le n} p_k,\quad n\ge 1. \tag{6.4.2}$$

称无穷乘积 (6.4.1) **收敛(convergence)** 如果存在非零有限数 P 使得

$$P = \lim_{n\to+\infty} P_n.$$

否则称无穷乘积**发散(divergence)**.

注6.4.1. (1) 根据上述定义无穷乘积如果收敛的话, 积必非零. 故无穷乘积

$$\prod_{n\ge1}\frac{1}{2^n}$$

是发散的, 虽然部分积 $P_n = 1/2^{n(n+1)/2}$ 收敛.

(2) 如果无穷乘积 (6.4.1) 收敛, 则 $P_n\neq 0$ 对任意充分大 n 都成立.

(3) 假设无穷乘积 $\prod_{n\ge1} p_n$ 和 $\prod_{n\ge1} q_n$ 都收敛 $\not\Rightarrow$ $\prod_{n\ge1}(p_n+q_n)$ 收敛. 比如 $p_n = 1-1/n^2$ 和 $q_n = 1+1/n^2$.

性质6.4.2. (1) **(无穷乘积收敛的必要条件)** 如果无穷乘积 (6.4.1) 收敛, 则

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = 1,\quad \lim_{m\to+\infty}\prod_{n\ge m} p_n = 1.$$

(2) 如果无穷乘积 (6.4.1) 收敛, 则任意改变有限项 (增加有限个非零因子或删除有限个因子) 所得的无穷乘积仍旧收敛.

(3) 如果无穷乘积 $\prod_{n\geq 1} p_n$ 和 $\prod_{n\geq 1} q_n$ 都收敛, 则 $\prod_{n\geq 1} p_n q_n$ 也收敛且

$$\prod_{n\geq 1} p_n q_n = \prod_{n\geq 1} p_n \cdot \prod_{n\geq 1} q_n.$$

(4) 如果无穷乘积 (6.4.1) 收敛, 则任意添加括号后形成的无穷乘积也收敛. 但反之不一定成立.

证: (1) 假设 $\lim_{n\to+\infty} P_n = P$, 其中 $P_n = \prod_{1\leq k\leq n} p_k$. 根据定义得到

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{P}{P} = 1.$$

另外

$$\lim_{m\to+\infty} \prod_{n\geq m} p_n = \lim_{m\to+\infty} \frac{\prod_{n\geq 1} p_n}{\prod_{1\leq n\leq m-1} p_n} = 1.$$

(2) 显然.

(3) 显然.

(4) 显然. 反之不成立的例子是

$$p_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n \text{ 奇数}, \\ 2, & n \text{ 偶数}, \end{cases}$$

收敛, 但是一旦去掉括号则发散, 利用 (1). □

例6.4.3. (1) 我们在例 5.4.22 已经证明了**Wallis 公式** (5.4.31):

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n\geq 1}\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) \quad \text{或} \quad \frac{\pi}{4} = \prod_{n\geq 1}\left[1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right]. \tag{6.4.3}$$

一般地有如下无穷乘积展开:

$$\sin x = x\prod_{n\geq 1}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right), \quad \cos x = \prod_{n\geq 1}\left[1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right]. \tag{6.4.4}$$

在 (6.4.4) 中第一个式子取 $x = \pi/2$ 得到 (6.4.3).

(2) 当 $x \neq 0$ 时

$$\prod_{1\leq k\leq n} \cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}} = \frac{x/2^n}{\sin(x/2^n)} \cdot \frac{\sin x}{x} \to \frac{\sin x}{x}.$$

故得到

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n\geq 1} \cos\frac{x}{2^n}. \tag{6.4.5}$$

上述公式在 $x = 0$ 显然成立, 当然此时函数 $\sin x/x$ 是在 $x = 0$ 处做了延拓. 在 (6.4.5) 取 $x = \pi/2$ 得到**Vieta 公式**

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n\geq 1} \cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots, \tag{6.4.6}$$

这里应用了公式 $\cos(a/2)=\sqrt{(1+\cos a)/2}$.

(3) 无穷乘积

$$\prod_{n\ge1}a^{\frac{(-1)^n}{n}}=a^{-\ln 2},\quad a>0,$$

这是因为部分积为 $P_n=a^{-1}a^{1/2}\cdots a^{(-1)^n/n}=a^{-\sum_{1\le k\le n}(-1)^{k-1}/k}$.

(4) 研究无穷乘积

$$\prod_{n\ge1}\left[1+\frac{1}{x^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right]$$

的敛散性. 令

$$p_n:=1+\left[\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^n.$$

因为数列 $\{(1+1/n)^n\}_{n\ge1}$ 单调递增趋于 e, 所以当 $|x|<e$ 时, $p_n\nrightarrow 1$.

现在假设 $|x|=e$. 根据 (2.3.3) 的证明得到 $a_n=(1+1/n)^n<3$, 并结合 (2.3.4) 得到

$$0\le e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{n}<\frac{3}{n}.$$

因为

$$p_n=1+\frac{(\mathrm{sgn}(x))^n}{e^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}=1+(\mathrm{sgn}(x))^n\left[\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^n=:1+a_n,$$

且

$$|a_n|=\left[\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^n>\left[\frac{1}{e}\left(e-\frac{3}{n}\right)\right]^n=\left(1-\frac{3}{en}\right)^n,$$

所以 $|p_n-1|\to e^{-3/e}\ne0$. 此时元无穷乘积发散.

当 $|x|>e$ 得到

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\frac{e+|x|}{2},\quad\forall\, n\ge1.$$

若记

$$q:=\frac{e+|x|}{2|x|}$$

则 $q\in(0,1)$ 且

$$|a_n|=\left[\frac{1}{|x|}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^n<\left[\frac{e+|x|}{2|x|}\right]^n=q^n\to0,\quad n\to+\infty.$$

此时无穷乘积收敛.

§6.4.2 * 无穷乘积的收敛

本小节来回答本节一开始的问题: 无穷级数和无穷乘积的关系.

定理6.4.4. 假设 $p_n > 0$. 无穷乘积 $\prod_{n\geq 1} p_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 无穷级数 $\sum_{n\geq 1} \ln p_n$ 收敛.

证: 令

$$P_n = \prod_{1\leq k\leq n} p_k, \quad S_n := \sum_{1\leq k\leq n} \ln p_k, \quad P_n = e^{S_n}.$$

因此 $\{P_n\}_{n\geq 1}$ 收敛当且仅当 $\{S_n\}_{n\geq 1}$ 收敛. □

如果无穷乘积 (6.4.1) 收敛, 则根据**性质 6.4.2** 可知 $p_n \to 1$. 从而不妨假设

$$p_n := 1 + a_n, \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

推论6.4.5. (1) 假设 $a_n > 0(n \geq 1)$ 或 $-1 < a_n < 0(n \geq 1)$. 无穷乘积 $\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} a_n$ 收敛.

(2) 假设 $a_n > 0(n \geq 1)$ 或 $-1 < a_n < 0(n \geq 1)$, 且无穷级数 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 收敛. 无穷乘积 $\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 无穷级数 $\sum_{n\geq 1} a_n^2$ 收敛.

(3) 假设 $a_n > 0(n \geq 1)$ 或 $-1 < a_n < 0(n \geq 1)$, 且无穷级数 $\sum_{n\geq 1} a_n^2$ 收敛. 无穷乘积 $\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 无穷级数 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 收敛.

证: (1) 根据**定理** 6.4.4, $\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ 收敛当且仅当 $\sum_{n\geq 1} \ln(1+a_n)$ 收敛. 但是 $\ln(1+a_n) \sim a_n$, 因为 $a_n \to 0$, 所以无穷乘积 $\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ 收敛当且仅当 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 收敛.

(2) 因为 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 收敛, 所以 $a_n \to 0$ 和 $\ln(1+a_n) \leq a_n$. 根据

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n - \ln(1+a_n)}{a_n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \frac{1}{1+a_n}}{2a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2(1+a_n)} = \frac{1}{2}.$$

故 $\sum_{n\geq 1} \ln(1+a_n)$ 收敛当且仅当 $\sum_{n\geq 1} a_n^2$ 收敛.

(3) 证明和 (2) 类似. □

注6.4.6. 在**推论** 6.4.5 (1) 和 (2) 中对 a_n 的假设是必要的. 比如考察无穷乘积

$$\prod_{n\geq 1}(1+a_n), \quad a_n := \begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{k}}, & n = 2k-1, \\ \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}}, & n = 2k. \end{cases}$$

此时无穷乘积 $\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ 收敛, 但是两个无穷级数 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 和 $\sum_{n\geq 1} a_n^2$ 发散.

要证无穷乘积 $\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ 收敛, 只需要证明无穷级数 $\sum_{n\geq 1} \ln(1+a_n)$ 收敛. 定义

$$x_k := \ln(1+a_{2k}) + \ln(1+a_{2k-1}) = \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}}\right)$$

$$= \ln\left[1-\frac{1}{k}+\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)\right] = \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right).$$

因此级数 $\sum_{n\geq 1} x_n$ 收敛, 从而得到级数 $\sum_{n\geq 1}\ln(1+a_n)$ 收敛.

记

$$y_k := a_{2k-1}+a_{2k}, \quad z_k := a_{2k-1}^2+a_{2k}^2.$$

则得到

$$y_k = \frac{1}{k}+\frac{1}{k\sqrt{k}}, \quad k\geq 1,$$

和

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{1}{k}+\left(\frac{1}{k}+\frac{2}{k\sqrt{k}}+\frac{3}{k^2}+\frac{2}{k^2\sqrt{k}}+\frac{1}{k^3}\right) \\ &= \frac{2}{k}+\frac{2}{k\sqrt{k}}+\frac{3}{k^2}+\frac{2}{k^2\sqrt{k}}+\frac{1}{k^3} = \frac{2}{k}+O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right). \end{aligned}$$

从而推出级数 $\sum_{n\geq 1} y_n$ 和 $\sum_{n\geq 1} z_n$ 都发散, 故原来两个级数也都发散.

§6.4.3 * 无穷乘积的绝对收敛和条件收敛

假设 $p_n > 0$. 我们称无穷乘积 $\prod_{n\geq 1} p_n$ 是**绝对收敛的(absolutely convergent)** 如果无穷级数 $\prod_{n\geq 1}\ln p_n$ 是绝对收敛的. 同样, 称无穷乘积 $\prod_{n\geq 1} p_n$ 是**条件敛的(conditionally convergent)** 如果无穷级数 $\prod_{n\geq 1}\ln p_n$ 是条件收敛的.

定理6.4.7. *假设 $a_n > -1$. 则下面命题等价:*

(1) *无穷乘积 $\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ 绝对收敛.*

(2) *无穷乘积 $\prod_{n\geq 1}(1+|a_n|)$ 收敛.*

(3) *无穷级数 $\prod_{n\geq 1} a_n$ 绝对收敛.*

证: 首先注意到 (1), (2) 和 (3) 成立的必要条件是 $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. 这是因为 $\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ 绝对收敛当且仅当 $\sum_{n\geq 1}\ln(1+a_n)$ 绝对收敛. 但是

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|\ln(1+|a_n|)|}{|a_n|} = 1 = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+|a_n|)}{|a_n|},$$

所以 (1) $\Longleftrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (2). □

例6.4.8. 研究如下无穷乘积的绝对收敛和条件收敛:

$$\prod_{n\geq 1}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right], \quad \prod_{n\geq 1}\left[1+\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}\right].$$

解: (1) 令

$$a_n := \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}.$$

因为级数 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 当 $p>1$ 时是绝对收敛而当 $0<p\leq 1$ 时是条件收敛, 所以无穷乘积当 $p>1$ 时绝对收敛. 根据**推论** 6.4.5 (3) 可知, 当 $1<p\leq 1$ 时无穷乘积条件收敛. 根据**推论** 6.4.5 (2) 可知, 当 $0<p\leq 1$ 时无穷乘积发散. 最后当 $p\leq 0$ 时, $\lim_{n\to+\infty} a_n \nrightarrow 0$, 所以无穷乘积发散.

(2) 令 $p_n = 1+(-1)^{n(n-1)/2}/n$ 得到

$$|\ln p_n| = \frac{1}{n}\left|\ln\left[1+\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}\right]^{\frac{n}{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}}\right| \sim \frac{1}{n}, \quad n\to+\infty.$$

因此无穷乘积不是绝对收敛. 下证无穷乘积是条件收敛. 记

$$x_k := \ln p_{2k} + \ln p_{2k-1} = \ln\left[1+\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right] + \ln\left[1+\frac{(-1)^k}{2k}\right]$$

$$= \ln\left[1+\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}+\frac{(-1)^k}{2k}+\frac{(-1)^{2k-1}}{2k(2k-1)}\right] = \ln\left[1+\frac{(-1)^{k-1}-1}{2k(2k-1)}\right].$$

因此 $\sum_{n\geq 1} x_n$ 收敛从而 $\sum_{n\geq 1}\ln p_n$ 收敛.

§6.4.4 * Γ 函数的 Euler-Gauss 公式和 Weierstrass ℘ 函数简介

本小节利用**定理 3.1.17** 来得到 Γ 函数 $\Gamma(x)$ 的刻画. 首先证明 $\ln\Gamma(x)$ 是凸的. 注意到Gauss 用记号 $\pi(n)=\Gamma(n+1)$.

定义 Ψ 函数如下:

$$\Psi(x) := -\gamma - \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{x+n}-\frac{1}{n+1}\right), \quad x>0. \tag{6.4.7}$$

这里 γ 是 Euler 常数. 任给 $x>0$, 上述级数收敛故 $\Psi(x)$ 有定义. 利用 γ 的定义得到

$$\Psi(x) = \sum_{n\geq 1}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{x+n}\right]-\frac{1}{x}. \tag{6.4.8}$$

定理6.4.9. *Ψ 函数满足*

$$\Psi(x+1)-\Psi(x) = \frac{1}{x}, \quad \Psi'(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(x+n)^2}, \quad x>0. \tag{6.4.9}$$

证: 根据定义立即得到 ψ 函数所要满足的函数方程. 为证第二个, 令

$$u_n(x) := -\left(\frac{1}{x+n}-\frac{1}{n+1}\right) \implies u_n'(x) = \frac{1}{(x+n)^2}.$$

因为 $x>0$ 所以 $|u_n'(x)|\le 1/n^2$ 从而 $\sum_{n\ge1}u_n(x)\le\sum_{n\ge1}1/n^2=\pi^2/6$, 即级数 $\sum_{n\ge0}u_n(x)$ 是“一致收敛”的. 关于函数项级数的一致收敛定义和性质参见 第十四章, 对 (6.4.7) 中的级数而言, 我们可以把求导放在求和内:

$$\Psi'(x)=-\sum_{n\ge0}\left(\frac{1}{x+n}\right)'=\sum_{n\ge0}\frac{1}{(x+n)^2}.\quad\square$$

首先利用 (6.4.9) 中的第一个公式可以将 Ψ 函数延拓到 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, 比如

$$\Psi(x):=\Psi(x+1)-\frac{1}{x},\quad -1<x<0.$$

第二个公式告诉我们 Ψ 函数在任意开区间 $(k,k+1), k\in\mathbb{Z}$, 内都是单调递增.

利用复变函数知识可以证明 (具体细节之后章节给出)

$$\frac{1}{x}+\sum_{n\ge1}\left(\frac{1}{x+n}+\frac{1}{x-n}\right)=\pi\cot(\pi x),\quad x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}.\tag{6.4.10}$$

结合定义 (6.4.7) 就得到

定理6.4.10. *Ψ 函数满足*

$$\Psi(1-x)-\Psi(x)=\pi\cot(\pi x),\quad x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}.\tag{6.4.11}$$

考虑 Ψ 函数的部分和

$$S_n(x):=-\gamma-\sum_{0\le k\le n}\left(\frac{1}{x+k}-\frac{1}{k+1}\right).$$

特别地得到

$$\begin{aligned}
S_{2n+1}(x)&=-\gamma-\sum_{0\le k\le 2n+1}\left(\frac{1}{x+k}-\frac{1}{k+1}\right)\\
&=-\gamma-\sum_{0\le i\le n}\left(\frac{1}{x+2i}-\frac{1}{2i+1}\right)-\sum_{0\le i\le n}\left(\frac{1}{x+2i+1}-\frac{1}{2i+2}\right)\\
&=-\gamma-\frac{1}{2}\sum_{0\le i\le n}\left(\frac{1}{\frac{x}{2}+i}-\frac{1}{i+\frac{1}{2}}\right)-\frac{1}{2}\sum_{0\le i\le n}\left(\frac{1}{\frac{x+1}{2}+i}-\frac{1}{i+1}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left[S_n\left(\frac{x}{2}\right)+S_n\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]+\frac{1}{2}\sum_{0\le i\le n}\left(\frac{1}{i+\frac{1}{2}}-\frac{1}{i+1}\right)
\end{aligned}$$

利用 γ 定义得到

$$\frac{1}{2}\sum_{0\le i\le n}\left(\frac{1}{i+\frac{1}{2}}-\frac{1}{i+1}\right)=\sum_{0\le i\le n}\left(\frac{1}{2i+1}-\frac{1}{2i+2}\right)$$

$$= \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n+2}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n+2}\right)$$
$$= \ln(2n+2)+\gamma+o(1)-[\ln(n+1)+\gamma+o(1)] \;=\; \ln 2+o(1).$$

定理6.4.11. Ψ 函数满足

$$\Psi(z)=\frac{1}{2}\left[\Psi\left(\frac{x}{2}\right)+\Psi\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]+\ln 2. \tag{6.4.12}$$

定义Φ **函数**如下

$$\Phi(x):=\int_1^x \Psi(t)\,dt,\quad x>0. \tag{6.4.13}$$

再次利用求积分和求级数可以相交换得到

$$\Phi(2) \;=\; \int_1^2\left[-\gamma-\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{x+n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]dx$$
$$= -\gamma-\sum_{n\geq 0}\left[\ln\frac{n+2}{n+1}-\frac{1}{n+1}\right] \;=\; -\gamma+\lim_{n\to+\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)\right].$$

引理6.4.12. $\Phi(2)=0$ 和 $\Phi(1/2)=\ln\sqrt{\pi}$.

证: 第一个已证, 下证第二个等式. 计算得到

$$\Phi\left(\frac{1}{2}\right) \;=\; \int_1^{\frac{1}{2}}\left[-\gamma-\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{x+n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]dx$$
$$= \frac{1}{2}\gamma-\sum_{n\geq 0}\left(\ln\frac{\frac{1}{2}+n}{1+n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\gamma-\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$
$$-\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{0\leq k\leq n-1}\ln\frac{2k+1}{2k+2}+\frac{1}{2}\ln n\right) \;=\; \lim_{n\to+\infty}\left[\ln\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$

根据 (6.4.3) 得到 $2\Phi(1/2)=\ln\pi$. □

定理6.4.13. $\Phi(x)=\ln\Gamma(x)$ 和 $\Psi(x)=\Gamma'(x)/\Gamma(x)$, $x>0$.

证: 根据**定理** (5.5.23) 只要证明函数 $F(x):=e^{\Phi(x)}$ 满足

- $F(x+1)=xF(x)$,
- $F(x)$ 恒不为零,
- $F(x)F(x+1/2)=\sqrt{\pi}2^{1-2x}F(2x)$.

即证明

$$\Phi(x+1)=\Phi(x)+\ln x,\quad \Phi(x)+\Phi(1-x)=\ln\pi-\ln\sin(\pi x)$$

和

$$\Phi(x)=\Phi\left(\frac{x}{2}\right)+\Phi\left(\frac{x+1}{2}\right)+(x-1)\ln 2-\ln\sqrt{\pi}.$$

对 (6.4.9) 第一个方程积分得到

$$\Phi(x+1)-\Phi(z)=\ln x+C_1.$$

根据**引理** 6.4.12 可知 $C_1=0$. 对 (6.4.11) 积分得到

$$-\Phi(1-x)-\Phi(x)=\ln\sin(\pi x)+C_2.$$

根据**引理** 6.4.12 可知 $C_2=-2\Phi(1/2)=-\ln\pi$. 对 (6.4.12) 积分得到

$$\Phi(x)=\Phi\left(\frac{x}{2}\right)+\Phi\left(\frac{x+1}{2}\right)+x\ln 2+C_3.$$

根据**引理** 6.4.12 和 $\Phi(1)=0$ 可知 $C_3=-\ln 2-\ln\sqrt{\pi}$. □

定理6.4.14. (Euler-Gauss 公式, 1729) 当 $x>0$ 时有

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}=\frac{1}{x}\prod_{n\geq 1}\frac{(n+1)^x}{n^{x-1}(x+n)}. \tag{6.4.14}$$

证: 利用**定理** 6.4.13 和**定理** 6.4.9 可知 $\ln\Gamma(x)$ 是凸的. 这样结合**定理** 3.1.17 就给出了 (6.4.14). □

上面引入的函数 Ψ 和 Φ 可类比函数 $1/x^k$(不考虑系数):

$$\cdots\xrightarrow{D}x^2\xrightarrow{D}x\xrightarrow{D}1\xrightarrow{?}\frac{1}{x}\xrightarrow{D}\frac{1}{x^2}\xrightarrow{D}\cdots$$

如何从 1 过渡到 $1/x$? 基本想法是引入对数:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "D"] & x^2 \arrow[r, "D"] & x \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\ln"'] & 1 \arrow[r, "?"] & \frac{1}{x} \arrow[r, "D"] & \frac{1}{x^2} \arrow[r, "D"] & \cdots \\
& & \ln x \arrow[r, equal] & \ln x \arrow[r, equal] & \ln x \arrow[u, "D"'] & &
\end{tikzcd}$$

Γ 函数和 Ψ,Φ 函数也有类似的图:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "D"] & x^2 \arrow[r, "D"] & \Gamma(x) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\ln"'] & 1 \arrow[r, "?"] & \Psi(x) \arrow[r, "D"] & \Psi'(x) \arrow[r, "D"] & \cdots \\
& & \Phi(x) \arrow[r, equal] & \Phi(x) \arrow[r, equal] & \Phi(x) \arrow[u, "D"'] & &
\end{tikzcd}$$

上述想法可以用来构造Weierstrass 的“椭圆函数”, **Weierstrass $\wp$ 函数**[4]. Weierstrass 是在 1860 年开始研究椭圆函数, 他从Gudermann 处学习Jacobi 的工作而从Abel 的论文中学习Abel 的工作.

最后要说明的是, (6.4.10) 及其推广是Eisenstein 用来构造椭圆函数的基石. 引入级数

$$\epsilon_k(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x+n)^k}, \quad k \in \mathbb{Z}_{\geq}, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}. \tag{6.4.15}$$

显然 (6.4.15) 当 $k \geq 2$ 时是绝对收敛的, 但是

$$\lim_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{x+n} = \lim_{M,N\to+\infty} \sum_{-M\leq n\leq N} \frac{1}{z+n}$$

是发散的. 原因是当固定 x 时, 有 $(x+n)^{-1} \sim 1/n$. 为了处理 $\epsilon_1(x)$ 我们引入按**“主值”求和**或**Eisenstein 求和 (Eisenstein summation)**:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}^{\mathbf{E}} := \lim_{N\to+\infty} \sum_{-N\leq n\leq N}. \tag{6.4.16}$$

这样我就把 $\epsilon_1(x)$ 按上述定义并得到:

$$\epsilon_1(x) := \lim_{N\to+\infty} \sum_{-N\leq n\leq N} \frac{1}{x+n} = \frac{1}{x} + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}\right). \tag{6.4.17}$$

这个不是别的就是之前 (6.4.10). 根据定义

$$\epsilon_1(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n\geq 1} c_n x^{n-1}, \quad c_n := 2\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m^{2n}}.$$

第二次利用求导和求和可交换(这是因为 $k \geq 2$ 时 $\epsilon_k(x)$ 绝对和一致收敛, 具体细节等到下章给出) 得到

$$\epsilon_k(x) = \frac{1}{x^k} + (-1)^k \sum_{n\geq 1}\binom{2n-1}{k-1} c_{2n} x^{2n-k}.$$

除了用复变函数给出 (6.4.10) 的证明外, 我们按照Eisenstein 的方法[5]给出一个初等证明[6]. 给定两个独立变量 p, q 并定义 $r := p+q$. 则得到

$$\frac{1}{pq} = \frac{1}{pr} + \frac{1}{qr}.$$

[4]1862 年由 Weierstrass 引入, 具体细节可参阅名著, *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*, 数学大师 Weil 著.

[5]Eisenstein, G. *Beiträge zu Theorie der elliptischen Functionen*, J. Reine Angew. Math., **35**(1847), 137-184; 185-274.

[6]本处参考 Weil 的著作,《Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker》.

两边先对 p 求导得到

$$\frac{-1}{p^2q} = \frac{-1}{p^2r} - \frac{1}{pr^2} - \frac{1}{qr^2}$$

再对 q 求导得到

$$\frac{1}{p^2q^2} = \frac{1}{p^2r^2} + \frac{1}{q^2r^2} + \frac{2}{pr^3} + \frac{2}{qr^3}. \tag{6.4.18}$$

练习6.4.15. 对任意 $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 证明

$$\frac{1}{p^mq^n} = \sum_{0\leq i\leq m-1} \frac{n(n+1)\cdots(n+i-1)}{i!p^{m-i}r^{n+i}} + \sum_{0\leq j\leq n-1} \frac{m(m+1)\cdots(m+j-1)}{j!q^{n-j}r^{m+j}}.$$

在 (6.4.18) 中取 $p = x+n$, $q = y+r-n$, $r = z+r$, $z = x+y$, 这里 $n, r \in \mathbb{Z}$, 得到

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}^{\mathbf{E}} \left(\frac{1}{p^2q^2} - \frac{1}{p^2r^2} - \frac{1}{q^2r^2}\right) = \frac{2}{r^3}\left[\epsilon_1(x) + \epsilon_1(y+r)\right],$$

因为左边每项都是绝对收敛, 根据收敛级数的乘积性质得到

$$\epsilon_2(x)\epsilon_2(y) - \epsilon_2(x)\epsilon_2(z) - \epsilon_2(y)\epsilon_2(z) = 2\epsilon_3(z)[\epsilon_1(x) + \epsilon_1(y)], \tag{6.4.19}$$

这里 $x, y, z := x+y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. 固定 x 对 y 在 $y=0$ 展开并比较系数得到

$$3\epsilon_4(x) = \epsilon_2(x)^2 + 2\epsilon_1(x)\epsilon_3(x). \tag{6.4.20}$$

类似地, 固定 x 对 z 在 $z=0$ 展开并比较系数得到

$$\epsilon_2(x)^2 = \epsilon_4(x) + 2c_2\epsilon_2(x). \tag{6.4.21}$$

结合 (6.4.20) 和 (6.4.21) 得到

$$\epsilon_1(x)\epsilon_3(x) = \epsilon_2(x)^2 - 3c_2\epsilon_2(x). \tag{6.4.22}$$

根据

$$\epsilon_k'(x) = -k\epsilon_{k+1}(x), \quad k \geq 1. \tag{6.4.23}$$

对 (6.4.22) 两边求导得到

$$\epsilon_2(x)\epsilon_3(x) - 2c_2\epsilon_3(x) = \epsilon_1(x)\epsilon_4(x)$$

从而, 利用 (6.4.22),

$$\epsilon_3(x) = \epsilon_1(x)\epsilon_2(x). \tag{6.4.24}$$

把 (6.4.24) 带入 (6.4.20) 并结合 (6.4.21) 得到

$$\epsilon_1'(x) + \epsilon_1(x)^2 + 3c_2 = 0. \tag{6.4.25}$$

因为 $\epsilon_1(0)=\infty$, 此时上述常微分方程有唯一解

$$\epsilon_1(x)=\pi\cot(\pi x). \tag{6.4.26}$$

求导得到

$$\epsilon_2(x)=\left(\frac{\pi}{\sin(\pi x)}\right)^2. \tag{6.4.27}$$

练习6.4.16. 验证 (6.4.20) 和 (6.4.21).

一个直接应用, 我们来证明 (6.4.4). 考虑无穷乘积

$$P(x):=\prod_{n\geq 1}\left[1-\left(\frac{x}{n}\right)^2\right].$$

先两边求对数再求导得到

$$[\ln P(x)]'=\left[\sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)+\sum_{n\geq 1}\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\right]'=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{x+n}+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{x-n}.$$

这里我们第三次利用求导和求和可交换! 化简得到

$$[\ln P(x)]'=[\ln\sin(\pi x)]'-\frac{1}{x}\quad\Longrightarrow\quad\frac{d}{dx}\ln\left[\frac{x}{\sin(\pi x)}P(x)\right]=0.$$

即 $xP(x)/\sin(\pi x)$ 是常数. 为求 $xP(x)/\sin(\pi x)$ 在 $x=0$ 处的值, 在Eisenstein的原始文章中, 他从最简单的三角恒等式

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cot\frac{x+\pi}{2}$$

出发. 利用 (6.4.26) 得到

$$\frac{\pi}{\sin\pi x}=\frac{1}{2}\epsilon_1\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\epsilon_1\left(\frac{1+x}{2}\right)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}^{\mathbf{E}}\frac{(-1)^n}{x+n}. \tag{6.4.28}$$

因此

$$\left.\frac{x}{\sin(\pi x)}P(x)\right|_{x=0}=\left.\frac{\pi}{\sin\pi x}P(x)\cdot\frac{x}{\pi}\right|_{x=0}=\frac{1}{\pi}.$$

所以得到

$$\sin(\pi x)=\pi x\prod_{n\geq 1}\left[1-\left(\frac{x}{n}\right)^2\right].$$

公式 (6.4.28) 的一个应用就是证明 (5.5.21),

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)},\quad x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}.$$

当然需要借助重积分的性质 (参见 第十三章):

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \Gamma(x)\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{-x}dt = \int_0^{+\infty} t^x e^{-ty}y^{x-1}dy \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{-x}dt \\ &= \int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} e^{-t(y+1)}dt\right]y^{x-1}dy = \int_0^{+\infty}\frac{y^{x-1}}{1+y}dy.\end{aligned}$$

利用级数展开

$$\frac{1}{1+y} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n y^n$$

得到

$$\int_0^1 \frac{y^{x-1}}{1+y}dy = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\int_0^1 y^{x-1+n}dy = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{x+n}$$

和 $(t = 1/y)$

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{y^{x-1}}{1+y}dy &= \int_0^1 \frac{t^{-x}}{1+t}dt = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\int_0^1 t^{-x+n}dt \\ &= \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{1}{n+1-x} = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{x-n}\end{aligned}$$

在这里我们第四次利用了求积和求和可交换! 两式相加得到

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}^{\mathbf{E}}\frac{(-1)^n}{x+n} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

级数 (6.4.15) 推广到复数域得到k 权 **Eisenstein 级数(Eisenstein series of weight k)**

$$G_k(\tau) := \sum_{(c,d)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}}\frac{1}{(c\tau+d)^k}, \quad \tau\in\mathcal{H}, \tag{6.4.29}$$

这里 $\mathcal{H} := \{z\in\mathbb{C}|\mathrm{Im}(z)>0\}$ 是上半平面. 为了求 $G_k(\tau)$ 首先将 (6.4.17) 写成复数形式 (关于复数级数的定义及性质在之后的章节给出, 目前可“暂时”当成实级数来考虑)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau}+\sum_{d\geq 1}\left(\frac{1}{\tau-d}+\frac{1}{\tau+d}\right) &= \pi\cot(\pi\tau), \quad \tau\in\mathcal{H} \qquad (6.4.30)\\ &= \pi\sqrt{-1}+2\pi\sqrt{-1}\sum_{m\geq 0}q^m, \quad q := e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}.\end{aligned}$$

上述第一个恒等式当 τ 是实数时已经给出了证明, 但是对一般的 $\tau\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ 其实也是成立的 (严格证明在之后的章节中给出); 第二个恒等式是利用

$$\cos(\pi\tau) = \frac{e^{\pi\tau\sqrt{-1}}+e^{-\pi\tau\sqrt{-1}}}{2}, \quad \sin(\pi\tau) = \frac{e^{\pi\tau\sqrt{-1}}-e^{-\pi\tau\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

对 (6.4.30) 求 $k-1$ 次导数得到 (这里要用到一致收敛的性质)

$$\sum_{d\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(\tau+d)^k}=\frac{(-2\pi\sqrt{-1})^k}{(k-1)!}\sum_{m\geq 1}m^{k-1}q^m,\quad k\geq 2.$$

从而

$$\sum_{(c,d)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}}\frac{1}{(c\tau+d)^k}=\sum_{d\neq 0}\frac{1}{d^k}+2\sum_{c\geq 1}\left[\sum_{d\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(c\tau+d)^k}\right]$$

最后得到

$$G_k(\tau)=2\zeta(k)+2\frac{(2\pi\sqrt{-1})^k}{(k-1)!}\sum_{n\geq 1}\sigma_{k-1}(n)q^n,\quad k>2,\ k\text{ 偶数}. \tag{6.4.31}$$

其中系数 $\sigma_{k-1}(n)$ 定义为

$$\sigma_{k-1}(n):=\sum_{m|n,\ m>0}m^{k-1}.$$

$\mathbb{C}$ 中的**格(lattice)**是指集合

$$\Lambda:=\omega_1\mathbb{Z}\oplus\omega_2\mathbb{Z},$$

这里 $\{\omega_1,\omega_2\}$ 是 $\mathbb{C}$ (作为 $\mathbb{R}$ 上的实向量空间) 的一组基. 不失一般性我们不妨假设 $\omega_1/\omega_2\in\mathcal{H}$. 最简单的格是 $\sqrt{-1}\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$.

给定格 $\Lambda=\omega_1\mathbb{Z}\oplus\omega_2\mathbb{Z}, \omega_1/\omega_2\in\mathcal{H}$, 令

$$\tau:=\omega_1/\omega_2,\quad \Lambda_\tau:=\tau\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}.$$

可以证明 Λ 同构于 Λ_τ.

练习6.4.17. 考虑两个格

$$\Lambda=\omega_1\mathbb{Z}\oplus\omega_2\mathbb{Z},\quad \Lambda'=\omega_1'\mathbb{Z}\oplus\omega_2'\mathbb{Z},\quad \omega_1/\omega_2\in\mathcal{H},\ \omega_1'/\omega_2'\in\mathcal{H}.$$

证明 $\Lambda'=\Lambda\Longleftrightarrow$

$$\begin{bmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{bmatrix},\quad \text{存在}\quad \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\in\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

对给定的格, 定义其**复环面(complex torus)** 为

$$\mathbb{C}/\Lambda:=\{z+\Lambda|z\in\mathbb{C}\}.$$

几何上, 复环面就是由 ω_1,ω_2 所张成的平行四边形将其对边粘合而成. 代数上, 复环面是 Abelian 群.

给定格 Λ, 定义**Weierstrass $\wp_\Lambda$- 函数(Weierstrass $\wp_\Lambda$-function)** 为

$$\wp_\Lambda(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{0\neq\omega\in\Lambda}\left[\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right], \quad z \in \mathbb{C}\setminus\Lambda. \tag{6.4.32}$$

形式求导得到 (其严格性需要用到函数项级数的性质)

$$\wp'_\Lambda(z) = -2\sum_{\omega\in\Lambda}\frac{1}{(z-\omega)^3}.$$

可以证明 (在之后的章节给出)

$$\wp'_\Lambda(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2(\Lambda)\wp_\Lambda(z) - g_3(\Lambda), \tag{6.4.33}$$

这里 ($\Lambda = \omega_1\mathbb{Z}\oplus\omega_2\mathbb{Z}, \tau := \omega_1/\omega_2 \in \mathcal{H}$)

$$g_2(\Lambda) := 60G_4(\Lambda), \quad g_3(\Lambda) := 140G_6(\Lambda), \quad G_k(\Lambda) := \sum_{0\neq\omega\in\Lambda}\frac{1}{\omega^k}\ (k>0\ \text{偶数}).$$

注意到 $G_k(\tau) = G_k(\Lambda_\tau)$.

定义**判别式函数(discriminant function)**

$$\Delta(\Lambda) := g_2(\Lambda)^3 - 27g_3(\Lambda)^2. \tag{6.4.34}$$

特别地得到

$$\Delta(\tau) := \Delta(\Lambda_\tau).$$

若引入**Dedekind eta- 函数(Dedekind eta function)**

$$\eta(\tau) := q_{24}\prod_{n\geq1}(1-q^n), \quad q_{24} := e^{2\pi\sqrt{-1}\tau/24}, \quad q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}, \quad \tau\in\mathcal{H}, \tag{6.4.35}$$

我们得到著名的恒等式

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12}\eta(\tau)^{24}. \tag{6.4.36}$$

稍加提一句的是

$$\Delta(\tau)\neq 0, \quad \tau\in\mathcal{H}. \tag{6.4.37}$$

考虑如下椭圆曲线集

$$\mathfrak{E} := \left\{y^2 = 4x^3 - a_2x - a_3, \quad a_2^3 - 27a_3^2 \neq 0\right\}$$

和 $\mathbb{C}$ 中的所有格

$$\mathfrak{L} := \{\Lambda\ \text{是}\ \mathbb{C}\ \text{中的格}\}.$$

则 (6.4.33) 和 (6.4.37) 给出了映射

$$\mathbf{W}: \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{E}, \quad \Lambda \longmapsto (\wp_\Lambda, \wp'_\Lambda). \tag{6.4.38}$$

反之可以证明, 映射 $\mathbf{W}$ 是满的.

§6.5 * 二重级数

考虑映射 $\boldsymbol{x}:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, 并令

$$a_{ij}:=\boldsymbol{x}(i,j),\quad (i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}.$$

这样我们可以把映射 $\boldsymbol{x}$ 等同于一个无限阶矩阵

$$\begin{matrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & \cdots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

我们把所有这样的项形式上相加就得到了所谓的**二重级数 (double series)**

$$\sum_{i,j\geq 0} a_{ij}.$$

这是级数乘积的自然推广, 同时也面临着一样的问题: 如何“合理地”定义求和? 根据**推论 1.5.20** 或**定理 1.5.21**, 我们知道存在双射 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, 从而可以考虑级数

$$\sum_{n\geq 0} a_{f(n)},\quad a_{f(n)}=\boldsymbol{x}(f(n)). \tag{6.5.1}$$

称 (6.5.1) 为二重级数的**序级数 (ordering series)**. 固定 $i\in\mathbb{N}$ 定义

$$a_{i\bullet}:=\sum_{j\geq 0} a_{ij}\equiv\sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0} a_{ij}\equiv\sum_{i,j\geq 0}^{\mathbf{R}} a_{ij}, \tag{6.5.2}$$

称为**第 i 个行级数 (i-th row series)**, 而固定 $j\in\mathbb{N}$ 定义

$$a_{\bullet j}:=\sum_{i\geq 0} a_{ij}\equiv\sum_{j\geq 0}\sum_{i\geq 0} a_{ij}\equiv\sum_{i,j\geq 0}^{\mathbf{C}} a_{ij}, \tag{6.5.3}$$

称为**第 j 个列级数 (j-th column series)**. 如果每个行级数都收敛, 我们此时称

$$\sum_{i\geq 0} a_{i\bullet}=\sum_{i\geq 0}\left(\sum_{j\geq 0} a_{ij}\right) \tag{6.5.4}$$

为二重级数的**行求和级数 (series of row sums)**; 如果每个列级数都收敛, 我们此时称

$$\sum_{j\geq 0} a_{\bullet j}=\sum_{j\geq 0}\left(\sum_{i\geq 0} a_{ij}\right) \tag{6.5.5}$$

为二重级数的**列求和级数 (series of column sums)**.

§6.5.1 * 二重级数的序收敛

称二重级数是**序收敛 (ordering convergence)** 如果每个序级数 (6.5.1) 都收敛到一个公共值. 此时我们引入记号

$$\sum_{i,j\geq 0}^{\mathbf{O}} a_{ij} := \sum_{n\geq 0} a_{f(n)}. \tag{6.5.6}$$

那么什么时候二重级数是序收敛的呢? 为此我们再引入一个概念, 即, 称二重级数是**绝对收敛的 (absolutely convergent)**, 如果

$$\sup_{n\geq 0}\left(\sum_{0\leq i,j\leq n}|a_{ij}|\right) < +\infty. \tag{6.5.7}$$

定理6.5.1. (二重级数序收敛和绝对收敛) *假设二重级数 $\sum_{i,j\geq 0} a_{ij}$ 是绝对收敛的. 则*

(1) *二重级数 $\sum_{i,j\geq 0} a_{ij}$ 也是序收敛的.*

(2) *行求和级数 $\sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0} a_{ij}$ 和列求和级数 $\sum_{j\geq 0}\sum_{i\geq 0} a_{ij}$, 作为数项级数, 都是绝对收敛的, 且满足*

$$\sum_{i,j\geq 0}^{\mathbf{O}} a_{ij} = \sum_{i,j\geq 0}^{\mathbf{R}} a_{ij} = \sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0} a_{ij} = \sum_{i,j\geq 0}^{\mathbf{C}} a_{ij} = \sum_{j\geq 0}\sum_{i\geq 0} a_{ij}. \tag{6.5.8}$$

证: (1) 令

$$C := \sup_{n\geq 0}\sum_{0\leq i,j\leq n}|a_{ij}| < +\infty.$$

任取双射 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 和任意的自然数 $N\in\mathbb{N}$. 必存在某个自然数 $K\in\mathbb{N}$ 满足

$$\{f(n)\}_{0\leq n\leq N}\subset\{(i,j)\}_{0\leq i,j\leq K}.$$

根据绝对收敛的假设条件得到

$$\sum_{0\leq n\leq N}|a_{f(n)}| \leq \sum_{0\leq i,j\leq K}|a_{ij}| \leq C.$$

因此序级数 $\sum_{n\geq 0} a_{f(n)}$ 是绝对收敛的.

再取另一个双射 $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. 则可知 $\sigma := f^{-1}\circ g$ 是 $\mathbb{N}$ 上的一个双射且

$$a_{g(n)} = a_{f(\sigma(n))},$$

即级数 $\sum_{n\geq 0} a_{g(n)}$ 是级数 $\sum_{n\geq 0} a_{f(n)}$ 的重排. 利用**定理 6.3.11** 得到 $\sum_{n\geq 0} a_{g(n)}$ 也是绝对收敛的且 $\sum_{n\geq 0} a_{f(n)} = \sum_{n\geq 0} a_{g(n)}$. 故得到二重级数也是序收敛的.

(2) 首先根据假设条件易知, 每个行级数和每个列级数都是绝对收敛的, 从而行求和级数与列求和级数都是有意义的. 根据 (1) 和 (6.5.6) 记

$$S=\sum_{i,j\geq 0}^{\circ} a_{ij}=\sum_{n\geq 0} a_{f(n)}.$$

对任意 $N\geq M\geq 0$ 有

$$\sum_{0\leq i\leq M}\left|\sum_{0\leq j\leq N} a_{ij}\right|\leq \sum_{0\leq i\leq M}\sum_{0\leq j\leq N}|a_{ij}|\leq \sum_{0\leq i,j\leq N}|a_{ij}|\leq C,$$

从而得到

$$\sum_{0\leq i\leq M}|a_{i\bullet}|\leq C,\quad \text{任意 } M\geq 0.$$

因此得到行求和级数 $\sum_{i\geq 0} a_{i\bullet}$ 绝对收敛. 同理可证列求和级数 $\sum_{j\geq 0} a_{\bullet j}$ 也是绝对收敛.

最后来证明等式 (6.5.8). 取定双射 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. 对任意 $\epsilon>0$ 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得不等式

$$\sum_{n\geq N+1}|a_{f(n)}|<\frac{\epsilon}{2}$$

成立. 对这个 N 存在 $K\in\mathbb{N}$ 满足

$$\{f(n)\}_{0\leq n\leq N}\subset\{(i,j)\}_{0\leq i,j\leq K}.$$

故得到不等式

$$\left|\sum_{0\leq i\leq k,\ 0\leq j\leq \ell} a_{ij}-\sum_{0\leq n\leq N} a_{f(n)}\right|\leq \sum_{n\geq N+1}|a_{f(n)}|<\frac{\epsilon}{2},\quad \text{任意 } k,\ell\geq K.$$

先令 $\ell\to\infty$ 再令 $k\to\infty$ 得到

$$\left|\sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0} a_{ij}-\sum_{0\leq n\leq N} a_{f(n)}\right|\leq\frac{\epsilon}{2}.$$

这样就推出

$$\begin{aligned}\left|S-\sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0} a_{ij}\right| &\leq \left|S-\sum_{0\leq n\leq N} a_{f(n)}\right|+\left|\sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0} a_{ij}-\sum_{0\leq n\leq N} a_{f(n)}\right|\\ &\leq \sum_{n\geq N+1}|a_{f(n)}|+\frac{\epsilon}{2}\leq\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.\end{aligned}$$

同理可证 (6.5.8) 中的另一个等式. □

§6.5.2 * Carleman 不等式

作为**定理 6.5.1** 的直接应用, 我们来证明**Carleman 不等式**[7]. 这个证明是Pólya 在 1925 年给出的.

定理6.5.2. (Carleman) 假设 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 是收敛级数且 $a_n \geq 0$, 则级数

$$\sum_{n\geq 1} \gamma_n, \quad \gamma_n := \left(\prod_{1\leq k\leq n} a_k\right)^{1/n},$$

收敛且满足

$$\sum_{n\geq 1} \gamma_n \leq e \sum_{n\geq 1} a_n. \tag{6.5.9}$$

证: 利用算术几何平均不等式得到对任意正实数 $c_1, \cdots, c_n > 0$ 下面不等式

$$\gamma_n = \left(\prod_{1\leq k\leq n} a_k\right)^{1/n} = \left(\prod_{1\leq k\leq n} \frac{c_k a_k}{(c_1\cdots c_n)^{1/n}}\right)^{1/n} \leq \sum_{1\leq k\leq n} \frac{c_k a_k}{n(c_1\cdots c_n)^{1/n}}$$

成立. 若取

$$c_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$$

则得到

$$(c_1\cdots c_n)^{1/n} = \left[\frac{\prod_{1\leq k\leq n}(k+1)^k}{\prod_{1\leq k\leq n} k^{k-1}}\right]^{1/n} = n+1, \quad \gamma_n \leq \sum_{1\leq k\leq n} \frac{c_k a_k}{n(n+1)}.$$

定义映射 $\boldsymbol{x}: \mathbb{Z}_{\geq 1}\times\mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{R}^+$ 如下

$$a_{nm} = \boldsymbol{x}(n,m) = \begin{cases} \frac{c_m a_m}{n(n+1)}, & m\leq n, \\ 0, & m > n. \end{cases}$$

直接计算得到

$$\begin{aligned} \sum_{1\leq n,m\leq M} a_{nm} &= \sum_{1\leq m\leq M} c_m a_m \sum_{m\leq n\leq M}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &\leq \sum_{1\leq m\leq M} \frac{c_m a_m}{m} \leq e \sum_{1\leq m\leq M} a_m, \end{aligned}$$

故条件 (6.5.7) 满足. 根据**定理 6.5.1** 得到

$$\sum_{n\geq 1}\gamma_n \leq \sum_{n\geq 1}\sum_{1\leq m\leq n} a_{mn} \leq \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1} a_{mn} = \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1} a_{mn}$$

[7] 本小节内容大部分取自: Duncan, John; McGregor, Colin M. *Carleman's inequality*, Amer. Math. Monthly, **110**(2003), no. 5, 424-431.

$$= \sum_{m\geq 1}\left[\sum_{n\geq m}\frac{c_m a_m}{n(n+1)}\right] = \sum_{m\geq 1}\frac{c_m a_m}{m} = \sum_{m\geq 1}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m a_m \leq e\sum_{m\geq 1} a_m. \quad \square$$

Carleman 的原始想法是去证明如下不等式

$$\sum_{1\leq k\leq n}\gamma_k \leq \lambda_n \sum_{1\leq k\leq n} a_k, \tag{6.5.10}$$

其中 $\gamma_n < e$ (注意是严格小于!). deBruinj 在 1963 年证明了 (6.5.9) 中的最佳常数是

$$\gamma_n = e - \frac{2\pi^2 e}{(\ln n)^2} + O\left(\frac{1}{(\ln n)^3}\right).$$

Knopp 在 1928 年给出了一个可能是最短的证明. 考虑

$$c_n := \frac{1}{n(n+1)}\sum_{1\leq k\leq n} k a_k = \frac{1}{n}\sum_{1\leq k\leq n}\frac{kak}{n+1}$$

并得到

$$\sum_{1\leq k\leq n} c_k = \sum_{1\leq k\leq n} a_k - nc_n < \sum_{1\leq k\leq n} a_k.$$

利用算术几何平均不等式推出

$$c_n \geq \left[\prod_{1\leq k\leq n}\frac{ka_k}{n+1}\right]^{1/n} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n+1}\gamma_n.$$

根据 (2.3.6) 得到 $n+1 \leq e\sqrt[n]{n!}$ 从而有 $c_n \geq \gamma_n/e$.

如果我们把不等式 (6.5.9) 改写成

$$\sum_{n\geq 1}\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{1\leq k\leq n}\ln a_k\right) \leq e\sum_{n\geq 1} a_n,$$

则立即就可以猜到相应的连续版本.

定理6.5.3. **(Knopp, 1928)** *如果 $f \in R((0,+\infty))$ 且 $f > 0$, 则*

$$\int_0^{+\infty}\exp\left[\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)\,dt\right] \leq e\int_0^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{6.5.11}$$

证: 利用加权 Jensen 不等式得到

$$\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)\,dt\right) = \exp\left[\frac{1}{x}\int_0^x \ln(tf(t))\,dt - \frac{1}{x}\int_0^x \ln t\,dt\right]$$

$$= e^{-\frac{1}{x}(t\ln t - t)|_0^x}\exp\left[\int_0^x \ln(tf(t))\frac{dt}{x}\right] = e^{1-\ln x}\exp\left[\int_0^x \ln(tf(t))\frac{dt}{x}\right]$$

$$\leq e^{1-\ln x}\int_0^x tf(t)\frac{dt}{x}=\frac{e}{x^2}\int_0^x tf(t)\,dt.$$

利用反常二重积分的 Fubini 定理, **定理 13.4.5** (2), 我们推出

$$\int_0^{+\infty}\exp\left[\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)\,dt\right]\leq e\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\,dt$$

$$=e\int_0^{+\infty}tf(t)\,dt\int_t^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=e\int_0^{+\infty}f(t)\,dt.\quad\square.$$

§6.5.3 * Hilbert 不等式和 Witten ζ 函数

二重级数另一个有趣的应用是**Hilbert 不等式**[8] (注意不等号是严格小于的!).

定理6.5.4. (Hilbert, 1908) 对任意实数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 和 $\{b_n\}_{n\geq 1}$, 以及任意满足 $1/p+1/q=1$ 的实数 $p,q\in(1,+\infty)$, 我们有

$$\sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1}\frac{a_nb_m}{n+m}<\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\left(\sum_{n\geq 1}|a_n|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n\geq 1}|b_n|^q\right)^{1/q}.\tag{6.5.12}$$

证: 不妨假设不等式 (6.5.12) 右边两个级数都收敛. 根据下面论证的有限项版本, 我们知道条件 (6.5.7) 满足从而可以自由地交换对 n,m 的求和. 利用 Hölder 不等式得到

$$\sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1}\frac{a_nb_m}{n+m}=\sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1}\frac{a_n}{(n+m)^{1/p}(m/n)^{1/pq}}\cdot\frac{b_m}{(n+m)^{1/q}(n/m)^{1/pq}}$$

$$\leq\left(\sum_{n\geq 1}|a_n|^p\sum_{m\geq 1}\frac{1}{(n+m)(m/n)^{1/q}}\right)^{1/q}\left(\sum_{m\geq 1}|b_m|^q\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+m)(n/m)^{1/p}}\right)^{1/q}.$$

接下来我们来估计级数

$$\sum_{m\geq 1}\frac{1}{(n+m)(m/n)^a}=\sum_{m\geq 1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(1+m/n)(m/n)^a},\quad a\in(0,1).$$

我们断言

$$\frac{a}{1-a}\cdot\frac{n^a}{1+n}\leq\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)x^a}-\sum_{m\geq 1}\frac{1}{(n+m)(m/n)^a}\leq\frac{(1/n)^{1-a}}{1-a}.\tag{6.5.13}$$

实际上由于函数 $(1+x)x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调递增, 所以利用积分中值定理得到

$$\sum_{m\geq 2}\frac{1}{(n+m)(m/n)^a}\leq\int_{1/n}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)x^a}\leq\sum_{m\geq 1}\frac{1}{(n+m)(m/n)^a}.$$

[8]本小节内容大部分取自: Borwein, Jonathan M. *Hilbert's inequality and Witten's zeta-function*, Amer. Math. Monthly, **115**(2008), no. 2, 125-137.

因此得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)x^a}-\sum_{m\geq 1}\frac{1}{(n+m)(m/n)^a}\geq\int_0^{1/n}\frac{dx}{(1+x)x^a}-\frac{n^a}{1+n}$$

和

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)x^a}-\sum_{m\geq 1}\frac{1}{(n+m)(m/n)^a}\leq\int_0^{1/n}\frac{dx}{(1+x)x^a}.$$

因为

$$\frac{n}{1+n}\int_0^{1/n}\frac{dx}{x^a}\leq\int_0^{1/n}\frac{dx}{(1+x)x^a}\leq\int_0^{1/n}\frac{dx}{x^a}=\frac{(1/n)^{1-a}}{1-a},$$

所以不等式 (6.5.13) 得证.

另一方面, 利用 (5.5.23) 和 (5.5.21) 我们推出 (作变量替换 $y=1/(1+x)$)

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)x^a}=\int_0^1 y^{a-1}(1-y)^{-a}dy=B(a,1-a)=\frac{\pi}{\sin(\pi a)}. \tag{6.5.14}$$

最后利用 (6.5.13) 及 (6.5.14) 得到

$$\sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1}\frac{a_n b_m}{n+m}<\frac{\pi}{[\sin(\pi/q)]^{1/p}[\sin(\pi/p)]^q}\left(\sum_{n\geq 1}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n\geq 1}|b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

注意到 $\sin(\pi/q)=\sin(\pi/p)$ 对任意 $1/p+1/q=1$ 都成立, 我们这就证明了 (6.5.12). □

当 $p=2$ 时, (6.5.12) 是Hilbert 在 1900 年初在讲授积分方程课上发现的 (当时的系数为 2π 而不是现在的 π – 这个最佳常数是Schur 在 1911 年得到的), 后来完整的证明出现在 1908 年Weyl 的博士论文中. 一般情形的不等式 (6.5.12) 则首先由Hardy 和Riesz 在 1925 年给出的.

Hilbert 不等式也有相应的积分型不等式: 对任意满足 $1/p+1/q=1$ 的实数 $p,q\in(1,+\infty)$, 有不等式

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{f(x)g(y)}{x+y}dxdy<\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\left[\int_0^{+\infty}|f(x)|^p dx\right]^{1/p}\left[\int_0^{+\infty}|g(x)|^q dx\right]^{1/q} \tag{6.5.15}$$

成立. 这是由Hardy 和Riesz 在 1925 年证明的.

如果在 (6.5.12) 中取 $a_n=n^{-r}, b_n=n^{-s}$ 和 $p=2$ 就得到

$$\sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1}\frac{1}{n^r m^s(n+m)}<\pi\sqrt{\zeta(2r)\zeta(2s)}.$$

该二重级数的一个推广就是**Mordell - Tornheim - Witten ζ 函数 (Mordell - Tornheim - Witten zeta function)** 或简称为**MTW ζ 函数**:

$$\mathcal{W}(r,s,t):=\sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1}\frac{1}{n^r m^s(n+m)^t},\quad r,s,t\geq 0. \tag{6.5.16}$$

Tornheim 把 (6.5.16) 称为**调和二重级数 (harmonic double series)**, 并在 1950 年证明了 $\mathcal{W}(r,s,t)$ 有限当且仅当

$$r+t>1,\quad s+t>1,\quad r+s+t>2.$$

特别地得到**Euler 二重级数 (Euler double series)**

$$\zeta(t,s):=\mathcal{W}(0,s,t)=\sum_{n>m>0}\frac{1}{n^t m^s}. \tag{6.5.17}$$

用记号 $\mathcal{W}$ 不等式 (6.5.12) 等价于

$$\mathcal{W}(r,s,1)<\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\sqrt[p]{\zeta(pr)}\sqrt[q]{\zeta(qs)}.$$

直接计算得到 (其中作了变量替换 $x=-\ln\sigma$ 和 $y=(m+n)x$)

$$\int_0^1(-\ln\sigma)^{t-1}\sigma^{m+n-1}d\sigma=\int_0^{+\infty}x^{t-1}e^{-(m+n)x}dx$$

$$=\frac{1}{(m+n)^t}\int_0^{+\infty}y^{t-1}e^{-y}dy=\frac{\Gamma(t)}{(m+n)^t}.$$

引入s **阶多对数函数 (polylogarithm of order s)**

$$\mathrm{Li}_s(x):=\sum_{n\ge1}\frac{x^n}{n^s},\quad s>0. \tag{6.5.18}$$

根据幂级数逐项求积理论, **定理 14.3.8**, 我们得到了

$$\mathcal{W}(r,s,t)=\frac{1}{\Gamma(t)}\int_0^1\mathrm{Li}_r(\sigma)\mathrm{Li}_s(\sigma)\frac{(-\ln\sigma)^{t-1}}{\sigma}d\sigma. \tag{6.5.19}$$

MTW ζ 函数 $\mathcal{W}(r,s,t)$ 的应用, 比如 Diophantine 方程 (Q 上椭圆曲线的 Birch - Swinnerton-Dyer 猜想)、模形式的周期性 (Eicher - Shimura - Manin 理论) 、代数 K- 理论、多重 ζ 函数值、混合动机理论 (mixed motives)、Vassiliev - Kontsevich 扭结不变量等, 参见Zagier 的综述文章[9].

§6.5.4 * 二重级数的其它收敛

§6.6 参考文献

1. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis I*, Translated from the 1988 German original by Gary Brookfield, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. xiv+426 pp. ISBN: 3-7643-7153-6

[9]Zagier, Don. *Values of zeta functions and their applications*, First European Congress of Mathematics, Vol. **II** (Pairs, 1992), 497-512, Progr. Math., **120**, Birkhäuser, Basel, 1994.

2. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis II*, Translated from the 1999 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. xii+400 pp. ISBN: 978-3-7643-7472-3; 3-7643-7472-3

3. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis III*, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. xii+468 pp. ISBN: 978-3-7643-7479-2; 3-7643-7479-2

4. Diamond, Fred; Shurman, Jerry. *A first course in modular forms*, Graduate Texts in Mathematics, **228**, Springer-Verlag, New York, 2005. xvi+436 pp. ISBN: 0-387-23229-X

5. Eisenstein, G. *Beiträge zu Theorie der elliptischen Functionen*, J. Reine Angew. Math., **35**(1847), 137-184; 185-274.

6. Iwaniec, Henryk; Kowalski, Emmanuel. *Analytic number theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. xii+615 pp. ISBN: 0-8218-3633-1

7. Koblitz, Neal. *Introduction to elliptic curves and modular forms*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics **97**, Springer-Verlag, New York, 1993. x+248 pp. ISBN: 0-387-97966-2

8. Weil, André. *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*, Reprint of the 1976 original, Classical in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1999. viii+93 pp. ISBN: 3-540-65036-9

9. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis I*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+574 pp. ISBN: 3-540-40386-8

10. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis II*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xvi+681 pp. ISBN: 3-540-40633-6

11. 布鲁斯 · C. 伯恩特 (Bruce C. Berndt) 主编: **拉玛努金笔记**(第 1, 2, 3, 4 卷), 哈尔滨工业大学出版社, 2019.

12. 常庚哲, 史济怀 编: **数学分析教程** (上、下册), 高等教育出版社, 2003.

13. 陈天权 编著: **数学分析讲义** (第一、二、三册), 北京大学出版社, 2009.

14. 邓建平 编: **微积分 I 和 II**, 科学出版社, 2019.

15. Duhham, William 著 (李伯民, 汪军, 张怀勇 译): **微积分的历程 – 从牛顿到勒贝格**, 人民邮电出版社, 2013.

16. 吉米多维奇 著 (李荣涑, 李植 译): **数学分析习题集** (根据 2010 年俄文版翻译), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.

17. Kline, Morris 著 (张理京, 张炎热, 江泽涵等 译): **古今数学思想** (第一、二、三册), 上海科学技术出版社, 2014.

18. 黎景辉, 赵春来 著: **模曲线导引** (第二版), 北京大学出版社, 2014.

19. 李傅山, 王培合 编著: **数学分析习题课讲义** (1、2、3), 北京大学出版社, 2018.

20. 李逸 编著: **数学分析讲义**, 上海交通大学数学分析课讲义, 未出版, 2016.

21. 李忠 著: **迭代、混沌、分形**, 科学出版社, 2007.

22. 林源渠, 方企勤 编: **数学分析解题指南**, 北京大学出版社, 2003.

23. 梅加强 编著: **数学分析**, 高等教育出版社, 2015.

24. 裴礼文 编著: **数学分析中的典型问题与方法** (第二版), 高等教育出版社, 2015.

25. Riemann, Bernhard 著 (李培廉 译): **黎曼全集** (第一、二卷), 高等教育出版社, 2016.

26. 汪林 著: **数学分析中的问题和反例**, 现代数学基础 **56**, 高等教育出版社, 2015.

27. Weir, D. Maurice; Hass, R. Joel; Giordano, R. Frank. *Thomas' calculus*, Eleventh Edition, (影印版, 上、下册), 高等教育出版社, 2016.

28. 潘承洞, 潘承彪 著: **解析数论基础**, 现代数学基础丛书, 科学出版社, 1999.

29. 谭琳 编著: **Γ 函数札记**, 浙江大学出版社, 1997.

30. 徐森林, 薛春华 编著: **数学分析**, 清华出版社, 2005.

31. 杨小远, 孙玉泉, 薛玉梅, 杨卓琴 编著: **工科数学分析教程** (上、下册), 科学出版社, 2011.

32. 张福保, 薛金美, 潮小李 主编: **数学分析讲义**, 科学出版社, 2019.

33. 张筑生 编著: **数学分析新讲** (第一、二、三册), 北京大学出版社, 1990.

34. 周民强 编著: **数学分析习题演练** (第一、二、三册), 科学出版社, 2018.

35. 朱尧辰 编著: **数学分析例选通过范例学技巧**, 哈尔滨工业大学出版社, 2013.

第二部分

线性代数与常微分方程

第七章　矩阵和行列式

第八章　二次型和矩阵变换

第九章　常微分方程基本理论

第十章　常微分方程基本定理

第三部分

多变量理论

第十一章　多变量极限理论

亦非有心者所能得远, 亦非无心者所能得近. —-《冲虚至德真经》, 卷第四 (仲尼第四)

§11.1　Euclidean 空间及其子集

本节引入 Euclidean 空间中的一些基本概念. 作为自然的推广, 我们介绍一般拓扑学的定义. 拓扑学的一般理论是Fleix Hausdorff 在其《Grundzüge der mengenlehre》(1914) 中提出的. 但是在他的 1906 年的博士论文《Sur quelques points de calcul fonctionnel》中, Maurice Fréchet 就已经有了类似的概念. 在博士论文中, Fréchet 引入了点集 E 的极限定义、E 的导集、E 的内点、E 是闭集的定义、E 是紧集等概念, 并将闭区间套定理作了推广.

§11.1.1　Euclidean 空间 $\mathbb{R}^n$

回一下n 维 **Euclidean 空间 (*n*-dimensional Euclidean space)** 的定义:

$$\mathbb{R}^n := \{\boldsymbol{x} = (x^1, \cdots, x^n) : x^i \in \mathbb{R},\ 1 \le i \le n\}. \tag{11.1.1}$$

$\mathbb{R}^n$ 中的元素称为n **维向量** 或简称为**向量 (vector)**. 定义 n 个自然映射如下

$$\pi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{x} \longmapsto x^i, \tag{11.1.2}$$

其中 $1 \le i \le n$. 我们把 π_i 称为 $\mathbb{R}^n$ 上的第 i 个**投影 (*i*-th projection)**.

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ 构成了一个**向量空间 (vector space)**:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \ := \ (x^1 + y^1, \cdots, x^n + y^n), \tag{11.1.3}$$

$$\lambda \boldsymbol{x} \ \equiv \ \lambda \cdot \boldsymbol{x} \ := \ (\lambda x^1, \cdots, \lambda x^n). \tag{11.1.4}$$

定义11.1.1. *称集合 G 为***群 (group)** *如果存在映射, 称为***乘法** $\cdot$,

$$G \times G \longrightarrow G, \quad (x, y) \longmapsto x \cdot y \equiv xy,$$

满足条件

(i) **(结合律)** *任意 $x, y, z \in G \Longrightarrow (xy)z = x(yz)$;*

(ii) **(单位元)** *存在 $e \in G$, 称为***单位元 (identity)**, *对任意 $x \in G$ 都有 $xe = ex = x$ 成立;*

(iii) **(逆元)** *对任意 $x \in G$, 存在唯一的 $x^{-1} \in G$ 使得 $xx^{-1} = e = x^{-1}x$ 成立.*

群 G 称为**阿贝尔群 (Abelian group)** 如果 $xy = yx$ 对任意 $x, y \in G$ 都成立.

练习11.1.2. 证明 $(\mathbb{R}^n, +)$ 是群.

练习11.1.3. 证明所有 $n \times n$ 实矩阵组成的集合 $\mathbf{Max}(n, \mathbb{R})$ 在矩阵乘法下是群, 但不是Abel 群.

练习11.1.4. 证明所有 $n \times n$ 非奇异实矩阵组成的集合 $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ 在矩阵乘法下是群.

练习11.1.5. 定义映射如下:

$$\mathbf{Max}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2}, \quad A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \longmapsto (a_{11}, \cdots, a_{1n}, \cdots, a_{n1}, \cdots, a_{nn}).$$

证明上述映射是同构.

练习11.1.6. 定义映射如下:

$$\det : \mathbf{Max}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad A \longmapsto \det(A).$$

证明 $\det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$. 定义

$$\mathbf{GL}^{\pm}(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) | \det(A) = \pm 1\}, \quad \mathbf{SL}(n, \mathbb{R}) := \mathbf{GL}^{+}(n, \mathbb{R}).$$

证明

$$\mathbf{SL}(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ 可作用在复平面 $\mathbb{C}$ 上:

$$\mathbf{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \left(A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, z \right) \longmapsto Az := \frac{az + b}{cz + d}.$$

证明若 $z \in \mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ 则 $Az \in \mathcal{H}$ 对任意 $A \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ 都成立.

定义11.1.7. 两个群 G_1, G_2 之间的映射 $f : G_1 \to G_2$ 称为**群同态 (group homomorphism)** 如果

$$f(x_1 y_1) = f(x_1) f(y_1), \quad \forall\, x_1, y_1 \in G_1,$$

这里左边是用 G_1 中的乘法而右边是用 G_2 中的乘法. 称 G_1 **群同构 (group isomorphic)** 于 G_2 如果存在群同态 $f_1 : G_1 \to G_2$ 和 $f_2 : G_2 \to G_1$ 满足恒等式 $f_1 \circ f_2 = 1_{G_2}$ 和 $f_2 \circ f_1 = 1_{G_1}$. 如果两个群 G_1 和 G_2 群同构, 则记作

$$G_1 \cong G_2.$$

练习11.1.8. 证明群和群同态构成了一个范畴 Group.

定义11.1.9. 假设 H 是群 G 的子集. 称 H 为 G 的**子群 (subgroup)** 如果 $xy^{-1} \in H$ 对恩任意 $x, y \in H$ 都成立. 此时记作 $H < G$.

练习11.1.10. 证明 $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ 是 $\mathbf{Max}(n, \mathbb{R})$ 的子群.

定义子群 $H < G$ 的**左/右陪集 (left/right coset)** 如下:

$$gH := \{gh : h \in H\}, \quad Hg := \{hg : h \in H\}. \tag{11.1.5}$$

称子群 H 是 G 的**正规子群 (normal subgroup)** 如果 $ghg^{-1} \in H$ 对任意 $h \in H$ 和 $g \in G$ 都成立. 此时记作 $H \triangleleft G$.

练习11.1.11. 证明 $H \triangleleft G$ 当且仅当 $Hg = gH$ 对任意 $g \in G$ 都成立.

练习11.1.12. 定义

$$\Lambda(n, \mathbb{R}) := \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} =: \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \middle| \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R} \right\}$$

证明 $\Lambda(n, \mathbb{R}) \triangleleft \mathbf{Max}(n, \mathbb{R})$.

如果 $H \triangleleft G$ 我们可以定义**商群 (quotient group)** 如下

$$G/H := \{gH : g \in G\}, \tag{11.1.6}$$

这里

$$(xH)(yH) := (xy)H, \quad x, y \in G.$$

练习11.1.13. 证明 $\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{R}$ 且 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

在 $\mathbb{R}^n$ 中可引入**内积 (inner product)** 的概念:

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \equiv \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle := \sum_{1 \le i \le n} x^i y^i. \tag{11.1.7}$$

其几何意义 (直观地可考虑 $n = 2$) 就是来衡量什么时候两个向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 垂直. 一般地, 定义两个向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是**垂直的(perpendicular)**, 记作 $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$, 如果 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$. 记号:

$$\mathbb{E}^n := (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle). \tag{11.1.8}$$

定理11.1.14. 对任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$, 和任意 $a, b \in \mathbb{R}$, 有如下性质:

(1) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle \geq 0$ 且等号取到当且仅当 $\boldsymbol{x} = 0$;

(2) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle$;

(3) $\langle a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\rangle = a\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\rangle + b\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\rangle$;

(4) **(Schwarz 不等式)** $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle^2 \leq \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle$ 且等号取到当且仅当 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 平行, 即存在常数 a, b 满足 $a^2 + b^2 \neq 0$ 和 $a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$.

证明: 只给出 (4) 的证明. 如果 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 则结论显然成立, 故我们不妨假设 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$. 考虑关于 $t \in \mathbb{R}$ 的一元二次多项式

$$P(t) := \langle t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle t^2 + 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle t + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle.$$

由于多项式 $P(t)$ 非负, 所以判别式 $\Delta = 4\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle^2 - 4\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle \leq 0$.

当 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 平行时, 存在不全为零的数 a, b 满足 $a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} = 0$. 不妨假设 $b \neq 0$ 从而得到

$$\boldsymbol{y} = -\frac{a}{b}\boldsymbol{x}$$

和

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle^2 = \left(-\frac{a}{b}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle\right)^2 = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle\left(\frac{a^2}{b^2}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle\right) = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle.$$

反之, 假设 (4) 中等号取到, 则多项式 $P(t)$ 的判别式 $\Delta = 0$. 因此仅有一个根 t_0 满足 $P(t_0) = 0$, 即 $t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 0$. □

定义 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 的**范数 (norm)** 如下:

$$|\boldsymbol{x}| := \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle} = \left(\sum_{1\leq i\leq n} |x^i|^2\right)^{1/2}. \tag{11.1.9}$$

利用 Schwarz 不等式立即得到

性质11.1.15. (三角不等式) 对任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ 有如下三角不等式成立

$$|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|. \tag{11.1.10}$$

事实上 $\mathbb{R}^n$ 上面存在很多“范数”也满足不等式 (11.1.10):

(1) p-**范数 (p-norm)**, 这里 $p \geq 1$:

$$|\boldsymbol{x}|_p := \left(\sum_{1\leq i\leq n} |x^i|^p\right)^{1/p}. \tag{11.1.11}$$

特别地, $|\boldsymbol{x}|_2 = |\boldsymbol{x}|$.

(2) ∞-范数 (∞**-norm**):

$$|x|_\infty := \max_{1\le i\le n} |x^i|. \tag{11.1.12}$$

(3) **对数范数(ln-norm)**:

$$|x|_{\ln} := \ln(1+|x|). \tag{11.1.13}$$

(4) **商范数(quotient-norm)**:

$$|x|_{\mathrm{q}} := \frac{|x|}{1+|x|}. \tag{11.1.14}$$

练习11.1.16. 证明 (11.1.11) – (11.1.14) 都满足相应的三角不等式 (11.1.10).

对任意两个非零向量 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 定义它们之间的**夹角 (angle)** 为

$$\theta := \arccos\frac{\langle x, y\rangle}{|x||y|} \in [0, \pi]. \tag{11.1.15}$$

显然 $x \perp y$ 当且仅当 $\theta = \pi/2$.

$\mathbb{R}^n$ 中两个向量 x 和 y 间的**距离(distance)** 定义为

$$d(x, y) := |x-y| = \left(\sum_{1\le i\le n} |x^i - y^i|^2\right)^{1/2}. \tag{11.1.16}$$

定理11.1.17. ($\mathbb{R}^n$ 是距离空间) *(11.1.16) 中定义的距离 d 满足:*

(*i*) **(正定性)**: *$d(x, y) \ge 0$ 且等号取到当且仅当 $x = y$;*

(*ii*) **(对称性)**: *$d(x, y) = d(y, x)$, 任意 $x, y \in \mathbb{R}^n$;*

(*iii*) **(三角不等式)**: *$d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$, 任意 $x, y, z \in \mathbb{R}^n$.*

证明: 显然. □

假设 X 是非空集合. 映射 $d: X\times X \to \mathbb{R}$ 称为 X 上的**度量(metric)** 或**距离(distance)** 如果 d 满足条件:

(1) **(正定性) (Positivity)**: $d(x, y) \ge 0$ 且等号取到当且仅当 $x = y$;

(2) **(对称性) (Symmetry)**: $d(x, y) = d(y, x)$, 任意 $x, y \in X$;

(3) **(三角不等式) (Triangle inequality)**: 对任意 $x, y, z \in X$ 有

$$d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z).$$

称偶对 (X, d) 为**度量空间(metric space)**. 如果把条件 (1) 换成

(1′) **(非负性) (Nonnegativity)**: $d(x,y) \geq 0$, 对任意 $x, y \in X$, 且 $d(x,x) = 0$, 对任意 $x \in X$,

则称 d 为**半度量(semi-metric)** 且 (X,d) 为**半度量空间(semi-metric space)**.

练习11.1.18. 假设 (X,d) 是半度量空间. 定义 $\sim$ 如下:

$$x \sim y \iff d(x,y) = 0.$$

证明 $\sim$ 是等价关系. 把 x 的等价类记作 $[x]$, 并令

$$\widetilde{X} \equiv X/\sim := \{[x] : x \in X\}.$$

定义映射 $\widetilde{d} : \widetilde{X} \times \widetilde{X} \to \mathbb{R}$ 为

$$\widetilde{d}([x],[y]) := d(x,y), \quad [x],[y] \in \widetilde{X}.$$

证明 $\widetilde{d}$ 的定义不依赖等价类的代表元, 且 $(X/d, d) := (\widetilde{X}, \widetilde{d})$ 是度量空间.

练习11.1.19. 根据 (11.1.11) – (11.1.14) 定义

$$d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|_p, \quad d_\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$$

和

$$d_{\ln}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|_{\ln}, \quad d_{\mathbf{q}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|_{\mathbf{q}}$$

都是 $\mathbb{R}^n$ 上的度量.

练习11.1.20. 定义

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := |(x^1-y^1)+(x^2-y^2)|, \quad \text{任意 } \boldsymbol{x} = (x^1,x^2), \boldsymbol{y} = (y^1,y^2) \in \mathbb{R}^2.$$

证明 $(\mathbb{R}^2, d)$ 是半距离空间但不是距离空间.

度量空间之间的映射 $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ 称为**等距映射(isometry)** 如果 f 是双射且满足条件

$$d_X(x_1,x_2) = d_Y(f(x_1), f(x_2)), \quad \text{任意 } x_1, x_2 \in X.$$

两个度量空间 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 是**等距的(isometric)** 如果它们之间存在一个等距映射.

练习11.1.21. 证明 $(\mathbb{R}^2/d, d)$ 和 $(\mathbb{R}, d_1)$ 是等距的, 其中 $(\mathbb{R}^2, d)$ 由**练习** 11.1.20 给出.

§11.1.2 $\mathbb{R}^n$ 中的点列收敛

令 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$. 称

$$\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r):=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n:|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|<r\} \tag{11.1.17}$$

为以 $\boldsymbol{x}$ 为球心 r 为半径的球 **(ball of radius r at point x)**. 如果 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 简记 $\mathbb{B}^n_r:=\mathbb{B}^n(\boldsymbol{0},r)$; 特别的 $\mathbb{B}^n:=\mathbb{B}^n_1=\mathbb{B}^n(\boldsymbol{0},1)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的**单位球 (unit ball)**.

定义11.1.22. 假设 $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i\geq 1}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的点列, 即 $\boldsymbol{x}_i\in\mathbb{R}^n$, $i\geq 1$.

(i) 称点列 $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i\geq 1}$ 是**有界的 (bounded)** 如果存在 $M>0$ 使得 $|\boldsymbol{x}_i|\leq M$ 对任意 $i\geq 1$ 都成立, 即如果 $\boldsymbol{x}_i\in\mathbb{B}^n_M$.

(ii) 称 $\boldsymbol{x}$ 是点列 $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i\geq 1}$ 的**极限(limit)**, 记作 $\lim_{i\to\infty}\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{x}$, 如果 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, 且对任意 $\epsilon>0$ 存在 $I\in\mathbb{N}$ 使得不等式

$$|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}|<\epsilon \quad\Longleftrightarrow\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},\epsilon),$$

对任意 $i\geq I$ 都成立.

(iii) 称点列 $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i\geq 1}$ 是**发散的 (divergent)** 如果它不收敛到 $\mathbb{R}^n$ 中的任何点.

利用映射 (11.1.2) 对给定的点列 $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i\geq 1}$ 得到 n 个数列

$$\{x^j_i=\pi_j(\boldsymbol{x}_i)\}_{i\geq 1},\quad 1\leq j\leq n.$$

定理11.1.23. $\lim_{i\to\infty}\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{x}\Longleftrightarrow\lim_{i\to\infty}x^j_i=x^j\ (1\leq j\leq n)$.

证明: 利用不等式

$$|x^j_i-x^j|\leq|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}|=\sqrt{\sum_{1\leq k\leq n}(x^k_i-x^k)^2}\leq\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{1\leq k\leq n}|x^k_i-x^k|.\quad\square$$

这个定理表明了我们可以利用数列来研究 $\mathbb{R}^n$ 中点列的性质.

§11.1.3 $\mathbb{R}^n$ 中的有界集、开集和闭集

假设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中的点集.

(1) 称 S 是**有界集(bounded set)** 如果存在 $M>0$ 使得 $S\subset\mathbb{B}^n_M$ 成立.

(2) 称 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 是 S 的**内点(interior point)** 如果存在 $r>0$ 满足 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)\subset S$. S 的所有内点组成的集合记作 S° 或 $\mathrm{Int}(S)$, 称为 S 的**内部(interior)**.

(3) 称 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 是 S 的**外点(exterior point)** 如果存在 $r>0$ 满足 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)\subset\mathbb{R}^n\setminus S$. S 的所有外点组成的集合记作 $\mathrm{Ext}(S)$, 称为 S 的**外部(exterior)**.

(4) 称 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 是 S 的**边界点boundary point)** 如果 $\boldsymbol{x} \notin \mathrm{Int}(S) \cup \mathrm{Ext}(S)$. S 的所有边界点组成的集合记作 ∂S 或 $\mathrm{Bdy}(S)$, 称为 S 的**边界(boundary)**. 等价地, $\boldsymbol{x} \in \partial S$ 当且仅当对任意 $r > 0$ 球 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}, r)$ 即包含 S 的点又包含了 $\mathbb{R}^n \setminus S$ 的点.

显然成立关系: $\mathrm{Int}(S) = \mathrm{Ext}(\mathbb{R}^n \setminus S)$, $\mathrm{Ext}(S) = \mathrm{Int}(\mathbb{R}^n \setminus S)$, $\partial(S) = \partial(\mathbb{R}^n \setminus S)$, 和

$$S^\circ \subset S \quad \text{但是} \quad \partial S \text{ 可能不属于 } S. \tag{11.1.18}$$

比如 $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ 的边界 $\partial S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ 就不属于 S.

(5) 称 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 是 S 的**孤立点(isolated point)** 如果存在 $r > 0$ 满足 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}, r) \cap S = \{\boldsymbol{x}\}$. S 的所有孤立点组成的集合记作 $\mathrm{Iso}(S)$. 显然 $\mathrm{Iso}(S) \subset \partial S \cap S$.

(6) 称 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 是 S 的**聚点(cluster point)** 如果对任意 $r > 0$ 球 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}, r)$ 都包含无穷多个 S 中的点. S 的所有聚点组成的集合记作 S', 称为 S 的**导集(derived set)**.

(7) S 的**闭包(closure)** 定义为 $\overline{S} := S \cup S'$.

(8) 称 S 为**开集(open set)** 如果 $S^\circ = S$.

(9) 称 S 为**闭集(closed set)** 如果 $\overline{S} = S$.

性质11.1.24. *(a)* $\boldsymbol{x} \in S' \iff$ *对任意* $r > 0$ *都有* $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}, r) \cap (S \setminus \{\boldsymbol{x}\}) \neq \emptyset \iff$ *存在互异的点列* $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i \geq 1}$ *满足* $\boldsymbol{x}_i \in S$, $\boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{x}$ *(任意* i*) 且* $\lim_{i \to \infty} \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}$.

(b) $S^\circ \subset S'$ *且* $\partial S \setminus \mathrm{Iso}(S) \subset S'$.

(c) $\overline{S} = S \cup \partial S$.

证明: (a): $\Longrightarrow$ 显然. 假设对任意 $r > 0$ 都有 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}, r) \cap (S \setminus \{\boldsymbol{x}\}) \neq \emptyset$. 取 $r_1 = 1$ 得到 $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}$ 且 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}, 1) \cap S$. 令 $r_2 := |\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}| > 0$. 则得到 $\boldsymbol{x}_2 \neq \boldsymbol{x}$ 且 $\boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}, r_2) \cap S$. 令 $r_3 := |\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}| > 0$. 则得到 $\boldsymbol{x}_3 \neq \boldsymbol{x}$ 且 $\boldsymbol{x}_3 \in \mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}, r_3) \cap S$. 这个过程一直下去就得到 S 中的无穷多个点.

(b): 显然.

(c): 根据 (b) 得到 $S \cup \partial S = S \cup (\partial S \setminus \mathrm{Iso}(S)) \subset S \cup S' = \overline{S}$. 反之, 因为 $S' \subset S^\circ \cup \partial S$ 所以结论得证. □

例11.1.25. 考察集合

$$S := \mathbb{B}^2 \cup \{(\cos\theta, \sin\theta) : \theta \in [0, \pi/2) \cup (\pi, 3\pi/2]\} \cup \{(0, 2), (-2, 0)\}.$$

则

$$\begin{aligned} S^\circ &= \mathbb{B}^2, \\ \partial S &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}\cup\{(0,2),(-2,0)\}, \\ \mathrm{Iso}(S) &= \{(0,2),(-2,0)\}, \\ S' &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}, \\ \overline{S} &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}\cup\{(0,2),(-2,0)\}. \end{aligned}$$

例11.1.26. (i) $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)$ 是开集.

(ii) n **维开矩形 (n-dimensional open rectangle)**

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\equiv\prod_{1\le i\le n}(a^i,b^i):=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n : a^i<x^i<b^i,\ 1\le i\le n\right\} \tag{11.1.19}$$

是开集.

(iii) n **维闭矩形 (n-dimensional closed rectangle)**

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\equiv\prod_{1\le i\le n}[a^i,b^i]:=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n : a^i\le x^i\le b^i,\ 1\le i\le n\right\} \tag{11.1.20}$$

是闭集.

(iv) n **维闭球 (n-dimensional closed ball)**

$$\overline{\mathbb{B}}^n(\boldsymbol{x},r)\equiv\overline{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)}:=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n : |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|\le r\} \tag{11.1.21}$$

是闭集.

(v) 假设 $S\neq\emptyset$. S 是开集 $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{R}^n\setminus S$ 是闭集. 因为 $\mathbb{R}^n$ 即开又闭, 如果规定 $\emptyset$ 也是即开又闭的集合, 则上述等价刻画对任何集合都成立.

定理11.1.27. *开集和闭集具有如下性质:*

(i) 任意一族开集 $\{S_\alpha\}_\alpha$ 的并集 $\cup_\alpha S_\alpha$ 是开集;

(ii) 任意一族闭集 $\{T_\alpha\}_\alpha$ 的交集 $\cap_\alpha S_\alpha$ 是闭集;

(iii) 任意有限个开集 $S_1,\cdots,S_k$ 的交集 $\cap_{1\le i\le k}S_i$ 是开集;

(iv) 任意有限个闭集 $T_1,\cdots,T_k$ 的并集 $\cup_{1\le i\le k}T_i$ 是闭集。

证明: 显然. □

集合 X 上的**拓扑(topology)** 是指 2^X 中的子集 $\mathcal{T}$, 其满足如下条件:

(1) $\emptyset, X\in\mathcal{T}$;

(2) $\forall\, U_\alpha \in \mathcal{T} \Longrightarrow \cup_\alpha U_\alpha \in \mathcal{T}$;

(3) 有限个 $U_1, \cdots, U_k \in \mathcal{T} \Longrightarrow \cap_{1\le i\le k} U_i \in \mathcal{T}$.

显然 $\mathcal{T}$ 至少包含两个元素 $\emptyset, X$. $\mathcal{T}$ 中的元素称为**开集(open set)**. 开集的补集称为**闭集(closed set)**. 偶对 $(X, \mathcal{T})$ 称为**拓扑空间(topological space)**.

对任何集合 X 来说, 它上面的拓扑至少有两个:

- **平凡拓扑(trivial topology)**: $\mathcal{T}_{\rm tri} = \{\emptyset, X\}$;
- **离散拓扑(discrete topology)**: $\mathcal{T}_{\rm dis} = 2^X$.

一个是最小的拓扑, 而另一个是最大的拓扑.

练习11.1.28. 证明 $\mathcal{T}_{\rm tri}$ 和 $\mathcal{T}_{\rm dis}$ 都是拓扑.

如果取 $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上所有开集组成的集合, 则 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T})$ 就是一个拓扑空间.

假设 $(X, \mathcal{T})$ 是拓扑空间. $U \subset X$ 称为 $x \in X$ 的**邻域**[1]**(neighborhood)**如果 $U \in \mathcal{T}$.

定义11.1.29. 拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 是**Hausdorff** 如果对任意 $x, y \in X$ 且 $x \neq y$, 都分别存在相应的邻域 $U, V \in \mathcal{T}$ 满足 $x \in U, y \in V$, 和 $U \cap V = \emptyset$.

练习11.1.30. 证明 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n})$ 是Hausdorff.

当然存在非 Hausdorff 的拓扑空间, 这需要**商拓扑(quotient topology)** 的概念 (在之后的章节中会详细展开).

假设 (X, d) 是度量空间. 定义

$$B(x,r) := \{y \in X : d(x,y) < r\}, \quad \overline{B}(x,r) := \{y \in X : d(x,y) \le r\}. \tag{11.1.22}$$

定义 (X, d) 上的拓扑, 称为**度量拓扑(metric topology)** 如下: $U \subset X$ 是**开集**如果 $\forall\, x \in U\, \exists\, r > 0$ 满足 $B(x,r) \subset U$. $S \subset X$ 是**闭集**如果 $X \setminus S$ 是**开集**.

假设 $(X, \mathcal{T})$ 是拓扑空间, Y 是 X 的子集. 定义 $\mathcal{T}_Y$ 如下:

$$\mathcal{T}_Y := \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}, \tag{11.1.23}$$

称为由 $\mathcal{T}$ 诱导出来的 Y 上的**子空间拓扑(subspace topology)**. 则 $(Y, \mathcal{T}_Y)$ 本身就是拓扑空间.

练习11.1.31. 证明 $(Y, \mathcal{T}_Y)$ 是拓扑空间.

[1]有些书上定义 U 是 x 的邻域如果存在开集 $A \in \mathcal{T}$ 满足 $x \in A \subset U$. 本讲义采用第一种定义.

§11.2 $\mathbb{R}^n$ 中的连续性

定义在区间上的函数的连续性等可平行地搬到多元区间 (即 (11.1.19) 或 (11.1.20)) 上来, 本节给出多元函数连续性的一般定义.

§11.2.1 闭区域套定理、Bozalno-Weierstrass 定理和 Cauchy 收敛准则

我们将之前的闭区间定理、Bozalno-Weierstrass 定理和 Cauchy 收敛准则推广到多元情形.

定理11.2.1. (闭矩形套定理) $\Delta_k := \prod_{1\le i\le n}[a_k^i, b_k^i]$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一列闭矩形, $k \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$. 如果

(1) $\Delta_{k+1} \subset \Delta_k$, 即, $[a_k^{i+1}, b_k^{i+1}] \subset [a_k^i, b_k^i]$ $(1 \le i \le n, k \ge 1)$, 且

(2) $\sum_{1\le i\le n}(b_k^i - a_k^i)^2 \to 0$ 当 $k \to \infty$,

则存在唯一的 $\boldsymbol{\xi} \in \cap_{k\ge 1}\Delta_k$ 满足

$$\lim_{k\to\infty} a_k^i = \lim_{k\to\infty} b_k^i = \xi^i, \quad 1 \le i \le n.$$

证明: 对任意 i 利用映射 (11.1.2) 得到闭区间列

$$\{\Delta_k^i := \pi_i(\Delta_k) = [a_k^i, b_k^i]\}_{k\ge 1}.$$

上述条件 (1) 和 (2) 等价于

$$\Delta_{k+1}^i \subset \Delta_k^i \text{ 和 } \lim_{k\to\infty}(b_k^i - a_k^i)^2 = 0.$$

利用闭区间套定理, **定理 3.3.16**, 得到唯一点 $\xi^i \in \cap_{k\ge 1}\Delta_k^i$ 满足

$$\lim_{k\to\infty} a_k^i = \lim_{k\to\infty} b_k^i = \xi^i.$$

从而得到点 $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \cdots, \xi^n) \in \cap_{k\ge 1}\Delta_k$. □

定理11.2.2. (Bozalno-Weierstrass 定理/致密性定理) $\mathbb{R}^n$ 中任意有界点列必有收敛子列.

证明: 假设该有界点列为 $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k\ge 1} \subset \mathbb{R}^n$. 令 $x_k^i := \pi_i(\boldsymbol{x}_k)$. 对数列 $\{x_k^1\}_{k\ge 1}$ 应用 Bolzano-Weierstrass 定理, **定理 2.3.11**, 得到一收敛子列 $\{x_{k_1}^1\}_{k_1\ge 1}$. 因为点列 $\{\boldsymbol{x}_{k_1}\}_{k_1\ge 1}$ 也是有界的, 从而对数列 $\{x_{k_1}^2\}_{k_1\ge 1}$ 应用 Bolzano-Weierstrass 定理得到一收敛子列 $\{x_{k_2}^2\}_{k_2\ge 1}$. 这个过程一直下去就得到 $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k\ge 1}$ 的收敛子列 $\{\boldsymbol{x}_{k_n}\}_{k_n\ge 1}$. □

推论11.2.3. (聚点定理) $\mathbb{R}^n$ 的任意有界无限点集至少有一个聚点.

$\mathbb{R}^n$ 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k\geq 1}$ 称为**Cauchy 列(Cauchy sequence)** 若对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $N \geq 1$ 使得 $|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_\ell| < \epsilon$ 对任何 $k, \ell > N$ 都成立.

定理11.2.4. (Cauchy 收敛原理/Cauchy 判别准则) $\mathbb{R}^n$ 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k\geq 1}$ 收敛当且仅当它是Cauchy 列.

证明: $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k\geq 1}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 Cauchy 列当且仅当 $\{x_k^i\}_{k\geq 1}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列 $(1 \leq i \leq n)$. 从而利用数列的 Cauchy 收敛原理, **定理 2.3.15**, 得证. □

我们可以把 Cauchy 列的定义推广到度量空间上去, 这在 §1.6.4 已经初步涉猎过了.

定义11.2.5. 假设 (X, d) 是度量空间.

(i) 点列 $\{x_k\}_{k\geq 1}$ 称为**Cauchy 列(Cauchy sequence)** 如果对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $N \geq 1$ 使得 $d(x_k, x_\ell) < \epsilon$ 对任何 $k, \ell > N$ 都成立.

(ii) 点列 $\{x_k\}_{k\geq 1}$ **收敛 (converge)** 到 $x \in X$, 记作 $\lim_{k\to\infty} x_k =_d x$, 如果对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $N \geq 1$ 使得 $d(x_k, x) < \epsilon$ 对任何 $k > N$ 都成立.

显然收敛点列 $\{x_k\}_{k\geq 1}$ 必是Cauchy 的.

但是在一般的度量空间 (X, d) 上 Cauchy 列不一定是收敛的, 比如 $(\mathbb{Q}, d_1)$ 其中 $d_1(x, y) := |x - y|$. 显然点列 $\{x_n := 1 + \sum_{1\leq i\leq n} 1/i!\}_{n\geq 1}$ 是 $\mathbb{Q}$ 中的 Cauchy 列但不收敛.

称度量空间 (X, d) 是**完备的(complete)** 如果 X 中的任意 Cauchy 列都收敛. 比如 $\mathbb{R}^n$ 在 d_2 下是完备的.

定理11.2.6. 对任意度量空间 (X, d) 存在完备空间 (X^*, d^*) 满足 $X \subset X^*$ 且 $d^*|_X = d$.

证明: 定义集合 $\widetilde{X}$ 为

$$\widetilde{X} := \left\{\{x_k\}_{k\geq 1} \text{ 是 Cauchy 列}\right\}.$$

对任意 $x \in X$, 点列 $\{x_k = x\}_{k\geq 1}$ 是 Cauchy 列, 从而存在映射

$$\iota : X \longrightarrow \widetilde{X}, \quad x \longmapsto \{x_k = x\}_{k\geq 1}.$$

对任意 $\{x_k\}_{k\geq 1}, \{y_k\}_{k\geq 1} \in \widetilde{X}$ 定义

$$\widetilde{d}\left(\{x_k\}_{k\geq 1}, \{y_k\}_{k\geq 1}\right) := \lim_{k\to\infty} d(x_k, y_k).$$

对任意 $k, \ell \geq 1$ 有

$$d(x_k, y_k) \leq d(x_k, x_\ell) + d(x_\ell, y_\ell) + d(y_\ell, y_k)$$

从而得到

$$|d(x_k, y_k) - d(x_\ell, y_\ell)| \le d(x_k, x_\ell) + d(y_\ell, y_k).$$

因此 $\{d(x_k, y_k)\}_{k\ge 1}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列, 故极限 $\lim_{k\to\infty} d(x_k, y_k)$ 存在. 显然 $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ 是半度量空间. 根据**练习** 11.1.18 得到度量空间 $(X^*, d^*) := (\widetilde{X}/\widetilde{d}, \widetilde{d})$. 作为练习请证明存在单射 $X \to X^*$. □

对任何子集 $S \subset \mathbb{R}^n$ 定义

$$\mathrm{diam}(S) := \sup\{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| : \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S\}, \tag{11.2.1}$$

称为 S 的**直径(diameter)**.

定理11.2.7. (Cantor 闭区域套定理) 如果 $\{S_k\}_{k\ge 1}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的递缩非空闭集列, 即满足

$$S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_k \supset S_{k+1} \supset \cdots,$$

和 $\lim_{k\to\infty} \mathrm{diam}(S_k) = 0$, 则 $\cap_{k\ge 1} S_k$ 是单点集.

证明: 由于 $\mathbb{R}^n$ 是完备的, 结论有下面更一般的定理给出. □

度量空间 (X, d) 中子集 S 的直径定义为

$$\mathrm{diam}(S) := \sup_{x,y\in S} d(x, y). \tag{11.2.2}$$

定理11.2.8. 度量空间 (X, d) 是完备的 $\Longleftrightarrow$ 满足条件 $S_{k+1} \subset S_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$ 和 $\lim_{k\to\infty} \mathrm{diam}(S_k) = 0$ 的任何非空闭集列 $\{S_k\}_{k\ge 1}$ 其交集 $\cap_{k\ge 1} S_k$ 是单点集.

证明: (1) 假设 (X, d) 是度量空间且 $\{S_k\}_{k\ge 1}$ 是满足条件 $S_{k+1} \subset S_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$ 和 $\lim_{k\to\infty} \mathrm{diam}(S_k) = 0$ 的非空闭集列. 取点 $x_k, y_k \in S_k$ 使得 $d_k := \mathrm{diam}(S_k) = d(x_k, y_k)$ 成立, 这是由于 S_k 是闭的. 考虑点列 $\{x_k\}_{k\ge 1}$ 和 $\{y_k\}_{k\ge 1}$. 对任意 $k > \ell$ 有

$$d(x_k, x_\ell) \le d(x_k, y_\ell) + d(y_\ell, x_\ell) \le d_\ell + d_\ell = 2d_\ell,$$

因为 $x_k \in S_k \subset S_\ell$. 因此 $\{x_k\}_{k\ge 1}$ 是 Cauchy 列从而收敛到 $x_\infty \in X$. 类似可证明 $\lim_{k\to\infty} y_k = y_\infty \in X$. 根据不等式

$$d(x_\infty, y_\infty) \le d(x_\infty, x_k) + d(x_k, y_k) + d(y_k, y_\infty),$$

得到 $x_\infty = y_\infty =: x \in X$. 前面计算表明

$$d(x, x_\ell) \le 2d_\ell \quad \Longrightarrow \quad x \in \overline{B}(x_\ell, 2d_\ell) = S_\ell.$$

故 $x \in \cap_{k\ge 1} S_k$.

(2) 反之, 任给 X 中的 Cauchy 列 $\{x_k\}_{k\ge1}$. 对任意 $\epsilon>0$ 存在 $N\in\mathbb{N}$ 满足 $d(x_k,x_\ell)<\epsilon$ 只要 $k>\ell\ge N$. 特别的 $\exists$ 递增数列 $\{k_\ell\}_{\ell\ge1}$ 使得不等式

$$d(x_k,x_{k_\ell})\le\frac{1}{2^\ell},\quad k\ge k_\ell.$$

令 $S_\ell:=\overline{B}(x_{k_\ell},2^{-\ell+1})$ 为 X 中的一非空闭集. 则对任意 $y\in S_{\ell+1}$ 得到

$$d(y,x_{k_\ell})\le d(y,x_{k_{\ell+1}})+d(x_{k_{\ell+1}},x_{k_\ell})\le\frac{1}{2^\ell}+\frac{1}{2^\ell}=\frac{1}{2^{\ell-1}}.$$

即 $y\in\overline{B}(x_{k_\ell},2^{-\ell+1})$ 从而 $S_{\ell+1}\subset S_\ell$. 因为 $\mathrm{diam}(S_\ell)\le2^{2-\ell}\to0$, 所以根据假设条件存在点 $x\in\cap_{\ell\ge1}S_\ell$. 对每个 ℓ 得到

$$d(x,x_{k_\ell})\le\frac{1}{2^{\ell-1}}\quad\Longrightarrow\quad d(x,x_k)\le d(x,x_{k_\ell})+d(x_{k_\ell},x_k)\le\frac{1}{2^{\ell-1}}+\frac{1}{2^\ell}=\frac{3}{2^\ell}$$

只要 $k\ge k_\ell$. 因此 $\lim_{k\to\infty}x_k=x$. 即 (X,d) 是完备的. □

§11.2.2 紧致度量空间的刻画和道路连通集

考虑函数

$$f:[0,2]\longrightarrow[0,2],\quad x\longmapsto\begin{cases}0, & 0\le x\le1,\\ x-1, & 1<x\le2.\end{cases}$$

显然这是一个连续函数, 且 $f((1/2,3/2))=[0,1/2)$. 这个例子告诉我们, 连续函数不一定把开区间映成开区间.

另一方面, 考虑函数

$$g:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\quad(x,y)\longmapsto x.$$

虽然 g 是连续的 (多元函数的连续性参见 §11.4) 和 $C:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:xy=1\}$ 是闭的, 但是 $g(C)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 却不是闭的.

上面两个例子让我们去寻找什么样的集合能被连续函数所保持. 之后将要证明的**定理 11.4.5** 表明连续函数保持 "紧集" 性质. 我们首先来定义紧集的概念.

定义11.2.9. 假设 $(X,\mathcal{T})$ 是拓扑空间.

(1) X 上的**开覆盖(open covering)** 是指一族开集 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset\mathcal{T}$ 且满足条件 $\cup_{\alpha\in A}U_\alpha=X$.

(2) X 上的开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的**开子覆盖(open sub-covering)** 是指一族开集 $\{U_\beta\}_{\beta\in B}\subset\mathcal{T}$ 满足 $B\subset A$ 且 $\cup_{\beta\in B}U_\beta=X$. 这个开子覆盖 $\{U_\beta\}_{\beta\in B}$ 是**有限的(finite)** 如果 B 是有限集.

(3) X 称为**紧的(compact)** 如果任意开覆盖都包含一个有限开子覆盖.

(4) X 称为**非紧的(non-compact)** 如果 X 不是紧的.

假设 S 是拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 的子集. 称 S 是 X 的**紧子集(compact subset)** 如果 S 在子空间拓扑 $\mathcal{T}_S$ 下是紧的. 也就是说, $S \subset X$ 是紧的当且仅当对任意满足条件 $\cup_{\alpha \in A} U_\alpha \supset S$ 的开集族 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{T}$ 存在一个有限集 $B \subset A$ 使得 $\cup_{\beta \in B} U_\beta \supset S$ 成立.

定义11.2.10. 假设 (X, d) 是度量空间.

(1) 给定 $\epsilon > 0$. 子集 $S \subset X$ 称为**ϵ- 网(ϵ-net)** 如果

$$\mathrm{dist}(x, S) = \inf_{y \in S} d(x, y) \le \epsilon$$

对任何 $x \in X$ 都成立.

(2) 给定 $\epsilon > 0$ 和子集 $Y \subset X$. 子集 $S \subset X$ 称为**(ϵ, Y)- 网(ϵ-net for Y)** 如果

$$\mathrm{dist}(y, S) = \inf_{z \in S} d(y, z) \le \epsilon$$

对任何 $y \in Y$ 都成立.

(3) (X, d) 称为**全有界的(totally bounded)** 如果对任意 $\epsilon > 0$ 存在 X 中的有限 ϵ- 网.

性质11.2.11. 如果 (X, d) 是度量空间, 则下面性质成立:

(1) 给定 $\epsilon > 0$ 和 $Y \subset X$. 如果存在有限 (ϵ, Y)- 网, 则存在包含于 Y 的 $(2\epsilon, Y)$- 网.

(2) X 全有界的 $\Longrightarrow$ X 的任意子集, 本身也是度量空间, 也是全有界的.

(3) $X = \mathbb{R}^n \Longrightarrow$ 任何有界子集必是全有界的.

证明: 只给出 (3) 的证明. 假设 U 是有界子集. 任取 $r > 0$ 且考虑集合

$$S := \{\boldsymbol{x} = (x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^i \in r\mathbb{Z}\}.$$

选择 r 充分小后可以把 U 相对于 S 分解成有限多个子集 $U_1, \cdots, U_k$ 使得

$$\mathrm{diam}(U_i) \le \epsilon, \quad 1 \le i \le k.$$

对 $\forall \boldsymbol{y} \in U$ 有 $\mathrm{diam}(\boldsymbol{y}, S) \le \mathrm{diam}(U_i) \le \epsilon, U_i \ni \boldsymbol{y}$. □

定理11.2.12. (紧空间刻画定理) 假设 (X, d) 是度量空间. 则下面结论等价:

(1) X 是紧的;

(2) X 的任何无限子集必有聚点;

(3) X 是完备的和全有界的;

(4) X 中的任何点列必有收敛子列.

证明: 参看任何一本拓扑书. □

推论11.2.13. 如果 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中的子集, 则下面结论等价:

(1) S 是紧的;

(2) S 的任何无限子集必有聚点且聚点在 S 中;

(3) S 是有界闭的.

练习11.2.14. 证明**推论** 11.2.13.

定义11.2.15. 给定拓扑空间 $(X, \mathcal{T}_X)$ 和 $(Y, \mathcal{T}_Y)$. 称映射 $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ 是**连续的(continuous)** 或 $\boldsymbol{\mathcal{T}_X/\mathcal{T}_Y}$**- 连续的(**$\mathcal{T}_X/\mathcal{T}_Y$**-continuous)** 如果对任意 $V \in \mathcal{T}_Y$ 都有 $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$.

称连续映射 $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ 是**拓扑同构的 (topologically isomorphic)** 如果存在连续映射 $g : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (\mathcal{X}, \mathcal{T}_X)$ 满足 $f \circ g = 1_Y$ 和 $g \circ f = 1_X$.

$[0, 1]$ 作为 $\mathbb{R}$ 的子集本身就是拓扑空间.

定义11.2.16. 拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 是**连通的 (connected)** 如果不存在非空开集 U 和 V 满足 $U \cap V = \emptyset$ 和 $U \cup V = X$. X 的子集 U 是**连通子集 (connected subset)** 如果 U 在子空间拓扑下是连通的.

下面是连通拓扑空间的例子:

(1) 空集和任何单点集都是连通的.

(2) 在相对拓扑下, $\mathbb{N}$ 不是连通的. 这是因为我们可以取

$$U = \{0\} = \mathbb{N} \cap (-\infty, 1/2), \quad V := \mathbb{N} \setminus \{0\} = \mathbb{N} \cap (1/2, +\infty).$$

(3) 在相对拓扑下, $\mathbb{Q}$ 不是连通的. 这是因为我们可以取

$$U := \mathbb{Q} \cap (-\infty, \sqrt{2}), \quad V := \mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, +\infty).$$

定理11.2.17. (1) 拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 是连通的当且仅当 X 中即是开的又是闭的非空子集只能是 X 本身.

(2) 假设 A 是拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 的连通子集. 如果 $A \subset B \subset \overline{A}$, 则 B 也是连通的.

(3) $\mathbb{R}$ 中的连通子集只能是区间.

证: (3) 将在之后关于拓扑学的章节中给出. 下证 (2) 和 (3). 对 (2), 假设 $B = U \cup V$, 其中 U, V 是非空互不相交的 B 中的开集且满足 $U \cup V = B$. 则 $A \subset U$ 或者 $A \subset V$. 不妨假设 $A \subset U$, 从而得到 $\overline{A} \subset \overline{U}$. 故

$$V \subset B \subset \overline{A} \subset \overline{U},$$

矛盾.

(1) 假设 A 是一个即开又必的非空真子集, 令

$$U := A, \quad V := X \setminus A.$$

则 U, V 的存在性和连通的定义发生矛盾, 因此这样的 A 不存在.

如果 X 不是连通的, 则存在非空互不相交的开集 U, V 满足 $U \cup V = X$. 这样 U 即是非空真子集, 又是开的和闭的. □

定义11.2.18. *假设 $(X, \mathcal{T})$ 是拓扑空间.*

(1) *X 中的**道路(path)**是指连续映射 $\gamma : [0,1] \to X$. 分别称 $\gamma(0), \gamma(1)$ 为道路的**起点(start point)** 和**终点(end point)**. γ 称为**圈(loop)** 如果 $\gamma(0) = \gamma(1)$.*

(2) *称 X 是**道路连通的(path-connected)** 如果对任意 $x, y \in X$ 存在道路 $\gamma : [0,1] \to X$ 使得 $\gamma(0) = x$ 和 $\gamma(1) = y$.*

X 的子集 A 是道路连通的, 如果它在子空间拓扑下是道路连通的.

假设 $\gamma_1 : [0,1] \to X$ 和 $\gamma_2 : [0,1] \to X$ 是两个道路分别连接 x, y 和 y, z. 从几何直观上我们马上得到 x 到 z 的道路. 下面我们具体给出道路的表达式. 定义

$$(\gamma_1 * \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \gamma_2(1-2t), & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases} \tag{11.2.3}$$

则 $\gamma_1 * \gamma_2$ 是连续的且连接 x 和 z.

性质11.2.19. *任意道路连通空间必是连通的.*

证: 假设道路连通空间 $(X, \mathcal{T})$ 不是连通的. 则存在非空互不相交开集 U, V 满足 $U \cup V = X$. 任取 $a \in U$, $b \in V$, 和连续映射 $f : [0,1] \to X$ 满足 $f(0) = a$ 和 $f(1) = b$. 根据**定理 11.2.17** (2) 可知 $[a, b]$ 是连通的, 从而利用**定理 11.4.6** (2) 得到 $f([0,1])$ 的连通性. 这样必有 $f([0,1]) \subset U$ 或者 $f([0,1]) \subset V$, 矛盾! □

例11.2.20. (1) 单位球 $\mathbb{B}^n$ 是道路连通的. 给定两个点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{B}^n$, 定义连续映射

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{B}^n, \quad t \longmapsto (1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}.$$

因为

$$|f(t)| = |(1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}| \le (1-t)|\boldsymbol{x}| + t|\boldsymbol{y}| \le (1-t) + t = 1,$$

所以 f 是有定义的.

(2) **去心 Euclidean 空间 (punctured Euclidean space)** $\mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ 当 $n \ge 2$ 是道路连通的, 显然当 $n = 1$ 时它不是连通的. 因为任给两点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$, 可以找到一个平面包含它们. 所以只要对 $n = 2$ 进行证明即可. 此时如果连接 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的直线不经过 $\boldsymbol{0}$, 则取道路 f 就是这条直线; 如果直线经过 $\boldsymbol{0}$, 就任取第三点 $\boldsymbol{z}$ 得到所需要的折线 .

(3) 单位球面 $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ 是道路连通的. 考虑连续满射

$$\mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}, \quad \boldsymbol{x} \longmapsto \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}.$$

根据**定理 11.4.6** (1), $\mathbb{S}^{n-1}$ 是道路连通的.

(4) **(存在连通但不是道路连通的例子)** 考虑子集

$$S := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin\frac{1}{x},\ 0 \le x \le 1 \right\}.$$

因为 S 是连续映射 $f(x) = \sin(1/x)$, $0 \le x \le 1$, 的像, 所以 S 是连通的. 根据**定理 11.2.17** (2), $\overline{S}$ 也是连通的. 在拓扑学上把 $\overline{S}$ 称为**拓扑学家的 sine 曲线 (topologist's sine curve)**. 显然

$$\overline{S} = S \cup (0 \times [-1, 1]).$$

下证 $\overline{S}$ 不是道路连通的. 假设存在连续映射 $f : [0,1] \to \overline{S}$ 连接 $(0,0)$ 和 $(1, \sin 1)$. 记 $f(t) = (x(t), y(t))$, 则 $x(t), y(t)$ 都是连续的. 对任给 $n \ge 1$, 存在 $u_n \in (0, x(1/n))$ 满足 $\sin(1/u) = (-1)^n$. 根据连续函数介值定理得到存在 $t_n \in (0, 1/n)$ 满足 $x(t_n) = u_n$. 因此

$$x(t_n) \to 0 \quad \text{但是} \quad y(t_n) = \sin\frac{1}{x(t_n)} = (-1)^n.$$

从而和映射 f 的连续性发生矛盾.

性质11.2.21. *假设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的连通开子集. 则 U 是道路连通的.*

证: 取定 $x_0 \in U$ 并考虑集合

$$\Gamma := \{\boldsymbol{x} \in U : \text{存在道路连接 } \boldsymbol{x}_0 \text{ 和 } \boldsymbol{x}\}.$$

显然 $\Gamma \neq \emptyset$.

我们先证 Γ 是开的. 取定 $\boldsymbol{x} \in \Gamma$, 则存在道路 $f : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ 连接 $\boldsymbol{x}_0$ 和 $\boldsymbol{x}$. 因为 U 是开的, 所以存在球邻域 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}, \delta) \subset U$. 根据**例 11.2.20** (1) 可知对任意

$\boldsymbol{y} \in \mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},\delta)$ 存在道路 g 连接 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$. 从而 $f * g$ 是连接 $\boldsymbol{x}_0$ 和 $\boldsymbol{y}$. 故 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},\delta) \subset \Gamma$, 即 Γ 是开的.

其次我们来证明 Γ 是闭的, 即证 $U \setminus \Gamma$ 是开的. 任取 $\boldsymbol{x} \in U \setminus \Gamma$. 因为 U 是开的, 故存在球邻域 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},\delta) \subset U$. 如果存在 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},\delta) \cap \Gamma$, 则根据**例 11.2.20** (1) 我们可以把 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}_0$ 用道路连起来, 这就和 $\boldsymbol{x} \notin \Gamma$ 发生矛盾, 因此 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},\delta) \subset U \setminus \Gamma$.

最后根据**定理 11.2.17** 得到 $\Gamma = U$. □

推论11.2.22. *在 $\mathbb{R}^n$ 空间中, 开集的连通性和道路连通性是一样的.*

$\mathbb{R}^n$ 中道路连通的开集称为**(开) 区域((open) domain)**. 区域的闭包称为**闭区域(closed domain)**. 比如开球 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)$ 和开矩形 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] = \prod_{1\le i\le n}[a_i,b_i]$ 都是区域.

§11.2.3 * 基本群简介

从直观的几何上来看, 我们知道球面 $\mathbb{S}^2$ 和环面 $\mathbb{T}^2 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ 是不一样的. 那么如何从数学上来严格证明这件事呢? 为此我们来引入基本群的概念.

假设 $(X,\mathcal{T})$ 是拓扑空间, $x_0 \in X$. 定义集合

$$L(x_0) := \{x_0 \text{ 上的圈}\}.$$

称 $\gamma_0, \gamma_1 \in L(x_0)$ 是**同伦的 (homotopic)**, 并记作 $\gamma_0 \simeq \gamma_2$, 如果存在映射

$$F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X, \quad (s,t) \longmapsto F(s,t) = F_s(t),$$

满足

$$F_0 = \gamma_0, \quad F_1 = \gamma_1, \quad F_s(0) = F_s(1) = x_0.$$

练习11.2.23. 证明同伦关系“$\simeq$”是等价关系.

把 $\gamma \in L(x_0)$ 的等价类记作

$$[\gamma] := \{\gamma' \in L(x_0) : \gamma' \simeq \gamma\}. \tag{11.2.4}$$

对两个等价类 $[\gamma_1]$ 和 $[\gamma_2]$ 定义乘法“$\cdot$”如下

$$[\gamma_1] \cdot [\gamma_2] := [\gamma_1 * \gamma_2], \tag{11.2.5}$$

其中 $*$ 由 (11.2.3) 给出. 可以证明 (在之后的拓扑学章节中给出) 上述乘法的定义和等价类的表示元选取无关. 把等价类全体

$$\pi_1(X,x_0) := \{[\gamma] : \gamma \in L(x_0)\} \tag{11.2.6}$$

称为拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 在 x_0 处的**基本群 (fundamental group)**. 因为 x_0 的恒等映射 $c_{x_0} : [0,1] \to X, t \mapsto x_0$, 是 L_{x_0} 中的元素, 因此 $[c_{x_0}] \in \pi_1(X,x_0)$. 称拓扑

空间 (X, x_0) 是**单连通的 (simply-connected)**, 如果它本身是道路连通的且对某个 $x_0 \in X$ 有 $\pi_1(X, x_0) = \{[c_{x_0}]\}$. 根据下面定理, 拓扑空间的单连通性和基点 $x_0 \in X$ 的选取无关, 故此时我们记作 $\pi_1(X) = 0$.

定理11.2.24. (1) $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$ 构成了一个乘法群.

(2) 假设 $f : X \to Y$ 是拓扑同构且 $f(x_0) = y_0$, 则

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0).$$

(3) 如果 $(X, \mathcal{T})$ 是道路连通的, 则对任意 $x_0, x_1 \in X$ 有

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1).$$

从而对道路连通空间, 我们用 $\pi_1(X)$ 来表示其基本群.

(4) $\pi(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$, 但是 $\pi_1(\mathbb{S}^n) = 0$ 如果 $n \geq 2$.

(5) 对任意拓扑空间 $(X, \mathcal{T}_X)$ 和 $(Y, \mathcal{T}_Y)$, 有

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

特别地, $\pi_1(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z}^2$.

在上述定理中, 群的定义参见**定义 11.1.1**, 群同构的定义参见**定义 11.1.7**. 定理具体的证明在拓扑学章节中给出.

因为 $\pi_1(\mathbb{S}^2) = 0 \neq \mathbb{Z}^2 \cong \pi_1(\mathbb{T}^2)$, 所以 $\mathbb{S}^2 \ncong \mathbb{T}^2$.

§11.3 多元函数的极限

本节引入多元函数的极限, 重点是区分累次极限和重极限之间的关系.

§11.3.1 向量值函数

双曲线 $y = 1/x$, $x \neq 0$, 可以看成 $\mathbb{R}^2$ 中的集合

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}.$$

如果定义映射

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto y,$$

则 $f(x, y) = 1/x$ 就是双曲线方程. 上面映射是二元函数的一个例子.

下面我们将二元函数的概念推广到向量值函数的概念.

定义11.3.1. 假设 $D \subset \mathbb{R}^n$. 映射

$$\boldsymbol{f} : D \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \boldsymbol{x} = (x^1, \cdots, x^n) \longmapsto \boldsymbol{y} = (y^1, \cdots, y^m), \tag{11.3.1}$$

称为n **元** m **维向量值函数(vector-valued function)**, 记为 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, 其中 D 称为 $\boldsymbol{f}$ 的**定义域(domain)**, $\boldsymbol{f}(D) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in D\}$ 称为 $\boldsymbol{f}$ 的**像域(image)**, $\mathbb{R}^m$ 称为**值域(range)**, 而

$$\mathbf{Graph}(\boldsymbol{f}) := \left\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} : \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in D\right\} \tag{11.3.2}$$

称为 $\boldsymbol{f}$ 的**图像(graph)**.

令 $y^i := f^i(\boldsymbol{x})$ 为 $\boldsymbol{f}$ 的第 i 个坐标函数, 从而 $\boldsymbol{f}$ 可表示成:

$$\boldsymbol{f} = (f^1, \cdots, f^m) \quad 或 \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f^1(\boldsymbol{x}), \cdots, f^m(\boldsymbol{x})). \tag{11.3.3}$$

当 $m = 1$ 时, 映射 $f : D \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} = (x^1, \cdots, x^n) \mapsto y$, 称为$n$ **元函数(function with n variables)**, 记为 $y = f(\boldsymbol{x}) = f(x^1, \cdots, x^n)$. 另一方面当 $n = 1$ 时, 映射 $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto \boldsymbol{y} = (y^1, \cdots, y^m)$, 称为**向量值函数(vector-valued function)**, 记为 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(x) = (f^1(x), \cdots, f^m(x))$.

例11.3.2. (向量值函数的例子) (1) 定义**投影(projection)** 如下:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \arrow[r, "\mathbf{proj}_1"] \arrow[d, "\mathbf{proj}_2"'] & \mathbb{R}^m \\ \mathbb{R}^n & \end{tikzcd} \tag{11.3.4}$$

这里

$$\mathrm{proj}_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \boldsymbol{x}, \quad \mathrm{proj}_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \boldsymbol{y}.$$

(2) 映射

$$\boldsymbol{f} : [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (r, \theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, r). \tag{11.3.5}$$

(4) 映射

$$\boldsymbol{f} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto (\cos t, \sin t). \tag{11.3.6}$$

§11.3.2 多元函数的极限

回顾球邻域

$$\mathbb{B}^n(\boldsymbol{a}, r) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < r\}$$

和方邻域

$$\mathbb{O}^n(\boldsymbol{a}, r) := \left\{\boldsymbol{x} = (x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n : |x^i - a^i| < r,\ 1 \le i \le n\right\}.$$

根据如下关系

$$\mathbb{B}^n(\boldsymbol{a}, r) \subset \mathbb{O}^n(\boldsymbol{a}, r) \subset \mathbb{B}^n(\boldsymbol{a}, \sqrt{n}r), \tag{11.3.7}$$

我们就不加区别地把上述两种邻域统称为**邻域**并记作 $U(\boldsymbol{a}, r)$.

定义11.3.3. 假设 $D \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} \in D'$ 是 D 的聚点, $z = f(\boldsymbol{x})$ 是 D 上的 n 元函数, $A \in \mathbb{R}$. 如果对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使得当 $\boldsymbol{x} \in (U(\boldsymbol{a}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{a}\}) \cap D$ 时, 不等式

$$|f(\boldsymbol{x}) - A| < \epsilon \tag{11.3.8}$$

成立, 则称 $f(\boldsymbol{x})$ 在 D 上当 $\boldsymbol{x}$ 趋于 $\boldsymbol{a}$ 时以 A 为**极限(limit)**, 或称为$(\boldsymbol{n})$ **重极限**, 并记为

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = A \quad \text{或} \quad f(\boldsymbol{x}) \to A \ (\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}). \tag{11.3.9}$$

由于在定义中 $\boldsymbol{x}$ 趋于 $\boldsymbol{a}$ 的方式有无穷多种, 从而导致多元函数的极限很复杂.

注11.3.4. 和一元函数极限一样, 多元函数的极限也有唯一性、局部有界性、局部保号性、夹逼性质及四则运算法则等.

(1) **(极限唯一性)** 如果 $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = A$ 存在, 则极限必唯一.

(2) **(局部有界性)** 如果 $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = A$ 存在, 则存在 $M > 0$ 和 $\delta > 0$ 使得不等式 $|f(\boldsymbol{x})| \le M$ 对任意 $\boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{a}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{a}\}$ 都成立.

(3) **(局部保号性)** 如果 $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = A > 0$, 则存在 $\delta > 0$ 对任意 $\boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{a}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{a}\}$ 都有 $f(\boldsymbol{x}) > 0$.

   如果存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $\boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{a}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{a}\}$ 都有 $f(\boldsymbol{x}) > 0$ 且极限 $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = A$ 存在, 则 $A \ge 0$.

(4) **(夹逼定理)** 如果存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $\boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{a}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{a}\}$ 都有

$$h(\boldsymbol{x}) \le f(\boldsymbol{x}) \le g(\boldsymbol{x})$$

   且 $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} h(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = A$, 则 $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = A$.

(5) **(四则运算法则)** 假设极限 $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = A$ 和 $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = B$ 都存在, 则我们有

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} [f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})] = A + B, \quad \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) g(\boldsymbol{x}) = AB$$

   和, 如果 $B \neq 0$,

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \frac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})} = \frac{A}{B}.$$

同样可证, 多元函数极限的Heine 定理以及Cauchy 定理也成立. 请诸位叙述之.

例11.3.5. (1) 证明

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0.$$

证: 这可以由不等式 $|x^2y/(x^2+y^2)| \le |x|$ 得到. □

(2) 证明极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{x}$$

不存在.

证: 事实上, 考虑特殊情形 $y = kx$ $(k \neq 0)$, 即 (x, y) 沿着直线 $y = kx$ 趋于 $(0, 0)$. 带入得到

$$\lim_{(x,y=kx)\to(0,0)} \frac{y}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{kx}{x} = k.$$

但是根据注 11.3.4, 极限若存在必唯一, 所以上述函数极限不存在. □

(3) 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y}.$$

解: 因为

$$(x^2+y^2)^{x^2y} = e^{x^2y\ln(x^2+y^2)} = \exp\left[\frac{x^2y}{x^2+y^2}\cdot(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)\right],$$

所以根据 *(1)* 和极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) = \lim_{r\to 0+} r\ln r = 0,$$

得到 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y} = 1$.

(4) 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y}.$$

解: 令

$$f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y}.$$

则 $f(x,x) = 2x^2/(1+x)$ 从而

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = 0.$$

另一方面,

$$\lim_{x\to 0} f(x, x^3-x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3+(x^3-x^2)^3}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left[1+(x^2-x)^3\right] = 1. \quad \square$$

(5) 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin(x^3+y^2)}{\sqrt{e^x+e^y}}.$$

解: 利用四则运算得到

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin(x^3+y^2)}{\sqrt{e^x+e^y}} = \lim_{(x,y)\to(0,2)} \sin(x^3+y^2) \Big/ \lim_{(x,y)\to(0,2)} \sqrt{e^x+e^y}$$

$$= \frac{\sin 4}{\sqrt{1+e^2}}. \quad \square$$

(6) 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}.$$

解: 利用分子有理化得到

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(xy+1)-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{xy+1}+1} = \frac{1}{2}. \quad \square$$

(7) 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0+,0+)} (1+xy)^{\frac{1}{\sin(xy)}}.$$

解: 利用取对数法得到

$$\lim_{(x,y)\to(0+,0+)} (1+xy)^{\frac{1}{\sin(xy)}} = \exp\left[\lim_{(x,y)\to(0+,0+)} \frac{\ln(1+xy)}{\sin(xy)}\right]$$

$$= \exp\left[\lim_{(x,y)\to(0+,0+)} \frac{xy}{\sin(xy)} \cdot \frac{\ln(1+xy)}{xy}\right] = e^{1\cdot 1} = e. \quad \square$$

(8) 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy-y}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}.$$

解: 令 $u := x-1$ 和 $v := y$ 得到

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy-y}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{uv}{\sqrt{u^2+v^2}} = 0. \quad \square$$

(9) 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2).$$

解: 用变量替换 $t = x^2+y^2 \to 0$ 得到

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) = \lim_{t\to 0} t^2 \ln t = \lim_{t\to 0} \frac{1/t}{-3/t^3} = 0. \quad \square$$

§11.3.3 二元函数的累次极限

考虑平面 $\mathbb{R}^2$ 上连接点 $A=(1,1)$ 和原点 $O=(0,0)$ 的所有可能的曲线. 在这些曲线中, 有三种曲线最特殊也最明显, 即 $(1,1)\to(1,0)\to(0,0)$, $(1,1)\to(0,1)\to(0,0)$, 和直线 $y=x$. 比如研究二元函数

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

当 $(x,y)\to(0,0)$ 时的极限. 沿着第一条曲线或者第二条曲线得到的极限为 0, 但沿着第三条曲线得到的极限为 1/2.

由此可见多元函数的极限是很复杂的, 为了更好的理解极限, 我们首先引入较简单的累次极限来区别重极限.

定义11.3.6. 假设 $D=D_1\times D_2\subset\mathbb{R}^2$, $z=f(x,y)$ 是定义在 D 上的二元函数, x_0 是 D_1 的聚点, y_0 是 D_2 的聚点. 如果对每个固定的 $y\in D_2$ 且 $y\neq y_0$, 作为 x 的一元函数 $f(x,y)$, 极限

$$\lim_{D_1\ni x\to x_0} f(x,y)$$

存在且第二个极限

$$\lim_{D_2\ni y\to y_0}\lim_{D_1\ni x\to x_0} f(x,y) \tag{11.3.10}$$

也存在, 则称后者为 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点先对 x 后对 y 的**累次极限(repeated limit)**, 并记作

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y). \tag{11.3.11}$$

类似地可定义先对 y 后对 x 的累次极限

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y). \tag{11.3.12}$$

例11.3.7. 重极限和累次极限的关系是很复杂的.

(1) 重极限存在, 但两个累次极限都不存在. 比如

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \text{ 且 } y\neq 0,\\ 0, & x=0 \text{ 或 } y=0.\end{cases}$$

则重极限为 0.

(2) 重极限存在, 但两个累次极限一个存在而另一个不存在. 比如

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}, & y\neq 0,\\ 0, & y=0.\end{cases}$$

则重极限为 0, $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0=f(0,0)$, 但是 $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$ 不存在.

(3) 两个累次极限都存在且相等, 但是重极限不存在. 比如

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

则重极限不存在, 但是

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}f(x,y)=0=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}f(x,y)=f(0,0).$$

(4) 两个累次极限都存在, 但不相等. 比如

$$f(x,y)=\frac{x^2(1+x^2)-y^2(1+y^2)}{x^2+y^2}$$

在原点 $(0,0)$ 处两个累次极限为 $1,-1$.

定理11.3.8. 假设二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点处存在重极限

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A.$$

这里 A 是一实数.

(1) 如果当 $y\neq y_0$ 时存在极限

$$\lim_{x\to x_0}f(x,y)=\phi(y), \tag{11.3.13}$$

则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点处的先 x 后 y 的累次极限存在, 且

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\phi(y)=A. \tag{11.3.14}$$

(2) 如果当 $x\neq x_0$ 时存在极限

$$\lim_{y\to y_0}f(x,y)=\varphi(x), \tag{11.3.15}$$

则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点处的先 y 后 x 的累次极限存在, 且

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}f(x,y)=\lim_{x\to x_0}\varphi(y)=A. \tag{11.3.16}$$

证明: 对任意 $\epsilon>0$ 存在 $\delta>0$ 使得不等式

$$|f(x,y)-A|<\frac{\epsilon}{2}$$

对任何 $(x,y)\in U((x_0,y_0),\delta)\setminus\{(x_0,y_0)\}$ 都成立. 令 $x\to x_0$ 得到

$$|\varphi(y)-A|\leq\frac{\epsilon}{2}<\epsilon,\quad 0<|y-y_0|<\delta.$$

这就表明 $\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=A$. □

推论11.3.9. (1) 如果两个累次极限和重极限都存在, 则三者必相等.

(2) 如果两个累次极限都存在但不相等, 则重极限必不存在.

例11.3.10. (1) 求二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & |y|\le x^2 \text{ 或 } y\neq 0,\\ 1, & |y|>x^2 \text{ 或 } y=0.\end{cases}$$

的累次极限.

解: $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}f(x,y)=\lim_{x\to 0}0=0$ 和 $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}f(x,y)=\lim_{y\to 0}1=1$. □

(2) 求二元函数 $f(x,y)=x^2e^{-(x^2-y)}$ 沿着曲线族 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2=t^2\}$ 当 $t\to+\infty$ 时的极限.

解: 曲线族上的点可写成 $(x,y)=(t\cos\theta,t\sin\theta)$, $-\pi\le\theta\le\pi$. 令

$$F(t,\theta):=f(t\cos\theta,t\sin\theta)=t^2\cos^2\theta e^{-t^2\cos^2\theta+t\sin\theta}.$$

如果 $\theta=\pm\pi/2$, 则 $F(t,\pm\pi/2)=0$ 从而得到 $\lim_{t\to+\infty}F(t,\pm\pi/2)=0$. 如果 $\theta\neq\pm\pi/2$ 则 $\cos\theta\neq 0$ 故 $t^2\cos^2\theta-t\sin\theta\to+\infty$. 直接计算得到

$$\lim_{t\to+\infty}F(t,\theta)=\cos^2\theta\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2}{e^{t^2\cos^2\theta-t\sin\theta}}=0.\quad\square$$

(3) 假设定义在 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0<x^2+y^2<1\}$ 上的函数 $f(x,y)$ 满足

- 对任意 $\theta\in[0,2\pi]$ 有 $\lim_{r\to 0}f(r\cos\theta,r\sin\theta)=0$, 和
- 存在 $M>0$ 使得对任意 $(x_i,y_i)\in D$, $i=1,2$, 有

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\le M\left(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|\right),$$

则 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

证: 对任意点列 $\{(x_n,y_n)\}_{n\ge 1}$ 存在 $N\in\mathbb{N}$ 当 $n,m\to N$ 时有

$$|x_n-x_m|+|y_n-y_m|<\frac{\epsilon}{M}$$

从而得到

$$|f(x_n,y_n)-f(x_m,y_m)|\le M\cdot\frac{\epsilon}{M}=\epsilon,\quad n,m\ge N.$$

从而 $\{f(x_n,y_n)\}_{n\ge 1}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 数列, 故极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=A$ 存在. 而第一个假设条件表明 $A=0$. □

§11.4 多元函数的连续性

假设 $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$ 是拓扑空间 $(X,\mathcal{T}_X)$ 和 $(Y,\mathcal{T}_Y)$ 之间的映射, 我们已经给出了 f 是 $\mathcal{T}_X/\mathcal{T}_Y$- 连续的定义, 即 f 是 $\mathcal{T}_X/\mathcal{T}_Y$- 连续当且仅当对任意 $V\in\mathcal{T}_Y$ 都有 $f^{-1}(V)\in\mathcal{T}_X$.

称映射 f 在 $x\in X$ 处**连续**如果对任意 $V\in\mathcal{T}_Y$ 且满足条件 $f(x)\in V$, 都有 $f^{-1}(V)\in\mathcal{T}_X$ 和 $x\in f^{-1}(V)$.

§11.4.1 多元函数连续的定义及基本性质

令 $(X,\mathcal{T}_X)=(\mathbb{R}^n,\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n})$ 和 $(\mathcal{Y},\mathcal{T}_Y)=(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\mathbb{R}})$. $\mathbb{R}^n$ 内的任意点集 D 在子空间拓扑 $\mathcal{T}_D$ 下本身就是一个拓扑空间. 此时函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 在 $\boldsymbol{x}_0\in D$ 处**连续** 就等价于:

$$\forall\,\epsilon>0\,\exists\,\delta>0\text{ 使得当 }\boldsymbol{x}\in\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,\delta)\cap D\text{ 时有 }|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)|<\epsilon.$$

根据点 $\boldsymbol{x}_0$ 的类型, 我们得到如下两种情形:

- $\boldsymbol{x}_0$ 是 D 的聚点 $\Longrightarrow f$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 连续当且仅当 $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}_0)$.
- $\boldsymbol{x}_0$ 是 D 的孤立点 $\Longrightarrow f$ 自动在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续.

练习11.4.1. 证明上述两种关于函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 在 $\boldsymbol{x}_0\in D$ 处连续的定义是等价的.

多元连续函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 具有如下基本性质:

(1) **局部有界性:** f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续 $\Longrightarrow$ 存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 U(根据子空间拓扑的定义, 此时 $U=\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,r)\cap D$, 存在 $r>0$) 使得 f 在 U 上有界.

　　如果假设点集 D 是开集, 则根据定义上述 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 U 可取成球邻域 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,r)$.

(2) **局部保号性:** f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续且 $f(\boldsymbol{x}_0)>0\Longrightarrow$ 存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 U 使得对任意 $\boldsymbol{x}\in U$ 都有 $f(\boldsymbol{x})>0$.

　　如果假设点集 D 是开集, 则根据定义上述 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 U 可取成球邻域 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,r)$.

(3) **四则运算:** 若有限个多元函数 $f_1,\cdots,f_k$ 都在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续, 则 $f_1,\cdots,f_k$ 之间进行有限次的加、减、乘、除运算 (做除法运算时要假设分母不为零) 后, 所得到的多元函数在 $\boldsymbol{x}_0$ 也连续.

(4) **复合函数的连续性:** 多元函数的复合运算保持连续性. 比如

(4.1) 假设函数 $z=f(u,v)$ 在 $(u_0,v_0)\in\mathbb{R}^2$ 连续, $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$ 都在 (x_0,y_0) 连续, 其中 $u_0=u(x_0,y_0)$, $v_0=v(x_0,y_0)$, 且它们能够复合, 则复合函数 $z=f(u(x,y),v(x,y))$ 在 (x_0,y_0) 连续.

(4.2) 假设函数 $z=f(u,v)$ 在区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 内连续, $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 都在区域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 内连续, 且 $\forall\,(x,y)\in D$ 都有 $(u(x,y),v(x,y))\in\Omega$, 则复合函数 $z=f(u(x,y),v(x,y))$ 在 D 内连续.

(4.3) 假设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 内连续, $C: x=x(t), y=y(t)$ $(\alpha<t<\beta)$ 是连续曲线 (即 $x(t),y(t)$ 在 (α,β) 内连续) 且 $(x(t),y(t))\in\Omega$, 则 $f(x(t),y(t))$ 在 (α,β) 内连续.

多元初等函数(elementary functions of several variables)是指固定其它自变量后, 函数作为剩下自变量的一元函数是初等函数. 比如

$$f(x,y)=\sin(x^2+xy)\ ((x,y)\in\mathbb{R}^2), f(x,y)=\ln(x^2+y^2)((x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}),$$

和

$$f(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{-|\boldsymbol{x}|^2/4t},\quad (\boldsymbol{x},t)\in\mathbb{R}^n\times(0,+\infty).$$

性质11.4.2. *多元初等函数在其定义域内是连续的.*

例11.4.3. (1) 对函数

$$f(x,y):=\begin{cases}(x+y)\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

可知其仅在 $D:=(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,y):y\in\mathbb{R}\})\cup\{(0,0)\}$ 上连续. 该函数在 $D\setminus\{(0,0)\}$ 内的连续性是显然的. 而在 $(0,0)$ 处, 根据极限义可知

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0).$$

(2) 根据**性质**11.4.2 易得到

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\ln(0+e^1)}{\sqrt{0^2+1^2}}=\ln e=1.$$

(3) 考虑特殊路径 $y=kx$ $(k\neq 0$ 且 $x>0)$ 趋于 $(0,0)$, 即从第一或第四象限趋于原点. 因此函数 $\ln(x+e^y)/\sqrt{x^2+y^2}$ 沿着这条路径趋于 $(0,0)$ 的极限为

$$\lim_{x\to0+}\frac{\ln(x+e^{kx})}{\sqrt{1+k^2}x}=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\lim_{x\to0+}\frac{1+ke^{kx}}{x+e^{kx}}=\frac{1+k}{\sqrt{1+k^2}}.$$

这表明函数 $\ln(x+e^y)/\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 处极限不存在.

(4) 考察函数

$$f(x,y) := \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ y, & x \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}. \end{cases}$$

令 $D = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$. 下证函数只在 D 上连续. 任取 $(x_0,y_0) \notin D$, 则 $y_0 \neq 0$. 若 $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 则 $f(x_0,y_0) = 0$; 此时存在两个数列 $\{x_{0,n}\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 和 $\{x'_{0,n}\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{Q}$ 满足条件 $\lim_{n\to\infty} x_{0,n} = \lim_{n\to\infty} x'_{0,n} = x_0$; 但是

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{0,n}, y_0) = 0 \neq y_0 = \lim_{n\to\infty} f(x'_{0,n}, y_0);$$

故在 (x_0,y_0) 不连续. 类似地可以证明当 $x_0 \in \mathbb{Q}$ 时函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 也不连续.

最后来证明函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续. 任取 $(x_0,0) \in D$ 则 $f(x_0,y_0) = 0$. 如果 $(x,y) \in \mathbb{B}^2((x_0,0),\epsilon)$ 时, 即 $(x-x_0)^2 + y^2 < \epsilon^2$ 时, 有

$$|f(x,y) - f(x_0,0)| = |f(x,y)| \leq |y| < \sqrt{(x-x_0)^2 + y^2} < \epsilon.$$

故函数 $f(x,y)$ 在 $(x_0,0)$ 连续.

(5) 讨论下列函数的连续性:

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin(xy)/\sqrt{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

和

$$g(x,y) = \begin{cases} x\sin(1/y), & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

解: 因为

$$|\sin(xy)| \leq |xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2},$$

所以得到

$$|f(x,y) - 0| \leq \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}.$$

因此函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

对二元函数 $g(x,y)$, 任取 $x_0 \neq 0$. 考虑点列

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{n}{n+1}x_0, \frac{2}{(4n+1)\pi}\right) \to (x_0, 0).$$

由于

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx_0}{n+1} \sin\frac{(4n+1)\pi}{2} = x_0 \neq 0 = f(x_0,0),$$

f 在 $(x_0,0)$, $x_0 \neq 0$, 不连续. 因为 $|x\sin(1/y)| \leq |x|$, 函数 f 在 $(0,0)$ 处连续. □

§11.4.2 向量值函数的极限和连续

多元函数的极限和连续概念可平行的推广到向量值函数. 假设 $D \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x}_0$ 是 D 的聚点, $\boldsymbol{f}: D \setminus \{\boldsymbol{x}_0\} \to \mathbb{R}^m$ 向量值函数, 且 $\boldsymbol{A}$ 是 m 维向量. 若对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使得当 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0, \delta) \setminus \{\boldsymbol{x}_0\}$ 时 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{B}^m(\boldsymbol{A}, \epsilon)$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的极限, 并记作

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = A.$$

假设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为点集, $\boldsymbol{x}_0 \in D$, $\boldsymbol{f}: D \to \mathbb{R}^m$ 向量值函数. 如果对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使得当 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0, \delta) \cap D$ 时 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{B}^n(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0), \epsilon)$, 则称 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续.

(1) 若映射 $\boldsymbol{f}$ 在 D 上每一点都连续则称 $\boldsymbol{f}$ 在 D 上连续.

(2) 若 $\boldsymbol{x}_0 \in D$ 为聚点, 则 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点连续 $\Leftrightarrow \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$.

定理11.4.4. *令 $\boldsymbol{x}_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$. 向量值函数 $\boldsymbol{f} = (f^1, \cdots, f^m): D \to \mathbb{R}^m$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续 $\Longleftrightarrow$ 每个分量函数 f^i 都在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续, $1 \leq i \leq m$.*

证明: 利用**定理 11.1.23** 中的不等式. □

对向量值函数同样可以定义加法、减法、数乘、乘法 (当然乘法有不同类型的定义), 且这些运算保持连续性.

§11.4.3 向量值连续函数的三大定理

我们现在将连续函数的三大性质, 有界性、最值性、介值性, 参见 §3.3.3, 推广到向量值函数情形.

定理11.4.5. *(1) **(紧性不变性)** 连续映射将紧集合映为紧集.*

*(2) **(有界性)** 紧集上的连续映射必有界.*

*(3) **(最值定理)** 紧集上的连续函数必有最大值和最小值.*

证明: (1) 假设 $\boldsymbol{f}: K \to \mathbb{R}^m$ 是紧集 K 上的连续映射. 根据**推论** 11.2.13, 取 $\boldsymbol{f}(K)$ 中的点列 $\{\boldsymbol{y}_k\}_{k\geq 1}$. 从而 $\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)$, $\boldsymbol{x}_k \in K$. 但是 K 是紧的, 故存在子列 $\{\boldsymbol{x}_{k_i}\}_{i\geq 1}$ 及 $\boldsymbol{a} \in K$ 满足 $\lim_{i\to\infty} \boldsymbol{x}_{k_i} = \boldsymbol{a} \in K$. 连续性告诉我们

$$\lim_{i\to\infty} \boldsymbol{y}_{k_i} = \lim_{i\to\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{k_i}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \in \boldsymbol{f}(K),$$

即 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ 是 $\{\boldsymbol{y}_k\}_{k\geq 1}$ 的聚点. 因此 $\boldsymbol{f}(K)$ 是紧集.

(2) 再次利用**推论** 11.2.13.

(3) 现在 $f: K \to \mathbb{R}$ 是紧集 K 上的连续函数. 数集 $f(K) \subset \mathbb{R}$ 是紧的从而是有界且闭的. 根据 Zorn 引理必存在上确界和下确界; 数集 $f(K)$ 是闭的告诉我们上、下确界必在 $f(K)$ 内, 故数集 $f(K)$ 必有最大值和最小值. □

定理11.4.6. (1) 连续函数将道路连通集映为道路连通集.

(2) 连续函数将连通集映为连通集.

(3) 连续函数将有界闭区域与有界闭连通集映为有界闭区间. 特别地, 一元连续函数将有界闭区间映为有界闭区间.

(4) **(中间值定理)** 设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 为有界闭区域或有界闭连通集, 则其上的连续函数 f 可取到它在 K 上的最大值 M 和最小值 m 之间的一切值.

证明: (1) 假设函数 $\boldsymbol{f}: D \to \mathbb{R}^m$ 是道路连通集 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上的连续映射. 对任意 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{f}(D)$, 存在道路 $\gamma : [0,1] \to D$ 使得 $\gamma(0) = \boldsymbol{x}$ 和 $\gamma(1) = \boldsymbol{y}$. 从而连续映射 $\boldsymbol{f} \circ \gamma$ 连接 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$.

(2) 假设函数 $\boldsymbol{f}: D \to \mathbb{R}^m$ 是连通集 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上的连续映射. 下证 $\boldsymbol{f}(D)$ 也是连通的. 假设 $\boldsymbol{f}(D)$ 不是连通的, 则根据**定义 11.2.16**, 存在非空不相交的开子集 $A, B \subset (\mathbf{D})$ 满足 $\boldsymbol{f}(D) = A \cup B$. 因此 $\boldsymbol{f}^{-1}(A)$ 和 $\boldsymbol{f}^{-1}(B)$ 都是 D 的非空不交子集, 且 $\boldsymbol{f}^{-1}(A) \cup \boldsymbol{f}^{-1}(B) = X$. $\boldsymbol{f}$ 的连续性告诉我们 $\boldsymbol{f}^{-1}(A)$ 和 $\boldsymbol{f}^{-1}(B)$ 都是开的. 故 D 不是连通的, 矛盾!.

(3) 连通紧集关于连续函数的像是 $\mathbb{R}$ 上的连通紧集, 故根据**推论 11.2.13** 和**定理 11.2.17**, 必是有界闭区间.

(4) 考察最大值点和最小值点的连线, 并应用一元的介值定理. □

例11.4.7. (1) 假设函数 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上是连续的且 $\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} f(x,y) = +\infty$. 证明 f 有最小值.

证: 定义 $A := f(0,0)$. 假设条件 $\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} f(x,y) = +\infty$ 得到存在 $R > 0$ 使得 $f(x,y) > A$ 在 $\mathbb{R}^2 \setminus D$ 上都成立, 这里 $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le R\}$. 另一方面, 由于 D 是有界闭集故必为紧集, 从而连续函数 f 在 $(x_0, y_0) \in D$ 上取到最小值, 即

$$f(x_0,y_0) \le f(x,y), \quad \forall\, (x,y) \in D.$$

特别的

$$f(x_0,y_0) \le f(0,0) = A < f(x,y), \quad \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D.$$

因此函数 f 在 (x_0,y_0) 达到最小值. □

(2) 用有限覆盖定理证明零点定理: 如果连续函数 f 定义在闭区间 $[a,b]$ 上且满足条件 $f(a) > 0 > f(b)$ 则存在 $x_0 \in (a,b)$ 使得 $f(x_0) = 0$ 成立.

证: 否则的话, 对任意 $x \in [a,b]$ 都有 $f(x) \neq 0$. 如果 $f(x) > 0$ 则存在一个关于 x 的邻域 I_x 使得 $f|_{I_x} > 0$; 如果 $f(x) < 0$ 则存在一个关于 x 的邻域 I_x 使得 $f|_{I_x} < 0$. 因此对任意 $x \in [a,b]$ 存在 I_x 使得 $f|_{I_x}$ 和 $f(x)$ 同号. 这样 $\{I_x\}_{\in[a,b]}$ 构成了紧集 $[a,b]$ 的一个开覆盖, 利用有限覆盖定理可知存在一个有限子覆盖 $\{I_{x_i}\}_{1 \le i \le n}$. 因为 $a \in [a,b]$ 存在邻域 I_{x_i} 包含 a, 同样存在邻域 I_{x_j} 包含 b. 如果 $i = j$, 则 a, b 在同一个邻域内, 根据邻域的构造 $f(a), f(b)$ 必同号, 矛盾. 如果 $i \neq j$, 那么 I_{x_i} 必被第三个邻域 I_{x_k} 所连接, 这样根据 $f(a) > 0$ 得到 $f|_{I_{x_i} \cup I_{x_k}} > 0$, 经过有限步之后得到 $f|_{I_{x_1} \cup \cdot I x_n} > 0$, 这和 $f(b) < 0$ 矛盾. □

(3) 利用 $[a,b]$ 的连通性证明零点定理.

证明: 否则对任意 $x \in [a,b]$ 都有 $f(x) \neq 0$. 定义两个集合

$$U := \{x \in [a,b] : f(x) > 0\}, \quad V := \{x \in [a,b] : f(x) < 0\}.$$

则根据假设得到 $a \in U$ 和 $b \in V$. 根据函数 f 的连续性可知 U, V 都是开的, 从而得到 $[a,b] = U \cup V$ 且 $U \cap V = \emptyset$. 矛盾! □

多元函数和一元函数的区别:

- **一元函数:** 连续 $\Leftarrow$ 可导 $\Leftarrow$ 可微 $\Rightarrow$ 连续, 可导 $\Rightarrow$ 可微
- **多元函数:** 连续 $\not\Leftarrow$ 可偏导 $\Leftarrow$ 可微 $\Rightarrow$ 连续, 可偏导 $\not\Rightarrow$ 可微

§11.4.4 一致连续

假设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 且 $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^m$ 是向量值函数. 如果对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使得对满足 $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| < \delta$ 的所有 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$, 都有 $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})| < \epsilon$ 成立, 则称 $\boldsymbol{f}$ 在 D 上是**一致连续的 (uniformly continuous)**.

定理11.4.8. 假设 $D \subset \mathbb{R}^n$, 则向量值函数 $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^m$ 在 D 上是一致连续的 $\Longleftrightarrow$ 对 D 中任何点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\geq1}$ 和 $\{\boldsymbol{y}_n\}_{n\geq1}$ 只要满足 $\lim_{n\to\infty} |\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_n| = 0$ 就有 $\lim_{n\to\infty} |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_n)| = 0$.

证明: 证明和一元函数一模一样, 只要把绝对值换成范数. □

定理11.4.9. (Cantor 定理) 紧集上的连续函数必一致连续.

证明: 假设函数 f 在紧集 D 上连续但不是一致连续. 根据**定理** 11.4.8 存在 $\delta_0 > 0$ 和存在点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\geq1}, \{\boldsymbol{y}_n\}_{n\geq1}$ 虽然 $\lim_{n\to\infty} |\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_n| = 0$ 但 $|f(\boldsymbol{x}_n) - f(\boldsymbol{y}_n)| \geq \epsilon_0$. 因为 $\{\boldsymbol{y}_n\}_{n\geq1}$ 在紧集 D 中有界, 故根据**定理** 11.2.2 可知存在收敛子列 $\{\boldsymbol{y}_{n_k}\}_{k\geq1}$ 满足 $\boldsymbol{y}_{n_k} \to \boldsymbol{y}_0 \in D$. 因此 $\boldsymbol{x}_{n_k} \to \boldsymbol{y}_0$ 故

$$0 < \epsilon_0 \leq |f(\boldsymbol{x}_{n_k}) - f(\boldsymbol{y}_{n_k})| \to |f(\boldsymbol{y}_0) - f(\boldsymbol{y}_0)| = 0.$$

矛盾表明紧集上的连续函数必一致连续. □

例11.4.10. (1) 函数 $z = \sin(xy)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 不是一致连续.

证: 这是因为函数 $\sin(x^2)$ 在非一致连续, 参见**注** 3.3.34. □

(2) 研究下列函数的一致连续性:

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \ ((x,y) \in \mathbb{R}^2), \quad g(x,y) = \sin\frac{\pi}{1 - x^2 - y^2} \ (x^2 + y^2 < 1).$$

解: 对 $f(x,y)$ 和任取两点 $(x_i,y_i)\in\mathbb{R}^2$, $i=1,2$, 得到

$$
\begin{aligned}
|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)| &= \left|\sqrt{x_1^2+y_1^2}-\sqrt{x_2^2+y_2^2}\right| \\
&= \frac{|(x_1^2+y_1^2)-(x_2^2+y_2^2)|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}} = \frac{|(x_1^2-x_2^2)+(y_1^2-y_2^2)|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}} \\
&= \frac{|x_1-x_2||x_1+x_2|+|y_1-y_2||y_1+y_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}} \le |x_1-x_2|+|y_1-y_2|.
\end{aligned}
$$

故 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 是一致连续的. □

(3) 假设二元函数 $f(x,y)$ 在 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x>0,\ y\in\mathbb{R}\}$ 上一致连续, 证明对任意 $y_0\in\mathbb{R}$ 极限 $\lim_{(x,y)\to(0+,y_0)} f(x,y)$ 都存在.

证: 因为考虑极限 $(x,y)\to(0+,y_0)$, 所以我们可以把 (x,y) 限制在区域 $(0,1)\times(y_0-1,y_0+1)$ 内. 任取 $\{x_n\}_{n\ge1}\subset(0,1)$ 和 $\{y_n\}_{n\ge1}\subset(y_0-1,y_0+1)$, 且满足 $x_0\to0+$ 和 $y_n\to y_0$. f 的一致连续性推出 $\{f(x_n,y_n)\}_{n\ge1}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的Cauchy 数列. 根据注 11.3.4 中多元函数的Heine 定理, $\lim_{(x,y)\to(0+,y_0)} f(x,y)$ 存在. □

(4) 假设 $g\in C((-\infty,+\infty))$ 并令 $f(x,y):=g(xy)$. 证明如果 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上是一致连续的, 则 g 是常值函数.

证: 否则的话, 存在 $x_0,y_0\in\mathbb{R}$ 满足 $|g(x_0)-g(y_0)|=:\epsilon_0>0$. 对此 ϵ_0 根据一致连续性可知存在 $\delta>0$ 使得

$$|f(x,y)-f(x',y')|<\epsilon_0$$

只要 $|x-x'|+|y-y'|<\delta$. 任取 $N\in\mathbb{N}$ 满足 $|x_0-y_0|/N<\delta$ 从而得到

$$|g(x_0)-g(y_0)| = \left|g\left(N\frac{x_0}{N}\right)-g\left(N\frac{y_0}{N}\right)\right| = \left|f\left(N,\frac{x_0}{N}\right)-f\left(N,\frac{y_0}{N}\right)\right|<\epsilon_0$$

发生矛盾. □

§11.5 参考文献

1. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis I*, Translated from the 1988 German original by Gary Brookfield, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. xiv+426 pp. ISBN: 3-7643-7153-6

2. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis II*, Translated from the 1999 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. xii+400 pp. ISBN: 978-3-7643-7472-3; 3-7643-7472-3

3. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis III*, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. xii+468 pp. ISBN: 978-3-7643-7479-2; 3-7643-7479-2

4. Munkres, James R. *Topology*, Second edition, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000. xvi+537 pp. ISBN: 0-13-181629-2

5. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis I*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+574 pp. ISBN: 3-540-40386-8

6. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis II*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xvi+681 pp. ISBN: 3-540-40633-6

7. 布鲁斯 · C. 伯恩特 (Bruce C. Berndt) 主编: **拉玛努金笔记**(第 1, 2, 3, 4 卷), 哈尔滨工业大学出版社, 2019.

8. 常庚哲, 史济怀 编: **数学分析教程** (上、下册), 高等教育出版社, 2003.

9. 陈天权 编著: **数学分析讲义** (第一、二、三册), 北京大学出版社, 2009.

10. 邓建平 编: **微积分 I 和 II**, 科学出版社, 2019.

11. Duhham, William 著 (李伯民, 汪军, 张怀勇 译): **微积分的历程 –** 从牛顿到勒贝格, 人民邮电出版社, 2013.

12. 吉米多维奇 著 (李荣涑, 李植 译): **数学分析习题集** (根据 2010 年俄文版翻译), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.

13. Kline, Morris 著 (张理京, 张炎热, 江泽涵等 译): **古今数学思想** (第一、二、三册), 上海科学技术出版社, 2014.

14. 李傅山, 王培合 编著: **数学分析习题课讲义** (1、2、3), 北京大学出版社, 2018.

15. 林源渠, 方企勤 编: **数学分析解题指南**, 北京大学出版社, 2003.

16. 梅加强 编著: **数学分析**, 高等教育出版社, 2015.

17. 裴礼文 编著: **数学分析中的典型问题与方法** (第二版), 高等教育出版社, 2015.

18. 汪林 著: **数学分析中的问题和反例**, 现代数学基础 **56**, 高等教育出版社, 2015.

19. Weir, D. Maurice; Hass, R. Joel; Giordano, R. Frank. *Thomas' calculus*, Eleventh Edition, (影印版, 上、下册), 高等教育出版社, 2016.

20. 徐森林, 薛春华 编著: **数学分析**, 清华出版社, 2005.

21. 杨小远, 孙玉泉, 薛玉梅, 杨卓琴 编著: **工科数学分析教程** (上、下册), 科学出版社, 2011.

22. 张福保, 薛金美, 潮小李 主编: **数学分析讲义**, 科学出版社, 2019.

23. 张筑生 编著: **数学分析新讲** (第一、二、三册), 北京大学出版社, 1990.

24. 周民强 编著: **数学分析习题演练** (第一、二、三册), 科学出版社, 2018.

25. 朱尧辰 编著: **数学分析例选通过范例学技巧**, 哈尔滨工业大学出版社, 2013.

第十二章　多变量导数理论

Read Euler, read Euler, he is the master of us all. – P. S. Laplace

§12.1　多元函数的微分和偏导数

本节引入多元函数的偏导数和可微性, 和一元情形不同的是此时可微和可偏导是不等价的.

多变量微积分在十八世纪初期就已经出现了. Newton 从关于 x 和 y 的多项式方程 $f(x,y)=0$ 求出了我们今天由 f 对 x 或 y 取偏导数而得到的表达式, 但是这个工作未发表. 偏导数理论的创立者是Alexis Fontaine des Bertins、Euler、Clairaut 和D'Alembert.

Clairaut 在 1739 年证明了微分 $p\,dx+q\,dy$ 是正合的 (即存在函数 f 满足 $\partial f/\partial x=p$ 和 $\partial f/\partial y=q$) 当且仅当 $\partial p/\partial y=\partial q/\partial x$. Euler 在 1734 年证明了如果 $z=f(x,y)$ 则

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

在 1748 年到 1766 年的一系列文章中, Euler 处理了变量替换、偏导数的反演及多元函数的行列式. D'Alembert 在 1744 年到 1745 年关于动力学的工作中, 推广了偏导数的计算.

多重积分实际上已经包含在Newton 写进《Philosophi Naturalis Principia Mathematica》中的关于球与球壳作用在质点上的万有引力, 但是Newton 用的是几何论证. 在十八世纪上半叶, 重积分出现被用来表示 $\partial^2 z/\partial x\partial y=f(x,y)$ 的解.

Euler 对由圆弧围成的有界区域上的二重积分有了明确的概念, 并给出了用累次积分来计算的方法. Lagrange 在 1773 年用三重积分来表示引力, 并用球坐标来计算这个三重积分. Laplace 在 1772 年也同时给出了球坐标变换.

§12.1.1　多元函数的微分

回顾下一元函数 $y=f(x)$ 在 a 处的微分

$$f(a+\Delta x)=f(a)+f'(a)\Delta x+o(|\Delta x|).$$

根据无穷小的定义得到

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)-f'(a)\Delta x}{|\Delta x|}=0.$$

由此可以推广到多元函数情形: **把绝对值换成范数, 把乘积换成内积**.

定义12.1.1. 假设 n 元函数 $y = f(\boldsymbol{x}) = f(x^1, \cdots, x^n)$ 在点 $\boldsymbol{a} = (a^1, \cdots, a^n)$ 的某邻域内有定义, 若存在 n 维向量 $\boldsymbol{b} = (b^1, \cdots, b^n)$ 使得

$$\lim_{\Delta \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0}} \frac{f(\boldsymbol{a} + \Delta \boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - \langle \boldsymbol{b}, \Delta \boldsymbol{x} \rangle}{|\Delta \boldsymbol{x}|} = 0, \tag{12.1.1}$$

成立, 其中 $\Delta \boldsymbol{x}$ 是 n 维变量, 即

$$f(\boldsymbol{a} + \Delta \boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) = \langle \boldsymbol{b}, \Delta \boldsymbol{x} \rangle + o(|\Delta \boldsymbol{x}|), \tag{12.1.2}$$

则称函数 f 在 $\boldsymbol{a}$ 处**可微的**或**可导的(differentiable)**, 向量 $\boldsymbol{b}$ 为函数 f 在 $\boldsymbol{a}$ 处的**导数(derivative)**, 记为

$$\boldsymbol{b} = f'(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}). \tag{12.1.3}$$

把 $\langle \boldsymbol{b}, \Delta \boldsymbol{x} \rangle = \sum_{1 \le i \le n} b^i \Delta x^i$ 称为 f 在 $\boldsymbol{a}$ 处的**全微分(total differential)** 并记作

$$df(\boldsymbol{a}) = \langle \boldsymbol{b}, \Delta \boldsymbol{x} \rangle. \tag{12.1.4}$$

若函数 f 在区域 D 内每点都可微, 则称函数 f 在 D 内可微.

因为对每个 $1 \le i \le n$, 有 $dx^i = \Delta x^i$, 故

$$\Delta \boldsymbol{x} = (\Delta x^1, \cdots, \Delta x^n) = (dx^1, \cdots, dx^n) =: d\boldsymbol{x}. \tag{12.1.5}$$

从而 (12.1.4) 可记成

$$df(\boldsymbol{a}) = \langle f'(\boldsymbol{a}), d\boldsymbol{x} \rangle = \langle \nabla f(\boldsymbol{a}), d\boldsymbol{x} \rangle = \langle \boldsymbol{b}, d\boldsymbol{x} \rangle = \sum_{1 \le i \le n} b^i dx^i. \tag{12.1.6}$$

注12.1.2. (1) 若 f 在 D 内可微, 则 df 是 D 上的函数.

(2) 对**仿射函数 (affine function)** $f(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \rangle + C$, 有 $f'(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}$.

(2) **(导数的几何意义)** 如果函数 f 在 $\boldsymbol{a}$ 可微, 考察超平面, 称为**切平面**,

$$\pi : y = f(\boldsymbol{a}) + \langle f'(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \rangle. \tag{12.1.7}$$

显然 π 经过 $(\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a}))$, 且当 $\boldsymbol{x}$ 趋于 $\boldsymbol{a}$ 时 π 可近似代替曲面 $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$.

(3) 和一元可微函数一样, 多元函数在一点可微必在这点连续.

(4) 多元函数在一点连续 $\not\Rightarrow$ 在这点可微: 考察函数

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \boldsymbol{a} = (0, 0).$$

显然函数 f 在 $(0,0)$ 连续, 但不可微. 反之假设函数 f 在 $\boldsymbol{a}$ 可微, 则存在 $\boldsymbol{b} = (b^1, b^2)$ 满足

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - (b^1 x + b^2 y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

即

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to 0} \frac{b^1x+b^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1.$$

但是上述极限是不存在, 因为取特殊路径 $y = kx, x > 0$ 得到

$$1 = \frac{b^1+kb^2}{\sqrt{1+k^2}}, \quad \forall\, k > 0.$$

这个等式不可能对任意 k 都成立. 矛盾表明函数 f 在 $(0,0)$ 不可微.

§12.1.2 多元函数的偏导数

一元函数导数的高维推广即是偏导数.

定义12.1.3. 假设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是开集, $z = f(x,y)$ 是定义在 D 上的二元函数, $(x_0,y_0) \in D$ 是固定点. 如果存在极限

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} \tag{12.1.8}$$

则称函数 f 在 (x_0,y_0) 关于x **可偏导**, 并称极限为 f 在 (x_0,y_0) 处关于 x 的**偏导数 (partial derivative)**, 记为

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0). \tag{12.1.9}$$

显然 f 在 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏导数就是一元函数 $f(x,y_0)$ 在 x_0 的导数.

如果函数 f 在 D 中的每点都关于 x 可偏导, 则得到 D 上的二元函数, 称为 f 关于 x 的**偏导函数**, 记为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x,y). \tag{12.1.10}$$

类似可定义 f 在 (x_0,y_0) 处关于 y 的偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) \tag{12.1.11}$$

和关于 y 的偏导函数

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x,y). \tag{12.1.12}$$

如果函数 f 在 (x_0,y_0) 处关于 x 和 y 都可偏导, 称 f 在 (x_0,y_0) 处**可偏导**.

根据偏导数定义, 为了求 $\partial f/\partial x$ 可把变量 y 暂时看成是常数, 这样求偏导数就变为普通的一元函数求导.

假设 $D\subset\mathbb{R}^n$ 是开集, $z=f(\boldsymbol{x})$ 是定义在 D 上的 n 元函数, $\boldsymbol{x}_0\in D$ 是固定点. 如果存在极限

$$\lim_{\Delta x^i\to 0}\frac{f(x_0^1,\cdots,x_0^{i-1},x_0^i+\Delta x^i,x_0^{i+1},\cdots,x_0^n)-f(x_0^1,\cdots,x_0^{i-1},x_0^i,x^{i+1},\cdots,x_0^n)}{\Delta x^i}$$

则称函数 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 关于x^i **可偏导**, 并称极限为 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处关于 x^i 的偏导数并记为

$$\frac{\partial z}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}_0)=\frac{\partial f}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}_0)=f_{x^i}(\boldsymbol{x}_0).$$

如果函数 f 在 D 中的每点都关于 x^i 可偏导, 则得到 D 上的 n 元函数, 称为 f 关于 x^i 的偏导函数并记为

$$\frac{\partial z}{\partial x^i}=\frac{\partial f}{\partial x^i}=f_{x^i}(\boldsymbol{x}).$$

例12.1.4. (1) **(偏导数存在但不可微)** 研究函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

在 $(0,0)$ 的偏导数和可微性.

解: $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$, 但是 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续, 故不可微. □

(2) **(连续但不存在偏导数)**[1] 研究函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 的偏导数和连续性.

解: 计算可得

$$f_x(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad f_y(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad (x,y)\neq(0,0).$$

另一方面

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

故 $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$ 都不存在. 但是 f 在 $(0,0)$ 是连续的.

注意到

$$f''_{xx}(x,y)+f''_{yy}(x,y)=\frac{1}{f(x,y)},\quad (x,y)\neq(0,0).$$

这表明函数 f 是偏微分方程 $\Delta f=1/f$ 在 $D:=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 上的一个解, 其中算子 Δ 定义在 (12.1.20). □

(3) **(可微但偏导数不连续)** 研究函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=0,\end{cases}$$

[1]感谢张凌枫同学指出错误.

在 $(0,0)$ 处的可微性和偏导数的连续性.

解: 根据 sin 的有界性立即得到函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 是可微的. 但是

$$f_x(x,y)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

如果取 $x_k=y_k=1/2k\pi\sqrt{2}$, $k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, 则得到

$$\lim_{k\to\infty}f_x(x_k,y_k)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0=f_x(0,0).$$

所以偏导数 f_x 在 $(0,0)$ 处不连续. 类似可证 f_y 在 $(0,0)$ 处也不连续. □

定理12.1.5. *如果函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{a}$ 处可微, 则在 $\boldsymbol{a}$ 处必存在偏导数且满足*

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a}):=\left(f'_{x^1}(\boldsymbol{a}),\cdots,f'_{x^n}(\boldsymbol{a})\right),\quad df(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})\cdot d\boldsymbol{x}=\sum_{1\leq i\leq n}f'_{x^i}(\boldsymbol{a})dx^i. \tag{12.1.13}$$

但是反之则不一定成立.

证: 可微推出存在 $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$ 满足 $f(\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})=\langle\boldsymbol{b},\Delta\boldsymbol{x}\rangle+o(|\Delta\boldsymbol{x}|)$. 取特殊的无穷小 $\Delta\boldsymbol{x}=(0,\cdots,\Delta x^i,\cdots,0)$ 得到

$$f(a^1,\cdots,a^i+\Delta x^i,\cdots,0)-f(a^1,\cdots,a^n)=b^i\Delta x^i+o(|\Delta x^i|).$$

根据定义得到 $b^i=f'_{x^i}(\boldsymbol{a})$. 反之不成立的反例参见**例 12.1.4** (1). □

上述定理告诉我们, 可微必定可偏导, 但反之不一定成立. 那一个很自然的问题是: 什么时候可偏导函数是可微的? 下面定理就告诉我只要加上偏导数的连续性就可以了. 从而得到

$$\text{可微}\Longrightarrow\text{可偏导},\qquad \text{可偏导}+\text{偏导连续}\Longrightarrow\text{可微}.$$

定理12.1.6. *如果函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{a}$ 的某个邻域上存在 (全部) 偏导数且 (全部) 偏导数在 $\boldsymbol{a}$ 处连续, 则 f 在 $\boldsymbol{a}$ 处可微.*

证: 令 $\Delta z:=f(\Delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})-f(\boldsymbol{a})$ 得到

$$\begin{aligned}\Delta z &= \left[f(\Delta x^1+a^1,a^2,\cdots,a^n)-f(a^1,a^2,\cdots,a^n)\right]\\ &+\left[f(\Delta^1+a^1,\Delta x^2+a^2,\cdots,\Delta x^n+a^n)-f(\Delta x^1+a^1,a^2,\cdots,a^n)\right]\\ &= f'_{x^1}(\boldsymbol{a})\Delta x^1+o(|\Delta x^1|)+[f(\Delta x^1+a^1,\Delta x^2+a^2,a^3,\cdots,a^n)-\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& f(\Delta x^1+a^1,a^2,a^3,\cdots,a^n)]+[f(\Delta x^1+a^1,\Delta x^2+a^2,\Delta x^3+a^3,\cdots,\Delta x^n+a^n) \\
& \qquad -f(\Delta x^1+a^1,\Delta x^2+a^2,a^3,\cdots,a^n)] \\
&= f'_{x^1}(\boldsymbol{a})\Delta x^1+o(|\Delta x^1|)+f'_{x^2}(\Delta x^1+a^1,a^2,a^3,\cdots,a^n)\Delta x^2+o(|\Delta x^2|)+ \\
& [f(\Delta x^1+a^1,\Delta x^2+a^2,\Delta x^3+a^3,\cdots,\Delta x^n+a^n)-f(\Delta x^1+a^1,\Delta x^2+a^2,a^3,\cdots,a^n)].
\end{aligned}
$$

利用偏导数连续性可以进一步得出

$$
\begin{aligned}
\Delta z &= f'_{x^1}(\boldsymbol{a})\Delta x^1+o(|\Delta x^1|)+\left[f'_{x^2}(\boldsymbol{a})+o(|\Delta x^1|)\right]\Delta x^2+o(|\Delta x^2|)+ \\
& [f(\Delta x^1+a^1,\Delta x^2+a^2,\Delta x^3+a^3,\cdots,\Delta x^n+a^n)-f(\Delta x^1+a^1,\Delta x^2+a^2,a^3,\cdots,a^n)] \\
&= f'_{x^1}(\boldsymbol{a})\Delta x^1+f'_{x^2}(\boldsymbol{a})\Delta x^2+o(|\Delta \boldsymbol{x}|)+ \\
& [f(\Delta x^1+a^1,\Delta x^2+a^2,\Delta x^3+a^3,\cdots,\Delta x^n+a^n)-f(\Delta x^1+a^1,\Delta x^2+a^2,a^3,\cdots,a^n)].
\end{aligned}
$$

这个计算过程继续下去就得到

$$
\Delta z=\sum_{1\le i\le n} f'_{x^i}(\boldsymbol{x})\Delta x^i+o(|\Delta \boldsymbol{x}|).
$$

即函数 f 在 $\boldsymbol{a}$ 处可微. □

§12.1.3 多元函数的方向导数

偏导数 f_{x^i} 是函数 f 沿着 x^i- 轴方向的变化率. 一般地, 我们可以考虑函数沿着某个固定方向的变化率. 假设 n 元函数 $z=f(\boldsymbol{x})$ 定义在 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上, $\boldsymbol{x}_0$ 是 D 内的点. 对任意 $\boldsymbol{x}\in D$ 考虑商

$$
\frac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}=\frac{f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)-f(\boldsymbol{x}_0)}{\rho},\quad \rho:=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|>0.
$$

由于 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$ 的范数是 ρ, 我们可以记作 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0=\rho\boldsymbol{\nu}$, 其中 $\boldsymbol{\nu}:=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)/\rho$. 从而得到如下定义.

定义12.1.7. *假设 n 元函数 $z=f(\boldsymbol{x})$ 定义在 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上, $\boldsymbol{x}_0$ 是 D 的内点, 且 $\boldsymbol{\nu}=(\nu^1,\cdots,\nu^n)$ 是一单位向量, 即满足 $|\boldsymbol{\nu}|=1$. 如果极限*

$$
(D_{\boldsymbol{\nu}}f)(\boldsymbol{x}_0)\equiv\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{x}_0):=\lim_{t\to0+}\frac{f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{\nu})-f(\boldsymbol{x}_0)}{t} \tag{12.1.14}
$$

*存在, 则称函数 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处沿着方向 $\boldsymbol{\nu}$ 是***方向可导的***并称该极限为函数 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处沿着方向 $\boldsymbol{\nu}$ 的***方向导数 (directional derivative)**.

根据定义 (12.1.14) 立即得到

$$
(D_{-\boldsymbol{\nu}}f)(\boldsymbol{x}_0)=\lim_{t\to0+}\frac{f(\boldsymbol{x}_0-t\boldsymbol{\nu})-f(\boldsymbol{x}_0)}{t}=-(D_{\boldsymbol{\nu}}f)(\boldsymbol{x}_0).
$$

例12.1.8. (1) **(方向导数存在但偏导数不存在)** 求函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 处的方向导数.

解: 对任意方向 $\boldsymbol{v}=(v^1,v^2)$ 得到

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(0,0)=\lim_{t\to 0+}\frac{f(t\boldsymbol{v})}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{t}{t}=1.$$

但是之前计算表明偏导数不存在. □

(2) **(偏导数的刻画)** n 元函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处关于 x^i 的偏导数存在 $\Longleftrightarrow$ n 元函数 $f(\boldsymbol{x})$ 沿着方向 $(0,\cdots,1,\cdots,0)$ 和 $(0,\cdots,-1,\cdots,0)$ 的两个方向导数存在且互为相反数.

(3) 求 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的梯度 $\mathbf{grad}(r)$, 梯度定义参见 (12.1.16).

解: 因为

$$r_x=\frac{x}{r},\quad r_y=\frac{y}{r},\quad r_z=\frac{z}{r},$$

所以 $\mathbf{grad}(r)=(x,y,z)/r$ 从而 $\mathbf{grad}(r)$ 是一个方向. □

(4) **(方向导数存在但函数本身不连续)** 如果函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处沿着任意方向都存在方向导数, 是否蕴含着 f 在 (x_0,y_0) 处连续.

解: 考察函数

$$f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y},\quad (x_0,y_0)=(0,0).$$

在例 11.3.5 (4) 中已证该函数在 $(0,0)$ 处不连续. 但是对任意方向 $\boldsymbol{v}=(\alpha,\beta)$ 有

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(0,0)=\lim_{t\to 0+}\frac{f(\alpha t,\beta t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{t^3\alpha^3+t^3\beta^3}{t(t^2\alpha^2+t\beta)}=\lim_{t\to 0+}\frac{t(\alpha^3+\beta^3)}{t\alpha^2+\beta}=0.$$

即所有的方向导数均为 0. □

$$\text{方向可导的}\Longleftarrow\text{可微}\Longrightarrow\text{可偏导.}$$

定理12.1.9. *假设 $D\subset\mathbb{R}^n$ 为开集, $\boldsymbol{x}_0\in D$, $f(\boldsymbol{x})$ 定义在 D 上且在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微. 则对任意方向 $\boldsymbol{v}$, 函数 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处沿着方向 $\boldsymbol{v}$ 的方向导数存在且满足*

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}_0)=\sum_{1\le i\le n}f'_{x^i}(\boldsymbol{x}_0)v^i. \tag{12.1.15}$$

证: 可微推出

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}_0) &= \lim_{t\to 0+}\frac{f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{v})-f(\boldsymbol{x}_0)}{t} = \lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}\left[\sum_{1\le i\le n}f'_{x^i}(\boldsymbol{x}_0)tv^i+o(t)\right]\\ &= \sum_{1\le i\le n}f'_{x^i}(\boldsymbol{x}_0)v^i+\lim_{t\to 0+}\frac{o(t)}{t} = \sum_{1\le i\le n}f'_{x^i}(\boldsymbol{x}_0)v^i. \ \square\end{aligned}$$

定义12.1.10. 假设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $\boldsymbol{x}_0 \in D$, 函数 $f(\boldsymbol{x})$ 定义在 D 上且在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的偏导数存在. 函数 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的**梯度(gradient)** 定义为

$$\mathbf{grad}_{\boldsymbol{x}_0} f \equiv \nabla_{\boldsymbol{x}_0} f := \left(f_{x^1}(\boldsymbol{x}_0), \cdots, f_{x^n}(\boldsymbol{x}_0)\right). \tag{12.1.16}$$

显然当函数 f 可微时, $\mathbf{grad}_{\boldsymbol{x}_0} f = f'(\boldsymbol{x}_0)$ 且

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{x}_0) = \left\langle \mathbf{grad}_{\boldsymbol{x}_0} f, \boldsymbol{\nu} \right\rangle. \tag{12.1.17}$$

从 (12.1.17) 得到

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{x}_0)\right| \leq \left|\mathbf{grad}_{\boldsymbol{x}_0} f\right| |\boldsymbol{\nu}| = \left|\mathbf{grad}_{\boldsymbol{x}_0} f\right|$$

且等号取到当且仅当 $\boldsymbol{\nu} \parallel \mathbf{grad}_{\boldsymbol{x}_0} f$. 因此, 当梯度非零时, 函数绝对值沿着梯度方向增加最快.

§12.1.4 多元函数的高阶导数

给定 n 元函数 $f(\boldsymbol{x})$, 其**高阶偏导数(higher order partial derivatives)**可定义如下: f 的 k 阶偏导数为

$$f_{x^{i_1}\cdots x^{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \cdots \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} f. \tag{12.1.18}$$

这里要注意求偏导的顺序:

$$f_{x^i x^j} \neq f_{x^j x^i}. \tag{12.1.19}$$

我们把 $f_{x^i x^j}$, $i \neq j$, 称为**混合二阶偏导数 (mixed second order partial derivatives)**.

例12.1.11. (1) 求函数 $f(x, y) = x\cos y + ye^x$ 的所有二阶偏导数.

解: 直接计算得到

$$f_x = \cos y + ye^x, \quad f_y = -x\sin y + e^x.$$

从而得到

$$f_{xx} = ye^x, \quad f_{yy} = -x\cos y, \quad f_{xy} = f_{yx} = -\sin y + e^x. \quad \square$$

(2) 函数

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

在原点的所有二阶偏导数存在但两个混合偏导数却不相等.

解: 直接计算得到

$$f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = 0, \end{cases}$$

和

$$f_y(x,y)=\begin{cases}\frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=0,\end{cases}$$

故得到

$$f_{xx}=f_{yy}=0,\quad f_{xy}(0,0)=1,\quad f_{yx}=-1.\ \square$$

定义**拉普拉斯算子(Laplacian operator)** 为

$$\Delta:=\sum_{1\le i\le n}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^i}=\sum_{1\le i\le n}\frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}. \tag{12.1.20}$$

开集 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上的函数 f 称为**调和的(harmonic)**如果 f 所有二阶偏导数都存在且满足

$$\Delta f(\boldsymbol{x})\equiv 0,\quad 任意\ \boldsymbol{x}\in D. \tag{12.1.21}$$

性质12.1.12. *定义 $D:=\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$ 上的函数*

$$f(\boldsymbol{x}):=\begin{cases}|\boldsymbol{x}|^{2-n}, & n\ge 3,\\ -\ln|\boldsymbol{x}|, & n=2.\end{cases} \tag{12.1.22}$$

则 f 在 D 上调和函数.

证: 一个计算复杂的练习, 请诸位验证. $\square$

定理12.1.13. **(Clairaut - Euler)** *假设函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的混合二阶偏导数 $f_{x^ix^j}$ 和 $f_{x^jx^i}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续, 则必有 $f_{x^ix^j}(\boldsymbol{x}_0)=f_{x^jx^i}(\boldsymbol{x}_0)$.*

证: 不失一般性不妨假设 $n=2$, 这样只要证明若 f_{xy} 和 f_{yx} 在 (x_0,y_0) 连续则必相等. 回顾定义

$$\begin{aligned}f_{xy}(x_0,y_0) &= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(x_0,y_0+\Delta y)-f_x(x_0,y_0)}{\Delta y}\\ &= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y}\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)}{\Delta x}\right.\\ &\quad \left.-\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}\right]\\ &= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y}\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(\Delta x,\Delta y)}{\Delta x}\right] = \lim_{\Delta y\to 0}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(\Delta x,\Delta y)}{\Delta y\Delta x}\end{aligned}$$

这里

$$F(\Delta x,\Delta y):=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)+f(x_0,y_0).$$

类似可得到

$$f_{yx}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{F(\Delta x,\Delta y)}{\Delta x\Delta y}.$$

如果 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$ 则本质上是说两个累次极限相等,但是这件事不一定成立. 因此一般情形下两个混合偏导数不相等.

下面假设混合偏导数在 (x_0,y_0) 处连续. 引入两个辅助函数

$$\varphi(x):=f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0),\quad \psi(y):=f(x_0+\Delta x,y)-f(x_0,y).$$

则利用一元函数的微分中值定理得到, 存在 $\alpha,\beta\in[0,1]$,

$$\begin{aligned} F(\Delta x,\Delta y) &= \varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0) = \varphi'(x_0+\alpha\Delta x)\Delta x \\ &= [f_x(x_0+\alpha\Delta x,y_0+\Delta y)-f_x(x_0+\alpha\Delta x,y_0)]\,\Delta x \\ &= f_{xy}(x_0+\alpha\Delta x,y_0+\beta\Delta y)\Delta y\Delta x. \end{aligned}$$

同样计算得到, 存在 $\mu,\nu\in[0,1]$,

$$F(\Delta x,\Delta y)=f_{yx}(x_0+\mu\Delta x,y_0+\nu\Delta y)\Delta x\Delta y.$$

从而最后得到

$$f_{xy}(x_0+\alpha\Delta x,y_0+\beta\Delta y)=f_{yx}(x_0+\mu\Delta x,y_0+\nu\Delta y).$$

偏导数连续性推出 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$. □

定义12.1.14. 假设 $D\subset\mathbb{R}^n$ 是开集. 记号 $f\in C^k(D)$ 表示函数 f 的直到 k 阶的所有高阶偏导数存在且连续. 比如

$$\begin{aligned} C^1(D) &= \{f:D\to\mathbb{R}|f_{x^i}\ \text{连续},\ 1\le i\le n\}, \\ C^2(D) &= \{f:D\to\mathbb{R}|f_{x^ix^j}\ \text{连续},\ 1\le i,j\le n\}. \end{aligned}$$

根据**定理** 12.1.13, 若 $D\subset\mathbb{R}^2$, 则 $C^2(D)$ 可写成

$$C^2(D)=\{f:D\to\mathbb{R}|f_x,\ f_y,\ f_{xx},\ f_{xy}=f_{yx},\ f_{yy}\ \text{连续}\}.$$

在上述定义中把所有直到 k 阶的偏导数放入 $C^k(D)$ 的定义中, 主要是因为多元函数偏导数的存在性不一定可以推出原来函数的连续性. 如果 $n=1$, 即考虑一元函数, 则上述定义自动回到之前 $C^k(I)$ 的定义, 这里 I 是某个开区间.

§12.1.5 多元函数的高阶微分

如果 $f\in C^1(D)$ 则根据**定理 12.1.6** 可知函数 f 是可微的且

$$df=f_xdx+f_ydy=dx\frac{\partial f}{\partial x}+dy\frac{\partial f}{\partial y}.$$

故很自然地引入算子

$$d=dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}. \tag{12.1.23}$$

回忆二项式展开公式

$$(a+b)^k = \binom{k}{i} a^i b^{k-i}.$$

对任意 $f \in C^k(D)$ 引入算子

$$d^k f \equiv \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f := \sum_{0\le i\le k} \binom{k}{i} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^i \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k-i} f\right] dx^i dy^{k-i}. \tag{12.1.24}$$

这个称为 f 的**高阶微分(higher order differentials)**.

§12.1.6 向量值函数的微分和偏导数

现在我们结论推广到向量值函数上来. 为了方便起见, **在这里我们把向量表示成列向量**.

假设 $D \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x}_0 = (x_0^1, \cdots, x_0^n)^{\mathsf{T}}$ 且

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}: D &\longrightarrow \mathbb{R}^m, \\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} &\longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f^1(x^1, \cdots, x^n) \\ \vdots \\ f^n(x^1, \cdots, x^n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

定义12.1.15. (1) 如果存在和 $\Delta\boldsymbol{x}$ 无关的 $m \times n$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 使得

$$\Delta \boldsymbol{y} := \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0 + \Delta\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{A}\Delta\boldsymbol{x} + o(\Delta\boldsymbol{x}), \tag{12.1.25}$$

则称**向量值函数** f **在** x_0 **处可微或可导**并称 $\mathbf{A}$ 是 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的**导数**, 记为 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ 或 $\mathbf{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$, 而 $d\boldsymbol{y} := \mathbf{A}\Delta\boldsymbol{x}$ 称为 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的**微分**.

(2) 如果 $\boldsymbol{f}$ 的每个分量函数 $f^i, 1 \le i \le m$, 都在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可偏导, 则称**向量值函数** $\boldsymbol{f}$ **在** $\boldsymbol{x}_0$ **处可偏导**. 此时引入向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的**Jacobi 矩阵**

$$\mathbf{Jac}_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{f}) \equiv \frac{\mathbf{D}(y^1, \cdots, y^m)}{\mathbf{D}(x^1, \cdots, x^n)}(\boldsymbol{x}_0) := \begin{bmatrix} f^1_{x^1} & f^1_{x^2} & \cdots & f^1_{x^n} \\ f^2_{x^1} & f^2_{x^2} & \cdots & f^2_{x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^m_{x^1} & f^m_{x^2} & \cdots & f^m_{x^n} \end{bmatrix}(\boldsymbol{x}_0) \tag{12.1.26}$$

类似多元函数情形有

$$d\boldsymbol{y} = \mathbf{A}d\boldsymbol{x}.$$

定理12.1.16. 向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微 $\Longleftrightarrow$ 它的坐标分量函数 $f^i, 1 \le i \le m$, 都在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微. 此时有等式

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{Jac}_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{f}). \tag{12.1.27}$$

证: $\Longrightarrow$: 则存在矩阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{1\le i\le m,1\le j\le n}$ 使得 $\Delta\boldsymbol{y}=\mathbf{A}\Delta\boldsymbol{x}+o(\Delta\boldsymbol{x})$ 成立. 写成分量形式得到

$$\Delta y^i=\sum_{1\le j\le n}a_{ij}\Delta x^j+o^i(\Delta\boldsymbol{x}),\quad 1\le i\le m,$$

这里 $o(\Delta\boldsymbol{x})=(o^1(\Delta\boldsymbol{x}),\cdots,o^m(\Delta\boldsymbol{x}))^{\mathsf{T}}$ 且

$$\lim_{\Delta\boldsymbol{x}\to0}\frac{o^i(\Delta\boldsymbol{x})}{|\Delta\boldsymbol{x}|}=0,\quad 1\le i\le m.$$

取特殊的 $\Delta\boldsymbol{x}=(0,\cdots,\Delta x^j,\cdots,0)^{\mathsf{T}}$ 得到 $f^i_{x^j}(\boldsymbol{x}_0)=a_{ij}$.

$\Longleftarrow$: 根据 $f^i, 1\le i\le m$, 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的可微性得到

$$\Delta y^i=\Delta f^i=\sum_{1\le j\le n}f^i_j(\boldsymbol{x}_0)\Delta x^j+o(|\Delta\boldsymbol{x}|).$$

故有 $\mathbf{A}=(a_{ij})=(f^i_j(\boldsymbol{x}_0))$. □

例12.1.17. (1) 求函数 $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{x+y}$ 的高阶偏导数 $\partial^{p+q}f/\partial x^p\partial y^q$, $p,q\ge2$.

解: 根据 (12.1.24) 和 $\partial^k(e^{x+y})/\partial y^k=e^{x+y}$ 得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial^q f}{\partial y^q}&=(x^2+y^2)e^{x+y}+q(x^2+y^2)_ye^{x+y}+\frac{q(q-1)}{2}(x^2+y^2)_{yy}e^{x+y}\\&=[x^2+y^2+2qy+q(q-1)]e^{x+y}\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{p+q}f}{\partial x^p\partial y^q}&=[x^2+y^2+2qy+q(q-1)]e^{x+y}+p(2x)e^{x+y}+q(q-1)e^{x+y}\\&=[x^2+y^2+2(p+q)y+p(p-1)+q(q-1)]e^{x+y}.\quad\square\end{aligned}$$

(2) 假设 $\boldsymbol{f}(x,y,z)=(\sin xy, x^2+y^2, x^2y^2z^2)$, 求 $\boldsymbol{f}'(1,0,0)$.

解: 直接计算得到

$$\boldsymbol{f}'(x,y,z)=\begin{bmatrix}y\cos xy & y\cos xy & 0\\ 2x & 2y & 0\\ 2xy^2z^2 & 2x^2yz^2 & 2x^2y^2z\end{bmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{f}'(1,0,0)=\begin{bmatrix}0&1&0\\2&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=:A$$

观察到 $A^{2n+1}/2^n=A$ 和 $A^{2n+2}/2^n=A^2$, $n\ge0$. □

§12.2 多元复合函数的求导法则

多元复合函数的求导, 满足所谓的**链式法则 (chain rule)**. 其大意是把每个分量上的求导算到底, 再相加.

§12.2.1 多元复合函数求偏导的链式法则

假设函数 $z = f(u,v)$ 是区域 $D_f \subset \mathbb{R}^2$ 上的二元函数, $\boldsymbol{g} : D_{\boldsymbol{g}} \to \mathbb{R}^2$ 是区域 $D_{\boldsymbol{g}} \subset \mathbb{R}^2$ 上的二元二维向量值函数: $\boldsymbol{g}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, 并假设 $\boldsymbol{g}(D_{\boldsymbol{g}}) \subset D_f$. 从而得到复合函数 $f \circ \boldsymbol{g}$:

$$f \circ \boldsymbol{g}(x,y) = f(u(x,y), v(x,y)), \quad (x,y) \in D_{\boldsymbol{g}}. \tag{12.2.1}$$

定理12.2.1. (链式法则) *如果函数 f 在 (u_0,v_0) 处可微, $\boldsymbol{g}$ 在 $(x_0,y_0) \in D_{\boldsymbol{g}}$ 处可偏导, 其中 $u_0 = u(x_0,y_0)$, $v_0 = v(x_0,y_0)$, 则复合函数 $f \circ \boldsymbol{g}$ 在 (x_0,y_0) 处可偏导且*

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0)\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0)\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0), \tag{12.2.2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0)\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0)\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0). \tag{12.2.3}$$

证: 根据定义

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(u(x_0+\Delta x, y_0), v(x_0+\Delta x, y_0)) - f(u_0,v_0)}{\Delta x}$$

引入记号

$$\Delta u := u(x_0+\Delta x, y_0) - u_0, \quad \Delta v := v(x_0+\Delta x, y_0) - v_0$$

得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v) - f(u_0,v_0)}{\Delta x}.$$

由于函数 f 在 (u_0,v_0) 处可微, 故

$$\begin{aligned} & f(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v) - f(u_0,v_0) \\ = \; & f_u(u_0,v_0)\Delta u + f_v(u_0,v_0) + o\left(\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}\right). \end{aligned}$$

定义

$$\alpha(\Delta u, \Delta v) := o\left(\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}\right) \Big/ \sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2},$$

则 $\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \alpha(\Delta u, \Delta v) = 0$. 所以

$$f(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v) - f(u_0,v_0)$$

$$= f_u(u_0, v_0)\Delta u + f_v(u_0, v_0) + \alpha(\Delta u, \Delta v)\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}.$$

又因为 u 和 v 都存在偏导数, 得到

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u_x(x_0, y_0), \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v_x(x_0, y_0),$$

和

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta u, \Delta v) = \lim_{(\Delta u, \Delta v) \to (0,0)} \alpha(\Delta u, \Delta v) = 0.$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) &= f_u(u_0, v_0)u_x(x_0, y_0) + f_v(u_0, v_0)v_x(x_0, y_0) \\ &\quad + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta u, \Delta v)\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\sqrt{\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)^2} \\ &= f_u(u_0, v_0)u_x(x_0, y_0) + f_v(u_0, v_0)v_x(x_0, y_0). \quad \square \end{aligned}$$

根据 (12.2.2) – (12.2.3), 如果函数 f 在区域 D_f 上处处可微且 $\boldsymbol{g}$ 在区域 D_g 上处处可偏导, 则

$$z_x = f_u u_x + f_v v_x, \quad z_y = f_u u_y + f_v v_y. \tag{12.2.4}$$

在矩形记号下可写成

$$(f \circ \boldsymbol{g})' = (z_x, z_y) = (f_u, f_v)\begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} = f'\boldsymbol{g}' \tag{12.2.5}$$

这个形式我们可以推广到多元情形.

假设函数 $z = f(\boldsymbol{y}) = f(y^1, \cdots, y^m)$ 定义在区域 $D_f \subset \mathbb{R}^m$ 上, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(x^1, \cdots, x^n)$ 是 $D_g \subset \mathbb{R}^n$ 上的 n 元 m 维向量值函数, 且 $\boldsymbol{g}(D_g) \subset D_f$, 则定义复合函数为

$$f \circ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = f(y^1(x^1, \cdots, x^n), \cdots, y^m(x^1, \cdots, x^n)). \tag{12.2.6}$$

定理12.2.2. (链式法则) *如果 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0 \in D_g$ 处可偏导, 且 $z = f(\boldsymbol{y})$ 在 $\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)$ 处可微, 则 $z = f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可偏导且*

$$z_{x^i}(\boldsymbol{x}_0) = \sum_{1 \le j \le m} f_{y^j}(\boldsymbol{y}_0)y^j_{x^i}(\boldsymbol{x}_0), \quad 1 \le i \le n. \tag{12.2.7}$$

在矩形记号下可写成

$$(f \circ \boldsymbol{g})'(\boldsymbol{x}_0) = f'(\boldsymbol{y}_0)\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}_0) = f'(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0))\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}_0). \tag{12.2.8}$$

练习12.2.3. (1) 如果 $u = u(x, y)$ 可微, 求 Δu 在极坐标下的表达式.

(2) 如果 $u = u(x, y, z)$ 可微, 求 Δu 在极坐标下的表达式.

(3) 假设 $z = (1 + u^2)^v$, $u = x + y$, $v = x^2$. 求 z_x, z_y.

(4) 假设 $z = f(xy, x/y, x)$ 其中 f 是二阶连续可微的, 求 z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}.

§12.2.2 多元函数的一阶全微分的不变性

假设 $z=f(x,y)$ 是可微的, 则得到

$$dz = z_x dx + z_y dy.$$

如果 $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$, 那么根据**定理** 12.2.1 得到

$$\begin{aligned} dz &= z_u du + z_v dv = \left(z_x\varphi_u + z_y\psi_u\right) du + \left(z_x\varphi_v + z_y\psi_v\right) dv \\ &= z_x\left(\varphi_u du + \varphi_v dv\right) + z_y\left(\psi_u du + \psi_v dv\right) = z_x dx + z_y dy. \end{aligned}$$

从而说明多元复合函数也具有**一阶全微分的形式不变性**.

例12.2.4. (1) 假设可微函数 $f(x,y,z)$ 满足

$$f(tx, t^k y, t^m z) = t^n f(x,y,z)$$

其中 $t>0, k,m,n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$. 则

(1.1) $f(x,y,z) = x^n f(1, y/x^k, z/x^m)$.

(1.2) $xf_x(x,y,z) + kyf_y(x,y,z) + mzf(x,y,z) = nf(x,y,z)$.

证: 根据定义得到

$$f(x,y,z) = f(x\cdot 1, x^k\cdot(y/x^k), x^m\cdot(z/x^m)) = x^n f(1, y/x^k, z/x^m).$$

对 $f(tx,t^ky,t^mz)=t^nf(x,y,z)$ 两边关于 t 求导得到

$$\begin{aligned} nt^{n-1}f(x,y,z) &= xf_x(tx,t^ky,t^mz) + kt^{k-1}yf_y(tx,t^ky,t^mz) \\ &\quad + mt^{m-1}zf_z(tx,t^ky,t^mz); \end{aligned}$$

两边同乘以 t

$$\begin{aligned} nt^n f(x,y,z) &= xf_x(tx,t^k,t^mz) + kt^kyf_y(tx,t^ky,t^mz) \\ &\quad + mt^mzf_z(tx,t^ky,t^mz). \end{aligned}$$

最后两边令 $t=1$ 得到 (1.2). □

(2) 假设 $u=f(r)=u(x^1,\cdots,x^n)$ 为二阶连续可微, $r^2=\sum_{1\leq i\leq n}(x^i)^2$. 证明

$$\Delta u = f''(r) + \frac{n-1}{r}f'(r).$$

证: u 的一阶偏导数为

$$u_{x^i} = f'(r)r_{x^i} = f'(r)\frac{x^i}{r}, \quad 1\leq i\leq n.$$

从而得到二阶偏导数

$$u_{x^ix^j} = f''(r)r_{x^j}r_{x^i} + f'(r)r_{x^ix^j} = f''(r)\frac{x^ix^j}{r^2} + f'(r)\frac{\delta_{ij}r - x^ix^j/r}{r^2}$$

特别地

$$\begin{aligned}\Delta u &= \sum_{1\le i\le n} u_{x^ix^i} = \sum_{1\le i\le n}\left[f''(r)\frac{(x^i)^2}{r^2} + f'(r)\frac{r^2-(x^i)^2}{r^3}\right] \\ &= f''(r)\frac{r^2}{r^2} + f'(r)\frac{nr^2-r^2}{r^3} = f''(r) + f'(r)\frac{n-1}{r}. \quad \square\end{aligned}$$

(3) 假设 $g \in C^2$ 且 $v = g(t-r/c)/r = v(x,y,z)$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 其中 c 是常数. 证明

$$\Delta v = \frac{1}{c^2}v_{tt}.$$

证: 计算得到

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{1}{r^2}\left[g'\left(t-\frac{r}{c}\right)\cdot\frac{-x}{cr}\cdot r - g\left(t-\frac{r}{c}\right)\frac{x}{r}\right] \\ &= -\frac{1}{r^2}\left[\frac{x}{c}\cdot g'\left(t-\frac{r}{c}\right) + \frac{x}{r}\cdot g\left(t-\frac{r}{c}\right)\right], \\ v_{xx} &= \frac{x^2}{c^2r^3}g''\left(t-\frac{r}{c}\right) + \left(\frac{3x^2}{cr^4} - \frac{1}{cr^2}\right)g'\left(t-\frac{r}{c}\right) + \left(\frac{3x^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}\right)g\left(t-\frac{r}{c}\right). \end{aligned}$$

故

$$\Delta v = \frac{1}{c^2r}g''\left(t-\frac{r}{c}\right) = \frac{1}{c^2}v_{tt}. \quad \square$$

§12.3 多元函数的微分中值定理和 Taylor 公式

本节引入多元函数的**Taylor 公式 (Taylor' formula)**, 我们将它从形式上写成和一元函数的 Taylor 公式 (参见 §4.7) 一样, 便于记忆和应用.

§12.3.1 多元函数的微分中值定理

称区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是**凸的(convex)**, 如果对任意 $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1 \in D$ 都有

$$\overline{\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_1} := \{(1-t)\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 + t(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0) : 0 \le t \le 1\} \subset D.$$

称区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是**(关于 $\boldsymbol{x}_0$) 星形的(star-shaped relative to $\boldsymbol{x}_0$)**, 如果 $\boldsymbol{x}_0 \in D$ 且对任意 $\boldsymbol{x}_1 \in D$ 都有 $\overline{\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_1} \subset D$.

练习12.3.1. 证明凸区域一定是星形区域, 但是反之不一定成立.

定理12.3.2. (中值定理) *假设多元函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在凸区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 内可微, 则对 D 内的任意两点 $\boldsymbol{x}_0$ 和 $\boldsymbol{x}$, 存在 $\theta \in (0,1)$ 使得*

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) &= \left\langle \mathbf{grad}_{\boldsymbol{x}_0+\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}(f), \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\right\rangle \\ &= \sum_{1\le i\le n} f_{x^i}(\boldsymbol{x}_0 + \theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))(x^i - x_0^i). \end{aligned} \tag{12.3.1}$$

证: 凸性得到 $x_0+t(x-x_0)\in D$ 对任意 $t\in[0,1]$ 都成立. 定义一元辅助函数

$$F(t):=f(x_0+t(x-x_0)),\quad t\in[0,1].$$

f 在 D 上的可微性推出 $F\in C([0,1])\cap D((0,1))$. 从而利用一元函数的 Lagrange 微分中值定理, **定理 4.5.3**, 得到, 存在 $\theta\in(0,1)$ 满足

$$F'(\theta)=F(1)-F(0)=f(x)-f(x_0).$$

另一方面利用链式法则, **定理 12.2.2**, 得到

$$F'(t)=f_{x^i}(x_0+t(x-x_0))(x^i-x_0^i).\ \square$$

推论12.3.3. *如果多元函数 $f(x)$ 在区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上可微且一阶偏导数恒为 0, 则函数 f 在 D 上恒为常数.*

证: 任取 $x_0\in D$, 则根据定义存在球邻域 $\mathbb{B}^n(x_0,r)\subset D$. 因为 $\mathbb{B}^n(x_0,r)$ 是凸区域, 利用**定理 12.2.2** 可知对任意 $x\in\mathbb{B}^n(x_0,r)$ 存在 $\xi\in\mathbb{B}^n(x_0,r)$ 满足

$$f(x)-f(x)=\left\langle \mathbf{grad}_{\xi}(f),x-x_0\right\rangle=0.$$

从而得到

$$f\equiv f(x_0)\quad 在\ \mathbb{B}^n(x_0,r)\ 内成立.$$

任取 D 中的两点 x_0 和 y_0. 根据道路连通性可知存在连续映射 $\gamma:[0,1]\to D$ 使得 $\gamma(0)=x_0$ 和 $\gamma(1)=y_0$. 区间 $[0,1]$ 是紧的从而可找到有限多个点 x_i, $0\le i\le N$ 和有限多个正数 r_i, $0\le i\le N$, 满足 $x_N=y_0$, $\mathbb{B}^n(x_i,r_i)\subset D$, $\mathbb{B}^n(x_i,r_i)\cap\mathbb{B}^n(x_{i+1},r_{i+1})\ne\emptyset\,(0\le i\le N-1)$, 且 $\gamma([0,1])\subset\cup_{0\le i\le N}\mathbb{B}^n(x_i,r_i)$. 根据前面论断可知

$$f(x_0)=f|_{\mathbb{B}^n(x_0,r_0)}=f(x_1)=f|_{\mathbb{B}^n(x_1,r_1)}.$$

经过有限步骤后得到 $f(x_0)=f(y_0)$. 即证明了 f 在 D 上恒为常数. $\square$

例12.3.4. (1) 假设函数 $f(x,y)$ 在区域 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\le 5\}=\overline{\mathbb{B}}^2(\mathbf{0},\sqrt{5})$ 上连续可微, $f(0,0)=0$, 且对任意 $(x,y)\in D$ 都有 $|\mathbf{grad}_{(x,y)}(f)|\le 1$. 证明 $|f(1,2)|\le\sqrt{5}$.

证: 定理 12.3.2 告诉我们存在 $\theta\in(0,1)$ 满足

$$\begin{aligned}|f(1,2)-f(0,0)| &= |f_x(\theta,2\theta)\cdot 1+f_y(\theta,2\theta)\cdot 2| = \left|\left\langle\mathbf{grad}_{(\theta,2\theta)}(f),(1,2)\right\rangle\right|\\ &\le \left|\mathbf{grad}_{(\theta,2\theta)}(f)\right||(1,2)| \le 1\cdot\sqrt{5} = \sqrt{5}.\ \square\end{aligned}$$

(2) 对函数 $F(x,y)=(x^2-2xy+1)^{-1/2}$ 应用中值定理证明存在 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$-\sqrt{2}\theta+(\sqrt{2}-1)(1+\theta^2)^{3/2}=0$$

成立.

证: 直接计算得到

$$F(0,0)=1,\quad F(x,0)=(1+x^2)^{-1/2}$$

和

$$F_x=(y-x)(x^2-2xy+1)^{-3/2},\quad F_y=x(x^2-2xy+1)^{-3/2}.$$

根据**定理 12.3.2** 得到

$$\frac{1}{\sqrt{2}}-1=F(1,0)-F(0,0)=F_x(\theta,0)\cdot 1+F_y(\theta,0)\cdot 0=-\theta(1+\theta^2)^{-3/2}.$$

化简得到 $(\sqrt{2}-1)(1+\theta^2)^{3/2}=\sqrt{2}\theta$. □

§12.3.2 多元函数的 Taylor 公式

回忆一元函数的 Taylor 公式:

$$f(x_1)-f(x_0)=\sum_{1\le i\le k}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x_1-x_0)^i+R_k,$$

其中 R_k 是余项. 在证明 n 元函数的 Taylor 公式之前, 我们引入如下记号.

- $\mathbb{R}^n$ 空间中的 ***n* 重指标** $\boldsymbol{\alpha}$ 定义为

$$\boldsymbol{\alpha}:=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),\quad \alpha_i\in\mathbb{N}.$$

  对此 n 重指标定义

$$\boldsymbol{\alpha}!:=\prod_{1\le i\le n}\alpha_i!,\quad |\boldsymbol{\alpha}|:=\sum_{1\le i\le n}\alpha_i. \tag{12.3.2}$$

- 给定 n 重指标 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 n 元变量 $\boldsymbol{x}=(x^1,\cdots,x^n)$, 定义

$$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}:=\prod_{1\le i\le n}(x^i)^{\alpha_i}. \tag{12.3.3}$$

- 给定 n 重指标 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 n 元函数 f, 定义

$$\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{\alpha}}f\equiv f^{(\boldsymbol{\alpha})}:=\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^{\alpha_n}f\equiv\frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}}{\partial\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}}f. \tag{12.3.4}$$

定理12.3.5. (带 Lagrange 型余项 Taylor 公式) 假设 n 元函数 $f(\boldsymbol{x})\in C^{k+1}(D)$, 其中 D 是 $\boldsymbol{x}_0$ 的某个球邻域 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,r)$, 则对任意 $\boldsymbol{x}_1\in D$ 有

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x}_1)&=f(\boldsymbol{x}_0)+\sum_{1\le i\le k}\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=i}\frac{f^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x}_0)}{\boldsymbol{\alpha}!}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)^{\boldsymbol{\alpha}}+R_k\\&\equiv f(\boldsymbol{x}_0)+\sum_{1\le|\boldsymbol{\alpha}|\le k}\frac{f^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x}_0)}{\boldsymbol{\alpha}!}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)^{\boldsymbol{\alpha}}+R_k,\end{aligned} \tag{12.3.5}$$

其中 R_k 为Lagrange 型余项

$$R_k = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{f^{(\alpha)}(x_0+\theta(x_1-x_0))}{\alpha!}(x_1-x_0)^\alpha, \quad 存在\ \theta \in (0,1). \tag{12.3.6}$$

证: D 是球邻域推出 $x_0+t(x_1-x_0) \in D$ 对任意 $t \in [-1,1]$ 都成立. 引入辅助函数

$$F(t) := f(x_0+t(x_1-x_0)), \quad -1 \le t \le 1.$$

则 $F \in C^{k+1}([-1,1])$ 并在 $t=0$ 处 Taylor 展开

$$F(t) = F(0) + \sum_{1\le i\le k} \frac{F^{(i)}(0)}{i!}t^i + \frac{F^{(k+1)}(\theta t)}{(k+1)!}t^{k+1}, \quad 0<\theta<1.$$

根据链式法则得到, 这里 $x_t := x_0 + t(x_1-x_0)$,

$$\begin{aligned}
F^{(i)}(t) &= \left(\sum_{1\le j\le n}(x_1^j-x_0^j)\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^i f(x_t) \\
&= \sum_{i_1+\cdots+i_n=i}\binom{i}{i_1\cdots i_n}(x_1^1-x_0^1)^{i_1}\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{i_1}\cdots(x_1^n-x_0^n)^{i_n}\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^{i_n} f(x_t) \\
&= \sum_{i_1+\cdots+i_n=i}\frac{i!}{i_1!\cdots i_n!}\cdot\prod_{1\le j\le n}(x_1^j-x_0^j)^{i_j}\cdot\prod_{1\le j\le n}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^{i_j} f(x_t) \\
&= \sum_{|\alpha|=i}\frac{i!}{\alpha!}(x_1-x_0)^\alpha f^{(\alpha)}(x_t).
\end{aligned}$$

因此

$$f(x_1) = f(x_0) + \sum_{1\le i\le k}\sum_{|\alpha|=i}\frac{f^{(\alpha)}(x_0)}{\alpha!}(x_1-x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1}\frac{f^{(\alpha)}(x_\theta)}{\alpha!}(x_1-x_0)^\alpha.$$

从而得到 (12.3.5). □

推论12.3.6. (带 Peano 型余项的 Taylor 公式) 设 n 元函数 $f(x) \in C^{k+1}(D)$, 其中 D 是 x_0 的某个球邻域 $\mathbb{B}^n(x_0,r)$, 则当 x_1 充分靠近 x_0 时有

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= f(x_0) + \sum_{1\le i\le k}\sum_{|\alpha|=i}\frac{f^{(\alpha)}(x_0)}{\alpha!}(x_1-x_0)^\alpha + o(|x_1-x_0|^k) \\
&\equiv f(x_0) + \sum_{1\le|\alpha|\le k}\frac{f^{(\alpha)}(x_0)}{\alpha!}(x_1-x_0)^\alpha + o(|x_1-x_0|^k). \qquad (12.3.7)
\end{aligned}$$

例12.3.7. (1) 近似计算 $(1,08)^{3.96}$.

解: 取 $\boldsymbol{x}_0=(1,4)$ 和 $\boldsymbol{x}_1=(1.08,3.96)$, 并考虑二元函数 $f(x,y)=x^y$. 根据 (12.3.7) 得到

$$f(\boldsymbol{x}_1)\approx f(\boldsymbol{x}_0)+\sum_{1\le|\boldsymbol{\alpha}|\le 2}\frac{f^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x}_0)}{\boldsymbol{\alpha}!}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)^{\boldsymbol{\alpha}}.$$

如果 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2)$ 满足 $|\boldsymbol{\alpha}|=1$, 则 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0)$ 或 $(0,1)$:

$\boldsymbol{\alpha}$	$(1,0)$	$(0,1)$
$f^{(\boldsymbol{\alpha})}$	$f_x=yx^{y-1}$	$f_y=x^y\ln x$
$f^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x}_0)$	4	0
$\frac{f^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x}_0)}{\boldsymbol{\alpha}!}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^{\boldsymbol{\alpha}}$	$4\cdot 0.08$	0

如果 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2)$ 满足 $|\boldsymbol{\alpha}|=2$, 则 $\boldsymbol{\alpha}=(2,0)$ 或 $(1,1)$ 或 $(0,2)$:

$\boldsymbol{\alpha}$	$(2,0)$	$(1,1)$	$(0,2)$
$f^{(\boldsymbol{\alpha})}$	$f_{xx}=y(y-1)x^{y-2}$	$f_{xy}=x^{y-1}(1+y\ln x)$	$f_{yy}=x^y(\ln x)^2$
$f^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x}_0)$	12	1	0
$\frac{f^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^{\boldsymbol{\alpha}}}{\boldsymbol{\alpha}!}$	$6\cdot(0.08)^2$	$-0.08\cdot 0.04$	0

因此得到

$$1.35630721\cdots=(1.08)^{3.96}\approx 1+4\cdot 0.08+6\cdot(0.08)^2-0.08\cdot 0.04=1.3552.\quad\square$$

(2) 求函数 $f(x,y)=xy$ 在 $(1,1)$ 处的 3 阶Taylor 公式.

解: 根据 (12.3.5) 得到

$$f(\boldsymbol{x}_1)\approx f(\boldsymbol{x}_0)+\sum_{1\le|\boldsymbol{\alpha}|\le 3}\frac{f^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x}_0)}{\boldsymbol{\alpha}!}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)^{\boldsymbol{\alpha}}.$$

取 $\boldsymbol{x}_0=(1,1)$ 并计算

$$f_x=y,\quad f_y=x,\quad f_{xx}=0,\quad f_{xy}=1,\quad f_{yy}=0.$$

因此

$$f(x,y)=1+(x-1)+(y-1)+(x-1)(y-1).\quad\square$$

(3) 求函数 $f(x,y)=\ln(1+x)\ln(1+y)$ 在 $(0,0)$ 处的带Peano 型余项的 2 阶Taylor 公式.

解: 计算可得

$$f_x=\frac{1}{1+x}\ln(1+y),\quad f_y=\frac{1}{q+y}\ln(1+x)$$

和

$$f_{xx}=-\frac{1}{(1+x)^2}\ln(1+y),\quad f_{yy}=-\frac{1}{(1+y)^2}\ln(1+x),\quad f_{xy}=\frac{1}{(1+x)(1+y)}.$$

因此

$$\ln(1+x)\ln(1+y) \approx xy. \quad \square$$

(4) 求函数 $f(x,y) = \ln(1+x+y)$ 在 $(0,0)$ 处的带Lagrange 型余项的 n 阶Taylor 公式.

解: 两种计算方法:

$$\ln(1+x+y) = \sum_{1\le k\le n}(-1)^{k-1}\frac{(x+y)^k}{k} + \frac{(-1)^n(x+y)^{n+1}}{(n+1)(1+\theta(x+y))^{n+1}}$$

$$= \sum_{1\le k\le n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sum_{\alpha_1+\alpha_2=k}\frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!}x^{\alpha_1}y^{\alpha_2} + \frac{(-1)^n(x+y)^{n+1}}{(n+1)(1+\theta(x+y))^{n+1}}$$

$$= \sum_{1\le|\boldsymbol{\alpha}|\le n}\frac{(-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|-1}(|\boldsymbol{\alpha}|-1)!}{\boldsymbol{\alpha}!}(x,y)^{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{(-1)^n(x+y)^{n+1}}{(n+1)(1+\theta(x+y))^{n+1}}.$$

直接利用 (12.3.5) 也得到一样的结果. $\square$

(5) 假设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是包含原点的凸区域, f 在 D 上连续可微, 且满足 $xf_x + yf_y = 0$. 则 f 在 D 内为一常数. 如果 D 是不包含原点的凸区域, 则上述结论不一定成立.

证: 根据凸性和Taylor 公式或中值定理得到

$$f(x,y) = f(0,0) + x\cdot f_x(\theta x,\theta y) + y\cdot f_y(\theta x,\theta y) = f(0,0), \quad (x,y)\in D.$$

故函数 f 在 D 内恒为常数.

如果 D 不包含原点则结论不成立: 考虑定义在 $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 上的函数

$$f(x,y) = \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

计算可得

$$f_x = \frac{y^2+xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad f_y = -\frac{x^2+xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

从而对 $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 内的任意凸区域都有 $xf_x + yf_y = 0$ 但是函数 f 本身不恒为常数. $\square$

§12.4 隐函数定理

隐函数定理是分析里面很重要的定理之一, 其一般版本在之后的章节中会给出.

§12.4.1 隐函数

隐函数定理(implicit function theorem) 基本想法是如何从 $n+1$ 元函数方程

$$F(\boldsymbol{x},y)=0, \tag{12.4.1}$$

这里 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 和 $y\in\mathbb{R}$, 中求得 $y=f(\boldsymbol{x})$. **假设这样的 $\boldsymbol{y}=f(x^1,\cdots,x^n)$ 存在且我们可以取任意可能的偏导数**. 则两边对 x^i 求偏导得到

$$0=F_{x^i}(\boldsymbol{x},y)+F_y(\boldsymbol{x},y)f_{x^i}(\boldsymbol{x}).$$

从而得到

$$f_{x^i}(\boldsymbol{x})=-\frac{F_{x^i}(\boldsymbol{x},y)}{F_y(\boldsymbol{x},y)},\quad 1\le i\le n. \tag{12.4.2}$$

这里事先假设 $F_y(\boldsymbol{x},y)\neq 0$.

例12.4.1. (1) 如果不加任何条件, 显然这样的 $\boldsymbol{y}$ 不一定在整体上是唯一存在的. 考虑函数方程

$$0=F(x,y)=x-y^2.$$

这个方程关于 y 有两个解, 即 $y=\sqrt{x}$ 和 $y=-\sqrt{x}x$. 这两个解的交点只有一个 $x=0$. 注意到此时

$$F_y(0,0)=-2y|_{(0,0)}=0$$

不满足条件 $F_y(\boldsymbol{x},y)\neq 0$.

(2) 另一方面 $F_y(\boldsymbol{x},y)\neq 0$ 不是必要条件, 比如考察函数方程

$$0=F(x,y)=x-|y|.$$

显然 $F_y(0,0)$ 不存在, 但是 $F(x,y)=0$ 有两个解 $y=x$ 和 $y=-x$.

定义12.4.2. 假设 $F(\boldsymbol{x},y)$ 是区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 上的 $n+1$ 元函数. 如果存在区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 和开区间 $E\subset\mathbb{R}$ 使得 $D\times E\subset\Omega$ 且对每个 $\boldsymbol{x}\in D$ 都唯一存在 $y\in E$ 满足 (12.4.1), 则称 (12.4.1) 确定了从 D 到 E 的**隐函数 (implicit function)**, 记为 $y=f(\boldsymbol{x})$. 注意到

$$F(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x}))=0,\quad \forall\,\boldsymbol{x}\in D.$$

§12.4.2 隐函数定理

下面首先证明一元函数的隐函数定理, 然后将其推广到多元函数情形.

定理12.4.3. (一元隐函数定理) 假设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 是区域, $(x_0,y_0)\in\Omega$, $F(x,y)$ 是定义在 Ω 上的二元函数, 且

(*i*) $F(x_0,y_0)=0$;

(*ii*) $F(x,y)$ 在闭矩形 $\square_0 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-x_0| \le a,\ |y-y_0| \le b\} \subset \Omega$ 上有连续偏导数;

(*iii*) $F_y(x_0,y_0) \neq 0.$

则存在 (x_0,y_0) 的某个邻域 $U_0 \subset \square_0$, 使得方程 $F(x,y)=0$ 在 U_0 唯一确定可导的隐函数, 即存在 $\rho>0, \rho'>0$ 和函数

$y=f(x),\ \ x \in (x_0-\rho, x_0+\rho)$ 且 $(x,y) \in (x_0-\rho,x_0+\rho) \times (y_0-\rho', y_0+\rho') = U_0,$

满足

(*a*) $F(x,f(x))=0;$

(*b*) $y_0 = f(x_0);$

(*c*) $f \in C^1((x_0-\rho, x_0+\rho));$

(*d*) 其导数满足**隐函数求导公式**

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}. \tag{12.4.3}$$

证: 不失一般性不妨假设 $F_y(x_0,y_0) > 0$. 根据 $F_y(x,y)$ 的连续性, 存在 $a_1 \in (0,a)$ 和 $b_1 \in (0,b)$ 使得偏导数 $F_y(x,y)>0$ 在闭矩形

$$\square_1 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| |x-x_0| \le a_1,\ |y-y_0| \le b_1\right\} \subset \square_0$$

上恒成立. 定义一元函数

$$\alpha(y) := F(x_0,y), \quad y \in [y_0-b_1, y_0+b_1].$$

则 $\alpha(y)$ 在 $[y_0-b_1,y_0+b_1]$ 上是严格单调递增且满足

$$\alpha(y_0-b_1) < 0 = \alpha(y_0) < \alpha(y_0+b_1).$$

又因为 $F(x,y)$ 在 $\square_1$ 上连续, 存在 $a_2 \in (0,a_1]$ 使得

$$F|_{(x_0-a_2,x_0+a_2)\times\{y_0-b_1\}} < 0, \quad F|_{(x_0-a_2,x_0+a_2)\times\{y_0+b_1\}} > 0. \tag{$*$}$$

考虑 x_0 的邻域 $(x_0-\rho,x_0+\rho) := (x_0-a_2,x_0+a_2)$ 和 y_0 的邻域 $(y_0-\rho',y_0+\rho') = (y_0-b_1,y_0+b_1)$. 对任意 $x \in (x_0-\rho,x_0+\rho)$, 一元函数 $F(x,\cdot)$ 在 $[y_0-b_1,y_0+b_1]$ 上连续且在端点处异号. 根据连续函数零点定理和 $F(x,\cdot)$ 在 $[y_0-b_1,y_0+b_1]$ 上严格递增, 则存在唯一的 $y \in (y_0-b_1,y_0+b_1)$ 使得 $F(x,y)=0$ 成立. 这样就得到如下函数

$$f:(x_0-\rho,x_0+\rho) \longrightarrow (y_0-b_1,y_0+b_1), \quad x \longmapsto y=f(x),$$

它满足恒等式 $F(x, f(x)) = 0$ 且 $y_0 = f(x_0)$.

(1) $f \in C((x_0-\rho, x_0+\rho))$. 任取 $\overline{x} \in (x_0-\rho, x_0+\rho)$, 则有 $F(\overline{x}, \overline{y}) = 0$ 这里 $\overline{y} = f(\overline{x})$. 根据 $(*)$ 可知

$$F(\overline{x}, \overline{y}-\epsilon) < 0 < F(\overline{x}, \overline{y}+\epsilon), \quad \forall\, \epsilon \in (0, b_1].$$

利用函数 $F(x, y)$ 在 $\square_1$ 上的连续性可知存在 $\delta > 0$ 使得

$$F(x, \overline{y}-\epsilon) < 0 < F(x, \overline{y}+\epsilon), \quad \forall\, x \in (\overline{x}-\delta, \overline{x}+\delta),$$

成立. 再次根据连续函数零点定理和 $F(x, \cdot)$ 的严格递增性, 可知存在唯一的 $y \in (\overline{y}-\epsilon, \overline{y}+\epsilon)$ 满足 $F(x, y) = 0$ 且 $y = f(x)$. 即

$$|x-\overline{x}| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x)-f(\overline{x})| < \epsilon.$$

(2) $f \in D((x_0-\rho, x_0+\rho))$. 任取 $\overline{x} \in (x_0-\rho, x_0+\rho)$, 并取 Δx 充分小满足 $\overline{x}+\Delta x \in (x_0-\rho, x_0+\rho)$. 定义

$$\overline{y} = f(\overline{x}), \quad \Delta y := f(\overline{x}+\Delta x) - \overline{y}.$$

从而得到

$$F(\overline{x}, \overline{y}) = 0 = F(\overline{x}+\Delta x, \overline{y}+\Delta y).$$

根据**定理 12.3.2** 存在 $\theta \in (0, 1)$ 满足

$$\begin{aligned} 0 &= F(\overline{x}+\Delta x, \overline{y}+\Delta y) - F(\overline{x}, \overline{y}) \\ &= F_x(\overline{x}+\theta\Delta x, \overline{y}+\theta\Delta y)\Delta x + F_y(\overline{x}+\theta\Delta x, \overline{y}+\theta\Delta y)\Delta y. \end{aligned}$$

但在 $\square_1$ 上偏导数 $F_y > 0$, 因此

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(\overline{x}+\theta\Delta x, \overline{y}+\theta\Delta y)}{F_y(\overline{x}+\theta\Delta x, \overline{y}+\theta\Delta y)}.$$

利用偏导数 F_x 和 F_y 的连续性, 得到

$$f'(\overline{x}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(\overline{x}, \overline{y})}{F_y(\overline{x}, \overline{y})}.$$

(3) $f \in C^1((x_0-\rho, x_0+\rho))$. 这个性质立即从上述等式推出. $\square$

同理可得到

定理12.4.4. (多元隐函数存在定理) *假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是区域, $(\boldsymbol{x}_0, y_0) \in \Omega$, $F(\boldsymbol{x}, y)$ 是定义在 Ω 上的 $n+1$ 元函数, 且*

(i) $F(\boldsymbol{x}_0, y_0) = 0$;

(ii) $F(\boldsymbol{x},y)$ 在闭矩体 $\square_0 := \{(x^1,\cdots,x^n,y)\in\mathbb{R}^{n+1} : |x^i - x_0^i| \le a^i,\ |y-y_0| \le b\} \subset \Omega$ 上有连续偏导数;

(iii) $F_y(\boldsymbol{x}_0,y_0) \neq 0$.

则存在 $(\boldsymbol{x}_0,y_0)$ 的某个邻域 $U_0 \subset \square_0$, 使得方程 $F(\boldsymbol{x},y)=0$ 在 U_0 唯一确定可导的隐函数, 即存在 $\rho>0, \rho'>0$ 和函数

$$y=f(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,\rho) \text{ 且 } (\boldsymbol{x},y)\in\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,\rho)\times(y_0-\rho',y_0+\rho')=U_0,$$

满足

(a) $F(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x}))=0$;

(b) $y_0=f(\boldsymbol{x}_0)$;

(c) $f\in C^1(\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,\rho))$;

(d) 其导数满足**隐函数求导公式**

$$\frac{\partial y}{\partial x^i} = -\frac{F_{x^i}(\boldsymbol{x},y)}{F_y(\boldsymbol{x},y)}. \tag{12.4.4}$$

例12.4.5. (1) 求由方程 $x^3+y^3-3axy=0, a\neq 0$, 确定的隐函数的导数.

解: 此时 $F(x,y):=x^3+y^3-3axy$. 计算可得

$$F_x=3x^2-3ay,\quad F_y=3y^2-3ax.$$

联立方程 $F_x=0=F_y$, 得到 $(x,y)=(0,0),(\sqrt[3]{4}a,\sqrt[3]{2}a),(\sqrt[3]{2}a,\sqrt[3]{4}a)$. 因此在曲线上除了这三个点外, 我们都可以局部地确定隐函数 $y=y(x)$ 和 $x=x(y)$. 根据公式 (12.4.3) 得到

$$y'=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{3x^2-3ay}{3y^2-3ax}=-\frac{x^2-ay}{y^2-ax}.$$

继续求导得到

$$y''=\frac{(ay'-2x)(y^2-ax)-(ay-x^2)(2yy'-a)}{(y^2-ax)^2}=-\frac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}. \quad \square$$

(2) $x^2+y^2+z^2=4z$. 求 z_{xx},z_{xy},z_{yy}.

解: 此时 $F(x,y)=x^2+y^2+z^2-4z$. 计算得到

$$F_x=2x,\quad F_y=2y,\quad F_z=2z-4.$$

根据公式 (12.4.4) 可知

$$z_x=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{x}{2-z},\quad z_y=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{y}{2-z}.$$

继续求偏导得到

$$z_{xx}=\frac{(2-z)-x(-z_x)}{(2-z)^2}=\frac{2-z+\frac{x^2}{2-z}}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}=\frac{4-y^2}{(2-z)^3},$$

和

$$z_{xy}=\frac{xz_y}{(2-z)^2}=\frac{xy}{(2-z)^3},$$

和

$$z_{yy}=\frac{(2-z)-y(-z_y)}{(2-z)^2}=\frac{2-z+\frac{y^2}{2-z}}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)^2+y^2}{(2-z)^3}=\frac{4-x^2}{(2-z)^3}.\quad\square$$

(3) $F(xz,yz)=0$, 其中 $F\in C^2$. 求 z_{xx},z_{xy},z_{yy}.

解: 这里假设函数 $F=F(u,v)$, $u=xz$, $v=yz$. 利用链式法则得到

$$0=F_u(z+xz_x)+F_v(yz_x)\quad\Longrightarrow\quad z_x=-\frac{zF_u}{xF_u+yF_v}$$

和

$$0=F_u(xz_y)+F_v(z+yz_y)\quad\Longrightarrow\quad z_y=-\frac{zF_v}{xF_u+yF_v}.$$

继续求偏导得到

$$0=F_{uu}(z+xz_x)^2+F_u(2z_x+xz_{xx})+(2F_{vu}(z+xz_x)+F_{vv}(yz_x))(yz_x)+F_v(yz_{xx}).$$

故

$$z_{xx}=\frac{2zF_u^2(xF_u+yF_v)-y^2z^2(F_v^2F_{uu}-2F_uF_vF_{uv}+F_u^2F_{vv})}{(xF_u+yF_v)^3}.$$

同样可得

$$z_{yy}=\frac{2zF_v^2(xF_u+yF_v)-x^2z^2(F_v^2F_{uu}-2F_uF_vF_{uv}+F_u^2F_{vv})}{(xF_u+yF_v)^3}.$$

作为练习请求出 z_{xy}. $\square$

(4) 证明方程 $y-xe^x-\epsilon\sin y=0$ $(0<\epsilon<1)$ 在 $(0,0)$ 处可确定隐函数 $y=y(x)$, 并求出 $y'(0)$.

证: 此时 $F(x,y)=y-xe^x-\epsilon\sin y$. 计算得到

$$F_x=-e^x-xe^x,\quad F_y=1-\epsilon\cos y$$

从而得到

$$y'(0)=-\frac{F_x(0,0)}{F_y(0,0)}=-\frac{-1}{1-\epsilon}=\frac{1}{1-\epsilon}.\quad\square$$

§12.4.3 向量值隐函数定理

考虑由 $2n$ 元 n 维向量值函数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 所确定的函数方程组

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{0}\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{bmatrix}F^1(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^n)\\ \vdots\\ F^n(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}.\tag{12.4.5}$$

假设 (12.4.5) 可确定函数 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. 对方程 $0=F^k(x^i,y^j)$ 求偏导得到

$$0=F^k_{x^i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+F^k_{y^j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})f^j_{x^i}(\boldsymbol{x}).$$

引入矩阵函数

$$A:=[a_{ki}],\quad B:=[b_{kj}],\quad C:=[c_{ji}],\quad a_{ki}:=F^k_{x^i},\quad b_{kj}:=F^k_{y^j},\quad c_{ji}:=f^j_{x^i}.$$

那么得到

$$\boldsymbol{0}=A+BC\quad\Longrightarrow\quad C=-B^{-1}A$$

如果矩阵 B 是非奇异的.

定理12.4.6. ($2n$ 元 n 维向量值隐函数存在定理) 假设 $\Omega\subset\mathbb{R}^{2n}$ 是区域, $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\in\Omega$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是定义在 Ω 上的 $2n$ 元 n 维函数, 且

(*i*) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=\boldsymbol{0}$;

(*ii*) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 在闭矩体 $\Box_0:=\{(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^n)\in\mathbb{R}^{2n}:|x^i-x^i_0|\le a^i,\ |y^j-y^j_0|\le b^j\}\subset\Omega$ 上有连续偏导数;

(*iii*) 矩阵

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{y}}:=\begin{bmatrix}F^1_{y^1}&\cdots&F^1_{y^n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ F^n_{y^1}&\cdots&F^n_{y^n}\end{bmatrix}$$

在 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 处非奇异.

则存在 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 的某个邻域 $U_0\subset\Box_0$, 使得方程 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{0}$ 在 U_0 唯一确定可导的隐函数, 即存在 $\rho>0$, $\rho'>0$ 和函数

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,\rho)\text{ 且 }(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,\rho)\times\mathbb{B}^n(\boldsymbol{y}_0,\rho')=U_0,$$

满足

(*a*) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))=\boldsymbol{0}$;

(*b*) $\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$;

(c) $\boldsymbol{F} \in C^1(\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0, \rho))$;

(d) 其导数满足**隐函数求导公式**

$$[f^j_{x^i}] = -[F^k_{y^j}]^{-1}[F^k_{x^i}]. \tag{12.4.6}$$

例12.4.7. (1) 研究方程组

$$F(x,y,u,v) = u^2+v^2-x^2-y=0, \quad G(x,y,u,v) = -u+v-xy+1=0$$

在 $P_0=(2,1,1,2)$ 附近的隐函数并求其偏导数.

解: 直接计算可得

$$\begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x & -1 \\ -y & -x \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u & 2v \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

则得到

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}_{P_0} = -\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7/6 \\ -1 & -5/6 \end{bmatrix} \quad \square$$

(2) 假设 $(y=y(x), z=z(x))$ 是由方程组

$$z = xf(x+y), \quad F(x,y,z)=0,$$

所确定的向量值隐函数, 其中 $f, F \in C^1$. 求 dz/dx.

解: 因为

$$z_x = f + xf'(1+y'), \quad 0 = F_x + F_y y' + F_z z'$$

得到

$$z' = \frac{-F_x - F_y(\frac{z'-f}{xf'}-1)}{F_z} = \frac{(f+xf')F_y - xf'F_x - z'F_y}{xf'F_z}. \quad \square$$

(3) 假设 $u=u(x,y,z)$, $v=v(x,y,z)$ 和 $x=x(s,t)$, $y=y(s,t)$, $z=z(s,t)$ 都有连续的一阶偏导数, 证明

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} + \frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}\frac{\partial(y,z)}{\partial(s,t)} + \frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)}\frac{\partial(z,x)}{\partial(s,t)}.$$

证: 直接计算可得. $\square$

§12.4.4 逆映射定理

逆映射定理是保证如何从函数组

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad (u,v) \in D, \tag{12.4.7}$$

求出

$$u = u(x,y), \quad v = v(x,y), \quad (x,y) \in E. \tag{12.4.8}$$

换句话说, 映射

$$\mathbf{T} : D \to \mathbb{R}^2, \quad (u,v) \longmapsto \mathbf{T}(u,v)$$

什么时候存在逆映射? 一般来说映射 $\mathbf{T}$ 在整体上不存在逆映射, 但是局部上可以存在逆映射. 比如考察函数 $\mathbf{T}(u,v) = (u^2, v^2)$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

定理12.4.8. (逆映射定理) *假设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是区域, $\boldsymbol{x}_0 \in D$, $\mathbf{T} : D \to \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y} = \mathbf{T}(\boldsymbol{x})$, 是定义在 D 上的 n 元 n 维向量值函数, 且*

(*i*) $\boldsymbol{y}_0 := \mathbf{T}(\boldsymbol{x}_0)$,

(*ii*) $\mathbf{T} \in C^1(D)$,

(*iii*) $\mathbf{Jac}_{\boldsymbol{x}_0}(\mathbf{T}) \neq 0$.

则存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的某个邻域 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0, \rho)$ 和 $\boldsymbol{y}_0$ 的某个邻域 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{y}_0, \rho')$, 使得

$$\mathbf{T} : \mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0, \rho) \longrightarrow \mathbb{B}^n(\boldsymbol{y}_0, \rho')$$

存在逆映射 $\mathbf{S} := \mathbf{T}^{-1}$, 且满足

(*a*) $\mathbf{S}(\boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{x}_0$;

(*b*) $\mathbf{S}' = (\mathbf{T}')^{-1}$, *即*

$$\mathbf{Jac}_{\boldsymbol{y}}(\mathbf{S}) = \left[\mathbf{Jac}_{\mathbf{S}(\boldsymbol{y})}(\mathbf{T})\right]^{-1}.$$

证: 定义 $2n$ 元 n 维向量值函数

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \boldsymbol{y} - \mathbf{T}(\boldsymbol{x}), \quad \Omega := D \times \mathbf{T}(D) \subset \mathbb{R}^{2n}.$$

则得到 $\mathbf{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = 0$, $\mathbf{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 在任何包含在 Ω 内的闭矩体

$$\square_0 := \left\{(x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n) \in \mathbb{R}^{2n} : |x^i - x_0^i| \le a^i, \ |y^j - y_0^j| \le b^j\right\}$$

上有连续的偏导数, 且

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{x}} = -\mathbf{Jac}_{\boldsymbol{x}}(\mathbf{T})$$

在 $\boldsymbol{x}_0$ 非奇异. 从而根据**定理 12.4.6** 存在 $\boldsymbol{y}_0$ 的某个邻域 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{y}_0, \rho')$ 和某个函数 $\boldsymbol{x} = \mathbf{S}(\boldsymbol{y})$, 其中 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{B}^n(\boldsymbol{y}_0, \rho')$ 和 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0, \rho)$, 且

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{x}_0, \quad \mathbf{F}(\mathbf{S}(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{S} \in C^1(\mathbb{B}^n(\boldsymbol{y}_0, \rho')),$$

和

$$[S^j_{y^i}] = -[F^k_{x^j}]^{-1}[F^k_{y^i}].$$

化简得到

$$\mathbf{T} \circ \mathbf{S} = \mathbf{1} \quad \text{在 } \mathbb{B}^n(\boldsymbol{y}_0, \rho') \text{ 成立},$$

且

$$[S^j_{y^i}] = [T^k_{x^j}]^{-1}[\delta^k_i] \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{Jac}(\mathbf{S}) = [\mathbf{Jac}(\mathbf{T})]^{-1}. \ \square$$

例12.4.9. (1) 对关于二元函数 $u = u(t, x) \in C^2$ 的波动方程 $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ $(a \neq 0)$ 作变量替换

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at.$$

求 u 关于 ξ, η 所要满足的方程.

解: 计算

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(t, x)} = \det \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 1 & a \end{bmatrix} = 2a \neq 0.$$

从而变量替换是可逆的. 根据

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta, \quad u_t = u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t = a(u_\eta - u_\xi),$$

得到

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2u_{\xi\eta}, \quad u_{tt} = a^2(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) - 2a^2 u_{\xi\eta}.$$

因此 $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ 推出 $u_{\xi\eta} = 0$. 即 $u(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \eta(\eta)$, 其中 $\varphi, \psi \in C^2$. 故波动方程 $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ 且 $u \in C^2$ 的一般解是 $u(t, x) = \varphi(x - at) + \eta(x + at)$. $\square$

(2) 假设二元函数 $z = z(x, y) \in C^2$ 且满足方程

$$z_{xx} + 2z_{xy} + z_{yy} = 0.$$

作变量替换

$$u = x + y, \quad v = x - y.$$

求 $w := xy - z$ 关于 u, v 所要满足的方程.

解: 计算

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -2.$$

从而变量替换是可逆的. 根据

$$z_x = y - w_x = y - (w_u + w_v), \quad z_y = x - w_y = x - (w_u - w_v),$$

得到

$$z_{xx}=-(w_{uu}+2w_{uv}+w_{vv}),\quad z_{xy}=(w_{uu}-2w_{uv}+w_{vv}),\quad z_{yy}=1-(w_{uu}-w_{vv})$$

从而 $w_{uu}=1/2$. □

(3) 对方程

$$x^2z_{xx}-y^2z_{yy}=0$$

作变量替换 $u=xy$ 和 $v=y/x$.

解: 根据

$$u_x=y,\quad u_y=x,\quad u_x=-\frac{y}{x^2},\quad v_y=\frac{1}{x}$$

得到

$$z_x=yz_u-\frac{y}{x^2}z_v,\quad z_y=xz_u+\frac{1}{x}z_v$$

且

$$z_{xx}=y^2z_{uu}-\frac{2y^2}{x^2}z_{uv}+\frac{y^2}{x^4}z_{vv}+\frac{2y}{x^3}z_v,\quad z_{yy}=x^2z_{uu}+2z_{uv}+\frac{1}{x}z_{vv}.$$

最后得到 $2uz_{uv}=z_v$ 或者 $2u(z_v)_u=z_v$. 分部积分得到 $(z_v)^2=\varphi(v)u$. □

§12.5 偏导数的几何应用

本节中的几何应用主要是介绍如何求空间曲线的切线和法平面, 及空间曲面的法线和切平面.

§12.5.1 空间曲线的切线和法平面

求空间曲面的切线与法平面.

1、参数方程表示的空间曲线的切线与法平面. 此时空间区间 γ 用参数 t 记为参数形式

$$\gamma: x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),\quad t\in[a,b], \tag{12.5.1}$$

或可记成向量形式

$$\boldsymbol{r}(t):=(x(t),y(t),z(t)),\quad t\in[a,b].$$

称空间曲线 γ **光滑的**[2]如果 $\boldsymbol{r}'(t)$ 连续且 $\boldsymbol{r}'(t)\neq\mathbf{0}$.

---

[2]但在微分几何中光滑曲线通常是指 $\boldsymbol{r}(t)$ 的各阶导数存在且连续. 在这里光滑曲线又称为**正规曲线(regular curve)**.

固定曲线 γ 上点 $\boldsymbol{P}_0=(x_0,y_0,z_0)=(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$. 任取其它点 $\boldsymbol{P}=(x(t),y(t),z(t))$, 则连接 $\boldsymbol{P}_0$ 和 $\boldsymbol{P}$ 的向量为 $(x(t)-x_0,y(t)-y_0,z(t)-z_0)$. 令 $t\to t_0$ 得到曲线 γ 在 $\boldsymbol{P}_0$ 处的切线的方向向量, 即**切向量(tangent vector)**

$$\boldsymbol{r}'(t_0)=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)) \tag{12.5.2}$$

和曲线在 $\boldsymbol{P}_0$ 处的切线方程

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}. \tag{12.5.3}$$

同时曲线在 $\boldsymbol{P}_0$ 处的**法平面(normal plane)**(即过 $\boldsymbol{P}_0$ 且和切线垂直的平面) 为

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0. \tag{12.5.4}$$

利用几何直观性可写成向量形式

$$\langle\boldsymbol{r}'(t),\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\rangle=0. \tag{12.5.5}$$

例12.5.1. (1) 如果空间曲线 γ 的方程为

$$y=y(x),\ z=z(x)\quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{r}(x)=(x,y(x),z(x)).$$

则在 $\boldsymbol{P}_0=(x_0,y_0=y(x_0),z_0=z(x_0))$ 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{y'(x_0)}=\frac{z-z_0}{z'(x_0)} \tag{12.5.6}$$

且法平面方程为

$$(x-x_0)+y'(x_0)(y-y_0)+z'(x_0)(z-z_0)=0. \tag{12.5.7}$$

(2) 求螺旋线

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=bt,$$

在 $t_0=\pi/3$ 处的切线和法平面方程.

解: $x'(t)=-\cos t, y'(t)=a\cos t$ 和 $z'(t)=b$. 所以得到切线方程为

$$\frac{x-\frac{a}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{y-\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{1}{2}a}=\frac{z-\frac{\pi}{3}b}{b}$$

和法平面方程为

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}a\left(x-\frac{a}{2}\right)+\frac{1}{2}a\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)+b\left(z-\frac{\pi}{3}b\right)=0.\ \square$$

2、一般形式表示的空间曲线的切线与法平面. 空间曲线的一般形式可表示为两个曲面的交集:

$$\Gamma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = 0 = G(x,y,z)\right\}, \tag{12.5.8}$$

其中 F 和 G 都具有连续的偏导数. 取 Γ 上的固定 $\boldsymbol{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 使得 Jacobi 矩阵

$$\mathbf{Jac}_{\boldsymbol{P}_0}(\Gamma) = \begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{bmatrix}_{\boldsymbol{P}_0}$$

在 $\boldsymbol{P}_0$ 处满秩, 即 $\mathrm{rank}(\mathbf{Jac}_{\boldsymbol{P}_0}(\Gamma)) = 2$. 根据秩的定义, 存在某个 2×2 的子矩阵是非奇异的. 不是一般性不妨假设

$$\begin{bmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{bmatrix}_{\boldsymbol{P}_0} \quad \text{非奇异} \quad \Longleftrightarrow \quad \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{\boldsymbol{P}_0} = \det\left(\begin{bmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{bmatrix}_{\boldsymbol{P}_0}\right) \neq 0.$$

根据**定理 12.4.6** 可知存在 (x_0, y_0, z_0) 的某个领域

$$U_0 := (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \times \mathbb{B}^2((y_0, z_0), \rho')$$

使得方程 $F(x,y,z) = 0 = G(x,y,z)$ 在 U_0 唯一确定可导的隐函数:

$$y = y(x), \quad z = z(x), \quad x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$$

满足

$$F_x + F_y y' + F_z z' = 0 = G_x + G_y y' + G_z z'$$

从而得到

$$y'(x_0) = \left.\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}\right|_{\boldsymbol{P}_0}, \quad z'(x_0) = \left.\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}\right|_{\boldsymbol{P}_0}.$$

因此过 $\boldsymbol{P}_0$ 处的切线方程和法平面方程分别为

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(\boldsymbol{P}_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}(\boldsymbol{P}_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(\boldsymbol{P}_0)} \tag{12.5.9}$$

和

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(\boldsymbol{P}_0)(x - x_0) + \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}(\boldsymbol{P}_0)(y - y_0) + \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(\boldsymbol{P}_0)(z - z_0) = 0. \tag{12.5.10}$$

方程 (12.5.10) 可写成

$$\begin{vmatrix} F_x(\boldsymbol{P}_0) & F_y(\boldsymbol{P}_0) & F_z(\boldsymbol{P}_0) \\ G_x(\boldsymbol{P}_0) & G_y(\boldsymbol{P}_0) & G_z(\boldsymbol{P}_0) \\ x - x_0 & by - y_0 & z - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

定理12.5.2. 曲线 (12.5.8) 在 $\boldsymbol{P}_0$ 处的法平面就是梯度 $\mathbf{grad}_{P_0}(F)$ 和 $\mathbf{grad}_{P_0}(G)$ 所张成的经过 $\boldsymbol{P}_0$ 的平面.

例12.5.3. (1) 求两个柱面 $x^2+y^2=R^2$ 和 $x^2+z^2=R^2$ 交线在 $P=\frac{R}{\sqrt{2}}(1,1,1)$ 处的切线方程和法平面方程.

解: 令

$$F(x,y,z)=x^2+y^2-R^2,\quad G(x,y,z)=x^2+z^2-R^2.$$

则得到

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=4yz,\quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}=-4xz,\quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=-4xy.$$

因此得到切线方程为

$$x-\frac{R}{\sqrt{2}}=-y+\frac{R}{\sqrt{2}}=-z+\frac{R}{\sqrt{2}}$$

和法平面方程为

$$x-y-z+\frac{R}{\sqrt{2}}=0.\quad \square$$

(2) 求曲线

$$x^2+y^2+z^2=6,\quad z=x^2+y^2$$

在点 $P=(1,1,2)$ 的切线和法平面.

解: 如果令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6$ 和 $G(x,y,z)=z-x^2-y^2$ 就得到

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=4zy+2y,\quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}=-4xz-2x,\quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=0.$$

因此得到切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{0}$$

和法平面方程为

$$x-y=0.\quad \square$$

§12.5.2 空间曲面的切平面和法线

和曲线的切线和法平面对偶的是曲面的切平面和法线.

1、一般形式曲面的切平面和法线. 此时曲面 S 的方程为

$$S:\quad F(x,y,z)=0,\quad (x,y,z)\in D, \tag{12.5.11}$$

其中多元函数 F 在 D 上具有连续偏导数 F_x,F_y,F_z 且偏导数不全为 0. 固定曲面 S 上的点 $\boldsymbol{M}_0=(x_0,y_0,z_0)$. 对经过 $\boldsymbol{M}_0$ 的 S 上的任意光滑曲线 $\gamma:\boldsymbol{r}(t)=$

$(x(t), y(t), z(t))$, 有 $x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0), z_0 = z(t_0)$, 且 $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$. 在 t_0 处求导得到

$$F_x(\boldsymbol{M}_0)x'(t_0) + F(\boldsymbol{M}_0)y'(t_0) + F_z(\boldsymbol{M}_0)z'(t_0) = 0.$$

γ 的切线构成了曲面 S 在 $\boldsymbol{M}_0$ 处的**切平面(tangent plane)**. 由此得到切平面的法向向量是

$$\mathbf{n} := (F_x(\boldsymbol{M}_0), F_y(\boldsymbol{M}_0), F_z(\boldsymbol{M}_0)). \tag{12.5.12}$$

从而得到切平面和法线方程为

$$F_x(\boldsymbol{M}_0)(x - x_0) + F_y(\boldsymbol{M}_0)(y - y_0) + F_z(\boldsymbol{M}_0)(z - z_0) = 0 \tag{12.5.13}$$

和

$$\frac{x - x_0}{F_x(\boldsymbol{M}_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(\boldsymbol{M}_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(\boldsymbol{M}_0)}. \tag{12.5.14}$$

例12.5.4. (1) 如果曲面 S 的方程表示为

$$S:\ z = f(x, y), \quad (x, y) \in E \quad \Longrightarrow \quad f(x, y) - z = 0,$$

此时的切平面方程和法线方程为

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{12.5.15}$$

和

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \tag{12.5.16}$$

(2) 求椭球面

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$$

过点 $(-2, 1, -3)$ 的切平面方程和法线方程.

解: 令 $F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} - 3$ 就得到

$$F_x = \frac{x}{2}, \quad F_y = 2y, \quad F_z = \frac{2z}{9}.$$

因此切平面方程和法线方程分别为

$$3x - 6y + 2z + 18 = 0, \quad \frac{x + 2}{-1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z + 3}{-\frac{2}{3}}. \quad \square$$

2、参数形式曲面的切平面和法线. 假设曲面可表示为参数形式:

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v), \quad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2, \tag{12.5.17}$$

其中 x,y,z 都具有连续的偏导数. 假设 Jacobi 矩阵

$$\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix}$$

在 $\boldsymbol{M}_0 = (x_0 = x(u_0,v_0), y_0 = y(u_0,v_0), z_0 = z(u_0,v_0))$ 处满秩. 不失一般性不妨假设 $\partial(x,y)/\partial(u,v)|_{(u_0,v_0)} \neq 0$, 从而在 (x_0,x_0) 附近可以确定函数

$$u = u(x,y), \quad v = v(x,y) \quad \Longrightarrow \quad z = z(x,y) = z(u(x,y),v(x,y)) =: f(x,y).$$

由于

$$f_x = z_u u_x + z_v v_x, \quad f_y = z_u u_y + z_v v_y$$

和

$$x_u u_x + x_v v_x = 1 = y_u u_y + y_v v_y, \quad x_u u_y + x_v v_y = 0 = y_u u_x + y_v v_x,$$

得到

$$f_x = -\frac{\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}, \quad f_y = -\frac{\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}.$$

从方程 $f(x,y) - z = 0$ 得到 S 在 $\boldsymbol{M}_0$ 的法向量为

$$\mathbf{n} = \left(\left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}, \left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}, \left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)} \right). \tag{12.5.18}$$

相应的切平面方程和法线方程为

$$\left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}(x-x_0) + \left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}(y-y_0) + \left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}(z-z_0) = 0 \tag{12.5.19}$$

和

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}} = \frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}} = \frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}}. \tag{12.5.20}$$

例12.5.5. (1) 求球面

$$x = \sin\varphi\cos\theta, \quad y = \sin\varphi\sin\theta, \quad z = \cos\varphi,$$

在对应于 $\theta = \varphi = \pi/4$ 处的切平面方程和法线方程.

解: 直接计算得到

$$\left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\varphi)}\right|_{(\pi/4,\pi/4)} = \left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,\varphi)}\right|_{(\pi/4,\pi/4)} = -\frac{\sqrt{2}}{4}, \quad \left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\varphi)}\right|_{(\pi/4,\pi/4)} = -\frac{1}{2}.$$

故法向量为 $\mathbf{n}=(1,1,\sqrt{2})$. 从而得到切平面方程和法线方程为

$$x+y+\sqrt{2}z=2,\quad x-\frac{1}{2}=y-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).\quad\square$$

(2) 证明曲线

$$\Gamma:\ x=ae^t\cos t,\quad y=ae^t\sin t,\quad z=ae^t$$

和锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的每条母线 $x=pt,y=qt,z=t$, 其中 $p^2+q^2=r^2$, 相交称定角.

证: 锥面的母线方程为

$$(x,y,z)=(pt,qt,rt),\quad p^2+q^2=r^2,$$

其中 (p,q,r) 为母线的方向. 曲线 Γ 的切向量为

$$\left(ae^t(\cos t-\sin t),ae^t(\sin t+\cos t),ae^t\right)=(x-y,x+y,z).$$

因此夹角的余弦为

$$\frac{p(x-y)+q(x+y)+rz}{\sqrt{(x-y)^2+(x+y)^2+z^2}\sqrt{p^2+q^2+r^2}}=\frac{2}{\sqrt{6}}.\quad\square$$

(3) 证明对任意常数 ρ,φ, 球面 $x^2+y^2+z^2=\rho^2$ 与锥面 $x^2+y^2=\tan^2\varphi\cdot z^2$ 是正交的.

证: 球面和锥面的法向量分别为

$$\mathbf{n}_1=(x,y,z),\quad \mathbf{n}_2=(x,y,-z\tan^2\varphi).$$

因此在两个曲面交点处得到

$$\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2=x^2+y^2-z^2\tan^2\varphi=0.\quad\square$$

§12.6 无条件极值问题

这一节主要讨论**无条件极值**问题. 首先来看一个实际问题. 2020 年“特殊的”毕业季快到了, 快递公司派快递小哥在四牌楼校区的沙塘园前取件托运, 也有在四牌楼校区的同学想通过同城快递把要甩卖的物品寄到九龙湖校区, 打算搞一场“毕业季的夜市摆摊”. 由于受到快递车辆和学校规定的限制, 快递小哥只接受长和腰围之和不超过 108 厘米的长方形箱子. 为了尽可能多的装东西而又不难为快递小哥, 那么同学们需要购买什么样的箱子呢?

假设 x,y,z 分别表示长方形箱子的长、宽和高, 则得到限制条件 $x+2(y+z)=108$ (这是因为 108 是容许的最大可能). 根据题意我们只需要求出什么时候箱子的体积

$$V:=xyz=(108-2y-2z)yz.$$

最大.

根据一元函数求极值的经验, 我们马上会想到用偏导数来求解. 但关键的是如何用? 为何用? 下面就来具体展开讨论.

§12.6.1 多元函数的极值

和一元函数的极值一样, 多元函数的极值定义如下.

定义12.6.1. 假设 n 元函数 $f(\boldsymbol{x})$ 定义在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上且 $\boldsymbol{x}_0 \in D$. 若存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0, \rho)$ 使得

$$f(\boldsymbol{x}_0) \geq f(\boldsymbol{x}) \quad (\text{或 } f(\boldsymbol{x}_0) \leq f(\boldsymbol{x})), \quad \text{任意 } \boldsymbol{x} \in \mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0, \rho) \cap D,$$

则称 $\boldsymbol{x}_0$ 为 f 的**极大值点 (local maximal point)**(或**极小值点 (local minimal point)**), $f(\boldsymbol{x}_0)$ 为**极大值 (local maximum)**(或**极小值 (local minimum)**). 极大值点和极小值点统称为**极值点(local extrema)** 而极大值和极小值统称为**极值 (local extreme values)**. 如果存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的去心邻域 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0, \rho) \setminus \{\boldsymbol{x}_0\}$ 使得

$$f(\boldsymbol{x}_0) > f(\boldsymbol{x}) \quad (\text{或 } f(\boldsymbol{x}_0) < f(\boldsymbol{x})), \quad \text{任意 } \boldsymbol{x} \in (\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0, \rho) \setminus \{\boldsymbol{x}_0\}) \cap D,$$

则称 $\boldsymbol{x}_0$ 为 f 的**严格极大值点 (strictly local maximal point)**(或**严格极小值点 (strictly local minimal point)**), $f(\boldsymbol{x}_0)$ 为**严格极大值 (strictly local maximum)**(或**严格极小值 (strictly local minimum)**). 严格极大值点和严格极小值点统称为**严格极值点 (strictly local extrema)** 而严格极大值和严格极小值统称为**严格极值 (strictly local extreme values)**.

定理12.6.2. (多元函数 Fermat 引理) *假设 n 元函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可偏导且 $\boldsymbol{x}_0$ 为其极值点, 则 $f'(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0}$.*

证: 定义一元函数 $\varphi_i(t) := f(x_0^1, \cdots, x_0^{i-1}, t, x_0^{i+1}, \cdots, x^n)$, 从而 φ_i 在 x_0^i 可导. 则根据一元函数 Fermat 引理得到 $0 = \varphi_i'(x_0^i) = f_{x^i}(\boldsymbol{x}_0)$. □

$\boldsymbol{x}_0$ 称为 n 元函数 f 的**驻点 (critical point)**, 如果 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可偏导且满足 $f'(\boldsymbol{x}_0) = 0$.

- 和一元函数一样, 可偏导的极值点必是驻点, 但是反之不一定成立. 比如考虑函数 $f(x, y) = xy$ 和 $(x_0, y_0) = (0, 0)$.
- 其上偏导数不存在的点也可能是驻点. 比如考虑函数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和 $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

定理12.6.3. (n 元函数极值的充分条件) 假设 n 元函数 $f(\boldsymbol{x})$ 定义在区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上且 $\boldsymbol{x}_0\in D$ 为其驻点, 并假设 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 附近具有二阶连续偏导数. 引入函数 f 的Hessian 矩阵

$$\mathbf{Hess}_{\boldsymbol{x}}(f):=[f_{x^ix^j}(\boldsymbol{x})]_{1\le i,j\le n}=\begin{bmatrix} f_{x^1x^1} & \cdots & f_{x^1x^n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ f_{x^nx^1} & \cdots & f_{x^nx^n}\end{bmatrix}_{\boldsymbol{x}}. \tag{12.6.1}$$

则有如下结论:

- $\mathbf{Hess}_{\boldsymbol{x}_0}(f)$ 正定, $f(\boldsymbol{x}_0)$ 为严格极小值.
- $\mathbf{Hess}_{\boldsymbol{x}_0}(f)$ 负定, $f(\boldsymbol{x}_0)$ 为严格极大值.
- $\mathbf{Hess}_{\boldsymbol{x}_0}(f)$ 不定, $f(\boldsymbol{x}_0)$ 不是极值.

证: 根据**推论 12.3.6** 得到

$$f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)+o(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2)=\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=2}\frac{f^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x}_0)}{\boldsymbol{\alpha}!}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^{\boldsymbol{\alpha}}$$

$$=\sum_{1\le i\le n}\frac{f_{x^ix^i}(\boldsymbol{x}_0)}{2!}(x^i-x^i_0)^2+\sum_{1\le i<j\le n}\frac{f_{x^ix^j}(\boldsymbol{x}_0)}{1!1!}(x^i-x^i_0)(x^j-x^j_0)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{1\le i\le n}f_{x^ix^i}(\boldsymbol{x}_0)(x^i-x^i_0)^2+\frac{1}{2}\sum_{1\le i\ne j\le n}f_{x^ix^j}(\boldsymbol{x}_0)(x^i-x^i_0)(x^j-x^j_0)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le n}f_{x^ix^j}(\boldsymbol{x}_0)(x^i-x^i_0)(x^j-x^j_0)=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot\mathbf{Hess}_{\boldsymbol{x}_0}(f)\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^{\mathsf{T}}.$$

即

$$f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot\mathbf{Hess}_{\boldsymbol{x}_0}(f)\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^{\mathsf{T}}+o(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2). \tag{12.6.2}$$

假设函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在邻域 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,\rho)$ 内具有二阶连续偏导数.

(a) $\mathbf{Hess}_{\boldsymbol{x}_0}(f)$ 正定: 此时正定二次型

$$\boldsymbol{y}\cdot\mathbf{Hess}_{\boldsymbol{x}_0}(f)\cdot\boldsymbol{y}^{\mathsf{T}},\quad \boldsymbol{y}:=\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}$$

在 $\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0},1)=\mathbb{S}^{n-1}$ 上取到最小值 $m>0$. 从未得到

$$f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)\ge m|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2+o(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2),\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,\rho).$$

当 ρ 足够小得到 $f(\boldsymbol{x})>f(\boldsymbol{x}_0)$ 对任何 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,\rho)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$ 都成立. 即 $f(\boldsymbol{x}_0)$ 是严格极小值.

(b) $\mathbf{Hess}_{x_0}(f)$ 负定: 类似可证 $f(\boldsymbol{x}_0)$ 是严格极大值.

(c) $\mathbf{Hess}_{x_0}(f)$ 不定: 反证法, 假设 $f(\boldsymbol{x}_0)$ 为极小值. 给定非零向量 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, 考虑一元函数

$$\varphi(t) := f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a}), \quad |t| < \rho/|\boldsymbol{a}|.$$

极小值推出 $\varphi'(0) = 0 \le \varphi''(0)$. 另一方面

$$\varphi'(t) = \sum_{1\le i\le n} f_{x^i}(\boldsymbol{x}_0)a^i, \quad \varphi''(0) = \sum_{1\le i,j\le n} f_{x^i x^j}(\boldsymbol{x}_0)a^i a^j = \boldsymbol{a}\cdot \mathbf{Hess}_{x_0}(f)\cdot \boldsymbol{a}^{\mathsf{T}}.$$

从而得到 $\mathbf{Hess}_{x_0}(f) \ge 0$. 矛盾表明 $f(\boldsymbol{x}_0)$ 不是极值. □

下面我们回忆下线性代数中关于正定矩阵的基本性质. 定义Hessian 矩阵的顺序主子式(**leading principal subdeterminant**)为

$$\Delta_k(\boldsymbol{x}) := \det([f_{x^i x^j}(\boldsymbol{x})]_{1\le i,j\le k}) = \left|\begin{bmatrix} f_{x^1x^1} & \cdots & f_{x^1x^k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x^kx^1} & \cdots & f_{x^kx^k}\end{bmatrix}_{\boldsymbol{x}}\right|, \quad 1 \le k \le n. \tag{12.6.3}$$

则得到

$$\mathbf{Hess}_{\boldsymbol{x}}(f) \text{ 正定} \iff \Delta_k(\boldsymbol{x}) > 0, \quad 1 \le k \le n, \tag{12.6.4}$$

$$\mathbf{Hess}_{\boldsymbol{x}}(f) \text{ 负定} \iff (-1)^k\Delta_k(\boldsymbol{x}) > 0, \quad 1 \le k \le n. \tag{12.6.5}$$

特别地, 对 $n = 2$ 情形我们给出证明. 考虑 2×2 非零对称矩阵

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \quad \Delta := \det M = ac - b^2.$$

则

$$\begin{aligned} M \text{ 正定} &\iff \Delta > 0 \text{ 且 } a > 0, \\ M \text{ 负定} &\iff \Delta > 0 \text{ 且 } a < 0, \\ M \text{ 不定} &\iff \Delta < 0. \end{aligned} \tag{12.6.6}$$

相应的二次型记为

$$Q(x,y) := ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

并注意到

$$Q(x,y) = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{\Delta}{a}y^2, \quad \text{如果 } a \ne 0.$$

我们只给出最后两个充要条件的证明. 假设 M 负定, 则对任意 $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 都有 $Q(x,y) < 0$. 若取 $(x,y) = (1,0)$ 就得到 $a = Q(1,0) < 0$ 从而得到

$$0 > Q\left(-\frac{b}{a}, 1\right) = \frac{\Delta}{a} \quad \Longrightarrow \quad \Delta > 0.$$

反之假设 $\Delta > 0$ 和 $a < 0$, 则对任意 $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 都有

$$Q(x,y) \le 0.$$

若 $Q(x,y) = 0$ 则得到 $y = 0 = x + (b/a)y$, 这就推出 $x = y = 0$ 矛盾.

接下来证明 M 不定的充要条件. 如果 M 不定, 则必有 $\Delta \le 0$. 当 $a \ne 0$ 时, 我们有

$$Q(x,y) = a\left(x + \frac{b}{y}\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad Q \text{ 是可定的.}$$

当 $a = 0$ 时, 结合 $0 = \Delta = ac - b^2$, 我们得到 $b = 0$; 此时 $Q(x,y) = cy^2$, 故也是可定的 (注意到 M 是非零矩阵). 反之假设 $\Delta < 0$, 下证 M 必是不定的. 当 $a \ne 0$ 时,

$$Q\left(-\frac{b}{a}, 1\right) \cdot Q(1,0) = \frac{\Delta}{a} \cdot a = \Delta < 0,$$

此时 M 是不定的. 当 $a = 0$ 时, 此时必有 $b \ne 0$ 从而得到

$$Q\left(-\frac{1}{2} - \frac{c}{2b}, 1\right) Q\left(\frac{1}{2} - \frac{c}{2b}, 1\right) = -b^2 < 0.$$

故此时 M 也是不定的.

根据**定理 12.6.3** 并结合 (12.6.6) 得到如下有用的推论.

推论12.6.4. (二元函数极值的充分条件) 假设二元函数 $f(x,y)$ 定义在区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上且 $(x_0,y_0) \in D$ 为其驻点, 并假设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 附近具有二阶连续偏导数. 引入记号

$$\Delta(x_0,y_0) := (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(x_0,y_0). \tag{12.6.7}$$

则有如下结论:

- $\Delta(x_0,y_0) > 0$ 且 $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$, $f(x_0,y_0)$ 为严格极小值.
- $\Delta(x_0,y_0) > 0$ 且 $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$, $f(x_0,y_0)$ 为严格极大值.
- $\Delta(x_0,y_0) < 0$, $f(\mathbf{x}_0)$ 不是极值.
- $\Delta(x_0,y_0) = 0$, 无法判断.

在**推论 12.6.4** 中, 当 $\Delta(x_0, y_0) = 0$ 时无法判断的例子为,

$$f(x,y) = x^2y^2, \quad g(x,y) = -x^2y^2, \quad h(x,y) = x^2y^3, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

这三个函数在 $(x_0, y_0) = (0,0)$ 的行列式 $\Delta(x_0, y_0)$ 都等于 0, 但是 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处取到极小值, $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处取到极大值, 而 $h(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处没有极值.

例12.6.5. (1) 我们首先来回答本节一开始的问题, 回忆

$$V = (108 - 2y - 2z)yz.$$

则直接计算得到

$$V_y = 2z(54 - 2y - z), \quad V_z = 2y(54 - y - 2z)$$

和

$$\mathbf{Hess}_{(y,z)}(V) = -4 \begin{bmatrix} z & y + z - 27 \\ y + z - 27 & y \end{bmatrix}$$

则合理的驻点为 $(y_0, z_0) = (18, 18)$ 从而得到

$$\mathbf{Hess}_{(18,18)}(V) = -4 \begin{bmatrix} 18 & 9 \\ 9 & 18 \end{bmatrix}$$

是负定的. 因此毕业季的学生们可以考虑长、宽、高分别为 36、18、18 的长方形箱子. □

(2) 求函数 $f(x,y) = 3axy - x^3 - y^3$ 的极值 $(a > 0)$.

解: 直接计算得到

$$f_x = 3ay - 3x^2, \quad f_y = 3ax - 3y^2,$$

和

$$\mathbf{Hess}_{(x,y)}(f) = -3 \begin{bmatrix} 2x & -a \\ -a & 2y \end{bmatrix}$$

则得到驻点 $(0,0)$ 和 (a,a), 而函数在前者处无极值但在后者处有极大值 a^3. □

(3) 求函数 $f(x,y) = -\frac{4}{5}x^5 + x^4 - 2x^2y + \frac{1}{2}y^2$ 的极值.

解: 直接计算得到

$$f_x = -4x^4 + 4x^3 - 4xy, \quad f_y = -2x^2 + y$$

和

$$\mathbf{Hess}_{(x,y)}(f) = \begin{bmatrix} -16x^3 + 12x^2 - 4y & -4x \\ -4x & 1 \end{bmatrix}$$

两个驻点为 $(0,0)$ 和 $(-1,2)$, 从而得到

$$\mathbf{Hess}_{(0,0)}(f)=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\qquad\mathbf{Hess}_{(-1,2)}(f)=\begin{bmatrix}20&4\\4&1\end{bmatrix}$$

故极小值 $-9/5$ 在 $(-1,2)$ 处取到. 因为 $\Delta(0,0)=0$, 故**推论 12.6.4** 不适用. 但是注意到

$$f(x,x^2)=-\frac{4}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4=x^4\left(-\frac{4}{5}x-\frac{1}{2}\right),\quad f(0,y)=\frac{1}{2}y^2.$$

当 (x,y) 沿着抛物线 $y=x^2$ 位于第一象限部分趋于 $(0,0)$ 时, $f(x,y)<0$ 但 $f(0,y)>0$. 因此 $(0,0)$ 不是极值点. □

(4) 求函数 $z=x+y+4\sin x\sin y$ 的极值.

解: 直接计算得到

$$z_x=1+4\cos x\sin y,\quad z_y=1+4\sin x\cos y$$

从而得到驻点方程

$$1-2\sin(x-y)+2\sin(x+y)=0,\quad 1+2\sin(x-y)+2\sin(x+y)=0.$$

所以推出

$$\sin(x-y)=0,\quad \sin(x+y)=-\frac{1}{2}.$$

上述方程的一般解是

$$x+y=(-1)^{m+1}\frac{\pi}{6}+m\pi,\quad x-y=n\pi,\quad m,n\in\mathbb{Z}.$$

最后得到无数个驻点

$$(x_{m,n},y_{m,n})=\left((-1)^{m+1}\frac{\pi}{12}+(m+n)\frac{\pi}{2},(-1)^{m+1}\frac{\pi}{12}+(m-n)\frac{\pi}{2}\right),\ m,n\in\mathbb{Z}.$$

Hessian 矩阵为

$$\mathbf{Hess}_{(x,y)}(z)=\begin{bmatrix}-4\sin x\sin y&4\cos x\cos y\\4\cos x\cos y&-4\sin x\sin y\end{bmatrix}$$

从而得到

$$\det\mathbf{Hess}_{(x,y)}(z)=16\sin^2x\sin^2y-16\cos^2x\cos^2y=-16\cos(x-y)\cos(x+y)$$

和

$$\det\mathbf{Hess}_{(x_{m,n},y_{m,n})}(z)=(-1)^{m+n+1}8\sqrt{3},\quad m,n\in\mathbb{Z}.$$

因此当 $m+n$ 为奇数时, 函数在 $(x_{m,n},y_{m,n})$ 有极值且

$$z''_{xx}(x_{m,n},y_{m,n})=\sqrt{3}(-1)^m+2(-1)^2.$$

如果 $m = 2k$ 且 $n = 2j - 1$, 得到极小值 $2k\pi - 2 - \sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$; 如果 $m = 2k - 1$ 且 $n = 2j$, 得到极大值 $(2k-1)\pi + 2 + \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$. □

(5) 求函数 $z = \tan x + \tan y - \tan(x + y)$ 的极值.

解: 直接计算得到

$$z_x = \sec^2 x - \sec^2(x + y), \quad z_y = \sec^2 y - \sec^2(x + y)$$

从而推出驻点为

$$(x, y) = (0, 0), \quad \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right), \quad \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right), \quad (\pi, \pi), \quad (0, \pi), \quad (\pi, 0).$$

Hessian 矩阵为

$$\begin{bmatrix} 2[\sin x \sec^2 x - \sin(x + y)\sec^3(x + y) & -2\sin(x + y)\sec^3(x + y) \\ -2\sin(x + y)\sec^3(x + y) & 2[\sin y \sec^3 y - \sin(x + y)\sec^3(x + y) \end{bmatrix}$$

计算可得在 $(\pi/3, \pi/3)$ 处取到极小值 $3\sqrt{3}$, 而在 $(2\pi/3, 2\pi/3)$ 处取到极大值 $-3\sqrt{3}$. □

§12.6.2 多元函数的最值

假设 n 元函数 $f(\boldsymbol{x})$ 是定义在有界闭区域 D 上的连续函数. 此时最大值和最小值存在, 且可根据如下求得最值:

(1) 求出驻点和不可偏导点和相应的函数值,

(2) 求出边界上的函数值;

(3) 最后比较 (1) 和 (2).

例12.6.6. (1) 求函数 $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ 的最值.

证: 直接计算得到

$$f_x = 2xe^{-(x^2+y^2)}(1 - x^2 - y^2), \quad f_u = 2ye^{-(x^2+y^2)}(1 - x^2 - y^2)$$

从而推出驻点为 $(x, y) \in \mathbb{S}^1$. 因为

$$\lim_{x\to\infty,\, y\to\infty} f(x, y) = \lim_{r\to+\infty} fracr^2e^{r^2} = 0,$$

所以存在最大值且等于极大值. 由于

$$\mathbf{Hess}_{(0,0)}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

我们得到 $f_{\max} = e^{-1}$. 而最小值是 $f_{\min} = f(0, 0) = 0$. □

(2) 证明二元不等式 $xy \leq x\ln x - x + e^y$, 其中 $x \geq 1$ 和 $y \geq 0$.

证: 若令 $f(x,y)=x\ln x-x+e^y-xy$ 得到

$$f_x=\ln x-y,\quad f_y=e^y-x$$

和驻点 $(x,\ln x)$, $x\geq 1$. 从而得到Hessian 矩阵

$$\mathbf{Hess}_{(x,\ln x)}(f)=\begin{bmatrix}\frac{1}{x} & 1\\ -1 & x\end{bmatrix}$$

和极小值 $f(x,\ln x)=0$. 现在考虑边界上的最值.

$$f(1,y)=e^y-y-1\geq 0\quad (y\geq 0),\quad f(x,0)=x\ln x-x+1\geq 0\quad (x\geq 0).$$

所以函数 $f(x,y)$ 在曲线 $y=\ln x$, $x\geq 1$, 上达到最小值 0. □

§12.6.3 最小二乘法

假设 $\mathbb{R}^{2n}$ 内有 m 个向量对 $(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1),\cdots,(\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{y}_m)$ 其大致满足线性函数关系 $\boldsymbol{y}=a\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$. **最小二乘法 (method of least squares)** 可以告诉我们如何求出 a 和 $\boldsymbol{b}$, 即要求函数

$$Q:=\sum_{1\leq i\leq m}|\boldsymbol{y}_i-a\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{b}|^2=\sum_{1\leq i\leq m,\,1\leq j\leq n}|y_i^j-ax_i^j-b^j|^2 \tag{12.6.8}$$

最小. 计算

$$\begin{aligned}Q_a &= \sum_{1\leq i\leq m}2(\boldsymbol{y}_i-a\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{b})\cdot(-\boldsymbol{x}_i)\\ &= 2a\sum_{1\leq i\leq m}|\boldsymbol{x}_i|^2-2\sum_{1\leq i\leq m}\langle\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{y}_i\rangle+2\sum_{1\leq i\leq m}\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}_i\rangle,\end{aligned}$$

和

$$Q_{b^j}=\sum_{1\leq i\leq m}-2(y_i^j-ax_i^j-b^j)=2a\sum_{1\leq i\leq m}x_i^j-2\sum_{1\leq i\leq m}y_i^j+2mb^j.$$

根据多元函数极值条件得到

$$Q_a=0=Q_{b^j}.$$

从而得到线性方程组, 称为**法方程组 (system of normal equations)**

$$\left[\begin{array}{c|c}\sum_{1\leq i\leq m}|\boldsymbol{x}_i|^2 & \boldsymbol{\alpha}\\ \hline \boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}} & mI_n\end{array}\right]\begin{bmatrix}a\\ \boldsymbol{b}^{\mathsf{T}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{1\leq i\leq m}\langle\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{y}_i\rangle\\ \boldsymbol{\beta}^{\mathsf{T}}\end{bmatrix} \tag{12.6.9}$$

这里 I_n 是 $n\times n$ 单位矩阵且

$$\boldsymbol{\alpha}:=\left(\sum_{1\leq i\leq m}x_i^1,\cdots,\sum_{1\leq i\leq m}x_i^n\right),\quad \boldsymbol{\beta}:=\left(\sum_{1\leq i\leq m}y_i^1,\cdots,\sum_{1\leq i\leq m}y_i^n\right)$$

根据 (12.6.9) 可以求出 a 和 $\boldsymbol{b}$.

特别地, 对平面 (即 $n=1$ 时) 上的 m 个向量对 $(x_1,y_1),\cdots,(x_m,y_m)$ 我们从 (12.6.9) 得到

$$\begin{aligned} a\sum_{1\le i\le m}x_i^2+b\sum_{2\le i\le m}x_i &= \sum_{1\le i\le m}x_iy_i, \\ a\sum_{1\le i\le m}x_i+bm &= \sum_{1\le i\le m}y_i \end{aligned}$$

从而推出

$$a = \frac{m\sum_{1\le i\le m}x_iy_i-(\sum_{1\le i\le m}x_i)(\sum_{1\le i\le m}y_i)}{m\sum_{1\le i\le m}x_i^2-(\sum_{1\le i\le m}x_i)^2}, \tag{12.6.10}$$

$$b = \frac{(\sum_{1\le i\le m}x_i^2)(\sum_{1\le i\le m}y_i)-(\sum_{1\le i\le m}x_i)(\sum_{1\le i\le m}x_iy_i)}{m\sum_{1\le i\le m}x_i^2-(\sum_{1\le i\le m}x_i)^2}. \tag{12.6.11}$$

第一位清楚地、正式地发表最小二乘法的是Legendre, 他在 1805 年发表了论文《Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes》. 在 1809 年Gauss 发表了计算天体运动轨道方法地专著,《Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientum 》, 他宣称自 1795 年以来就对最小二乘法拥有优先权.

例12.6.7. 对如下数据

x	49.2	50.0	49.3	49.0	49.0	49.5	49.8	49.9	50.2	50.2
y	16.7	17.0	16.8	16.6	16.7	16.8	16.9	17.0	17.0	17.1

利用最小二乘法求出所模拟地线性函数 $y=ax+b$.

解: 根据公式 (12.6.10) 和 (12.6.11) 得到

$$a=0.04,\quad b=0.399.\quad \square$$

§12.7 条件极值问题

本节给出常用的**Lagrange 乘子法**来求解条件极值问题. 这个方法是把有 n 个变量和 m 个约束条件的最优化问题转换为一个有 $n+m$ 个变量的多元函数的极值问题.

§12.7.1 条件极值和 Lagrange 函数

在很多实际应用中我们往往要在 m 个**约束条件 (constraints)**

$$g_k(x^1,\cdots,x^n)=0,\quad 1\le k\le m<n,$$

下求函数 $y=f(x^1,\cdots,x^n)$ 的极值, 此时的极值称为**条件极值 (constrained extreme values)**, 并把取到条件极值的点 (必在 m 个曲面 $g_k=0$ 的交集上) 称为**条件极值点 (constrained extremal points)**.

比如在微观经济学中用来描述生产函数的**Cobb**[3] **- Douglas**[4] **函数**

$$f:(0,+\infty)\times(0,+\infty)\longrightarrow(0,+\infty),\quad (x,y)\longmapsto Ax^a y^{1-a}, \tag{12.7.1}$$

其中 x 表示**投入的劳力 (labor input)**, y 表示**投入的资本 (capital input)**, a 表示**劳力的生产力弹性 (output elasticities of labor)**, $1-a$ 表示**资本的生产力弹性 (output elasticities of capital)**, 而 A 表示**全要素生产率 (total factor productivity)**. 我们希望求出 $f(x,y)$ 在下面约束条件下的极值:

$$px+qy=M,\quad p,q,M \text{ 都是常数}. \tag{12.7.2}$$

Cobb - Douglas 函数是Douglas 在 1927 年发展起来的, 但是函数 (12.7.1) 是其同事Cobb 建议的, 合作的论文《A theory of production》[5]于 1928 年发表在 American Economic Review. 然而函数 (12.7.1) 之前就已经被Knut Wicksell, Philip Wicksteed 和Léon Walras 使用过.

定理12.7.1. *假设 $D\subset\mathbb{R}^3$ 是区域, 且 (x_0,y_0,z_0) 是函数 $f(x,y,z):D\to\mathbb{R}$ 满足约束条件*

$$G(x,y,z)=0=H(x,y,z)$$

的条件极值点. 进一步假设 f,G,H 具有连续偏导数且Jacobi 矩阵

$$\mathbf{Jac}_{(x,y,z)}:=\begin{bmatrix} G_x & G_y & G_z\\ H_x & H_y & H_z\end{bmatrix}$$

在曲面 $\Gamma:=\{(x,y)\in D: G(x,y,z)=0=H(x,y,z)\}$ 内满秩. 则存在常数 λ_0,μ_0 满足

$$\mathbf{grad}_{(x_0,y_0,z_0)}(f)=\lambda_0\mathbf{grad}_{(x_0,y_0,z_0)}(G)+\mu_0\mathbf{grad}_{(x_0,y_0,z_0)}(H).$$

证: 不妨假设 $\partial(G,H)/\partial(y,z)(x_0,y_0,z_0)\neq 0$. 从而在 (x_0,y_0,z_0) 附近可唯一确定

$$y=y(x),\ z=z(x),\quad x\in(x_0-\rho,x_0+\rho),\quad y_0=y(x_0),\ z_0=z(x_0).$$

此时一元函数

$$\Phi(x):=f(x,y(x),z(x)),\quad x\in(x_0-\rho,x_0+\rho)$$

---

[3] Charles Cobb, 1875 年 - 1949 年, 美国数学家和经济学家, 因发展经济学中的 Cobb - Douglas 生产函数而闻名.

[4]Paul Douglas, 1892 年 3 月 26 日 - 1976 年 9 月 24 日, 美国政治家和经济学家. 最著名的工作是经济学中的 Cobb - Douglas 生产函数.

[5]参见: https://assets.aeaweb.org/asset-server/journals/aer/top20/18.1.139-165.pdf

在 x_0 处取得极值, 即 $\Phi'(x_0)=0$:

$$0=f_x(x_0,y_0,z_0)+f_y(x_0,y_0,z_0)y'(x_0)+f_z(x_0,y_0,z_0)z'(x_0).$$

换句话说, 梯度向量

$$\mathbf{grad}_{(x_0,y_0,z_0)}(f)=(f_x(x_0,y_0,z_0),f_y(x_0,y_0,z_0),f_z(x_0,y_0,z_0))$$

与曲面 Γ 在 (x_0,y_0,z_0) 的切向量 $(1,y'(x_0),z'(x_0))$ 正交, 即 $\mathbf{grad}_{(x_0,y_0,z_0)}(f)$ 落在 (x_0,y_0,z_0) 的法平面内. 从而根据**定理 12.6.2** 得到

$$\mathbf{grad}_{(x_0,y_0,z_0)}(f)=\lambda_0\mathbf{grad}_{(x_0,y_0,z_0)}(G)+\mu_0\mathbf{grad}_{(x_0,y_0,z_0)}(H).\quad\square$$

上述定理可推广到多元情形.

定理12.7.2. *假设 $D\subset\mathbb{R}^n$ 是区域, 且 $\boldsymbol{x}_0$ 是函数 $f(\boldsymbol{x}):D\to\mathbb{R}$ 满足约束条件*

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}\quad\Longleftrightarrow\quad g^i(\boldsymbol{x})=0,\ 1\le i\le m<n,$$

的条件极值点. 进一步假设 $f,g^1,\cdots,g^m$ 具有连续偏导数且Jacobi 矩阵

$$\mathbf{Jac}_{\boldsymbol{x}}:=\begin{bmatrix} g^1_{x^1} & \cdots & g^1_{x^n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ g^m_{x^1} & \cdots & g^m_{x^n}\end{bmatrix}$$

在超曲面 $\Gamma:=\{\boldsymbol{x}\in D:\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=0\}$ 内满秩. 则存在 m 个常数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 满足

$$\mathbf{grad}_{\boldsymbol{x}_0}(f)=\sum_{1\le i\le m}\lambda_i\mathbf{grad}_{\boldsymbol{x}_0}(g^i).$$

我们把 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 称为**Lagrange 乘子 (Lagrange multipliers)**. 接下来我们利用**Lagrange 函数 (Lagrange function)**

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}):=f(\boldsymbol{x})-\sum_{1\le i\le m}\lambda_k g^k(\boldsymbol{x})\tag{12.7.3}$$

来求出条件极值点. 作为 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})\in\mathbb{R}^{n+m}$ 的函数, 条件极值点满足方程

$$0=L_{x^i}=f_{x^i}-\sum_{1\le k\le m}\lambda_k g^k_{x^i},\tag{12.7.4}$$

$$0=L_{\lambda_k}=-g^k.\tag{12.7.5}$$

(12.7.3) 自动满足而 (12.7.2) 就是**定理 12.7.2** 的结论. 把满足 (12.7.4) - (12.7.5) 的点称为**条件驻点 (constrained critical points)**.

(1) 条件极值点必落在超曲面 $\Gamma:=\{\boldsymbol{x}\in D:\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=0\}$ 内. 所以条件极值点必是极值点, 但反之不一定成立.

(2) 如果超曲面 $\Gamma := \{\boldsymbol{x} \in D : \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = 0\}$ 是有界闭集, 则结合边界上的函数值可求出最值.

定理12.7.3. (条件极值的充分条件) 假设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是区域, 且 $\boldsymbol{x}_0$ 是函数 $f(\boldsymbol{x}) : D \to \mathbb{R}$ 满足约束条件

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \quad \Longleftrightarrow \quad g^i(\boldsymbol{x}) = 0,\ 1 \le i \le m < n,$$

的条件极值点. 进一步假设 $f, g^1, \cdots, g^m$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 附近具有二阶连续偏导数. 对Lagrange 函数 (12.7.3) 引入Hessian 矩阵

$$\mathbf{Hess}_{\boldsymbol{x}}(L) := [L_{x^i x^j}(\boldsymbol{x})]_{1 \le i,j \le n} = \begin{bmatrix} L_{x^1x^1} & \cdots & L_{x^1x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{x^nx^1} & \cdots & L_{x^nx^n} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{x}}.$$

则有如下结论:

- $\mathbf{Hess}_{\boldsymbol{x}_0}(f)$ 正定, $f(\boldsymbol{x}_0)$ 为严格条件极小值.
- $\mathbf{Hess}_{\boldsymbol{x}_0}(f)$ 负定, $f(\boldsymbol{x}_0)$ 为严格条件极大值.

证: 证明和**定理 12.6.3** 几乎一样. 因为 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{0}$ 且我们是在约束条件 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ 上求极值, 所以取 $\boldsymbol{x}$ 充分靠近 $\boldsymbol{x}_0$ 且也同样满足 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$. 因此得到

$$L(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}_0), \quad L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}).$$

根据**推论 12.3.6** 得到

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \cdot \mathbf{Hess}_{\boldsymbol{x}_0}(L) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^{\mathsf{T}} + o(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^2).$$

之后的论证和**定理 12.6.3** 一样. □

和**定理 12.6.3** 不一样的是, 当 $\mathbf{Hess}_{\boldsymbol{x}_0}(L)$ 不定时, f 仍有可能取到条件极值. 比如考察下面的求条件极值问题

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2, \quad \text{其中约束条件为 } g(x, y, z) := z = 0.$$

此时得到 Lagrange 函数

$$L(x, y, z, \lambda) := x^2 + y^2 - z^2 - \lambda z.$$

显然函数 f 在 $(0, 0)$ 处取到条件极小值 0, 但是相应的驻点和**Hessian** 矩阵分别为

$$(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0), \quad \mathbf{Hess}_{(0,0,0)}(L) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

注意到最后一个矩阵式不定的.

例12.7.4. (1) 求函数 $V = 8xyz$, $x, y, z > 0$, 在约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上的最值.

解: 作Lagrange 函数

$$L(x, y, z, \lambda) := 8xyz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

直接计算得到

$$L_x = 8yz - 2\lambda x, \quad L_y = 8xz - 2\lambda y, \quad L_z = 8xy - 2\lambda z, \quad L_\lambda = 1 - x^2 - y^2 - z^2.$$

得到条件极值点为 $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. 因为连续函数在有界集上必取到最值, 所以

$$V_{\max} = V(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{9}. \ \square$$

(2) 求原点到曲线

$$\gamma : x + y + z = 1, \quad x + 2y + 3z = 6$$

的距离.

解: 作Lagrange 函数

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) := x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x + y + z - 1) - \mu(x + 2y + 3z - 6).$$

得到条件极值点和相应的Hessian 矩阵为

$$(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0) = \left(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{22}{3}, 4\right)$$

和

$$\mathbf{Hess}_{(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0)}(L) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & & \\ 0 & 2 & 0\,0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

故距离为 $5/\sqrt{3}$. $\square$

(3) 求函数 $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ 在闭区域 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最值, 其中 $b^2 - ac < 0$ 且 $a, b, c > 0$.

解: 作Lagrange 函数

$$L(x, y, \lambda) := ax^2 + 2bxy + cy^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

直接计算并判断得到最小值为 0 而最大值为

$$\frac{a + c + \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2}}{2}. \ \square$$

(4) 设 $a^1, \cdots, a^n$ 为 n 个常数, 求函数 $f(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^2$ 在约束条件 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle = 1$ 下的最小值.

解: 作Lagrange 函数

$$L(\boldsymbol{x},\lambda) := |\boldsymbol{x}|^2 - \lambda\left(\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\rangle - 1\right).$$

计算得到

$$L_{x^i} = 2x^i - \lambda a^i, \quad L_\lambda = 1 - \langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\rangle.$$

从而得到极值点为 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|^2$ 和极小值为 $f(\boldsymbol{x}_0) = 1/|\boldsymbol{a}|^2$. □

(5) 证明椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad Ax+By+Cz=0$$

的短轴长度 r 满足方程

$$\frac{a^2}{r^2-a^2}A^2+\frac{b^2}{r^2-b^2}B^2+\frac{c^2}{r^2-c^2}C^2=0.$$

§12.8 * 最优传输问题

假设在海滩上有一大堆沙子和一个深洞. 我们想把这堆沙子完全填充到洞里. 显然沙子的重量和洞的容积是一样的. 这时我们就要问如何搬运这堆沙子到洞里, 使得花费的人工成本最少?

不失一般性不妨假设沙子的总重量为 1. 工人取沙子的过程可以看成一个概率空间 $(X,\mathscr{A},\mu)$, 其中 $(X,\mathscr{A})$ 是测度空间而 μ 是其上的概率测度. 同样道理, 工人倒沙子到洞里的过程也可以看成另一个概率空间 $(Y,\mathscr{B},\nu)$, 其中 $(Y,\mathscr{B})$ 是测度空间而 ν 是其上的概率测度. 对 X 和 Y 中的可测集 A 和 B, 我们用 $\mu(A)$ 和 $\nu(B)$ 分别表示取 A 处沙子的可能方式和把沙子倒在 B 处的可能方式. 工人搬运沙子需要的成本用定义在 $X\times Y$ 上的函数 $c(x,y)$ 来表示, 这样 $c(x,y)$ 就表示把 $x\in X$ 处的 1 单位沙子倒在 $y\in Y$ 处的成本. 我们很自然假设 c 是非负可测函数, $c: X\times Y\to[0,+\infty]$. 这样所要求的问题就变成如下:

基本问题: 如何用最小的成本来实现搬运沙子?

为了从数学上理解这个问题, 我们首先给出问题的数学表述.

§12.8.1 * 最优传输问题的数学表述

假设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 和 $(Y,\mathscr{B},\nu)$ 是两个概率空间. 它们的测度乘积空间为 $(X\times Y,\mathscr{A}\otimes\mathscr{B})$, 其中 $\mathscr{A}\times\mathscr{B}$ 是由形如 $A\times B$, $(A,B)\in(\mathscr{A},\mathscr{B})$, 所生成的 σ- 代数. 之后将会证明, $(X\times Y,\mathscr{A}\otimes\mathscr{B})$ 上存在唯一的概率测度 $\mu\otimes\nu$, 称为乘积概率测度, 满足

$$(\mu\otimes\nu)(A\times B)=\mu(A)\nu(B), \quad (A,B)\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}.$$

我们令 $\mathbf{P}(X\times Y)$ 表示 $(X\times Y,\mathscr{A}\otimes\mathscr{B})$ 上所有概率测度构成的集合. 因为 $\mu\otimes\nu\in\mathbf{P}(X\times Y)$, 所以 $\mathbf{P}(X\times Y)$ 是非空的.

称 $\pi \in \mathbf{P}(X \times Y)$ 是**可容许的 (admissible)** 如果

$$\pi(A \times Y) = \mu(A), \quad \pi(X \times B) = \nu(B), \quad (A, B) \in \mathscr{A} \times \mathscr{B}. \tag{12.8.1}$$

条件 (12.8.1) 等价于

$$\int_{X \times Y} [\varphi(x) + \psi(y)] d\pi(x, y) = \int_X \varphi(x) d\mu(x) + \int_Y \psi(y) d\nu(y), \tag{12.8.2}$$

对任意 $(\varphi, \psi) \in L^1(X, d\mu) \times L^1(Y, d\nu)$ 都成立. 定义

$$\Pi(\mu, \nu) := \{\pi \in \mathbf{P}(X \times Y) | \ (12.8.1) \text{ 成立}\}. \tag{12.8.3}$$

固定成本函数 $c : X \times Y \to [0, +\infty)$.

问题12.8.1. Kantorovich 最优传输问题 (Kantorovich's optimal transportation problem):

$$\textbf{minimize} \quad \Pi(\mu, \nu) \ni \pi \longmapsto \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y). \tag{12.8.4}$$

最小值问题 (12.8.4) 早在 1942 年和 1945 年被Kantorovich[6] 研究过了. 和问题 12.8.1 相关的是**Monge 最优传输问题 (Monge's optimal transportation problem)**.

假设 $\mathbf{T} : (X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{B})$ 是可测映射. 对任意概率测度 $\mu \in \mathbf{P}(X)$ 定义 $\mathbf{T}_{\#}\mu \in \mathbf{P}(Y)$ 如下

$$\mathbf{T}_{\#}\mu(B) := \mu(\mathbf{T}^{-1}(B)), \quad B \subset \mathscr{B}. \tag{12.8.5}$$

等价地说

$$\int_X f \circ \mathbf{T} d\mu = \int_Y f d\mathbf{T}_{\#}\mu \tag{12.8.6}$$

对任意 $f \in L^1(Y, d\mathbf{T}_{\#}\mu)$ 都成立. 定义

$$\Pi^*(\mu, \nu) := \{\mathbf{T} : (X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{B}) | \mathbf{T} \text{ 可测且 } \mathbf{T}_{\#}\mu = \nu\}. \tag{12.8.7}$$

问题12.8.2. Monge 最优传输问题 (Monge's optimal transportation problem):

$$\textbf{minimize} \quad \Pi^*(\mu, \nu) \ni \mathbf{T} \longmapsto \int_{X \times Y} c(x, \mathbf{T}(x)) d\mu(x). \tag{12.8.8}$$

上面两个问题的细节可参见Villani 的两本专著和Ambrosio - Gigli 合写的论文.

---

[6] Leonid Kantorovich, 1912 年 1 月 19 日 - 1986 年 4 月 7 日, 前苏联数学家和经济学家, 1975 年因资源最佳分配理论和Yjalling Koopmans 一起获得 Nobel 经济学奖.

§12.8.2 * 最优传输的充要条件

本小节的大部分内容取自下列论文:

Ambrosio, L.; Gigli, N.. *A user's guide to optimal transport*, 2013.

假设

$$X = Y = \mathbb{R}^n, \quad c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \frac{1}{2}|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^2, \tag{12.8.9}$$

并且假设 $\mu, \nu \in \mathbf{P}(\mathbb{R}^n)$ 都仅在有限多个点上取非零值. 此时可以证明 $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ 当且仅当对任何置换 $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ 都有

$$\sum_{1 \le i \le N} \frac{1}{2}|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{y}_i|^2 \le \sum_{1 \le i \le N} \frac{1}{2}|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{y}_{\sigma(i)}|^2, \tag{12.8.10}$$

其中 $\{(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)\}_{1 \le i \le N} \subset \mathrm{supp}(\gamma)$. 把不等式 (12.8.10) 展开得到

$$\sum_{1 \le i \le N} \langle \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i \rangle \ge \sum_{1 \le i \le N} \langle \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_{\sigma(i)} \rangle, \quad \sigma \in \mathfrak{S}_N. \tag{12.8.11}$$

这就是所谓的支撑集 $\mathrm{supp}(\pi)$ 是**循环单调的 (cyclically monotone)**.

一般地, 我们有如下些定义.

定义12.8.3. 假设 X, Y 是任意给定集合, 而 $c : X \times Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 是任意给定的映射.

(1) 称子集 $\Gamma \subset X \times Y$ 是**c- 循环单调的 (c-cyclically monotone)** 如果对任意 $\{(x_i, y_i)\}_{1 \le i \le N} \subset \Gamma$ 和任意置换 $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ 都有

$$\sum_{1 \le i \le N} c(x_i, y_i) \le \sum_{1 \le i \le N} c(x_i, y_{\sigma(i)}) \tag{12.8.12}$$

成立.

(2) 映射 $\psi : Y \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ 的**c_+- 变换 (c_+-transform)** $\psi^{c_+} : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 定义为

$$\psi^{c_+}(x) := \inf_{y \in Y} [c(x, y) - \psi(y)], \tag{12.8.13}$$

而它的**c_-- 变换 (c_--transform)** $\psi^{c_-} : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 定义为

$$\psi^{c_-}(x) := \sup_{y \in Y} [-c(x, y) - \psi(y)]. \tag{12.8.14}$$

同理对函数 $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ 定义它的 $c_\pm$- 变换 $\varphi^{c_\pm} : Y \to \mathbb{R} \cup \{\mp\infty\}$ 为

$$\varphi^{c_+}(y) := \inf_{x \in X} [c(x, y) - \varphi(x)], \quad \varphi^{c_-}(y) := \sup_{x \in X} [-c(x, y) - \varphi(x)].$$

(3) 称函数 $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 是**c- 凹的 (c-concave)** 如果存在函数 $\psi : Y \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 满足 $\varphi = \psi^{c+}$. 称函数 $\psi : Y \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 是 c- 凹的如果存在函数 $\varphi : Y \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 满足 $\psi = \varphi^{c+}$.

同样地, 称函数 $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 是**c- 凸的 (c-convex)** 如果存在函数 $\psi : Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 满足 $\varphi = \psi^{c-}$. 称函数 $\psi : Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 是 c- 凸的如果存在函数 $\varphi : Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 满足 $\psi = \varphi^{c-}$.

(4) c- 凹函数 $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 的**c- 上微分 (c-superdifferential)** 定义为

$$\partial^{c+}\varphi := \{(x,y) \in X \times Y : \varphi(x) + \varphi^{c+}(y) = c(x,y)\}. \tag{12.8.15}$$

c- 凸函数 $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 的**c- 下微分 (c-subdifferential)** 定义为

$$\partial^{c-}\varphi := \{(x,y) \in X \times Y : \varphi(x) + \varphi^{c-}(y) = -c(x,y)\}. \tag{12.8.16}$$

同样地, c- 凹函数 $\psi : Y \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 的**c- 上微分 (c-superdifferential)** 定义为

$$\partial^{c+}\psi := \{(x,y) \in X \times Y : \psi^{c+}(x) + \psi(y) = c(x,y)\}. \tag{12.8.17}$$

c- 凸函数 $\psi : Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 的**c- 下微分 (c-subdifferential)** 定义为

$$\partial^{c-}\psi := \{(x,y) \in X \times Y : \psi^{c-}(x) + \psi(y) = c(x,y)\}. \tag{12.8.18}$$

这是我们可以来陈述如下重要的定理.

定理12.8.4. (最优传输的基本定理) 假设 $(X, \mathscr{A}, d_X)$ 和 $(Y, \mathscr{B}, d_B)$ 是Polish 空间, 即完备可分度量空间, $c : X \times Y \to \mathbb{R}$ 是连续函数且有下界. 假设 $\mu \in \mathbf{P}(X)$ 和 $\nu \in \mathbf{P}(Y)$ 满足不等式

$$c(x,y) \le a(x) + b(y),$$

其中 $a \in L^1(X, d\mu)$ 和 $b \in L^1(Y, d\nu)$. 令 $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$, 则下面等价:

(1) π 是最优的, 即 π 是 (12.8.4) 的极值点,

(2) $\mathrm{supp}(\pi)$ 是 c- 循环单调的,

(3) 存在 c- 凹函数 $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 满足 $\max\{\varphi, 0\} \in L^1(X, d\mu)$ 和 $\mathrm{supp}(\pi) \subset \partial^{c+}\varphi$.

§12.9 参考文献

1. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis I*, Translated from the 1988 German original by Gary Brookfield, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. xiv+426 pp. ISBN: 3-7643-7153-6

2. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis II*, Translated from the 1999 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. xii+400 pp. ISBN: 978-3-7643-7472-3; 3-7643-7472-3

3. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis III*, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. xii+468 pp. ISBN: 978-3-7643-7479-2; 3-7643-7479-2

4. Ambrosio, Luigi; Gigli, Nicola. *A user's guide to optimal transport*, Modelling and optimisation of flows on networks, 1-155, Lecture Notes in Math., **2062**, Fond. CIME/CIME Found. Subser., Springer, Heidelberg, 2013.

5. Munkres, James R. *Topology*, Second edition, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000. xvi+537 pp. ISBN: 0-13-181629-2

6. Villani, Cédric. *Topics in optimal transportation*, Graduate Studies in Mathematics, **58**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. xvi+370 pp. ISBN: 0-8218-3312-X

7. Villani, Cédric. *Optimal transport. Old and new*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **338**, Springer-Berlag, Berlin, 2009. xxii+973 pp. ISBN: 978-3-540-71049-3

8. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis I*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+574 pp. ISBN: 3-540-40386-8

9. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis II*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xvi+681 pp. ISBN: 3-540-40633-6

10. 常庚哲, 史济怀 编: **数学分析教程** (上、下册), 高等教育出版社, 2003.

11. 陈天权 编著: **数学分析讲义** (第一、二、三册), 北京大学出版社, 2009.

12. 邓建平 编: **微积分 I 和 II**, 科学出版社, 2019.

13. Duhham, William 著 (李伯民, 汪军, 张怀勇 译): **微积分的历程 – 从牛顿到勒贝格**, 人民邮电出版社, 2013.

14. 吉米多维奇 著 (李荣涷, 李植 译): **数学分析习题集** (根据 2010 年俄文版翻译), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.

15. Kline, Morris 著 (张理京, 张炎热, 江泽涵等 译): **古今数学思想** (第一、二、三册), 上海科学技术出版社, 2014.

16. 李傅山, 王培合 编著: **数学分析习题课讲义** (1、2、3), 北京大学出版社, 2018.

17. 李逸 编著: **数学分析讲义**, 上海交通大学数学分析课讲义 (未出版), 2016.

18. 林源渠, 方企勤 编: **数学分析解题指南**, 北京大学出版社, 2003.

19. 梅加强 编著: **数学分析**, 高等教育出版社, 2015.

20. 裴礼文 编著: **数学分析中的典型问题与方法** (第二版), 高等教育出版社, 2015.

21. 汪林 著: **数学分析中的问题和反例**, 现代数学基础 **56**, 高等教育出版社, 2015.

22. Weir, D. Maurice; Hass, R. Joel; Giordano, R. Frank. *Thomas' calculus*, Eleventh Edition, (影印版, 上、下册), 高等教育出版社, 2016.

23. 徐森林, 薛春华 编著: **数学分析**, 清华出版社, 2005.

24. 杨小远, 孙玉泉, 薛玉梅, 杨卓琴 编著: **工科数学分析教程** (上、下册), 科学出版社, 2011.

25. 张福保, 薛金美, 潮小李 主编: **数学分析讲义**, 科学出版社, 2019.

26. 张筑生 编著: **数学分析新讲** (第一、二、三册), 北京大学出版社, 1990.

27. 周民强 编著: **数学分析习题演练** (第一、二、三册), 科学出版社, 2018.

28. 朱尧辰 编著: **数学分析例选通过范例学技巧**, 哈尔滨工业大学出版社, 2013.

第十三章 多变量积分理论

一个幽灵, 共产主义的幽灵, 在欧洲游荡. 现在是共产党人向全世界公开说明自己的观点、自己的目的、自己的意图并且拿党自己的宣言来反驳关于共产主义幽灵的神话的时候了. –《共产党宣言》, 马克思和恩格斯著.

§13.1 重积分

我们首先从一个简单例子来感受下重积分的定义. 假设曲顶柱体在 xoy 平面上的投影是矩形 $D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$, 而其“曲顶”为一曲面 $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$. 为了几何直观性, 进一步假设 f 为 D 上的非负连续函数. 仿照定积分的做法,

$$\text{分割} \longrightarrow \text{取点} \longrightarrow \text{求和} \longrightarrow \text{取极限}$$

我们来计算以 D 为底 $z = f(x, y)$ 为顶的曲顶柱体的体积.

- **分割:** 将 D 分成若干小矩形, 即在 $[a, b]$ 中任取分割

  $$T_1 : \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

  同时在 $[c, d]$ 中任取分割

  $$T_2 : \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b,$$

  由此得到 $n \times m$ 个小矩形

  $$D_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m.$$

  称 $\boldsymbol{T} := (T_1, T_2)$ 为 D 的一个**分割**.

- **取点:** 任取 $(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \in D_{ij}$. 令 $\boldsymbol{\xi} := (\xi_{ij})_{i,j}$ 和 $\boldsymbol{\eta} := (\eta_{ij})_{i,j}$.

- **求和:** 将每个以 D_{ij} 为底 $f(\xi_{ij}, \eta_{ij})$ 为高的长方体的体积求和得到

  $$V(f, \boldsymbol{T}, (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})) := \sum_{1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m} f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j.$$

- **取极限:** 让分割的模 $||\boldsymbol{T}|| := \max_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m} d_{ij}$ 变得越来越细, 这里

  $$d_{ij} := \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2},$$

  得到极限

  $$V := \lim_{||T|| \to 0} V(f, \boldsymbol{T}, (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})).$$

  这个极限若存在则就是所求的体积, 并称为区域 D 上的二重积分且记作

  $$V = \iint_D f(x, y)\, dx dy.$$

§13.1.1 可求面积区域

上述二重积分定义是基于被积区域是“好的区域”矩形 $[a,b]\times[c,d]$. 一个很自然的问题是如何定义一般区域上的二重积分, 当然一个最基本的想法是用有限个或可数个矩形区域来描述一般区域.

平面上一般集合的“面积”概念, 被十九世纪许多数学家所研究过, 比如Du Bois-Reymond 在《Die allgemeine funktionentheorie》(1882), Axel Harnack 在《Die elemente der differential- und integralrechung》(1881), Otto Stolz (1884), Cantor (1884), Peano 在《Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale》(1887) 等.

Jordan 为了弄清楚平面区域上二重积分的理论, 在 1892 年引入了 Jordan 内面积和 Jordan 外面积的概念.

假设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是一有界子集, 并取一闭矩形 $\square=[a,b]\times[c,d]$ 包含 D. 仿照之前的做法考虑分割 $\boldsymbol{T}$:

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,\quad c=y_0<y_1<\cdots<y_m=b,$$

得到 $n\times m$ 个小矩形

$$\square_{ij}:=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j],\quad 1\le i\le n,\ 1\le j\le m.$$

这些小矩形可分成 3 类:

(1) $\square_{ij}^{\circ}$: 完全包含在 D 内;

(2) $\square_{ij}^{\vee}$: 完全落在 D 外;

(3) $\square_{ij}^{\cap}$: 包含 ∂D.

定义

$$s(\boldsymbol{T},D):=\sum_{\square_{ij}^{\circ}}|\square_{ij}^{\circ}|,\quad S(\boldsymbol{T},D):=s(\boldsymbol{T},D)+\sum_{\square_{ij}^{\cap}}|\square_{ij}^{\cap}|.\tag{13.1.1}$$

根据定义得到如下不等式

$$0<s(\boldsymbol{T},D)\le S(\boldsymbol{T},D)\le|\square|=(d-c)(b-a).\tag{13.1.2}$$

定义

$$\mathfrak{T}:=\{\square\text{ 的所有分割 }\boldsymbol{T}\}.$$

在 $\mathfrak{T}$ 上引入如下的偏序关系:

$$\boldsymbol{T}\prec\boldsymbol{T}'\quad\Longleftrightarrow\quad\boldsymbol{T}'\text{ 是 }\boldsymbol{T}\text{ 的加细},$$

这里称 $\boldsymbol{T}'$ 是 $\boldsymbol{T}$ 的**加细 (refinement)** 如果 $\boldsymbol{T}'$ 是在 $\boldsymbol{T}$ 的基础上分别在 $[a,b]$ 和 $[c,d]$ 中增加有限个分点. 和定积分的 Darboux 上下和一样 (参见 (5.3.15) 和 (5.3.16)), 得到

$$\boldsymbol{T} \prec \boldsymbol{T}' \quad \Longrightarrow \quad s(\boldsymbol{T},D) \le s(\boldsymbol{T}',D) \quad 和 \quad S(\boldsymbol{T},D) \le S(\boldsymbol{T},D).$$

进一步有 (参见 (5.3.14))

$$s(\boldsymbol{T},D) \le S(\boldsymbol{T}',D), \quad 任意\ \boldsymbol{T},\boldsymbol{T}' \in \mathfrak{T}.$$

事实上, 根据 $\boldsymbol{T},\boldsymbol{T}' \le \boldsymbol{T} \cup \boldsymbol{T}'$ 得到

$$s(\boldsymbol{T},D) \le s(\boldsymbol{T}\cup\boldsymbol{T}',D) \le S(\boldsymbol{T}\cup\boldsymbol{T}',D) \le S(\boldsymbol{T}',D).$$

根据 Zorn 引理得到

$$\mathfrak{m}_*(D) := \sup_{\boldsymbol{T}\in\mathfrak{T}} s(\boldsymbol{T},D), \quad \mathfrak{m}^*(D) := \inf_{\boldsymbol{T}\in\mathfrak{T}} S(\boldsymbol{T},D) \tag{13.1.3}$$

都存在. 注意到

$$D\ 是矩形 \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{m}_*(D) = \mathfrak{m}^*(D) = |D|.$$

从 (13.1.3) 推出

$$0 \le \mathfrak{m}_*(D) \le \mathfrak{m}^*(D) \tag{13.1.4}$$

且 $\mathfrak{m}_*(D)$ 和 $\mathfrak{m}^*(D)$ 均与 $\square$ 的选取无关 (作为练习, 请自证).

定义13.1.1. *假设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是有界子集. 如果 $\mathfrak{m}_*(D) = \mathfrak{m}^*(D)$, 则称该公共值为 D 的***Jordan 面积 (Jordan area)** *并记作 $\mathfrak{m}(D)$ 或 $|D|$. 此时称 D 是***可求面积的(rectifiable)***. 若 $\mathfrak{m}(D) = 0$, 则称 D 是***零面积 (area-zero)***.*

参见**定理 5.3.18**, 类似的可证

$$D\ 是可求面积的 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, U\ 的分割\ \boldsymbol{T}\ 满足 \\ S(\boldsymbol{T},D) - s(\boldsymbol{T},D) = S(\boldsymbol{T},\partial D) < \epsilon \end{array}\right). \tag{13.1.5}$$

定理13.1.2. *有界点集 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是可求面积的 $\Longleftrightarrow$ ∂D 是零面积的.*

并不是每个有界点集的边界是零面积的, 比如考察有界点集

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le D(x)\}$$

这里 $D(x)$ 是 Dirichlet 函数, 此时 $\partial S = [0,1] \times [0,1]$ 面积为 1.

另一方面, 如果有界点集 D 可写成两个内部互不相交的可求面积的有界点集 D_1 和 D_2 的并, 则

$$|D| = |D_1| + |D_2|. \tag{13.1.6}$$

性质13.1.3. 假设函数 $y=f(x)$ 在 $x\in[a,b]$ 上是非负可积. 则它与直线 $x=a$, $x=b$ 和 $y=0$ 所围成的有界区域 D 是可求面积的且

$$|D|=\int_a^b f(x)\,dx.$$

证: 因为闭区间上的可积函数必有界, 因此区域 D 是有界的. 假设 T 是闭区间 $[a,b]$ 的任意分割

$$T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

并记 $M=\max_{x\in[a,b]}f(x)$. 则得到矩形 $\square:=[a,b]\times[0,M]$ 包含区域 D. 设 m_i 和 M_i 分别是函数 $f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的上确界和下确界, 从而得到 $[0,M]$ 的一个分割

$$T':\ 0=y_0<y_1<\cdots<y_m=M,$$

这里 $y_1,\cdots,y_{m-1}$ 是将所有 m_i,M_i 按从大到小排列所得到的数列. 对分割 $\boldsymbol{T}=(T,T')$ 得到

$$\begin{aligned} s(\boldsymbol{T},D) &= \sum_{1\le i\le n} m_i(x_i-x_{i-1})=\underline{S}(f,T),\\ S(\boldsymbol{T},D) &= \sum_{1\le i\le n} M_i(x_i-x_{i-1})=\overline{S}(f,T). \end{aligned}$$

另一方面

$$s(\boldsymbol{T},D)\le \mathfrak{m}_*(D)\le\mathfrak{m}^*(D)\le S(\boldsymbol{T},D).$$

参见**定理 5.3.18**, 得到

$$f\in R([a,b])\quad\Longrightarrow\quad \mathfrak{m}_*(D)=\mathfrak{m}^*(D)=|D|=\int_a^b f(x)\,dx$$

即 D 是可求面积的. □

我们可以直接对**性质 13.1.3** 中的有界区域 D 证明 ∂D 是零面积的, 从而**定理 13.1.2** 对 D 成立. 首先注意到, $L:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y=f(x),\ a\le x\le b\}$ 和

$$\partial D=L\cup([a,b]\times\{0\})\cup(\{a\}\times[0,M])\cup(\{b\}\times[0,M])=:L\cup L_0\cup L_a\cup L_b.$$

对 $L_0=[a,b]\times\{0\}$, 矩形全体 $\{[x_{i-1},x_i]\times[0,\epsilon]\}_{1\le i\le n}$ 构成其一个分割 $\boldsymbol{T}_0$ 且包含 L_0, 同时

$$S(\boldsymbol{T}_0,L_0)=\sum_{1\le i\le n}\epsilon\Delta x_i=\epsilon(b-a)\quad\Longrightarrow\quad\mathfrak{m}^*(L_0)=0.$$

类似得可证明

$$\mathfrak{m}^*(L_a)=\mathfrak{m}^*(L_b)=0.$$

对 L, 矩形全体 $\{[x_{i-1},x_i]\times[m_i,M_i]\}_{1\le i\le n}$ 构成其一个分割 $\boldsymbol{T}_L$ 且包含 $\boldsymbol{L}$, 同时

$$S(\boldsymbol{T}_L,L)=\sum_{1\le i\le n}(M_i-m_i)\Delta x_i \quad\Longrightarrow\quad \mathfrak{m}^*(L)=0.$$

因此 $|\partial D|=0$.

§13.1.2 二重积分

如果二元函数 $f(x,y)$ 的定义域 D 是可求面积的, 则函数 $f(x,y)$ 关于 D 的积分, 即二重积分, 和定积分的定义是几乎一样的.

定义13.1.4. 假设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是可求面积的有界点集, $z=f(x,y)$ 在 D 上是有界的. 任取分割 $\boldsymbol{T}$ 把 D 分成 n 个可求面积的子区域 $D_1,\cdots,D_n$, 从而它们的内部是互不相交的, 并记

$$||\boldsymbol{T}||:=\max_{1\le i\le n}\left(\mathrm{diam}(D_i)\right). \tag{13.1.7}$$

在每个子区域 D_i 上任取点 (ξ_i,η_i), 并求和

$$\sigma(f,\boldsymbol{T},(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})):=\sum_{1\le i\le n}f(\xi_i,\eta_i)|D_i|. \tag{13.1.8}$$

若 $||\boldsymbol{T}||\to0$ 时 $\sigma(f,\boldsymbol{T},(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}))$ 的极限存在且和分割 $\boldsymbol{T}$ 及点 (ξ_i,η_i) 的选取无关, 则称函数 $f(x,y)$ 在 D 上**可积 (integrable)**, 并称该极限为函数 $f(x,y)$ 在 D 上的**二重积分(double integral)**, 同时记作

$$\iint_D f\,d\sigma\equiv\iint_D f(x,y)\,dxdy:=\lim_{||\boldsymbol{T}||\to0}\sum_{1\le i\le n}\sigma(f,\boldsymbol{T},(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})). \tag{13.1.9}$$

我们称 $f(x,y)$ 是**可积函数 (integrable function)**, D 是**积分区域 (domain of integration)**, x,y 是**积分变量 (variables of integrations)**, 且 $d\sigma=dxdy$ 是**面积元 (area element)**. 把 D 上所有的可积函数做成一个集合 $R(D)$.

和定积分一样引入**Darboux 上和及Darboux 下和**,

$$\underline{S}(f,\boldsymbol{T}):=\sum_{1\le i\le n}m_i|D_i|,\quad \overline{S}(f,\boldsymbol{T}):=\sum_{1\le i\le n}M_i|D_i|, \tag{13.1.10}$$

这里 M_i 和 m_i 分别是 $f(x,y)$ 的上确界和下确界.

性质13.1.5. 函数 $f(x,y)$ 在可求面积的有界子集 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上可积的 $\Longleftrightarrow$

$$\lim_{||\boldsymbol{T}||\to0}\left[\overline{S}(f,\boldsymbol{T})-\underline{S}(f,\boldsymbol{T})\right]=0, \tag{13.1.11}$$

即

$$\lim_{||\boldsymbol{T}||\to 0}\sum_{1\le i\le n}\omega(f,D_i)|D_i| = 0, \tag{13.1.12}$$

这里 $\omega(f,D_i) = M_i - m_i$ 是 $f(x,y)$ 在 D_i 上的**振幅**. 此时

$$\lim_{||\boldsymbol{T}||\to 0}\underline{S}(f,\boldsymbol{T}) = \lim_{||\boldsymbol{T}||\to 0}\overline{S}(f,\boldsymbol{T}) = \iint_D f(x,y)dxdy. \tag{13.1.13}$$

证: 参见**定义 5.3.11** (9). □

定积分性质告诉我们 $f\in R([a,b])$ 则 f 必有界. 而对定义在有界点集 D 上的二元函数 $f(x,y)$, 如果 D 就是矩形, 则相同的结论也成立; 但对一般的有界点集就不一定成立了.

定理13.1.6. 假设 D 是可求面积的有界闭区域. 则

$$f\in C(D) \quad\Longrightarrow\quad f\in R(D). \tag{13.1.14}$$

这里 $C(D)$ 是表示 D 上连续函数构成的集合.

更一般的结论是, 如果定义在 D 上的有界函数 $f(x,y)$ 它的不连续点仅在有限个零面积的曲线上, 则 $f(x,y)$ 在 D 上是可积的.

证: 根据定义区域 D 是有界闭集, 故必是 $\mathbb{R}^2$ 中的紧集. 从而推出连续函数 $f(x,y)$ 在 D 上是有界的且一致连续的. $\forall\,\epsilon>0\,\exists\,\delta>0$ 满足

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D \text{ 且 } |(x_1,y_1)-(x_2,y_2)|<\delta \quad\Longrightarrow\quad |f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\epsilon.$$

任取 D 的分割 $\boldsymbol{T}$: $D_1,\cdots,D_n$. 当 $||\boldsymbol{T}||<\delta$ 时, $\omega(f,D_i)<\epsilon$ 从而导致

$$\sum_{1\le i\le n}\omega(f,D_i)|D_i| < \epsilon\sum_{1\le i\le n}|D_i| = \epsilon|D|.$$

因此 $f\in R(D)$. □

例13.1.7. (1) 用直线网 $x=i/n$, $y=j/n$, $1\le i,j\le n-1$ 分割正方形 $D=[0,1]\times[0,1]$ 并由此计算二重积分

$$\iint_D xy\,dxdy.$$

解: 根据题意得到分割 $\boldsymbol{T}_0$. 先取 $(\xi_i^0,\eta_j^0)=(i/n,j/n)$ 得到

$$\sigma(f,\boldsymbol{T}_0,(\boldsymbol{\xi}^0,\boldsymbol{\eta}^0)) = \sum_{1\le i\le n,1\le j\le n}\frac{ij}{n^4} = \frac{(n-1)^2}{4n^2}\to\frac{1}{4}.$$

再取任意点 $(\xi_i,\eta_j)\in[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ 得到

$$\left|\sigma(f,\boldsymbol{T},(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}))-\sigma(f,\boldsymbol{t}_0,(\boldsymbol{\xi}^0,\boldsymbol{\eta}^0))\right| \;\le\; \sum_{1\le i,j\le n}\left|\xi_i\eta_j-\frac{ij}{n^2}\right|\frac{1}{n^2}$$

$$= \sum_{1\leq i,j\leq n}\frac{1}{n^2}\left|\left[\xi_i\left(\eta_j-\frac{j}{n}\right)+\left(\xi_i-\frac{i}{n}\right)\frac{j}{n}\right]\right|$$

$$\leq \sum_{1\leq i,j\leq n}\frac{1}{n^2}\left(\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{j}{n}\right) = \frac{n-1}{n^2} \leq \frac{1}{n}.$$

最后任取 D 的分割 $\boldsymbol{T}$ 使得当其模很细时满足 $\boldsymbol{T}_0 \leq \boldsymbol{T}$. 从而

$$s(\boldsymbol{T}_0,D)\leq s(\boldsymbol{T},D)\leq S(\boldsymbol{T},D)\leq S(\boldsymbol{T}_0,D).$$

因此

$$\iint_D xy\,dxdy = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)^2}{4n^2} = \frac{1}{4}. \quad \square$$

(2) 函数

$$f(x,y) := \begin{cases} 1, & (x,y)\in[0,1]\times[0,1]\cap(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}), \\ 0, & (x,y)\in[0,1]\times[0,1]\setminus(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}). \end{cases}$$

在 $[0,1]\times[0,1]$ 上是不可积的.

§13.1.3 n 重积分

为了定义三重积分和 n 重积分, 我们首先把可求面积点集和零面积点集推广到 n 维情形. 回顾 $\mathbb{R}^n$ 中的 n 维闭矩形为

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] := \prod_{1\leq i\leq n}[a^i,b^i] = [a^1,b^1]\times\cdots\times[a^n,b^n].$$

定义 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ 的 n 维体积为

$$|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]| := \prod_{1\leq i\leq n}\left|[a^i,b^i]\right| = \prod_{1\leq i\leq n}(b^i-a^i).$$

对任给的有界点集 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 可类似地定义 $\mathfrak{m}_*(\Omega)$ 和 $\mathfrak{m}^*(\Omega)$. 我们称 Ω 是**可测的(measurable)**如果 $\mathfrak{m}_*(\Omega)=\mathfrak{m}^*(\Omega)$. 此时定义 Ω 的**测度(measure)**为

$$|\Omega| \equiv \mathfrak{m}(\Omega) := \mathfrak{m}^*(\Omega) = \mathfrak{m}_*(\Omega).$$

当 $n=3$ 时, 称 $|\Omega|=\mathfrak{m}(\Omega)$ 为 Ω 的**体积 (volume)**. 如果 $|\Omega|=0$ 则称 Ω 是**零测度的(zero measurable)**. 同样可以证明

- $\mathbb{R}^n$ 中的光滑曲面是零测度.
- 假设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ $(n\geq 3)$ 是有界区域且其边界是由有限个光滑闭曲面构成, 则 Ω 是可测的当且仅当 $\partial\Omega$ 是零测度的.

定义13.1.8. 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是可测的闭区域且 $f(\boldsymbol{x})$ 是其上的有界函数. 任取分割 $\boldsymbol{T}$ 把 Ω 分成 m 个可测的子区域 $\Omega_1, \cdots, \Omega_m$, 从而它们的内部互不相交), 并记

$$||\boldsymbol{T}|| := \max_{1 \le i \le m} (\mathrm{diam}(\Omega_i)).$$

在每个子区域 Ω_i 上任取点 $\boldsymbol{\xi}_i$, 并求和

$$V(f, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{\xi}) := \sum_{1 \le i \le m} f(\boldsymbol{\xi}_i)|\Omega_i|.$$

若 $||\boldsymbol{T}|| \to 0$ 时 $\sigma(f, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{\xi})$ 的极限存在且和分割 $\boldsymbol{T}$ 及点 $\boldsymbol{\xi}_i$ 的选取无关, 则称函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上**可积 (integrable)**, 并称该极限为函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上的n **重积分(n-multiple integral)**,

$$\int_\Omega f\,dV = \int_\Omega f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int \cdots \int_\Omega f(x^1, \cdots, x^n)\,dx^1 \cdots dx^n. \tag{13.1.15}$$

我们称 $f(\boldsymbol{x})$ 是**可积函数 (integrable function)**, Ω 是**积分区域 (domain of integration)**, $\boldsymbol{x}$ 是**积分变量 (variables of integration)**, 且 $dV = d\boldsymbol{x}$ 是**体积元 (volume element)**. 把 D 上所有的可积函数做成一个集合[1] $R(\Omega)$.

经常用到的是三重积分

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\,dxdydz.$$

§13.1.4 重积分的基本性质

定积分的很多性质可平行地推广到多重积分上来.

性质13.1.9. 假设 Ω 是可测的闭区域.

(1) $f \in C(\Omega) \Longrightarrow f \in R(\Omega)$.

(2) **(被积函数可加性)** $f, g \in R(\Omega) \Longrightarrow$ 对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 有 $\alpha f + \beta g \in R(\Omega)$ 且

$$\int_\Omega (\alpha f + \beta g)\,dV = \alpha \int_\Omega f\,dV + \beta \int_\Omega g\,dV.$$

(3) **(被积区域可加性)** 假设 Ω 可写成两个内部互不相交的子区域 Ω_1 和 Ω_2 的并, 则 $f \in R(\Omega) \Longleftrightarrow f \in R(\Omega_1) \cap R(\Omega_2)$. 此时

$$\int_\Omega f\,dV = \int_{\Omega_1} f\,dV + \int_{\Omega_2} f\,dV.$$

(4) 特别的有

$$|\Omega| = \int_\Omega dV.$$

[1]按照我们关于可积函数的定义, $f \in R(\Omega)$ 已经自动地蕴含了 f 是有界函数.

(5) **(保序性)** $f,g\in R(\Omega)$ 且 $f\le g\Longrightarrow$ 我们有

$$\int_\Omega f\,dV\le\int_\Omega g\,dV.$$

进一步得到, 若 $f,g\in C(\Omega)$ 且满足 $f\le g$ 但 f 和 g 不恒相等, 则

$$\int_\Omega f\,dV<\int_\Omega g\,dV.$$

作为一个直接推论得到, $f\in R(\Omega)\Longrightarrow$

$$\left(\inf_\Omega f\right)|\Omega|\le\int_\Omega f\,dV\le\left(\sup_\Omega f\right)|\Omega|.$$

(6) **(绝对可积性)** $f\in R(\Omega)\Longrightarrow|f|\in R(\Omega)$ 且

$$\left|\int_\Omega f\,dV\right|\le\int_\Omega|f|\,dV.$$

(7) **(乘积可积性)** $f,g\in R(\Omega)\Longrightarrow fg\in R(\Omega)$.

(8) **(积分中值定理)** $f,g\in R(\Omega)$ 且 g 在 Ω 上不变号 $\Longrightarrow\exists\,\mu\in[\inf_\Omega f,\sup_\Omega f]$ 满足

$$\int_\Omega fg\,dV=\mu\int_\Omega g\,dV.$$

如果进一步 $f\in C(\Omega)$, 则可取 $\mu=f(\xi)$, $\xi\in\Omega$.

(9) **(绝对连续性)** $f\in R(\Omega)\Longrightarrow$ 对任意可测集 $\Lambda\subset\Omega$ 只要 $|\Lambda|\to0$ 就有

$$\int_\Lambda f\,dV\longmapsto0.$$

证: 我们只给出 (9) 的证明. 根据可积的定义我们有 $|f(\boldsymbol{x})|\le M$, 其中 M 是某个正数. 从而得到

$$\left|\int_A f\,dV\right|\le M|A|\to0.\quad\square$$

例13.1.10. (1) 证明不等式

$$1.96<\iint_{|x|+|y|\le10}\frac{dxdy}{100+\cos^2x+\cos^2y}\le2.$$

解: 因为 $100\le100+\cos^2x+\cos^2y\le102$, 所以得到

$$\frac{100}{51}=\frac{200}{102}\le\iint_{|x|+|y|\le10}\frac{dxdy}{100+\cos^2x+\cos^2y}\le\frac{200}{100}=2.\quad\square$$

(2) 证明定义在 $[0,1]\times[0,1]$ 上的二元函数

$$f(x,y):=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 2y, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

是不可积的.

证: 当 x 为无理数且 $y\ne\frac12$ 时, 函数 $f(x,y)$ 在 $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$ 处是不连续的, 因此函数 $f(x,y)$ 的不连续点集的测度是 1, 故不可积.

§13.2 重积分的 Fubini 定理

对 n 重积分可以用**累次积分(iterated integral)** 来计算, 即**Fubini 定理**[2]. 我们首先来讨论矩形区域上 n 重积分的计算.

§13.2.1 矩形区域上的 Fubini 定理

假设 $z=f(x,y)$ 是闭矩形 $D=[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2$ 上的非负连续函数 (从而 f 在 D 上有界). 此时以 D 为底而以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积

$$V=\iint_D f(x,y)dxdy.$$

任取 $x\in[a,b]$, 用过 $(x,0,0)$ 且和 yz 平面平行的平面去截曲顶柱体得到曲边梯形. 它的面积是

$$A(x)=\int_c^d f(x,y)dy.$$

从而得到

$$V=\int_a^b A(x)dx=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx=:\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy.$$

称为先对 y 再对 x 的**累次积分**.

上述公式对一般的可积函数也成立.

定理13.2.1. (Fubini 定理) *(1) 假设二元函数 $f(x,y)$ 在闭矩形 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上可积, 且对任意固定的 $x\in[a,b]$, 一元函数 $f(x,\cdot)$ 在 $[c,d]$ 上可积. 若记*

$$F(x):=\int_c^d f(x,y)dy,\quad x\in[a,b],$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且有如下公式

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b F(x)dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy. \tag{13.2.1}$$

(2) 假设二元函数 $f(x,y)$ 在闭矩形 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上可积, 且对任意固定的 $y\in[c,d]$, 一元函数 $f(\cdot,y)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 若记

$$G(y):=\int_a^b f(x,y)dx,\quad y\in[c,d],$$

[2]Guido Fubini, 1879 年 1 月 19 日 - 1943 年 6 月 6 日, 今意大利威尼斯人, 意大利数学家. 因 Fubini 定理和 Fubini-Study 度量而出名. 他于 1896 年进入 Scuola Normale Superiore di Pisa 跟随Ulisse Dini 和Luigi Bianchi 学习微分几何. 1939 年, 因Benito Mussolini 的反犹政策, 身为犹太人的Fubini 应邀到 Princeton University 任教; 4 年后在纽约逝世. 浙江大学数学系教授白正国在 1942 年解决了著名的 Fibini 问题: 除了一族渐近曲线属于线形丛的曲面以外, 是否还有非直纹面的曲面, 它的一族渐近曲线是互相射影等价的.

则 $G(y)$ 在 $[c,d]$ 上可积且有如下公式

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d G(y)dy = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx. \tag{13.2.2}$$

证: (2) 的证明类似, 下只证 (1). 考虑 $[a,b]$ 上的任意分割 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. 证明 (13.2.1) 等价于证明

$$\lim_{||T||\to 0}\sum_{1\le i\le n} F(\xi_i)\Delta x_i = \iint_D f(x,y)dxdy.$$

这里 $\xi_i \in \Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, 且 $||T|| = \max_{1\le i\le n}\Delta x_i$. 考虑 $[c,d]$ 上的任意分割 $T': c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$, 并令 $\Delta y_j := y_j - y_{j-1}$. 这样 T 和 T' 构成了区域 $[a,b]\times[c,d]$ 上的一个分割 $\boldsymbol{T} = (T, T')$:

$$D_{ij} := [x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j], \quad m_{ij} := \inf_{D_{ij}} f, \quad M_{ij} := \sup_{D_{ij}} f.$$

则得到

$$\sum_{1\le j\le m} m_{ij}\Delta y_j \le \sum_{1\le j\le m}\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)dy = F(\xi_j) \le \sum_{1\le j\le m} M_{ij}\Delta y_j, \quad 1\le i\le n.$$

两边同乘以 Δx_i 并对 i 求和得到

$$\sum_{1\le i\le n, 1\le j\le m} m_{ij}\Delta x_i\Delta y_j \le \sum_{1\le i\le n} F(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{1\le i\le n, 1\le j\le m} M_{ij}\Delta x_i\Delta y_j.$$

根据记号 (13.1.10) 上述可以写成

$$\underline{S}(f,\boldsymbol{T}) \le \sum_{1\le i\le n} F(\xi_i)\Delta x_i \le \overline{S}(f,\boldsymbol{T}).$$

利用**性质 13.1.5** 得到

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{||T||\to 0}\sum_{1\le i\le n} F(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b F(x)dx. \quad \square$$

定理 13.2.1 的直接推论是, 如果 $f\in R([a,b])$ 和 $g\in R([c,d])$, 则

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x)g(y)dxdy = \int_a^b f(x)dx\cdot\int_c^d g(y)dy.$$

Fubini 定理可推广到 n 重积分上去.

定理13.2.2. 假设 n 元函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 n 维闭矩形 $\Omega = [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] = \prod_{1\le i\le n}[a^i, b^i]$ 上可积. 令 $\Omega_{(i)} := \prod_{1\le j\ne i\le n}[a^j, b^j]$. 若积分

$$F(x^i) := \int_{\Omega_{(i)}} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}_{(i)}, \quad d\boldsymbol{x}_{(i)} := dx^1\cdots\widehat{dx^i}\cdots dx^n = \prod_{1\le j\ne i\le n} dx^j.$$

在 $[a^i, b^i]$ 上可积, 则有

$$\int_\Omega f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_{a^i}^{b^i} F(x^i)\,dx^i = \int_{a^i}^{b^i} dx^i \int_{\Omega_{(i)}} f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}_{(i)}. \tag{13.2.3}$$

证: 证明和**定理 13.2.1** 类似. 考虑 $[a^i, b^i]$ 上的任意分割 $T_i: a^i = x_0^{(i)} < x_1^{(i)} < \cdots < x_m^{(i)} = b^i$. 证明 (13.2.3) 等价于证明

$$\lim_{||T_i||\to 0} \sum_{1\le j\le m} F(\xi_j^{(i)})\Delta x_j^{(i)} = \int_\Omega f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}.$$

这里 $\xi_j^{(i)} \in \Delta_j^{(i)} = [x_{j-1}^{(i)}, x_j^{(i)}]$, $\Delta x_j^{(i)} = x_j^{(i)} - x_{j-1}^{(i)}$, 且 $||T_i|| = \max_{1\le j\le m}\Delta x_j^{(i)}$. 考虑 $\Omega_{(i)}$ 上的任意分割 $\boldsymbol{T}^i = (D_k^{(i)})$ 从而得到区域 Ω 上的一个分割 $\boldsymbol{T} = (T_i, \boldsymbol{T}^i)$:

$$D_{jk}^{(i)} := \Delta_j^{(i)} \times D_k^{(i)}, \quad m_{jk}^{(i)} := \inf_{D_{jk}^{(i)}} f, \quad M_{jk}^{(i)} := \sup_{D_{jk}^{(i)}} f.$$

则得到

$$\begin{aligned}\sum_k m_{jk}^{(i)}|D_k^{(i)}| \le \sum_k \int_{D_k^{(i)}} f(x^1, \cdots, x^{i-1}, \xi_j^{(i)}, x^{i+1}, \cdots, x^n)\,d\boldsymbol{x}_{(i)} \\ = F(\xi_j^{(i)}) \le \sum_k M_{jk}^{(i)}|D_k^{(i)}|, \quad 1\le j\le m.\end{aligned}$$

两边同乘以 $\Delta x_j^{(i)}$ 并对 j 求和得到

$$\sum_{j,k} m_{jk}^{(i)}\Delta x_j^{(i)}|D_k^{(i)}| \le \sum_{1\le j\le m} F(\xi_j^{(i)})\Delta x_j^{(i)} \le \sum_{1\le j\le m} M_{jk}^{(i)}\Delta x_j^{(i)}|D_k^{(i)}|.$$

根据记号 (13.1.10) 上述可以写成

$$\underline{S}(f, \boldsymbol{T}) \le \sum_{1\le j\le m} F(\xi_j^{(i)})\Delta x_j^{(i)} \le \overline{S}(f, \boldsymbol{T}).$$

利用**性质 13.1.5** 得到

$$\int_\Omega f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \lim_{||T||\to 0}\sum_{1\le j\le m} F(\xi_j^{(i)})\Delta x_j^{(i)} = \int_{a^i}^{b^i} F(x^i)\,d\boldsymbol{x}_{(i)}. \quad \square$$

利用递推得到

推论13.2.3. 假设 n 元函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 n 维闭矩形 $\Omega = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \prod_{1\le j\le n}[a^j, b^j]$ 上连续, 则

$$\begin{aligned}\int_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]} f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} &= \int_{a^1}^{b^1} dx^1 \cdots \int_{a^{n-1}}^{b^{n-1}} dx^{n-1} \int_{a^n}^{b^n} f(x^1, \cdots, x^n)\,dx^n \\ &= \left(\prod_{1\le j\le n}\int_{a^j}^{b^j} dx^j\right) f(\boldsymbol{x}) \equiv \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} d\boldsymbol{x}\, f(\boldsymbol{x}).\end{aligned} \tag{13.2.4}$$

§13.2.2 x- 型区域和 y- 型区域上的 Fubini 定理

对一般区域上的重积分我们可利用"区域降维"来计算.

I. 二重积分化为累次积分. 假设二元函数 $f(x,y)$ 在**x- 型区域 (domain of x-type)** 或**I- 型区域 (domain of type I)**

$$D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x) \le y \le \psi(x),\ a \le x \le b\right\} \tag{13.2.5}$$

上连续, 其中 $\varphi, \psi \in C([a,b])$. 令

$$c := \min_{[a,b]} \varphi, \quad d := \max_{[a,b]} \psi, \quad \square := [a,b] \times [c,d] \supset D.$$

将连续函数 $f(x,y)$ 延拓到 $\square$ 上来:

$$\widetilde{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \in \square \setminus D, \end{cases}$$

则 $\widetilde{f}$ 在 $\square$ 上可积且利用**定理 13.2.1** 得到

$$\int_D f(x,y)\,dxdy = \int_\square \widetilde{f}(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_c^d \widetilde{f}(x,y)\,dy.$$

对任意固定 $x \in [a,b]$ 得到

$$\begin{aligned} \int_c^d \widetilde{f}(x,y)\,dy &= \int_c^{\varphi(x)} \widetilde{f}(x,y)\,dy + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \widetilde{f}(x,y)\,dy + \int_{\psi(x)}^d \widetilde{f}(x,y)\,dy \\ &= \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \widetilde{f}(x,y)\,dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy. \end{aligned}$$

最后得到公式

$$\int_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy. \tag{13.2.6}$$

同理若二元函数 $f(x,y)$ 在**y- 型区域 (domain of y-type)** 或**II- 型区域 (domain of type II)**

$$D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(y) \le x \le \psi(y),\ c \le y \le d\right\} \tag{13.2.7}$$

上连续, 其中 $\varphi, \psi \in C([c,d])$, 则得到

$$\int_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx. \tag{13.2.8}$$

II. 三重积分化为累次积分. 考虑区域

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y),\ (x,y) \in D\right\}$$

其中 D 是区域 Ω 在 xoy 平面上的投影. 同样得到公式 (即: **先** dz **后** $dxdy$)

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_D dxdy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz. \tag{13.2.9}$$

类似的可得到公式:

$$\text{先 } dy \text{ 后 } dxdz \quad \text{或} \quad \text{先 } dx \text{ 后 } dydz.$$

上面公式是把体积元 $dxdydz$ 拆成先 1 个微元再 2 个微元, 即 $3=1+2$. 类似地, 可以拆成 $3=2+1$, 即先 2 个微元再 1 个微元:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int_e^f dz \iint_{\Omega_z} f(x,y,z)dxdy, \tag{13.2.10}$$

其中 $[e,f]$ 是 z 的取值范围, 且对每个 z_0 区域 Ω_{z_0} 是 Ω 和平面 $z=z_0$ 的交集. 同理我们可以考虑

$$\Omega = [a,b]\times\Omega_x = [c,d]\times\Omega_y = [e,f]\times\Omega_z.$$

例13.2.4. (1) 计算二重积分

$$I := \iint_D y dxdy,$$

其中 D 是由直线 $x=-2, y=0, y=2$ 和曲线 $x+\sqrt{2y-y^2}=0$ 所围成的区域.

解: 计算可得

$$I = \int_0^2 ydy \int_{-2}^{-\sqrt{2y-y^2}} dx = \int_0^2 y\left(2-\sqrt{2y-y^2}\right)dy$$
$$= \int_0^2 y\left(2-\sqrt{1-(1-y)^2}\right)dy = \int_0^{-1}(1-t)(2-\sqrt{1-t^2})(-dt)$$
$$= \int_{-1}^0 (1-t)(2-\sqrt{1-t^2})dt = 3-\int_{-1}^0 \sqrt{1-0t^2}dt + \int_{-1}^0 t\sqrt{1-t^2}dt$$
$$= 3-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_{-1}^0 \sqrt{1-t^2}d(1-t^2) = 3-\frac{\pi}{4}-t^{1/2}\Big|_{-1}^0 = 4-\frac{\pi}{2}. \quad \square$$

(2) 计算二重积分

$$I := \iint_D e^{\max(x^2,y^2)}dxdy,$$

其中 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le x,y\le 1\}=[0,1]\times[0,1]$.

解: 利用对称性计算得到

$$I = 2\int_{0\le x\le y\le 1} e^{y^2}dxdy = 2\int_0^1 e^{y^2}dy\int_0^y dx = \int_0^1 ye^{y^2}dy = \frac{e-1}{2}. \quad \square$$

(3) 计算二重积分

$$I=\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin y}{y}dy.$$

解: 利用交换积分顺序得到

$$I=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{y}\frac{\sin y}{y}dx=\int_0^1(1-y)\sin y\,dy=\int_0^1(y-1)\,d\cos y$$

$$=-\int_0^1\cos y\,dy=1-\sin 1.\quad\square$$

(4) 计算三重积分

$$I:=\iiint_\Omega\frac{dxdydx}{(1+x+y+z)^3},\quad \Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x,y,z\geq 0,\ x+y+z\leq 1\right\}.$$

解: 把 Ω 投影到 xoy 平面得到

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x,y\geq 0,\ x+y\leq 1\right\}.$$

从而得到

$$I=\iint_D dxdy\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^3}=-\frac{1}{2}\iint_D\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{(1+x+y)^2}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{(1+x+y)^2}\right]dy$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 dx\left[\left(\frac{y}{4}+\frac{1}{1+x+y}\right)\Big|_0^{1-x}\right]=-\frac{1}{2}\int_0^1 dx\left(\frac{1-x}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{1+x}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{1+x}-\frac{3}{4}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}+\ln 2-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right).\quad\square$$

(5) 计算三重积分

$$I:=\iiint_\Omega z^2dxdydz,$$

其中 Ω 是锥面 $z^2=h^2(x^2+y^2)/R^2$ 和平面 $z=h$ 所围成的区域.

解: 计算得到

$$I=\int_0^h\iint_{\Omega_z}z^2dxdy=\int_0^h z^2dz\iint_{\Omega_z}dxdy=\int_0^h\frac{\pi R^2}{h^2}z^4dz=\frac{\pi R^2h^3}{5},$$

其中 $\Omega_z=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2\leq R^2z^2/h^2\}$. $\square$

(6) 计算二重积分

$$I:=\iint_{[0,1]\times[0,1]}\frac{xdxdy}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

解: 计算得到

$$I=\int_0^1 dy\int_0^1\frac{xdx}{(1+x^2+y^2)^2}=\frac{1}{2}\int_0^1 dy\int_0^1\frac{d(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{2+\frac{2}{y}}\right) dy = \frac{1}{2}\left(\arctan 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \quad \square$$

(7) 计算二重积分

$$I := \int_0^1 dy \int_y^1 \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2}\right) dx.$$

解: 对第一个被积函数利用Fubini 定理得到

$$I = \int_0^1 dy \int_y^1 \frac{e^{x^2}}{x} dx - \int_0^1 dy \int_y^1 e^{y^2} dx = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{e^{x^2}}{x} dy - \int_0^1 e^{y^2}(1-y)dy$$

$$= \int_0^1 e^{x^2} dx - \int_0^1 e^{y^2} dy + \int_0^1 e^{y^2} y dy = \frac{1}{2}e^{y^2}\Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}. \quad \square$$

(8) 计算三重积分

$$I := \iiint_{|x|+|y|+|z|\le 1} (|x|+|y|+|z|) dxdydz.$$

解: 根据对称性得到

$$I = 8\iiint_{x+y+z\le 1,\ x,y,z\ge 0} (x+y+z) dxdydz$$

$$= 8\iint_{x+y\le 1,\ x,y\ge 0} dxdy \int_0^{1-x-y} (x+y+z) dz$$

$$= 4\iint_{x+y\le 1,\ x,y\ge 0} [1-(x+y)^2] dxdy = 2 - \iint_{x+y\le 1,\ x,y\ge 0} (x+y)^2 dxdy$$

$$= 2 - \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y)^2 dy = 2 - \int_0^1 \frac{1-x^3}{3} dx = 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{7}{4}. \quad \square$$

(9) 证明

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4} \iiint_{r\le n} [r] dxdydz = \pi,$$

这里 $[r]$ 表示 $r := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的整数部分.

证: 计算可得

$$I_n := \frac{1}{n^4}\sum_{1\le k\le n} \iiint_{k-1<r\le k} [r] dxdydz = \frac{1}{n^4}\sum_{1\le k\le n} (k-1) \iiint_{k-1<r\le k} dxdydz$$

$$= \frac{1}{n^4}\sum_{1\le k\le n} (k-1)\left[\frac{4}{3}\pi k^3 - \frac{4}{3}\pi(k-1)^3\right] = \frac{4\pi}{3n^4}\left(n^4 - \sum_{1\le k\le n} k^3\right).$$

利用 Stone 定理可得

$$I = \lim_{n\to+\infty} I_n \frac{4\pi}{3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4-(n-1)^4-n^3}{n^4-(n-1)^4}$$

$$= \frac{4\pi}{3}\lim_{n\to+\infty} \frac{4n^3-n^3}{4n^3} = \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{3}{4} = \pi. \quad \square$$

§13.2.3 * Stieltjes 积分

本小节引入 Stieltjes 积分使得二重积分可化某种“定积分”.

I、有界变差函数. 假设函数 $f(x)$ 定义在闭区间 $[a,b]$ 上. 对任意 $[a,b]$ 上的分割 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 考虑

$$\bigvee_T f := \sum_{0\le i\le n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|. \tag{13.2.11}$$

称 f 是**有界变差函数(function of bounded variation)**, 记为 $f \in \mathbf{BV}([a,b])$, 如果

$$\sup_T \bigvee_T f < +\infty.$$

此时定义

$$\bigvee_a^b f := \sup_T \bigvee_T f. \tag{13.2.12}$$

如果函数 $f(x)$ 定义在区间 $[a,+\infty)$, 称 $f \in \mathbf{BV}([a,+\infty))$ 如果 $(\vee_a^b f)_{b>a}$ 是有界的. 此时定义

$$\bigvee_a^{+\infty} f := \sup_{b>a} \bigvee_a^b f. \tag{13.2.13}$$

注13.2.5. (1) $C([a,b]) \not\Rightarrow \mathbf{BV}([a,b])$. 考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{\pi}{2x}, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

显然 $f \in C([0,1])$. 取分割 T 如下

$$x_0 = 0, \quad x_i = \frac{1}{2n+1-i}, \quad 1 \le i \le 2n.$$

从而得到

$$\begin{aligned}
\bigvee_T f &= \sum_{0\le i\le 2n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \\
&= \sum_{1\le i\le 2n-1} \left| x_{i+1}\cos\frac{\pi}{2x_{i+1}} - x_i\cos\frac{\pi}{2x_i} \right| + \left| \frac{1}{2n}\cos(n\pi) \right| \\
&= \frac{1}{2n} + \sum_{1\le i\le 2n-1} \left| \frac{1}{2n-i}\cos\frac{(2n-i)\pi}{2} - \frac{1}{2n+1-i}\cos\frac{(2n+1-i)\pi}{2} \right| \\
&= \frac{1}{2n} + \sum_{1\le i\le 2n-1} \left| \frac{1}{2n-i}\cos\left(n\pi - \frac{i\pi}{2}\right) - \frac{1}{2n+1-i}\cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{i\pi}{2}\right) \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} + \sum_{1\le i\le 2n-1} \left| \frac{1}{2n-i}\cos\frac{i\pi}{2} - \frac{1}{2n+1-i}\sin\frac{i\pi}{2} \right|
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2n} + \sum_{1\le k\le n-1}\left|\frac{1}{2n-2k}\cos(k\pi) - \frac{1}{2n+1-2k}\sin(k\pi)\right|$$
$$+ \sum_{1\le k\le n}\left|\frac{1}{2n-2k+1}\cos\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2n-2k+2}\sin\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right|$$
$$= \frac{1}{2n} + \sum_{1\le k\le n-1}\frac{1}{2n-2k} + \sum_{1\le k\le n}\frac{1}{2n-2k+2}$$

故

$$\bigvee_T f = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \to +\infty.$$

因此 $f \notin \mathbf{BV}([0,1])$.

(2) $\mathbf{BV}([a,b]) \not\Rightarrow C([a,b])$. 考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

则 $f \notin C([0,1])$ 但是 $\vee_0^1 f = 1$.

(3) 如果函数 f 在 $[a,b]$ 或 $[a,+\infty)$ 上有界且单调, 则 $f \in \mathbf{BV}([a,b])$ 或 $f \in \mathbf{BV}([a,+\infty))$, 这是因为

$$\bigvee_a^b f = |f(b) - f(a)| \quad 或 \quad \bigvee_a^{+\infty} f = [f(+\infty) - f(a)|.$$

(4) $\mathbf{Lip}([a,b]) \Rightarrow \mathbf{BV}([a,b])$. 这里 $f \in \mathbf{Lip}([a,b])$ 是表示存在 $L > 0$ 使得 $|f(x) - f(y)| \le L|x-y|$ 对任意 $x, y \in [a,b]$ 都成立. 从而

$$\bigvee_T f = \sum_{0\le i\le n-1}|f(x_{i+1}) - f(x_i)| \le \sum_{0\le i\le n-1} L|x_{i+1} - x_i| = L(b-a)$$

即 $\vee_a^b f \le L(b-a)$.

(5) 如果 f' 在 $[a,b]$ 上有界, 则根据 (4) 得到 $f \in \mathbf{BV}([a,b])$.

(6) 若对任意 $x \in [a,b]$ 有

$$f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)\,dt, \quad |\varphi| \in R([a,b]),$$

则 $f \in \mathbf{BV}([a,b])$ 且

$$\bigvee_a^b f \le \int_a^b |\varphi(t)|dt.$$

事实上,

$$\bigvee_T f = \sum_{0\le i\le n-1}|f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \sum_{0\le i\le n+1}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi(t)\,dt\right| \le \int_a^b |\varphi(t)|dt.$$

定理13.2.6. *假设 $a, b \in \mathbb{R}$ 和 $a < b$.*

(1) $\mathbf{BV}([a,b]) \subset B([a,b])$, 即 $[a,b]$ 上的有界函数构成的集合.

(2) $f,g \in \mathbf{BV}([a,b]) \Rightarrow f \pm g \in \mathbf{BV}([a,b])$.

(3) $f,g \in \mathbf{BV}([a,b])$ 且 $|g| \geq \sigma > 0 \Rightarrow f/g \in \mathbf{BV}([a,b])$.

(4) 给定 $c \in (a,b)$. 则 $f \in \mathbf{BV}([a,b]) \Leftrightarrow f \in \mathbf{BV}([a,c])$ 和 $f \in \mathbf{BV}([c,b])$. 此时

$$\bigvee_a^b f = \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f.$$

(5) $f \in \mathbf{BV}([a,b]) \Rightarrow g(x) := \vee_a^x f$ 在 $[a,b]$ 上有界且递增.

(6) $f \in \mathbf{BV}([a,b] \Leftrightarrow$ 存在 $[a,b]$ 上的有界递增函数 F 满足

$$|f(x) - f(y)| \leq F(x) - F(y), \quad a \leq y < x \leq b.$$

(7) $f \in \mathbf{BV}([a,b]) \Leftrightarrow$ 存在 $[a,b]$ 上的有界递增函数 g 和 h 满足 $f = g - h$.

(8) $f \in \mathbf{BV}([a,b])$ 且 f 在 $x_0 \in [a,b]$ 处连续, 则 $\vee_a^x f$ 在 x_0 处连续.

(9) $f \in \mathbf{BV}([a,b]) \cap C([a,b]) \Rightarrow$ 存在 $[a,b]$ 上的连续递增函数 g 和 h 满足 $f = g - h$.

(10) $f \in \mathbf{BV}([a,b]) \cap C([a,b]) \Rightarrow$ 对 $[a,b]$ 上的任意分割 T 有

$$\bigvee_a^b f = \lim_{||T|| \to 0} \sum_{0 \leq i \leq n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|.$$

证: (1) - (3) 和 (10) 是显然的.

(4) 令 $f \in \mathbf{BV}([a,b])$ 和 $c \in (a,b)$. 考虑两个分割

$$T_y : a = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = c, \quad T_z : c = z_0 < z_1 < \cdots < z_n = b.$$

则 $T := T_y \cup T_z$ 构成了 $[a,b]$ 的分割. 从而

$$\bigvee_T f = \sum_{0 \leq i \leq m-1} |f(y_{i+1}) - f(y_i)| + \sum_{0 \leq j \leq n-1} |f(y_{j+1}) - f(y_j)| = \bigvee_{T_y} f + \bigvee_{T_z} f$$

和 $\vee_a^c f + \vee_c^b f \leq \vee_a^b f$. 另一方面, 假设 $f \in \mathbf{BV}([a,c])$ 和 $f \in \mathbf{BV}([c,b])$. 考虑 $[a,b]$ 上的分割 $T : a < x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. 如果 $c = x_{i_0}$ (存在 i_0) 则

$$\bigvee_T f = \sum_{0 \leq i \leq i_0 - 1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + \sum_{i_0 \leq i \leq n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f.$$

如果 $c \neq x_i$, 对任意 $0 \leq i \leq n$, 定义 $T' := T \cup \{c\}$. 则

$$\bigvee_{T'} f = \sum_{0 \leq i \leq i_0 - 1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + |f(c) - f(x_0)| + |f(x_{i_0+1}) - f(c)|$$

$$+\sum_{i_0+1\le i\le n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)| \ \le\ \bigvee_a^c f+\bigvee_c^b f.$$

最后得到 $\vee_a^b f=\vee_a^c f+\vee_c^b f$.

(5) 对任意 $a\le x<y\le b$ 有

$$\bigvee_a^y f=\bigvee_a^x f+\bigvee_x^y f.$$

从而得到 $g(y)-g(x)=\vee_x^y f\ge 0$, 即 $g(x)\le \vee_a^b f<+\infty$.

(6) 若 $f\in \mathbf{BV}([a,b])$, 定义 $F(x):=\vee_a^x f$. 根据 (5), 函数 F 有界递增且

$$F(y)-F(x)=\bigvee_x^y f\ge |f(y)-f(x)|,\quad \forall\ x<y.$$

反之, 对任意 $[a,b]$ 上的分割 $T:a=x_0<x_1<\cdots<x_n$ 有

$$\bigvee_T f=\sum_{0\le i\le n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|\le \sum_{0\le i\le n-1}|F(x_{i+1})-F(x_i)|=F(b)-F(a).$$

(7) 如果 $f\in \mathbf{BV}([a,b])$, 定义 $g(x):=\vee_a^x f$. 根据 (5) 函数 g 是有界递增的. 取 $h:=g-f$. 对任意 $x<y$, 有

$$h(y)-h(x)=[g(y)-g(x)]-[f(y)-f(x)]\ge [g(y)-g(x)]-\bigvee_x^y f\ge 0.$$

如果 $f=g-h$, 这里 g,h 都是有界递增的, 则 $F:=g+h$ 递增且

$$|f(x)-f(y)|\le [g(x)-g(y)]+[h(x)-h(y)]=F(x)-F(y),\quad a\le y<x\le b.$$

(8) 不失一般性不妨假设 $a<x_0<b$. 对任意 $\epsilon>0$ 都存在 $[x_0,b]$ 上的分割 $T:x_0<x_1<\cdots x_n=b$ 满足

$$\sum_{0\le i\le n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|=\bigvee_T f\ge \bigvee_{x_0}^b f-\epsilon\quad \text{且}\quad |f(x_1)-f(x_0)|<\epsilon.$$

因此得到

$$\bigvee_{x_0}^b f<\epsilon+\sum_{0\le i\le n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|$$

$$<2\epsilon+\sum_{1\le i\le n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|\le 2\epsilon+\bigvee_{x_1}^b f$$

根据函数 $g(x):=\vee_a^x f$ 的定义对任意 $x_1\searrow x_0$ 有 $g(x_1)-g(x_0)<2\epsilon$. 特别地 $g(x_0+0)=g(x_0)$. 同理可证 $g(x_0-0)=g(x_0)$.

(9) 因为 $f\in \mathbf{BV}([a,b])\cap C([a,b])$, 所以根据 (7) 得到 $f=g-h$, 这里 g,h 都是有界递增的. 根据 (8) 得到 $g\in C([a,b])$ 故 $h\in C([a,b])$. □

II、Stieltjes 积分. 假设函数 f,g 在闭区间 $[a,b]$ 上有界. 考虑 $[a,b]$ 上的一个分割

$$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad ||T|| = \max_{1\le i\le n} \Delta x_i.$$

对任意 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 定义**Stieltjes 和 (Stieltjes sum)** 为

$$S(f,T,\boldsymbol{\xi};g) := \sum_{1\le i\le n} f(\xi_i)\Delta g(x_i), \quad \Delta g(x_i) := g(x_i) - g(x_{i-1}). \tag{13.2.14}$$

类似 Riemann 积分的定义, f 关于 g 的**Stieltjes 积分 (Stieltjes integral)** 定义为

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \lim_{||T||\to 0} S(f,T,\boldsymbol{\xi};g), \tag{13.2.15}$$

如果极限存在且和分割 T 和点 ξ_i 选择都无关.

- 如果 $g(x) = x$, 则 Stieltjes 积分就是通常的 Riemann 积分.
- 如果 g 递增, 则

  $$\int_a^b f(x)dg(x) \text{ 存在} \iff \lim_{||T||\to 0}\sum_{1\le i\le n}\omega(f,\Delta_i)\Delta g(x_i) = 0,$$

  这里 $\omega(f,\Delta_i) = M_i - m_i$, $M_i = \sup_{\Delta_i} f$, $m_i = \inf_{\Delta_i} f$, 和 $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$.

定理13.2.7. *如果 $f \in C([a,b])$ 且 $g \in \mathbf{BV}([a,b])$, 则*

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

存在.

证: 首先假设 g 是递增的. 对任意 $\epsilon > 0$ 都存在 $\delta > 0$ 满足 $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ 只要 $|x-y| < \delta$. 考虑 $[a,b]$ 上的任意分割 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 使得 $||T|| < \delta$. 从而

$$\sum_{1\le i\le n}\omega(f,\Delta_i)\Delta g(x_i) \le \epsilon \sum_{1\le i\le n}\Delta g(x_i) = [g(b) - g(a)]\epsilon.$$

此时Stieltjes 积分存在.

对一般的 g, 根据**定理 13.2.6** 作分解 $g = g_1 - g_2$, 这里 g_1, g_2 是有界递增的. 故此时Stieltjes 积分也存在. □

推论13.2.8. *(1) 如果 $f \in R([a,b])$ 且 $g \in \mathbf{Lip}([a,b])$, 则*

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

存在.

(2) $f \in R([a,b])$ 且

$$g(x) = c + \int_a^x \varphi(t)\,dt, \quad |\varphi| \le L,$$

则

$$\int_a^b f(x)\,dg(x)$$

存在.

定理13.2.9. 当Stieltjes积分存在时, 下列公式成立:

$$\begin{aligned}
\int_a^b dg(x) &= g(b) - g(a),\\
\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dg(x) &= \int_a^b f_1(x)dg(x) \pm \int_a^b f_2(x)dg(x),\\
\int_a^b f(x)d[g_!(x) \pm g_2(x)] &= \int_a^b f(x)dg_1(x) \pm \int_a^b f(x)dg_2(x),\\
\int_a^b kf(x)d[\ell g(x)] &= k\ell \int_a^b f(x)dg(x),\\
\int_a^b f(x)dg(x) &= \int_a^c f(x)dg(x() + \int_c^b f(x)dg(x).
\end{aligned}$$

定理13.2.10. (分部积分法) 如果函数 f, g 在 $[a,b]$ 上有界且Stieltjes积分

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

存在, 则

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)df(x). \tag{13.2.16}$$

证: 作为练习请自证. □

作为简单例子考虑函数

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0,\\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

注意到 0 是该函数的第一类间断点 (跳跃间断点). 假设 $c \in [a,b)$, 函数 f 在 c 处连续, 且 $f \in R([a,b])$. 定义

$$I := \int_a^b f(x)\,d\rho_c(x), \quad \rho_c(x) := \rho(x-c) = \begin{cases} 0, & x \le c,\\ 1, & x > c. \end{cases}$$

则 I 存在且

$$\begin{aligned} S &= \sum_{1\le i\le n} f(\xi_i)\Delta\rho_c(x_i) = \left(\sum_{i\neq k}+\sum_{i=k}\right) f(\xi_i)[\rho_c(x_i)-\rho_c(x_{i-1})] \\ &= f(\xi_k)[\rho_c(x_k)-\rho_c(x_{k-1})] = f(\xi_k), \end{aligned}$$

这里 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 是 $[a,b]$ 上的分割且 $x_{k-1}<c<x_k$. 令 $||T||\to 0$ 得到

$$\int_a^b f(x)d\rho_c(x)=f(c), \quad a\le c<b.$$

此结果可推广到如下形式.

定理13.2.11. (广义分部积分法) 假设 $f\in C([a,b])$, $g\in C([a,b])\setminus\{c_0,\cdots,c_m\}$, 这里 $a=c_0<\cdots<c_m=b$ 是 g 的第一类间断点, $g'(x)$ 除了在有限个点外存在, 且 $|g'|\in R([a,b])$. 则

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dg(x) &= \int_a^b f(x)g'(x)dx \\ &\quad + \sum_{1\le k\le m-1} f(c_k)[g(c_k+0)-g(c_k-0)] \\ &\quad + f(a)[g(a+0)-g(a)]+f(b)[g(b)-g(b-0)]. \end{aligned} \tag{13.2.17}$$

证: 作为练习请自证. □

练习13.2.12. (1) 计算

$$I=\int_{-2}^2 x\,dg(x), \quad g(x)=\begin{cases} x+2, & -2\le x\le -1, \\ 2, & -1<x<1, \\ x^2-1, & 1\le x\le 2. \end{cases}$$

(2) 证明**定理 13.2.13** 中的 (1) 和 (2).

定理13.2.13. (1) 假设函数 f 在 $[a,b]$ 上有界, g 递增, 且Stieltjes 积分

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

存在, 则

$$\int_a^b f(x)dg(x)=\mu\int_a^b dg(x)=\mu[g(b)-g(a)],$$

这里 $\mu\in[m_f,M_f]$. 当 $f\in C([a,b])$, 我们可以取 $\mu=f(\xi)$, 这里 $\xi\in[a,b]$.

(2) 如果 $f\in C([a,b])$ 且 $g\in \mathbf{BV}([a,b])$, 则

$$\left|\int_a^b f(x)dg(x)\right|\le M\bigvee_a^b g,$$

这里 $M := \sup_{a\le x\le b}|f(x)|$.

(3) 如果 $(f_n)_{n\ge1}\subset C([a,b])$, $f_n\rightrightarrows f$ (一致收敛), 且 $g\in\mathbf{BV}([a,b])$, 则

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dg(x)=\int_a^b f(x)dg(x).$$

(4) 如果 $f\in C([a,b])$, $(g_n)_{n\ge1}\subset\mathbf{BV}([a,b])$ 满足 $g_n\to g$ 和 $\vee_a^b g_n\le V$, 则 $g\in\mathbf{BV}([a,b])$ 且

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)dg_n(x)=\int_a^b f(x)dg(x).$$

证: (1) 和 (2) 作为练习请自证.

(3) 对任意 $\epsilon>0$ 存在 $N\in\mathbb{N}$ 满足

$$\max_{a\le x\le b}|f_n(x)-f(x)|<\epsilon,\quad n>N.$$

因此

$$\left|\int_a^b f_n(x)dg(x)-\int_a^b f(x)dg(x)\right|\le\max_{a\le x\le b}|f_n(x)-f(x)|\bigvee_a^b g\le\epsilon\bigvee_a^b g,\quad n>N.$$

(4) 考虑 $[a,b]$ 上的任意分割 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$. 则

$$\bigvee_T g_n=\sum_{1\le i\le m}|g_n(x_i)-g_n(x_{i-1})|\le\bigvee_a^b g_n\le V.$$

令 $n\to+\infty$ 得到

$$\sum_{1\le i\le m}|g(x_i)-g(x_{i-1})|\le V$$

从而 $g\in\mathbf{BV}([a,b])$. 令

$$S:=\sum_{1\le i\le m}f(\xi_i)\Delta g(x_i),\quad S_n:=\sum_{1\le i\le m}f(\xi_i)\Delta g_n(x_i),\quad \xi_i\in[x_{i-1},x_i].$$

对任意 $\epsilon>0$ 存在 $\delta>0$ 只要 $|x-y|<\delta$ 就有 $|f(x)-f(y)|<\epsilon$. 从而得到

$$\left|S_n-\int_a^b f(x)dg_n(x)\right| = \left|S_n-\sum_{1\le i\le m}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)dg_n(x)\right|$$

$$\le\sum_{1\le i\le m}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(\xi_i)-f(x)|dg_n(x)\le\epsilon\sum_{1\le i\le m}\int_{x_{i-1}}^{x_i}dg_n(x)\le\epsilon\bigvee_a^b g_n\le\epsilon V$$

同理可证

$$\left|S-\int_a^b f(x)dg(x)\right|\le\epsilon V.$$

从而存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $|S_n-S|<\epsilon$ 对任意 $n\ge N$ 都成立. 最后得到

$$\left|\int_a^b f(x)dg_n(x)-\int_a^b f(x)dg(x)\right|\le\left|\int_a^b f(x)dg_n(x)-S_n\right|+|S_n-S|$$

$$+\left|\int_a^b f(x)dg(x)-S\right| \leq \epsilon V+\epsilon+\epsilon V = (1+2V)\epsilon. \quad \Box$$

III、应用. 第一个应用是 Stieltjes 积分和 Riemann 积分的联系. 第二个应用是给出 Euler 常数的余项估计.

定理13.2.14. (Catalan) 假设 $f,g\in C(D)$, 其中 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是有界可求面积的闭区域. 令 $m=\min_D g$, $M:=\max_D g$, $\varphi\in C([m,M])$, 和

$$\psi(u):=\iint_{(x,y)\in D,\ m\leq g(x,y)\leq u} f(x,y)\,dxdy.$$

则

$$\iint_D f(x,y)\varphi(g(x,y))\,dxdy=\int_m^M \varphi(u)\,d\psi(u). \tag{13.2.18}$$

证: 不失一般性不妨假设 $f>0$. 选择 $[m,M]$ 上的分割 $T: m=u_0<u_1<\cdots<u_n=M$. 则

$$\iint_D f(x,y)\varphi(g(x,y))\,dxdy=\sum_{1\leq i\leq n}\iint_{u_{i-1}\leq g\leq u_i} f(x,y)\varphi(g(x,y))\,dxdy$$

$$=\sum_{1\leq i\leq n}\varphi(g(\xi_i^*,\eta_i^*))\iint_{u_{i-1}\leq g\leq u_i} f(x,y)\,dxdy$$

$$=\sum_{1\leq i\leq n}\varphi(g(\xi_i^*,\eta_i^*))[\psi(u_i)-\psi(u_{i-1})] \ \to\ \int_m^M \varphi(u)\,d\psi(u). \quad \Box$$

记号 $\lfloor x\rfloor$ 表示 x 的整数部分, 从而

$$\langle x\rangle := x-\lfloor x\rfloor$$

表示 x 的小数部分.

对任给子集 $A\subset\mathbb{N}$ 和 $x>1$, 定义

$$A(x):=\#\{a\leq x: a\in A\}. \tag{13.2.19}$$

计算可得

$$\int_1^x f(t)dA(t)=\sum_{n\leq x}\int_{n-0}^{n+0} f(t)dA(t)=\sum_{n\leq x, n\in A} f(n).$$

性质13.2.15. (1) 如果 $f \in C([1,x])$, 则

$$\sum_{a\leq x, a\in A} f(x) = \int_1^x f(t)\,dA(t). \tag{13.2.20}$$

(2) **(Abel 求和公式)** 令 $(a_n)_{n\geq 1}$ 是复数列且 $f:[1,+\infty)\to\mathbb{C}$. 对每个实数 $x\geq 1$, 令

$$A(x) := \sum_{n\leq x} a_n$$

并假设 $f(x)\in C^1([1,+\infty))$. 则

$$\sum_{n\leq x} a_n f(x) = A(x)f(a) - \int_1^x A(t)f'(t)\,dt. \tag{13.2.21}$$

证: (1) 已证.

(2) 首先假设 $x = N\in\mathbb{N}$. 故得到

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} a_n f(n) &= A(1)f(1) + \sum_{2\leq n\leq N}[A(n)-A(n-1)]f(n)\\ &= A(1)f(1) + \sum_{2\leq n\leq N} A(n)f(n) - \sum_{1\leq n\leq N-1} A(n)f(n+1)\\ &= \sum_{1\leq n\leq N-1} A(n)[f(n)-f(n+1)] + A(N)f(N)\\ &= A(N)f(N) - \sum_{1\leq i\leq N-1} A(i)\int_i^{i+1} f'(t)\,dt\end{aligned}$$

$$= A(N)f(N) - \sum_{1\leq i\leq N-1}\int_i^{i+1} A(t)f'(t)\,dt = A(N)f(N) - \int_1^N A(t)f'(t)\,dt.$$

对一般的 x 令 $N := \lfloor x\rfloor$. 因为 $A(t)$ 在区间 $[N,x]$ 上是常数, 所以

$$A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f'(t)\,dt = A(x)f(x) - \int_N^x A(t)f'(t)dt - \int_1^N A(t)f'(t)dt$$

$$= A(x)f(x) - A(N)\int_N^x f'(t)dt - \int_1^N A(t)f'(t)dt$$

$$= A(N)f(N) - \int_1^N A(t)f'(t)dt = \sum_{n\leq N} a_n f(n) = \sum_{n\leq x} a_n f(n). \quad \square$$

第二个应用是给出 Euler 常数的余项估计. 所谓的**Euler 常数** γ 定义为

$$\gamma := 1 - \int_1^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}\,dt = 0.57721\cdots. \tag{13.2.22}$$

猜想13.2.16. γ 是无理数.

上述著名猜想仍旧是个公开的问题. 接下来我们将会证明由 (13.2.22) 定义的 Euler 常数和之前的定义

$$\gamma = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{1\le n\le N}\frac{1}{n} - \ln N\right) \tag{13.2.23}$$

是一样的.

定理13.2.17. *如果 γ 由 (13.2.22) 给出, 则*

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n} = \ln x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \ge 1. \tag{13.2.24}$$

证: 在 (13.2.21) 中取 $a_n \equiv 1$ 且 $f(t) = 1/t$ 得到 $A(x) = \sum_{n\le x} 1 = \lfloor x \rfloor$ 和

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}\frac{1}{n} &= \frac{\lfloor x\rfloor}{x} + \int_1^x \frac{\lfloor t\rfloor}{t^2}dt = 1 - \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x} + \int_1^x \frac{dt}{t} - \int_1^x \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt \\ &= 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x - \int_0^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt + \int_x^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt \\ &= \ln x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right) + \int_x^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt \\ &= \ln x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right) + O\left(\int_x^\infty \frac{dt}{t^2}\right) = \ln x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right). \quad \square\end{aligned}$$

性质13.2.18. *令 $a, b \in \mathbb{N}$ 满足 $a < b$ 并令 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 在 $[a, b]$ 上单调. 则存在实数 $\theta = \theta(a, b) \in [0, 1]$ 使得*

$$\sum_{a<n\le b} f(n) = \int_a^b f(t)\,dt + \theta[f(b) - f(a)]. \tag{13.2.25}$$

证: 在 (13.2.20) 中取 $A = \mathbb{N}$ 则 $A(t) = \lfloor t \rfloor$ 且

$$\begin{aligned}\sum_{a<n\le b} f(n) - \int_a^b f(t)\,dt &= \int_a^b f(t)\,d\lfloor t\rfloor - \int_a^b f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,d\langle t\rangle \\ &= [-f(t)\langle t\rangle]\Big|_a^b + \int_a^b \langle t\rangle df(t) = \int_a^b \langle t\rangle df(t).\end{aligned}$$

不失一般性不妨假设 f 递增, 从而根据**定理 13.2.13** 得到

$$\int_a^b \langle t\rangle df(t) = \theta\int_a^b df(t) = \theta[f(b) - f(a)], \quad \exists\, \theta \in [0, 1]. \quad \square$$

作为直接推论可证 (作为练习请自证)

$$
\begin{aligned}
\ln(n!) &= (n-1)\ln n + O(\ln n), \\
\sum_{n\le x} n^{\alpha} &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + O(x^{\alpha}), \quad \alpha \ge 0, \\
\sum_{n\le x} n^{\alpha}\ln n &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\ln x - \frac{1}{\alpha+1}\right) + O(x^{\alpha}\ln x), \quad \alpha > 0.
\end{aligned}
$$

当函数 f 递减, 可以把**性质 13.2.18** 加强到如下.

性质13.2.19. *假设函数 $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ 连续且递增, 并假设 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, 则存在常数 A 使得*

$$\sum_{1<n\le x} f(n) = \int_1^x f(t)\,dt + A + O(f(x)). \tag{13.2.26}$$

证: 给定正整数 N 考虑

$$D(N) := \int_1^N f(t)\,dt - \sum_{2\le n\le N} f(n) = \sum_{2\le n\le N}\left[\int_{n-1}^n f(t)\,dt - f(n)\right].$$

因为 $D(N)\ge 0$, 为了证明数列 $(D(N))_{N\ge1}$ 的收敛性只要验证

$$R(N) := \sum_{n\ge N+1}\left[\int_{n-1}^n f(t)\,dt - f(n)\right] = O(f(N)).$$

对正整数 M,N 只要满足 $M\ge N+3$, 利用 f 的递减性, 就有

$$\sum_{N+1\le n\le M-1} f(n) + f(M) \le \int_N^M f(t)\,dt \le f(N) + \sum_{N+1\le n\le M-1} f(n),$$

因此

$$0 \le \sum_{N+1\le n\le M}\left[\int_{n-1}^n f(t)\,dt - f(n)\right] \le f(N) - f(M) \le f(N)$$

故 $0\le R(N)\le f(N)$. □

考虑满足如下条件的函数列 $(b_i(x))_{i\ge0}\subset C([0,1])$:

$$b_0(x)\equiv 1, \quad b_i'(x) = i\,b_{i-1}(x), \quad \int_0^1 b_i(x)\,dx = 0, \quad i\ge 1. \tag{13.2.27}$$

显然 (13.2.27) 已经完全确定这个函数列.

练习13.2.20. 验证

$$\sum_{i\ge0} b_i(x)\frac{y^i}{i!} = \frac{ye^{xy}}{e^y-1} = \frac{y}{e^y-1}\sum_{n\ge0}\frac{(xy)^n}{n!}. \tag{13.2.28}$$

在 (13.2.28) 中令 $x=0$ 得到了**Bernoulli 数**的定义:

$$\sum_{i\geq 0} B_i \frac{y^i}{i!} = \frac{y}{e^y-1}. \tag{13.2.29}$$

利用 $e^y - 1 = \sum_{i\geq 1} y^i/i!$ 的 Taylor 级数得到

$$y = (e^y-1)\sum_{i\geq 0} B_i \frac{y^i}{i!} = \sum_{i\geq 1}\left[\sum_{0\leq j\leq i-1}\frac{B_j}{(i-j)!}\right] y^j$$

从而

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad b_i(x) = \sum_{0\leq j\leq i}\binom{i}{j} B_j x^{i-j}. \tag{13.2.30}$$

易证 $B_i = 0, i \geq 3$.

把定义在 $[0,1)$ 上的函数 $b_i(x)$ 作周期为 1 的周期延拓, 我们就得到了定义在 $\mathbb{R}$ 上的**第 i 个 Bernoulli 函数** $B_i(x)$ **(i-th Bernoulli function)**. 注意到 $B_i(0) = B_i$.

定理13.2.21. (Euler-Maclaurin 求和公式) *对任何非负整数 k 和任意函数 $f \in C^{k+1}([a,b])$, 其中 $a, b \in \mathbb{Z}$, 有*

$$\begin{aligned}\sum_{a<n\leq b} f(n) &= \int_a^b f(x)dx + \sum_{0\leq i\leq k}\frac{(-1)^{i+1}B_{i+1}}{(i+1)!}\left[f^{(i)}(b) - f^{(i)}(a)\right] \\ &\quad + \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\int_a^b B_{k+1}(x) f^{(k+1)}(x)dx.\end{aligned} \tag{13.2.31}$$

证: 在这里只给出 $k=1$ 时的证明. 回顾

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(t)d\lfloor t\rfloor = \int_a^b f(t)dt - \int_a^b f(t)d\langle t\rangle.$$

因为 $b_1(x) = x - \frac{1}{2}$, 所以 $B_1(x) = \langle x\rangle - \frac{1}{2}$ 对任何 $x \in \mathbb{R}$ 都成立从而 $B_1(n) = -\frac{1}{2} = B_1$ 对任何 $n \in \mathbb{Z}$ 都成立. 进一步可证

$$B_i' = iB_{i-1}, \quad B_2(t) \in C(\mathbb{R}), \quad B_2'(t) \text{ 存在 } (t \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}), \quad B_i'(t) \text{存在 } (i \geq 3).$$

从而得到

$$\begin{aligned}\sum_{a<n\leq b} f(n) &= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(t)dB_1(t) \\ &= \int_a^b f(t)dt - B_1(t)f(t)\Big|_a^b + \int_a^b B_1(t)f'(t)dt \\ &= \int_a^b f(t)dt - B_1[f(b)-f(a)] + \frac{1}{2}\int_a^b f'(t)dB_2(t) \\ &= \int_a^b f(t)dt - B_1[f(b)-f(a)] + \frac{1}{2}\left\{B_2[f'(b)-f'(a)] - \int_a^b B_2(t)f''(t)dt\right\}.\end{aligned}$$

这里用到了 $B_2(n) = B_2, \forall\, n \in \mathbb{Z}$. □

性质13.2.22. 假设 $0 < y < x$ 且 $f \in C^1([y,x])$. 则

$$\sum_{y<n\le x} f(n) = \int_y^x f(t)dt + \int_y^x \langle t\rangle f'(t)dt - \langle t\rangle f(t)\Big|_y^x. \tag{13.2.32}$$

证: 令 $a = \lfloor y\rfloor$ 和 $b = \lfloor x\rfloor$, 并记

$$I := \int_y^x \langle t\rangle f'(t)dt = \left(\int_{a+1}^b + \int_b^x + \int_y^{a+1}\right)\langle t\rangle f'(t)dt = I_1 + I_2 + I_3.$$

计算可得

$$I_1 = \int_{a+1}^b (t-\lfloor t\rfloor)f'(t)dt = \sum_{a+1\le k\le b-1}\int_k^{k+1}(t-k)f'(t)dt$$

$$= \sum_{a+1\le k\le b-1}\left[tf(t)\Big|_k^{k+1} - \int_k^{k+1} f(t)dt\right] - \sum_{a+1\le k\le b-1} k[f(k+1)-f(k)]$$

$$= \sum_{a+1\le k\le b-1} f(k+1) - \int_{a+1}^b f(t)dt = \sum_{a+2\le k\le b} f(k) - \int_{a+1}^b f(t)dt.$$

类似地得到

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_b^x (t-\lfloor t\rfloor)f'(t)dt = \int_a^x (t-b)f'(t)dt \\ &= tf(t)\Big|_b^x - \int_b^x f(t)dt - b[f(x)-f(b)] = \langle x\rangle f(x) - \int_b^x f(t)dt, \\ I_3 &= -\langle y\rangle f(y) - \int_y^{a+1} f(t)dt + f(a+1). \end{aligned}$$

加起来有

$$I = \sum_{a+2\le k\le b} f(k) + \langle t\rangle f(t)\Big|_y^x - \int_y^x f(t)dt + f(a+1). \quad \square$$

在 (13.2.32) 中令 $f(t) = 1/t$ 得到

$$\sum_{1<n\le x}\frac{1}{n} = \int_1^x \frac{dt}{t} - \int_1^x \frac{\langle t\rangle}{t^2}dt - \frac{\langle x\rangle}{x}$$

即

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n} - \ln n = 1 - \int_1^x \frac{\langle t\rangle}{t^2}dt - \frac{\langle x\rangle}{x} \quad\Longrightarrow\quad (13.2.23).$$

推论13.2.23. 对任意 $n \ge 1$, 有

$$\sum_{m\le n}\frac{1}{m} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{\theta_n}{60n^4}, \tag{13.2.33}$$

这里常数 $\theta_n \in [0,1]$.

证: 在 (13.2.31) 中取 $f(t)=1/t, a=1, b=n$, 且 $k=3$. 计算得到

$$\sum_{2\le m\le n}\frac{1}{n}=\int_1^n\frac{dt}{t}+\frac{-B_1}{1!}\left(\frac{1}{n}-1\right)+\frac{B_2}{2!}\left(-\frac{1}{n^2}+1\right)+\frac{-B_3}{3!}\left(\frac{2}{n^3}-\frac{2}{1}\right)$$

$$+\frac{B_4}{4!}\left(\frac{-6}{n^4}+6\right)+\frac{-1}{4!}\int_1^n B_4(t)\frac{24}{t^5}dt$$

$$=\ln n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-1\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n^2}-1\right)+\frac{1}{120}\left(\frac{1}{n^4}-1\right)-\int_1^n\frac{B_4(t)}{t^5}dt.$$

即

$$\sum_{m\le n}\frac{1}{n}-\ln n=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}-\frac{1}{120}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+\frac{1}{120n^4}-\int_1^n\frac{B_4(t)}{t^5}dt.$$

令 $n\to+\infty$ 得到

$$\gamma=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}-\frac{1}{120}-\int_1^\infty\frac{B_4(t)}{t^5}dt \tag{13.2.34}$$

和

$$\sum_{m\le n}\frac{1}{m}=\gamma+\ln n+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+\frac{1}{120n^4}+\int_n^\infty\frac{B_4(t)}{t^5}dt.$$

由于 $|B_4(t)|\le\frac{1}{30}$, 得到

$$\left|\sum_{m\le n}\frac{1}{m}-\gamma-\ln n-\frac{1}{2n}+\frac{1}{12n^2}\right|\le\frac{1}{120n^4}+\int_n^\infty\frac{|B_4(t)|}{t^5}dt$$

$$\le\frac{1}{120n^4}+\frac{1}{30}\int_n^\infty\frac{dt}{t^5}=\frac{1}{60n^4}.\quad\square$$

公式 (13.2.34) 可推广到

$$\gamma=\frac{1}{2}+\sum_{2\le i\le k}\frac{B_i}{i}-\int_1^\infty\frac{B_k(t)}{t^{k+1}}dt,\quad k\ge 0. \tag{13.2.35}$$

§13.3 重积分的变量替换

回顾定积分的变量替换公式

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

这里 $\varphi(t)\in C^1([\alpha,\beta])$ 且单调. 特别地

$$\int_\alpha^\beta\varphi'(t)dt=b-a=\text{ 区间 }[a,b]\text{ 的长度},$$

这里 $a=\varphi(\alpha)$ 和 $b=\varphi(\beta)$.

假设有二重积分的变量替换公式:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{\widetilde{D}} f(x(u,v),y(u,v))\left[\ ?\ \right]dudv,$$

这里 $(x,y)\in D$ 和 $(u,v)\in\widetilde{D}$. 如果上述公式成立并取 $f\equiv 1$, 得到

$$\iint_{\widetilde{D}}\left[\ ?\ \right]dudv = \iint_D dxdy = |D|.$$

这就表明 [?] 应该是 D 的面积元与 $\widetilde{D}$ 的面积元之比.

§13.3.1 二重积分的变量替换

我们首先把上述的**几何直观性**严格数学化. 假设

(i) $D\subset\mathbf{R}^2$ 是有界可求面积的闭区域, 映射 $\mathbf{T}: D\to\Omega$ 是C^1**- 微分同胚的 (C^1-diffeomorphic)** (即 $\mathbf{T}$ 是 C^1 的且逆映射存在并也是 C^1 的) 和 $\Omega=\mathbf{T}(D)$. 记 $\mathbf{T}(u,v):=(x(u,v),y(u,v))$.

(ii) $\mathbf{T}$ 的 Jacobi 矩阵

$$\mathbf{Jac}(\mathbf{T}) := \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v\end{bmatrix}, \qquad \det(\mathbf{T}) := |\mathbf{Jac}(\mathbf{T})|$$

对任意 $(u,v)\in D$ 都是非奇异的. 故 $\mathscr{J}_{\mathbf{T}} := |\det(\mathbf{T})|$ 在 D 上总是正的.

给定 $(u_0,v_0)\in D$, 取充分小的 $\Delta u,\Delta v$ 使得 $(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v)\in D$, 并考虑 Ω 中的 4 个点:

$$\begin{aligned}
P_1 &= (x(u_0,v_0),y(u_0,v_0)) \;=\; (x_0,y_0),\\
P_2 &= (x(u_0+\Delta u,v_0),y(u_0+\Delta u,v_0))\\
&\approx (x_0+x_u(u_0,v_0)\Delta u, y_0+x_v(u_0,v_0)\Delta u)\,,\\
P_3 &= (x(u_0+\Delta u,v_0+\Delta v),y(u_0+\Delta u,v_0+\Delta v)),\\
P_4 &= (x(u_0,v_0+\Delta v),y(u_0,v_0+\Delta v)).
\end{aligned}$$

“长方形” $P_1P_2P_3P_4$ 的面积近似为

$$\begin{vmatrix} x_u(u_0,v_0) & y_u(u_0,v_0) \\ x_v(u_0,v_0), & y_v(u_0,v_0)\end{vmatrix}\Delta u\Delta v = \mathscr{J}_{\mathbf{T}}(u_0,v_0)\Delta u\Delta v.$$

从而

$$\iint_D f(x(u,v),y(u,v))\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(u,v)dudv \quad \text{“}=\text{”} \quad \iint_\Omega f(x,y)dxdy.$$

等价地

$$\iint_{\mathbf{T}(D)} f(x,y)dxdy \quad \text{“}=\text{”} \quad \iint_D (f\circ\mathbf{T})\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(u,v)dudv$$

or

$$\iint_{\mathbf{T}(D)} f \quad \text{“}=\text{”} \quad \int_D (f\circ \mathbf{T})\mathscr{J}_{\mathbf{T}}$$

定理13.3.1. (二重积分变量替换) 假设 $D\subset \mathbf{R}^2$ 是具有分段光滑边界 ∂D 的有界闭区域, 并假设 $D\subset \widetilde{D}$, 这里 $\widetilde{D}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的区域. 假设 $\mathbf{T}:\widetilde{D}\to\widetilde{\Omega}=\mathbf{T}(\widetilde{D})$ 是 C^1- 微分同胚并满足 $\mathscr{J}_{\mathbf{T}}$ 在 $\widetilde{D}$ 上处处大于 0. 则, 其中 $\Omega=\mathbf{T}(D)$,

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dxdy=\iint_D f(x(u,v),y(u,v))\,\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(u,v)\,dudv \tag{13.3.1}$$

or

$$\iint_{\mathbf{T}(D)} f=\iint_D (f\circ\mathbf{T})\mathscr{J}_{\mathbf{T}}. \tag{13.3.2}$$

证: 因为 D 有界故存在闭矩形 $\square:=[a,b]\times[c,d]$ 包含 D. 把 $[a,b]$ 和 $[c,d]$ 分成等长的 2^n 个子区间,

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_M=b,\quad c=y_0<y_1<\cdots<y_M=d,\quad M:=2^n.$$

记

$$\square_{ij}:=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j],\quad 1\le i,j\le M$$

并令

$$A_n:=\{\square_{ij}:\square_{ij}\subset D\},\quad B_n:=\{\square_{ij}:\square_{ij}\cap D\neq\emptyset\},\quad C_n:=B_n\setminus \mathrm{Int}(A_n).$$

注意到

$$\cdots\subset A_n\subset A_{n+1}\subset\cdots\subset D\subset\cdots\subset B_{n+1}\subset B_n\subset\cdots$$

和

$$\lim_{n\to\infty}|A_n|=|D|=\lim_{n\to\infty}|B_n|$$

这是因为 D 是可求面积的. 选择充分大的 $n\gg 1$ 使得 $B_n\subset\widetilde{D}$. 首先考虑两类特殊的 $\mathbf{T}$:

(i) **情形 1:** $\mathbf{T}(u,v)=(u,y(u,v))$,

(ii) **情形 2:** $\mathbf{T}(u,v):=(x(u,v),v)$.

步骤 1: 假设 $\mathbf{T}$ 是情形 1 或情形 2. 此时对任意 $\square\in B_n$, 有

$$|\mathbf{T}(\square)|=\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(\bar{u},\bar{v})|\square|$$

其中 $(\bar{u},\bar{v})\in\square$**.** 不妨假设 $\mathbf{T}$ 是情形 **1**, 即, $\mathbf{T}(u,v)=(u,y(u,v))$ 其中 y 是 C^1 的. 在 U 上有 $\mathscr{J}_{\mathbf{T}}>0$ 从而

$$0<\mathscr{J}_{\mathbf{T}}=\left|\det\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}\right|=\left|\frac{\partial y}{\partial v}\right|.$$

不失一般性不妨假设 $\partial y/\partial v > 0$ 在 U 上. 如果 $\Box = [a_\Box, b_\Box] \times [c_\Box, d_\Box]$, 则 $y(u,\cdot)$ 对固定的 $u \in [a_\Box, b_\Box]$ 是递增的. 因此

$$\mathbf{T}(\Box) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a_\Box \le x \le b_\Box,\ y(x,c_\Box) \le y \le y(x,d_\Box)\right\}$$

这是 x- 型区域. 利用定积分第一中值定理计算得到

$$\begin{aligned} |\mathbf{T}(\Box)| &= \int_{a_\Box}^{b_\Box} dx \int_{y(x,c_\Box)}^{y(x,d_\Box)} dy = \int_{a_\Box}^{b_\Box} [y(x,d_\Box) - y(x,c_\Box)]\, dx \\ &= [y(\bar{x},d_\Box) - y(\bar{x},c_\Box)]\,(b_\Box - a_\Box) \end{aligned}$$

这里 $\bar{x} \in [a_\Box, b_\Box]$. 根据中值定理得到

$$|\mathbf{T}(\Box)| = \frac{\partial y}{\partial v}(\bar{u},\bar{v})(d_\Box - c_\Box)(b_\Box - a_\Box) = \mathscr{J}_{\mathbf{T}}(\bar{u},\bar{v})|\Box|$$

这里 $\bar{v} \in [c_\Box, d_\Box]$.

步骤 2: 假设 T 是情形 1 或情形 2. 如果 $f \in C(\Omega)$, 则

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy = \iint_D f\circ\mathbf{T}(u,v)\,\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(u,v)\,dudv.$$

记 $H := \max_\Omega |f|$. 因为存在自然数 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $B_n \subset \widetilde{D}$ 对任何 $n \ge N$ 都成立, 所以 $\max_{B_n} \mathscr{J}_{\mathbf{T}} \le K$ 对某个 $K > 0$ (和 n 无关) 和任何 $n \ge N$ 都成立. **步骤 1** 推出 $|\mathbf{T}(C_n)| \le K|C_n|$ 对任何 $n \ge N$ 都成立, 从而 $\lim_{n\to\infty} |\mathbf{T}(C_n)| = 0$. 记 $D_{ij} := D \cap \Box_{ij}$. 对任意 $(u_{ij}, v_{ij}) \in \Box_{ij}$ 令 $\xi_{ij} = x(u_{ij}, v_{ij})$ 和 $\eta_{ij} = y(u_{ij}, v_{ij})$. 此时

$$\sum_{D_{ij}} f(\xi_{ij},\eta_{ij})|\mathbf{T}(D_{ij})| = \left(\sum_{D_{ij}\subset A_n} + \sum_{D_{ij}\subset D\setminus \mathrm{Int}(A_n)}\right) f(\xi_{ij},\eta_{ij})|\mathbf{T}(D_{ij})| = I + J.$$

若 $D_{ij} \subset A_n$ 则 $D_{ij} = \Box_{ij}$ 且

$$|\mathbf{T}(\Box_{ij})| = \mathscr{J}_{\mathbf{T}}(\bar{u}_{ij},\bar{v}_{ij})|\Box_{ij}|$$

这里 $(\bar{u}_{ij},\bar{v}_{ij}) \in \Box_{ij}$. 故

$$I = \sum_{\Box_{ij}\subset A_n} f(\bar{\xi}_{ij},\bar{\eta}_{ij})|\mathbf{T}(\Box_{ij})| = \sum_{\Box_{ij}\subset A_n} f(\bar{\xi}_{ij},\bar{\eta}_{ij})\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(\bar{u}_{ij},\bar{v}_{ij})|\Box_{ij}|$$

$$= \sum_{\Box_{ij}\subset A_n} f\circ\mathbf{T}(\bar{u}_{ij},\bar{v}_{ij})\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(\bar{u}_{ij},\bar{v}_{ij})|\Box_{ij}|.$$

若 $D_{ij} \subset D \setminus \mathrm{Int}(A_n)$ 取任意 $(\bar{u}_{ij},\bar{v}_{ij}) \in D_{ij}$ 从而

$$J = \sum_{D_{ij}\subset D\setminus \mathrm{Int}(A_n)} f(\bar{\xi}_{ij},\bar{\eta}_{ij})|\mathbf{T}(D_{ij})|$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{D_{ij}\subset D\setminus \mathrm{Int}(A_n)} f\circ \mathbf{T}(\bar{u}_{ij},\bar{v}_{ij})\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(\bar{u}_{ij},\bar{v}_{ij})|D_{ij}| \\
&+ \sum_{D_{ij}\subset D\setminus \mathrm{Int}(A_n)} \left[f(\bar{\xi}_{ij},\bar{\eta}_{ij})|\mathbf{T}(D_{ij})| - f\circ \mathbf{T}(\bar{u}_{ij},\bar{v}_{ij})\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(\bar{u}_{ij},\bar{v}_{ij})|D_{ij}|\right].
\end{aligned}
$$

因为 $D\setminus \mathrm{Int}(A_n)\subset C_n$, 所以

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{D_{ij}\subset D\setminus \mathrm{Int}(A_n)} f(\bar{\xi}_{ij},\bar{\eta}_{ij})|\mathbf{T}(D_{ij})|\right| &\le H\sum_{D_{ij}\subset D\setminus \mathrm{Int}(A_n)} |\mathbf{T}(D_{ij})| \\
&\le H|\mathbf{T}(C_n)| \le HK|C_n|
\end{aligned}
$$

和

$$
\left|\sum_{D_{ij}\subset D\setminus \mathrm{Int}(A_n)} f\circ \mathbf{T}(\bar{u}_{ij},\bar{v}_{ij})\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(\bar{u}_{ij},\bar{v}_{ij})|D_{ij}|\right| \le HK|C_n|.
$$

即得到

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{D_{ij}\subset D\setminus \mathrm{Int}(A_n)} \left[f(\bar{\xi}_{ij},\bar{\eta}_{ij})|\mathbf{T}(D_{ij})| - f\circ \mathbf{T}(\bar{u}_{ij},\bar{v}_{ij})\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(\bar{u}_{ij},\bar{v}_{ij})|D_{ij}|\right]\right| \\
&\le 2HK|C_n| \quad\to\quad 0,\quad n\to+\infty.
\end{aligned}
$$

由于 f 在 Ω 上可积, 我们得到

$$
\begin{aligned}
\iint_\Omega f(x,y)dxdy \leftarrow \sum_{D_{ij}} f(\bar{\xi}_{ij},\bar{\eta}_{ij})|\mathbf{T}(D_{ij})| &\to \sum_{D_{ij}} f\circ \mathbf{T}(\bar{u}_{ij},\bar{v}_{ij})\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(\bar{u}_{ij},\bar{v}_{ij})|D_{ij}| \\
&\to \iint_D f\circ \mathbf{T}(u,v)\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(u,v)dudv.
\end{aligned}
$$

步骤 3: 在任给 $(u_0,v_0)\in U$ 的某个邻域内有 $\mathbf{T}=\mathbf{T}_2\circ\mathbf{T}_1$, 这里 $\mathbf{T}_1,\mathbf{T}_2$ 都是 C^1- 微分同胚且 $\mathbf{T}_i$ 是情形 1 或情形 2. 因为 $\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(u_0,v_0)=|\det(\mathbf{T})(u_0,v_0)| > 0$, 故 x_u,y_u,x_v,y_v 中至少有一个在 (u_0,v_0) 处非零. 不妨假设 $\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)\ne 0$. 考虑映射 $\mathbf{T}(u,v)=(x(u,v),y(u,v))$, $(u,v)\in U$, 和

$$
\mathbf{T}_1(u,v):=(x(u,v),v)
$$

这是**情形 2** 中的映射. 因为在 (u_0,v_0) 处

$$
\det(\mathbf{T}_1)=\det\left(\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)=\frac{\partial x}{\partial u}\ne 0
$$

根据隐函数定理, **定理 12.4.6**, 存在邻域 U_0,Ω_0 满足 $U\supset U_0\ni(u_0,v_0)$, $\Omega\supset\Omega_0\ni(x(u_0,v_0),v_0)$, $g\in C^1(\Omega_0)$, 且映射

$$
\mathbf{T}_1: D_0\longrightarrow\Omega_0,\quad (u,v)\longmapsto(\xi,\eta)
$$

是 C^1- 微分同胚的, 并且进一步有, $\mathbf{T}_1^{-1}(\xi,\eta)=(g(\xi,\eta),\eta)$. 特别地, 我们有

$$g(x(u,v),v)=u$$

对任何 $(u,v)\in U_0$ 都成立. 定义

$$\mathbf{T}_2(\xi,\eta):=(\zeta,y(g(\zeta,\eta),\eta))$$

这是**情形 1** 中的映射. 故得到

$$\mathbf{T}_2\circ\mathbf{T}_1(u,v)=\mathbf{T}_2(x(u,v),v)=(x(u,v),y(g(x(u,v),v),v))=(x(u,v),y(u,v))$$

对任何 $(u,v)\in U_0$ 都成立.

步骤 4: 证明 (13.3.1). 步骤 3 意味着对任何 $(u,v)\in D$, 存在领域 $D_\delta(u,v)$ (其中 δ 依赖于 (u,v)) 使得 $\mathbf{T}=\mathbf{T}_2\circ\mathbf{T}_1$ 在 $D_\delta(u,v)$ 上成立, 这里 $\mathbf{T}_1,\mathbf{T}_2$ 是上述定义的映射. 由于 $(D_{\delta/2}(u,v))_{(u,v)\in D}$ 是 D 的开覆盖而且 D 是紧的 (因为 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中的有界闭集), 故存在 D 的有限子覆盖 $(D_{\delta_i/2}(u_i,v_i))_{1\le i\le N}$, $N\in\mathbf{N}$. 令 $\delta:=\min_{1\le i\le N}\delta_i/2$. 选择 n 充分大使得对任意矩形 $\square_{ij}:=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ 都有 $\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_j-y_{j-1})^2}<\delta$. 对任意 $\square_{ij}\cap\mathrm{Int}(D)\neq\emptyset$, 可找到自然数 $1\le k\le N$ 满足 $D_{ij}:=\square_{ij}\cap D\subset\square_{ij}\subset D_{\delta_k}(u_k,v_k)$. 从而在 D_{ij} 内有 $\mathbf{T}=\mathbf{T}_2^{ij}\circ\mathbf{T}_1^{ij}$. 记

$$\mathbf{T}_1^{ij}(u,v):=(\zeta(u,v),\eta(u,v)),\quad \mathbf{T}_2^{ij}(u,v):=(x(\zeta,\eta),y(\zeta,\eta)).$$

步骤 2 推出

$$\begin{aligned}\iint_\Omega f(x,y)dxdy&=\sum_{1\le i,j\le M}\iint_{\mathbf{T}(D_{ij})}f(x,y)dxdy\\&=\sum_{1\le i,j\le M}\iint_{\mathbf{T}_2^{ij}(\mathbf{T}_1^{ij}(D_{ij}))}f(x,y)dxdy\\&=\sum_{1\le i,j\le M}\iint_{\mathbf{T}_1^{ij}(D_{ij})}f\circ\mathbf{T}_2^{ij}(\zeta,\eta)\mathscr{J}_{\mathbf{T}_2^{ij}}(\zeta,\eta)d\zeta d\eta\\&=\sum_{1\le i,j\le M}\iint_{D_{ij}}f\circ\mathbf{T}_2^{ij}\circ\mathbf{T}_1^{ij}(u,v)\mathscr{J}_{\mathbf{T}_2^{ij}}\circ\mathbf{T}_1^{ij}(u,v)\mathscr{J}_{\mathbf{T}_1^{ij}}(u,v)dudv.\end{aligned}$$

根据链式法则得到

$$\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(u,v)=\mathscr{J}_{\mathbf{T}_2^{ij}\circ\mathbf{T}_1^{ij}}(u,v)=\left(\mathscr{J}_{\mathbf{T}_2^{ij}}\circ\mathbf{T}_1^{ij}(u,v)\right)\mathscr{J}_{\mathbf{T}_1^{ij}}(u,v)$$

从而

$$\begin{aligned}\iint_\Omega f(x,y)dxdy&=\sum_{1\le i,j\le M}\iint_{D_{ij}}f\circ\mathbf{T}(u,v)\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(u,v)dudv\\&=\iint_{\mathbf{T}}f\circ\mathbf{T}(u,v)\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(u,v)dudv.\quad\square\end{aligned}$$

§13.3.2 n 重积分的变量替换

定理 13.3.1 可推广到 n 重积分上来.

定理13.3.2. (n 重积分变量替换) 假设 $U, V \subset \mathbf{R}^n$ 是开集且 $\mathbf{T}: U \to V$ 是 C^1-微分同胚满足 $\mathbf{T}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$. 对任何具有分段光滑边界的有界闭区域 $D \subset U$ 和任何 $f \in C(\mathbf{T}(D))$ 有

$$\int_{\mathbf{T}(D)} f(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} = \int_D f \circ \mathbf{T}(\boldsymbol{x}) \mathscr{J}_{\mathbf{T}}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}. \tag{13.3.3}$$

考虑 2 维**极坐标(polar coordinates)** 变换

$$\begin{aligned} \mathbf{T}: [0, R] \times [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{D}^2_R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le R^2\} \\ (r, \theta) &\longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta), \end{aligned} \tag{13.3.4}$$

此时

$$\mathscr{J}_{\mathbf{T}} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

但 $\mathbf{T}(\{0\} \times [0, 2\pi]) = \{(0, 0)\}$, 因此**定理 13.3.1** 不适用. 但只要先把原点和 x 正轴去掉 (考虑 $\epsilon \le \epsilon \le R$ 和 $\epsilon \le \theta \le 2\pi - \theta$), 再应用**定理 13.3.1**, 最后令 $\epsilon \to 0+$.

- 如果原点在区域 D 外且 D 可表示成

$$D = \{(r, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi] | \varphi(\theta) \le r \le \psi(\theta), \ \alpha \le \theta \le \beta\},$$

  则 (13.3.1) 可化简为

$$\iint_\Omega f(x, y)dxdy = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\varphi(\theta)}^{\psi(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr. \tag{13.3.5}$$

- 如果原点包含在区域 D 内, 此时

$$D = \{(r, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi] | 0 \le r \le \psi(\theta), \ 0 \le \theta \le 2\pi\},$$

  则 (13.3.1) 可化简为

$$\iint_\Omega f(x, y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\psi(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr. \tag{13.3.6}$$

- 如果原点在 D 的边界上, 此时

$$D = \{(r, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi] | 0 \le r \le \psi(\theta), \ \alpha \le \theta \le \beta\},$$

  则 (13.3.1) 可化简为

$$\iint_\Omega f(x, y)dxdy = \int_\alpha^\beta d\theta \int_0^{\psi(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr. \tag{13.3.7}$$

例13.3.3. 计算二重积分

$$I := \iint_{\Omega} dxdy, \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}.$$

解: 考虑区域 $D = \{(r,\theta) | 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$. 则得到

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 rdr = 2\pi \int_0^1 rdr = \pi. \quad \square$$

考虑 3 维**柱面坐标(cylinder coordinates)** 变换

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : [0,+\infty) \times [0,2\pi] \times \mathbb{R} \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R}^3, \\ (r,\theta,z) \quad &\longmapsto \quad (r\cos\theta, r\sin\theta, z), \end{aligned} \tag{13.3.8}$$

此时

$$\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(r,\theta,z) = r.$$

例13.3.4. 计算三重积分

$$I := \iiint_{\Omega} dxdydz, \quad \Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : 0 \le z \le 25 - x^2 - y^2\}.$$

解: 令 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$, 这里 $0 \le r \le 5$, $0 \le \theta \le 2\pi$, 且 $D = \{(r,\theta,z) : 0 \le r \le 5, 0 \le \theta \le 5, 0 \le z \le 25 - r^2\}$. 则得到

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D rdrd\theta dz = \int_0^5 rdr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{25-r^2} dz = 2\pi \int_0^5 r(25-r^2)dr \\ &= \pi \int_0^5 (25-r^2)dr^2 = -\frac{\pi}{2}(r^2-25)^2\Big|_0^5 = \frac{625}{2}\pi. \quad \square \end{aligned}$$

3 维**球面坐标(spherical coordinates)** 定义为

$$x = r\sin\varphi\cos\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\varphi \tag{13.3.9}$$

这里 $0 \le r < \infty$, $0 \le \varphi \le \pi$, 和 $0 \le \theta \le 2\pi$. 定义映射 $\mathbf{T}$ 为

$$\mathbf{T}(r,\varphi,\theta) = (r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) \tag{13.3.10}$$

这里 $\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(r,\varphi,\theta) = r^2\sin\varphi$.

例13.3.5. 计算三重积分

$$I := \iiint_{\Omega} dxdydz, \quad \Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\right\}$$

这里 $a,b,c>0$.

解: 令 $x=ar\sin\varphi\cos\theta$, $y=br\sin\varphi\sin\theta$, 和 $z=cr\cos\varphi$. 则得到

$$I=\int_0^1 dr\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}abcr^2\sin\varphi d\theta=\frac{abc}{3}2\pi\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi=\frac{4\pi}{3}abc.\quad\square$$

一般地引入n **维球面坐标 (nD spherical coordinates)**:

$$\begin{aligned} x^1 &= r\cos\varphi_1,\\ x^2 &= r\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\\ x_3 &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ x^{n-1} &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1},\\ x^n &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}, \end{aligned}\tag{13.3.11}$$

这里 $0\le r<\infty$, $0\le\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-2}\le\pi$, 和 $0\le\varphi_{n-1}\le2\pi$. 定义映射 $\mathbf{T}$ 为

$$\mathbf{T}(r,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1})=(x^1,x^2,\cdots,x^n)\tag{13.3.12}$$

根据 (13.3.11) 得到

$$\mathscr{J}_{\mathbf{T}}(r,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1})=r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}.$$

例13.3.6. 计算 n 重积分

$$I:=\int_{\mathbb{B}^n_R(\mathbf{0})}d\boldsymbol{x},\quad R>0.$$

解: 利用 (13.3.11) 得到

$$\begin{aligned} I &= \int_0^R dr\int_0^{\pi}d\varphi_1\cdots\int_0^{\pi}d\varphi_{n-2}\int_0^{2\pi}r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}d\varphi_{n-1}\\ &= \frac{2\pi R^n}{n}\prod_{1\le i\le n-2}\int_0^{\pi}\sin^{n-1-i}\varphi_i d\varphi_i. \end{aligned}$$

对定积分

$$J_k:=\int_0^{\pi}\sin^k\varphi d\varphi=2\int_0^{\pi/2}\sin^k\varphi d\varphi$$

我们已证

$$J_k=\begin{cases}\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\pi, & k=2m,\\ \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}2, & k=2m+1.\end{cases}$$

故 $I=(2\pi)^kR^{2k}/(2k)!!$ $(n=2k)$ 和 $I=2(2\pi)^kR^{2k+1}/(2k+1)!!$ $(n=2k+1)$.
$\square$

例13.3.7. 证明不等式

$$2\pi(\sqrt{17}-4) \le I := \iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{dxdy}{\sqrt{16+\sin^2 x+\sin^2 y}} \le \frac{\pi}{4}.$$

证: 令

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad 0 \le \theta \le 1, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

则

$$\begin{aligned} I &\le \iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{1}{4} dxdy = \frac{\pi}{4}, \\ I &\ge \int_{x^2+y^2\le 1} \frac{dxdy}{16+x^2+y^2} = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} \frac{rd\theta}{\sqrt{16+r^2}} \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{rdr}{\sqrt{16+r^2}} = 2\pi\sqrt{16+r^2}\Big|_0^1 = 2\pi(\sqrt{17}-4). \quad \square \end{aligned}$$

练习13.3.8. 如果 $f \in C([-1,1])$, 证明

$$\iint_{|x|+|y|\le 1} f(x+y)dxdy = \int_{-1}^1 f(u)du.$$

例13.3.9. (1) 计算二重积分

$$I_A := \iint_{x^2+y^2\le A^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy, \quad A > 0. \tag{13.3.13}$$

解: 令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, 0 \le r \le A$, 和 $0 \le \theta \le 2\pi$. 得到

$$I_A = \int_0^A dr \int_0^{2\pi} e^{-r^2} rd\theta = 2\pi \int_0^A re^{-r^2} dr = \pi\left(1-e^{-A^2}\right).$$

考虑

$$\left(\int_{-A}^A e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_{-A\le x,y\le A} e^{-(x^2+y^2)} dxdy.$$

由于 $\mathbb{B}^2_{\sqrt{2}A} \supset \square_A = [-A,A]\times[-A,A] \supset \mathbb{B}^2_A$, 故

$$\sqrt{\pi}\left(1-e^{-A^2}\right)^{1/2} = I_A^{1/2} \le \int_{-A}^A e^{-x^2} dx \le I_{\sqrt{2}A}^{1/2} = \sqrt{\pi}\left(1-e^{-2A^2}\right)^{1/2}.$$

令 $A\to\infty$ 得到

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = 1. \tag{13.3.14}$$

一般地我们可证

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\pi^{n/2}} e^{-|\boldsymbol{x}|^2} d\boldsymbol{x} = 1. \tag{13.3.15}$$

(2) 考虑二次型

$$\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}x^i x^j = \boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}^T, \quad \boldsymbol{x} = (x^1,\cdots,x^n) \in \mathbb{R}^n,$$

这里 $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ 是正定 $n\times n$ 矩阵. 计算 n 重积分

$$I_A=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}^T}d\boldsymbol{x} \tag{13.3.16}$$

这里 A 是正定 $n\times n$ 矩阵.

解: 存在正交矩阵 $Q\in\mathbf{O}(n)$ 满足

$$A=Q\Lambda Q^T,\quad \Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

这里 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n>0$ 是 A 地特征根. 因此

$$\begin{aligned}I_A&=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\boldsymbol{x}Q\Lambda(\boldsymbol{x}Q)^T}d\boldsymbol{x}=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\boldsymbol{y}\Lambda\boldsymbol{y}^T}d\boldsymbol{y}\\&=\prod_{1\le i\le n}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\sqrt{\pi}\right)=\sqrt{\frac{\pi^n}{\det(A)}}.\ \square\end{aligned}$$

(3) 计算反常积分

$$I_{a,b,c}=\int_{\mathbb{R}}e^{-(ax^2+2bx+c)}dx,\quad a>0,\ b,c\in\mathbb{R}. \tag{13.3.17}$$

解: 作变量替换得到

$$\begin{aligned}I_{a,b,c}&=\int_{\mathbb{R}}e^{-a[(x+\frac{b}{a})^2+\frac{ac-b^2}{a^2}]}dx=e^{\frac{b^2-ac}{a}}\int_{\mathbb{R}}e^{-a(x+\frac{b}{a})^2}dx\\&=e^{\frac{b^2-ac}{a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}=e^{-\frac{\det(A^*)}{a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\end{aligned}$$

这里 A^* 是矩阵 $\begin{bmatrix}a&b\\b&c\end{bmatrix}$. $\square$

一般情形下考虑 n 重积分

$$I_{a_{ij},b_i,c}=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-(\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}x^ix^j+2\sum_{1\le i\le n}b_ix^i+c)}d\boldsymbol{x} \tag{13.3.18}$$

这里 $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ 是正定地, $b_1,\cdots,b_n,c\in\mathbb{R}$. 记

$$\boldsymbol{x}=(x^1,\cdots,x^n),\quad \boldsymbol{b}=(b_1,\cdots,b_n),$$

从而得到

$$I_{a_{ij},b_i,c}=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-(\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}^T+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}+c)}d\boldsymbol{x}.$$

解: 和之前一样有 $A=Q\Lambda Q^T$, 这里 $Q\in\mathbf{O}(m)$ 和 $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$ 且 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n>0$. 故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}^T+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}+c&=(\boldsymbol{x}Q)\Lambda(\boldsymbol{x}Q)^T+2\boldsymbol{b}\boldsymbol{x}^T+c\\=\boldsymbol{y}\Lambda\boldsymbol{y}^T+2\boldsymbol{b}\cdot(Q^{-1})^T\boldsymbol{y}^T+c&=\sum_{1\le i\le n}\lambda_i(y^i)^2+2\sum_{1\le i\le n}\tilde{b}_iy^i+c\end{aligned}$$

$$= \sum_{1\le i\le n} \lambda_i \left(y^i + \frac{\tilde{b}_i}{\lambda_i}\right)^2 + \left(c - \sum_{1\le i\le n} \frac{\tilde{b}_i^2}{\lambda_i}\right)$$

这里 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}Q = (y^1, \cdots, y^n)$ 和 $\tilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b}(Q^{-1})^T = \boldsymbol{b}(Q^T)^{-1} = (\tilde{b}_1, \cdots, \tilde{b}_n)$. 另一方面对矩阵

$$A^* = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b}^T \\ \boldsymbol{b} & c \end{bmatrix}$$

其行列式为

$$\det(A^*) = \det \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b}^T \\ 0 & c - \boldsymbol{b}A^{-1}\boldsymbol{b}^T \end{bmatrix}$$

$$= \left(c - \boldsymbol{b}A^{-1}\boldsymbol{b}^{-1}\right)\det(A) = \left\{c - \boldsymbol{b}\left[(Q^T)^{-1}\Lambda^{-1}Q^{-1}\right]\boldsymbol{b}^T\right\}\det(A)$$

$$= \left(c - \tilde{\boldsymbol{b}}\Lambda^{-1}\tilde{\boldsymbol{b}}^T\right)\det(A) = \left(c - \sum_{1\le i\le n} \frac{\tilde{b}_i^2}{\lambda_i}\right)\det(A).$$

最后得到

$$\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}^T + 2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x} + c = \sum_{1\le i\le n} \lambda_i \left(y^i + \frac{\tilde{b}_i}{\lambda_i}\right)^2 + \frac{\det(A^*)}{\det(A)}$$

这立即推出 $I_{a_{ij},b_i,c} = \sqrt{\pi^n/\det(A)}\exp[-\det(A^*)/\det(A)]$. □

(4) 假设函数 $f(r)$ 在 $r=0$ 处可导且 $f(0)=0$, 考虑区域

$$\Omega_t := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le t^2\}, \quad t>0.$$

求极限

$$I = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{t^4} \iiint_{\Omega_t} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dxdydz =: \lim_{t\to 0+} \frac{I_t}{t^4}.$$

解: 考虑映射 $\mathbf{T}(x,y,z) = (x,y,r := \sqrt{x^2+y^2+z^2})$. 则得到

$$\mathscr{J}_{\mathbf{T}} = \sqrt{r^2-x^2-y^2}/r$$

且

$$I_t = \int_0^t \iint_{r^2-t^2\le x^2+y^2\le r^2} f(r)\frac{r^2-(x^2+y^2)}{r}drdxdy$$

$$= \int_0^t \frac{f(r)}{r}dr \iint_{r^2-t^2\le x^2+y^2\le r^2} \sqrt{r^2-(x^2+y^2)}dxdy$$

$$= \int_0^t \frac{f(r)}{r}\cdot\frac{2}{3}\pi t^3 dr = \frac{2\pi}{3}t^3\int_0^t \frac{f(r)}{r}dr$$

故

$$I = \lim_{t\to 0+} \frac{2\pi}{3}\frac{1}{t}\int_{0-}^t \frac{f(r)}{r}dr = \frac{2\pi}{3}\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t} = \frac{2\pi}{3}f'(0). \quad \square$$

§13.4 反常二重积分

如果在 (13.3.13) 中令 $A\to\infty$ 得到

$$\lim_{A\to\infty}\iint_{x^2+y^2\le A^2}e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\pi.$$

从而可以“定义”

$$\iint_{\mathbf{R}^2}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

为如下极限

$$\lim_{A\to\infty}\iint_{x^2+y^2\le A^2}e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

上述例子启发我们如何定义反常二重积分.

§13.4.1 无界区域上的反常二重积分

假设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 是无界区域且且边界 ∂D 是由有限条光滑曲线所构成. 考虑定义在 D 上的有界函数 f 使得在 D 中的任何可求面积的子区域上是可积的.

定义13.4.1. 函数 f 在 D 上的**反常二重积分**记为

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\lim_{d(\Gamma)\to\infty}\iint_{D_\Gamma}f(x,y)dxdy$$

其中 $d(\Gamma):=d(\Gamma,\partial D)$, Γ 是 D 中的任何曲线满足 $|\Gamma|=0$ 并从 D 中切出有界区域 D_Γ. 称函数 f 在 D 上是**可积的**或反常二重积分是**收敛的**如果上述极限存在且和 Γ 无关. 否则的话称反常二重积分是**发散的**.

引理13.4.2. 假设二元函数 $f(x,y)$ 在 D 上是非负的且 $\{D_n\}_{n\ge1}$ 是 D 中的递增区域列并满足 $\lim_{n\to\infty}d(\Gamma_n)=\infty$, 这里 $\{\Gamma_n\}_{n\ge1}$ 是 D 中的曲线列满足 $|\Gamma_n|=0$ 且每个 Γ_n 切出一个有界区域 D_n. 则

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

收敛当且仅当

$$\left\{\iint_{D_n}f(x,y)dxdy\right\}_{n\ge1}$$

收敛. 此时

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}f(x,y)dxdy. \tag{13.4.1}$$

证: 一个方向显然成立. 假设二重积分列收敛. 任给 Γ 和 D_Γ 如上, 则存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $D_\Gamma\subset D_n$ 对任何 $n\ge N$ 都成立. 由于 f 是非负的, 得到

$$\iint_{D_\Gamma}f(x,y)dxdy\le\iint_{D_n}f(x,y)dxdy\longrightarrow I:=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}f(x,y)dxdy.$$

另一方面对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\iint_{D_N} f(x,y)\,dxdy > I - \epsilon$$

成立. 选择零面积曲线 Γ 满足 $D_\Gamma \supset D_N$ 从而得到

$$\iint_{D_\Gamma} f(x,y)\,dxdy \geq \iint_{D_N} f(x,y)\,dxdy > I - \epsilon. \quad \square$$

例13.4.3. 计算反常二重积分

$$I = \iint_{x^2+y^2 \geq a^2} \frac{dxdy}{r^p}, \quad r := \sqrt{x^2+y^2}, \quad a > 0.$$

解: 考察区域 $D_A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a^2 \leq x^2+y^2 \leq A\}$. 根据**引理 13.4.2** 得到

$$I = \lim_{A\to\infty} \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^A \frac{rdr}{r^p} = \lim_{A\to\infty} \frac{2\pi}{2-p} r^{2-p}\Big|_0^A.$$

从而反常二重积分当 $p > 2$ 时收敛但是当 $p \leq 2$ 时发散. □

下面结论证明和反常积分相应的结论证明是类似的.

性质13.4.4. *假设 $D \subset \mathbf{R}^2$ 是无界区域且边界 ∂D 是分段光滑的.*

(1) *如果在 D 上 $0 \leq f \leq g$, 则*

$$\iint_D g(x,y)\,dxdy \text{ 收敛} \implies \iint_D f(x,y)\,dxdy \text{ 收敛},$$
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \text{ 发散} \implies \iint_D g(x,y)\,dxdy \text{ 发散}.$$

(2) *f 在 D 上收敛若 $|f|$ 在 D 上收敛.*

定理13.4.5. (1) *考虑区域 $D = \{(r,\theta) : a \leq r < \infty, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$, 这里 $0 \leq \alpha, \beta \leq 2\pi$ 和 $a > 0$.*

$$|f(x,y)| \leq \frac{M}{r^p}\ (p > 2) \implies \iint_D f(x,y)\,dxdy \text{ 收敛},$$
$$|f(x,y)| \geq \frac{m}{r^p}\ (p \leq 2) \implies \iint_D f(x,y)\,dxdy \text{ 收敛}.$$

(2) *如果 $f \in C([a,\infty) \times [c,\infty))$ 且*

$$\int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x,y)\,dy \quad \text{和} \quad \int_a^\infty dx \int_c^\infty |f(x,y)|\,dy$$

都存在, 则 f 在 D 上可积且

$$\iint_{[a,\infty)\times[c,\infty)} f(x,y)\,dxdy = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x,y)\,dy.$$

(3) *如果 $\mathbf{T} : D \to \mathbf{T}(D)$ 是 C^1- 微分同胚且, 这里 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中的区域, 则*

$$\iint_{\mathbf{T}(D)} d(x,y)\,dxdy = \iint_D f \circ \mathbf{T}(u,v)\, \mathscr{J}_{\mathbf{T}}(u,v)\; dudv$$

只要其中一个反常二重积分存在.

例13.4.6. 计算反常二重积分

$$I=\iint_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

这个积分已经在 (13.3.13) 计算过了. 根据**定理 13.4.5**, 得到

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\infty}e^{-r^2}dr=2\pi\int_0^{\infty}e^{-r^2}dr=\pi.$$

直接推论为

$$\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{13.4.2}$$

若令 $u=x^2$ 则

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}u^{-1/2}e^{-u}du=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}u^{\frac{1}{2}-1}e^{-u}du.$$

定义**Gamma** 函数为

$$\Gamma(s):=\int_0^{\infty}u^{s-1}e^{-u}du,\quad s>0. \tag{13.4.3}$$

注意到 $\Gamma(s)$ 对任何 $s>0$ 都有定义. 实际上对任何虚部为正的复数 $s\in\mathbf{C}$, 相应的 Gamma 函数 $\Gamma(s)$ 也是有定义的 (这里要用到解析函数的延拓性). 计算

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= \int_0^{\infty}u^ne^{-u}du = \int_0^{\infty}-u^nde^{-u}\\ &= -\left[\frac{u^n}{e^u}\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}nu^{n-1}e^{-u}du\right] = n\Gamma(n).\end{aligned}$$

即

$$\Gamma(n+1)=n!\Gamma(1)=n!$$

这是因为 $\Gamma(1)=1$. 更进一步利用分部积分法可证

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \tag{13.4.4}$$

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)\quad \text{for } s>0. \tag{13.4.5}$$

作为练习请自证.

§13.4.2 无界函数的反常二重积分

假设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是有界区域且 $P_0\in D$. 考虑定义在 $D\setminus\{P\}$ 上的函数 f 且满足 f 在 P_0 的任何邻域内都是无界的. 选择一条关于 P_0 的完全包含在 D 内的 Jordan 闭曲线使得 $|\gamma|=0$ 并记 σ 是这条闭曲线 γ 在 D 内所围成的区域. 假设二重积分

$$\iint_{D\setminus\sigma}f(x,y)dxdy$$

对任意这样的曲线 γ 都存在.

定义13.4.7. 定义无界函数的反常二重积分为

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{\rho(\gamma)\to 0}\iint_{D\setminus\sigma} f(x,y)\,dxdy.$$

这里 $\rho(\gamma) := \sup_{P\in\gamma}|P-P_0|$. 称二元函数 f 在D **上是可积的**或反常二重积分**是收敛的**如果上述极限存在且和 γ 无关. 否则的话称反常二重积分是**发散的**.

例13.4.8. 计算反常二重积分

$$I = \iint_{x^2+y^2\le a^2}\frac{dxdy}{r^p},\quad r=\sqrt{x^2+y^2},\quad a>0.$$

解: 根据定义得到

$$I = \lim_{\rho\to 0}\iint_{\rho^2\le x^2+y^2\le a^2}\frac{dxdy}{r^p} = \lim_{\rho\to 0} 2\pi\int_\rho^a \frac{rdr}{r^p}.$$

所以 I 仅当 $p<2$ 时收敛. □

§13.4.3 Beta 函数

作为应用我们引入**Beta 函数**

$$B(p,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,\quad p,q>0. \tag{13.4.6}$$

注意到 $B(p,q)$ 对任意 $p,q>0$ 都有定义.

性质13.4.9. $p,q>0 \Longrightarrow$ 我们有

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{13.4.7}$$

证: 利用

$$\Gamma(p) = 2\int_0^\infty s^{2p-1}e^{-s^2}ds,\quad \Gamma(q) = 2\int_0^\infty t^{2q-1}e^{-t^2}dt,$$

得到

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= 4\iint_{[0,\infty)\times[0,\infty)} s^{2p-1}t^{2q-1}e^{-(s^2+t^2)}dsdt\\ &= 4\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,d\theta\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2p+2q-2}rdr\end{aligned}$$

$$= \left(2\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,d\theta\right)\left(2\int_0^\infty r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}dr\right) = B(p,q)\Gamma(p+q),$$

这里 $s=r\cos\theta$ 和 $t=r\sin\theta$. □

作为副产品得到

$$B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,d\theta. \tag{13.4.8}$$

例13.4.10. 计算定积分

$$I=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx,\quad J=\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx,\quad n\in\mathbf{N}.\tag{13.4.9}$$

解: 实际上利用 (13.4.7) 和 (13.4.8) 得到

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{n+1}{2}-1}(1-u)^{\frac{1}{2}-1}du=\frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}.\quad\square$$

§13.4.4 * Poisson 核、Hilbert 变换和 Riesz 变换

定义多元函数**Poisson 核 (Poisson kernel)** 如下

$$P(\boldsymbol{x}):=\frac{c_n}{(1+|\boldsymbol{x}|^2)^{\frac{n+1}{2}}},\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n.$$

其中常数 c_n 是使得

$$\int_{\mathbb{R}^n}P(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=1$$

成立.

(1) 利用**例 13.3.6** 和 Gamma 函数性质证明

$$c_n=\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}}.$$

(2) 定义

$$P(t,\boldsymbol{x}):=\frac{1}{t^n}P(\boldsymbol{x}/t),\quad (t,\boldsymbol{x})\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}^n.$$

证明 P 是关于变量 $(t,x^1,\cdots,x^n)$ 的调和函数, 即,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}P+\sum_{1\le i\le n}\frac{\partial^2}{\partial(x^i)^2}P=0.$$

在 Fourier 级数这章, 我们即将看到 $e^{-2\pi|\boldsymbol{x}|}$ 的 Fourier 变换就是 Poisson 核.

证明**Beta 积分恒等式**:

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{d\boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{w}|^{\alpha}|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{w}|^{\beta}}=\pi^{n/2}\frac{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})\Gamma(\frac{n-\beta}{2})\Gamma(\frac{\alpha+\beta-n}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{\beta}{2})\Gamma(n-\frac{\alpha+\beta}{2})}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-\alpha-\beta},$$

这里 $0<\alpha,\beta<n$ 且 $\alpha+\beta>n$.

对两个黎曼可积函数 $f,g\in R(\mathbb{R}^n)$, 定义它们的**卷积(convolution)** 为

$$(f*g)(\boldsymbol{x}):=\int_{\mathbb{R}^n}f(\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}.$$

证明 $f*g\in R(\mathbb{R}^n)$ 并求 $\chi*\chi$, 这里 χ 是单位圆盘 $\mathbb{B}^2(\mathbf{0},1)\subset\mathbb{R}^2$ 的特征函数.

对 $\mathbb{R}$ 上的 f 定义其**截断 Hilbert 变换(truncated Hilbert transform)**为

$$\mathbf{H}_\epsilon(f)(x):=\frac{1}{\pi}\int_{|y|\geq\epsilon}\frac{f(x-y)}{y}dy=\frac{1}{\pi}\int_{|x-y|\geq\epsilon}\frac{f(y)}{x-y}dy.$$

为了方便起见, 定义**Cauchy 主值积分(Cauchy principal value integral)** 如下

$$\mathbf{P.V.}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(x-y)}{y}dy:=\lim_{\epsilon\to0+}\int_{|y|\geq\epsilon}\frac{f(x-y)}{y}dy.$$

因此 f 的**Hilbert 变换(Hilbert transform)** 定义为

$$\mathbf{H}(f)(x):=\lim_{\epsilon\to0+}\mathbf{H}_\epsilon(f)(x)=\frac{1}{\pi}\mathbf{p.v.}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(x-y)}{y}dy.$$

证明 $[a,b]$ 的特征函数 $\chi_{[a,b]}$ 的 Hilbert 变换为

$$\mathbf{H}(\chi_{[a,b]})(x)=\frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|.$$

对每个 $1\leq i\leq n$, 定义多元函数 f 的**第 i 个 Riesz 变换 (i-th Riesz transform)** 为

$$\mathbf{R}_j(f)(\boldsymbol{x}):=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\mathbf{p.v.}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{x^i-y^i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n+1}}f(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y},$$

这里 Cauchy 主值积分 $\mathbf{p.v.}$ 的定义和一元情形相同.

求多元函数 $f(\boldsymbol{x})=e^{-|\boldsymbol{x}|^2}$ 的第 i 个 Riesz 变换.

给定 $s>0$. 定义多元函数 f 的**Riesz 势变换(Riesz potential)** 为

$$\mathbf{I}_s(f)(\boldsymbol{x}):=\frac{1}{2^s\pi^{n/2}}\frac{\Gamma(\frac{n-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{|\boldsymbol{y}|^{n-s}}f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}.$$

多元函数 $f(\boldsymbol{x})=e^{-|\boldsymbol{x}|^2}$ 的 Riesz 势变换.

§13.5 * 微分形式

对平面上任何两个向量 $\boldsymbol{a}=(a^1,a^2)$ and $\boldsymbol{b}=(b^1,b^2)$, 定义**外积**为

$$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}:=\begin{vmatrix} a^1 & a^2\\ b^1 & b^2\end{vmatrix}=a^1b^2-a^2b^1.$$

显然外积满足

(1) $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a}$,

(2) $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{a} = 0$,

(3) $\mathbb{R}^2$ 和外积及数乘构成了 $\mathbb{R}$ 上的一个向量空间.

(4) 如果 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一组基, 则

$$\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$$

这里 $\boldsymbol{a}_1 = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{12}\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{a}_2 = a_{21}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2$.

§13.5.1 * 微分形式和外积

考虑区域 $U \subset \mathbb{R}^n$. 回顾

$$df = \sum_{1 \le i \le n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i, \quad f \in C^1(U). \tag{13.5.1}$$

定义

$$\Lambda^1(U) := \text{由 } dx^1, \cdots, dx^n \text{ 生成} = \left\{ \sum_{1 \le i \le n} a_i(\boldsymbol{x}) dx^i \right\} \tag{13.5.2}$$

这里 $a_i(\boldsymbol{x})$ 是 U 上的函数. 易证 $(\Lambda^1(U), +)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的向量空间且

$$\dim \Lambda^1(U) = n.$$

形式上定义**外积** $\wedge$ 为满足如下条件

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i, \quad 1 \le i, j \le n. \tag{13.5.3}$$

实际上外积来自**张量积**[3]. 易见 $dx^i \wedge dx^i = 0, 1 \le i \le n$. 定义

$$\begin{aligned} \Lambda^2(U) \quad &:= \quad \text{由 } dx^i \wedge dx^j \text{ 生成} \quad (1 \le i, j \le n) \\ &= \quad \text{由 } dx^i \wedge dx^j \text{ 生成} \quad (1 \le i < j \le n). \end{aligned} \tag{13.5.4}$$

从而得到 $\dim \Lambda^2(U) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

同理可定义k**- 形式(k-forms)** 所在的空间

$$\begin{aligned} \Lambda^k(U) \quad &:= \quad \text{由 } dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \text{ 生成} \quad (1 \le i_1, \cdots, i_k \le n) \\ &= \quad \text{由 } dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \text{ 生成} \quad (1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n) \\ &= \quad \left\{ \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} a_{i_1 \cdots i_k}(\boldsymbol{x}) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \right\}. \end{aligned} \tag{13.5.5}$$

同样可得 $\dim \Lambda^k(U) = \binom{n}{k}$ 且 $\Lambda^k(U) = \{0\}$ 若 $k > n$.

[3]具体定义可参见我个人主页上的微分流形课的讲义.

对 $\omega\in\Lambda^i(U)$ 和 $\eta\in\Lambda^j(U)$ 记

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{1\le k_1<\cdots<k_i\le n} a_{k_1\cdots k_i}dx^{k_1}\wedge\cdots\wedge dx^{k_i} = \sum_{|I|=i} a_I d\mathbf{x}^I,\\ \eta &= \sum_{1\le \ell_1<\cdots<\ell_j\le n} b_{\ell_1\cdots \ell_j}dx^{\ell_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\ell_i} = \sum_{|J|=j} b_J d\mathbf{x}^J.\end{aligned}$$

其中 $I: k_1<\cdots<k_i$ 和 $J: \ell_1<\cdots<\ell_j$ 都是 $\{1,\cdots,n\}$ 中的有序指标集, a_I, b_I 是 U 上的函数, 且 $d\mathbf{x}^I := dx^{k_1}\wedge\cdots\wedge dx^{k_i}$(类似可定义 $d\mathbf{x}^J$). 此时定义**外积(wedge product)** 为

$$\omega\wedge\eta := \sum_{|I|=i,|J|=j} a_I b_J dx^I\wedge dx^J \in \Lambda^{i+j}(U). \tag{13.5.6}$$

对 U 上的函数 f 定义

$$f\omega := \sum_{|I|=i}(fa_I)dx^I. \tag{13.5.7}$$

定理13.5.1. (1) $\omega\in\Lambda^p(U)$ 和 $\eta\in\Lambda^q(U)$ $(p+q>n)\Longrightarrow \omega\wedge\eta=0$.

(2) $\omega\in\Lambda^p(U)$ 和 $\eta\in\Lambda^q(U)\Longrightarrow \omega\wedge\eta=(-1)^{pq}\eta\wedge\omega$.

(3) $\omega\in\Lambda^p(U)$ 且 p 是奇数 $\Longrightarrow \omega\wedge\omega=0$.

(4) $\omega,\eta,\sigma\Longrightarrow$ 有

$$\begin{aligned}(\omega+\eta)\wedge\sigma &= \omega\wedge\sigma+\eta\wedge\sigma,\\ \sigma\wedge(\omega+\eta) &= \sigma\wedge\omega+\sigma\wedge\eta,\\ (\omega\wedge\eta)\wedge\sigma &= \omega\wedge(\eta\wedge\sigma).\end{aligned}$$

回到**定理 13.3.1**, 其中

$$\mathbf{T}(u,v)=(x(u,v),y(u,v)).$$

因为 $dx=x_u du+x_v dv$ 和 $dy=y_u du+y_v dc$, 所以

$$dx\wedge dy=\begin{vmatrix} x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix} du\wedge dv=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}du\wedge dv.$$

若把 $dx\wedge dy$ 看成是"正"面积元, 则 $\partial(x,y)/\partial(u,v)=\mathscr{J}_{\mathbf{T}}$ 从而 (13.4.1) 等价于

$$\iint_{\mathbf{T}(D)} f(x,y)dx\wedge dy=\iint_D f\circ\mathbf{T}(u,v)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}du\wedge dv. \tag{13.5.8}$$

§13.5.2 * 上同调群

考虑 $\Lambda^k(U)$ 中的子集:

$$\Lambda^k_\infty(U) := \left\{\omega\in\Lambda^k(U) \text{ 满足 } a_{i_1\cdots i_k}\in C^\infty(U)\right\}. \tag{13.5.9}$$

定义**外微分算子(exterior differential)**

$$\mathbf{d} : \Lambda^k_\infty(U) \longrightarrow \Lambda^{k+1}_\infty(U) \tag{13.5.10}$$

为

$$\mathbf{d}\left(\sum_{|I|=k} a_I(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}^I\right) := \sum_{|I|=k} da_I(\boldsymbol{x}) \wedge d\boldsymbol{x}^I = \sum_{|I|=k, 1\le j\le n} \frac{\partial a_I}{\partial x^j}(\boldsymbol{x})dx^j \wedge d\boldsymbol{x}^I.$$

比如对任何光滑函数 f 有 $\mathbf{d}f = df$ (通常的全微分), 而对 1- 形式有

$$\mathbf{d}\left(\sum_{1\le i\le n} a_i dx^i\right) = \sum_{1\le i<j\le n}\left(\frac{\partial a_j}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^j}\right)dx^i \wedge dx^j.$$

因为易证 $\mathbf{d}^2 = 0$ 所以我们得到**复形(complex)** $(\Lambda^\bullet(U), d)$:

$$\cdots \xrightarrow{\ \mathbf{d}\ } \Lambda^k_\infty(U) \xrightarrow{\ \mathbf{d}\ } \Lambda^{k+1}_\infty(U) \xrightarrow{\ \mathbf{d}\ } \cdots$$

定义 U 的k **阶上同调群(k-th cohomology group)** 为

$$H^k(U) := \frac{\mathrm{Ker}(d|_{\Lambda^k_\infty(U)})}{\mathrm{Im}(d|_{\Lambda^{k-1}_\infty(U)})}. \tag{13.5.11}$$

称 $\omega \in \Lambda^k_\infty(U)$ 是**闭的(closed)** 如果 $\mathbf{d}\omega = 0$, 是**正合的(exact)** 如果 $\omega = \mathbf{d}\eta$ 对某个 $\eta \in \Lambda^{k-1}_\infty(U)$ 成立. 显然正合微分形式必是闭的.

例13.5.2. 考虑 $\mathbf{R}^2$ 上的 1- 形式

$$\alpha = [2x + y\cos(xy)]\,dx + [x\cos(xy)]\,dy.$$

如果 $\alpha = df$, 则

$$f_x = 2x + y\cos(xy), \quad f_y = x\cos(xy)$$

从而得到

$$f(x,y) = x^2 + \sin(xy)$$

差一个加法常数. 因此 α 是正合的.

例13.5.3. 考虑 $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上的 1- 形式

$$\alpha = \frac{1}{2\pi}\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

易证 $d\alpha = 0$ 但是 α 不是正合的. 否则的话若 $\alpha = df$ 对某个光滑函数 f 成立, 则根据下章中的Stokes 公式得到

$$1 = \int_{\mathbf{S}^1}\alpha = \int_{\mathbf{S}^1} df = \int_{\partial\mathbf{S}^1} f = 0.$$

回忆到区域 $U \subset \mathbb{R}^n$ 称为关于 $\mathbf{0}$ 是**星型的**如果 $\mathbf{0} \in U$ 且对任意 $\boldsymbol{x} \in U$ 都有 $\overline{\mathbf{0}\boldsymbol{x}} \subset U$. 注意到凸区域必是 (关于任意点是) 星型的, 但是反之不一定成立.

对 $\forall\, k$- 形式 $\omega = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} a_{i_1\cdots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ 定义映射

$$\mathbf{P} : \Lambda^k_\infty(U) \longrightarrow \Lambda^{k-1}_\infty(U) \tag{13.5.12}$$

为

$$\mathbf{P}\omega = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \sum_{1\le j\le k} (-1)^{j-1} \left[\int_0^1 t^{k-1} a_{i_1\cdots i_k}(t\boldsymbol{x})dt\right] dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_j}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

则可证

$$(\mathbf{d} \circ \mathbf{P} + \mathbf{P} \circ \mathbf{d})\omega = \omega. \tag{13.5.13}$$

如果 ω 是闭的则 (13.5.13) 告诉我们 $\omega = \mathbf{d}(\mathbf{P}\omega)$ 从而 ω 是正合的. 作为直接推论

$$H^k(U) = 0\ (1 \le k \le n) \quad \text{对任意星型区域 } U \text{ 都成立.} \tag{13.5.14}$$

练习13.5.4. (1) 验证 (13.5.13).

(2) 证明**定理**13.5.1.

(3) 证明 $H^0(U) = \mathbb{R}$, 对任何区域 $U \subset \mathbb{R}^n$ 都成立.

(4) 考虑区域 $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z = 0\}$. 证明不存在函数 F 满足

$$\mathbf{grad}(F) = f,$$

这里

$$f(x, y, z) := \left(\frac{-2xz}{z^2 + (x^2 + y^2 - 1)^2}, \frac{-2yz}{z^2 + (x^2 + y^2 - 1)^2}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{z^2 + (x^2 + y^2 - 1)^2}\right).$$

(**提示:** 考虑曲线 $\gamma(t) = (\sqrt{1 + \cos t}, 0, \sin t)$, $-\pi \le t \le \pi$, 并计算 $\frac{d}{dt}F(\gamma(t))$.)

§13.6 重积分的应用

本节给出下章需要用到的曲面面积的计算.

§13.6.1 曲面面积

假设曲面为

$$\Sigma: x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v), \quad (u,v) \in D,$$

或写成向量值函数

$$\boldsymbol{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad (u,v) \in D,$$

这里 D 是具有光滑或分段光滑边界 ∂D 的有界闭区域, $\boldsymbol{r}: D \to \Sigma$ 是单的, $x, y, z \in C^1$, 且 Jacobi 矩阵

$$\mathbf{Jac}(\boldsymbol{r}) = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix} \tag{13.6.1}$$

是满秩的.

(1) 仿照之前的**几何直观性**, 对任意 $(u_0, v_0) \in D$ 且 $\Delta u, \Delta v$ 充分小使得 $(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) \in D$, 考虑 Σ 中的 4 个点:

$$\begin{aligned} P_1 &= \boldsymbol{r}(u_0, v_0) &&= \boldsymbol{r}_0, \\ P_2 &= \boldsymbol{r}(u_0 + \Delta u, v_0) &&\approx \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}_u(u_0, v_0)\Delta u, \\ P_3 &= \boldsymbol{r}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v), && \\ P_4 &= \boldsymbol{r}(u_0, v_0 + \Delta v) &&\approx \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)\Delta v. \end{aligned}$$

则这 4 个点围成的面积

$$\Delta S \approx \left|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_4}\right| = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|(u_0, v_0)\Delta u \Delta v.$$

故

$$dS = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| du dv. \tag{13.6.2}$$

(2) 由此得到光滑曲面的面积

$$S = \iint_D |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| du dv. \tag{13.6.3}$$

定理13.6.1. *在上述假设条件下, 曲面 Σ 的面积为*

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv, \tag{13.6.4}$$

这里

$$\begin{aligned} E &:= \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_u &&= x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \\ F &= \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v &&= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \\ G &= \boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{r}_v &&= x_v^2 + y_v^2 + z_v^2, \end{aligned} \tag{13.6.5}$$

是曲面的 **Gauss 系数 (Gauss coefficients)**.

证: 根据

$$\boldsymbol{r}_u=(x_u,y_v,z_v),\quad \boldsymbol{r}_v=(x_v,y_v,z_v)$$

得到

$$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_u&y_u&z_u\\x_v&y_v&z_v\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right).$$

直接计算可得

$$|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|^2=EG-F^2.\ \ \square$$

如果曲面 Σ 的方程为 $z=f(x,y),(x,y)\in D$, 则

$$\boldsymbol{r}=(x,y,f(x,y)).$$

因此得到

$$\boldsymbol{r}_x=(1,0,f_x),\quad \boldsymbol{r}_y=(0,1,f_y)$$

和

$$E=1+f_x^2,\quad F=f_xf_y,\quad G=1+f_y^2,\quad EG-F^2=1+f_x^2+f_y^2.$$

此时 (13.6.4) 变成

$$S=\iint_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy=\iint_D\sqrt{1+|\mathbf{grad}(f)|^2}dxdy. \tag{13.6.6}$$

假设曲面 Σ 的方程为 $H(x,y,z)=0, H\in C^1$, 且 $H_z\neq 0$, Σ 在 xy 平面上的投影为 D. 此时根据隐函数定理得到 $z=f(x,y)$ 且

$$f_x=-\frac{H_x}{H_z},\quad f_y=-\frac{H_y}{H_z}.$$

利用 (13.6.6) 得到

$$S=\iint_D\frac{|\mathbf{grad}(H)|}{|H_z|}dxdy. \tag{13.6.7}$$

例13.6.2. (1) 求曲面 $z=1-x^2-y^2$ 在 xoy 平面上方部分的面积.

解: 计算得到

$$\begin{aligned}S&=\iint_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1+|\mathbf{grad}(f)|^2}dxdy,\quad f(x,y):=1-x^2-y^2\\&=\iint_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy=2\pi\int_0^1\sqrt{1+4r^2}rdr\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^4 \sqrt{1+t}\,dt = \frac{3\pi}{8}(5\sqrt{5}-1). \quad \square$$

(2) 计算球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被柱面 $x^2+y^2\le ax$ 所截出的曲面的面积.

解: 根据对称性得到

$$\begin{aligned} S &= 4\iint_{x,y\ge 0,x^2+y^2\le ax} \frac{|\mathbf{grad}(H)|}{|H_z|}dxdy, \quad H := x^2+y^2+z^2-z^2 \\ &= 4\iint_{x,y\ge 0,x^2+y^2\le ax} \frac{2a}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy \\ &= 4a\iint_{x,y\ge 0,x^2+y^2\le ax} \frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \\ &= 4a\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \frac{rdr}{\sqrt{a^2-r^2}} = 4a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right). \quad \square \end{aligned}$$

§13.6.2 * 极小曲面

我们利用 (13.6.6) 来推出**极小曲面方程(minimal surface equation)**, 先引入如下记号. 对向量值函数 $\boldsymbol{F}(x,y)=(u(x,y),v(x,y))$ 定义其**散度(divergence)** 为

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{F}) := u_x + v_y.$$

这样二元函数 $f(x,y)$ 的 Laplace 算子可写成

$$\Delta f = f_{xx}^2 + f_{yy}^2 = \mathbf{div}(\mathbf{grad}(f)).$$

为了方便, 我们把 (13.6.6) 中的面积显示地表示为 $S=S(f)$. **极小曲面**是指在所有固定边界值的 C^1 二元函数中找到使 $S(f)$ 为最小的 f. 现在固定二元函数 f 并作小扰动, 即考虑二元函数 $f+\epsilon h$. 因为函数 f 和 $f+\epsilon h$ 具有固定的边界值, 所以 $h|_{\partial D}=0$. 计算

$$\begin{aligned} S(f+\epsilon h) &= \iint_D \sqrt{1+|\mathbf{grad}(f+\epsilon h)|^2}dudv \\ &= \iint_D \sqrt{1+|\mathbf{grad}(f)|^2+2\epsilon\langle\mathbf{grad}(f),\mathbf{grad}(h)\rangle+\epsilon^2\mathbf{grad}(h)|^2}dudv \\ &= \iint_D \left(\sqrt{1+|\mathbf{grad}(f)|^2}+\frac{2\epsilon\langle\mathbf{grad}(f),\mathbf{grad}(h)\rangle+\epsilon^2|\mathbf{grad}(h)|^2}{2\sqrt{1+|\mathbf{grad}(f)|^2}}+o(\epsilon^2)\right)dudv \\ &= S(f)+\epsilon\iint_D \frac{\langle\mathbf{grad}(f),\mathbf{grad}(h)\rangle}{\sqrt{1+|\mathbf{grad}(f)|^2}}dudv+o(\epsilon). \end{aligned}$$

如果 f 是使 $S(f)$ 达到极小, 则

$$S'_h(f) := \lim_{\epsilon\to 0}\frac{S(f+\epsilon h)-S(f)}{\epsilon} = 0, \quad \forall\, h\in C^1(D) \text{ 且 } h|_{\partial D}=0$$

即

$$0 = \iint_D \frac{\langle \mathbf{grad}(f), \mathbf{grad}(h)\rangle}{\sqrt{1+|\mathbf{grad}(f)|^2}} dudv = \iint_D -h\mathbf{div}\left(\frac{\mathbf{grad}(f)}{\sqrt{1+|\mathbf{grad}(f)|^2}}\right) dudv.$$

这里最后一步用到了 Stokes 公式或散度公式. 最后得到极小曲面方程

$$0 = \mathbf{div}\left(\frac{\mathbf{grad}(f)}{\sqrt{1+|\mathbf{grad}(f)|^2}}\right). \tag{13.6.8}$$

练习13.6.3. 验证 (a) $f(x,y) = \tan^{-1}(y/x)$, (b) $f(x,y) = \cosh^{-1}\sqrt{x^2+y^2}$, (c) $f(x,y) = \ln(\cos y/\cos x)$ 都满足极小曲面方程 (13.6.8).

极小曲面的文献众多, 有兴趣的可参阅如下专著和论文:

- Colding, Tobias Holck; Minicozzi, William P., II. *A course in minimal surfaces*, Graduate Studies in Mathematics, **121**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011. xii+313 pp. ISBN: 978-0-8218-5323-8

- Dierkes, Ulrich; Hildebrandt, Stefan; Sauvigny, Friedrich. *Minimal surfaces*, Revised and enlarged second edition, With assistance and contributions by A. Küster and R. Jakob, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **339**. Springer, Heidelberg, 2010. xvi+688 pp. ISBN: 978-3-642-11697-1

- Dierkes, Ulrich; Hildebrandt, Stefan; Tromba, Anthony. *Regularity of minimal surfaces*, Revised and enlarged second edition, With assistance and contributions by A. Küster, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **340**. Springer, Heidelberg, 2010. xviii+623 pp. ISBN: 978-3-642-11699-5

- Dierkes, Ulrich; Hildebrandt, Stefan; Tromba, Anthony. *Global analysis of minimal surfaces*, Revised and enlarged second edition, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **341**. Springer, Heidelberg, 2010. xvi+537 pp. ISBN: 978-3-642-11705-3

- Giusti, Enrico. *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, Monographs in Mathematics, **80**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1984. xi+240 pp. ISBN: 0-8176-3153-4

- Meeks, William H., III; Pérez, Joaquin. *A survey on classical minimal surface theory*, University Lecture Series, **60**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012. x+182 pp. ISBN: 978-0-8218-6912-3

- Nitsche, Johannes C. C. *Lectures on minimal surfaces*, Vol. **1**, Introduction, fundamentals, geometry and basic boundary value problems. Translated from the German by Jerry M. Feinberg. With a German foreword. Cambridge University Press, Cambridge, 1989. xxvi+563 pp. ISBN: 0-521-24427-7

- Osserman, Robert. *A survey of minimal surfaces*, Van Nostrand Reinhold Co., New York-London-Melbourne, 1969 iv+159 pp.

- Pitts, John T. *Existence and regularity of minimal surfaces on Riemannian manifolds*, Mathematical Notes, **27**, Princeton University Press, Princeton, N. J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1981. iv+330 pp. ISBN: 0-691-08290-1

- Colding, Tobias Holck; Minicozzi, William P., II. *The space of embedded minimal surfaces of fixed genus in a* 3*-maniufold, I-V*, Ann. of Math., **160**(2004), 27-68, 69-92, 523-572, 573-615; **181**(2015), 1-153.

§13.6.3 $\mathbb{R}^n$ 中的 k 维曲面

在本小节我们将 $\mathbb{R}^3$ 中参数化曲面的定义推广到 $\mathbb{R}^n$ 中一般曲面的定义.

定义13.6.4. $\mathbb{R}^n$ 中的k **维曲面 (k-dimensional surface)** 是指集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ 使得对任意 $\boldsymbol{x} \in S$ 都存在 S 中的邻域 U, 即 $U = S \cap \mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}, r)$, 和同胚映射 $\boldsymbol{\varphi} : \mathbb{R}^k \to U$. 称 $(U, \boldsymbol{\varphi})$ 为曲面 S 的**局部坐标卡 (local chart)**.

因为函数 $\frac{2}{\pi}\arcsin x$ 给出了$\mathbb{R}$ 和$(-1,1)$ 的一个同胚映射, 所以我们可以把同胚映射$\boldsymbol{\varphi} : \mathbb{R}^k \to U$ 写成$\boldsymbol{\varphi} : (-1,1)^k \to U$.

称 $\{(U_i, \boldsymbol{\varphi}_i)\}_{i\geq 1}$ 为曲面 S 的**坐标集 (atlas)** 若对任意 $i \geq 1$, $\boldsymbol{\varphi}_i : (-1,1)^k \to U_i$ 是局部坐标卡且 $S = \cup_{i\geq 1} U_i$.

k 维曲面 S 是$\boldsymbol{C^m}$ 的, $m \geq 1$, 如果存在 S 的坐标集 $\{(U_i, \boldsymbol{\varphi}_i)\}_{i\geq 1}$ 其中 $\boldsymbol{\varphi}_i : (-1,1)^k \to U \subset \mathbb{R}^n$ 是 C^m 的且在每一点的秩都是 k.

若把映射 $\boldsymbol{\varphi}_i : (-1,1)^k \to U \subset \mathbb{R}^n$ 记成

$$\boldsymbol{\varphi}_i = (\varphi_i^1, \cdots, \varphi_i^n), \quad \varphi_i^j : (-1,1)^k \to \mathbb{R}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

则 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 是 C^k 的就等价于说每个 φ_i^j 都是 C^m 的. 而映射 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 在 $\boldsymbol{t} = (t^1, \cdots, t^k)$ 上的秩就定义为矩阵

$$\begin{bmatrix} (\varphi_i^1)_{t^1} & \cdots & (\varphi_i^1)_{t^k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_i^n)_{t^1} & \cdots & (\varphi_i^n)_{t^k} \end{bmatrix}$$

在 $\boldsymbol{t}$ 处的秩.

例13.6.5. (曲面的例子) (1) 假设 $F^i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}, 1\le i\le n-k$, 是 C^m 的, 并定义集合

$$S=\left\{\boldsymbol{x}=(x^1,\cdots,x^n)\in\mathbb{R}^n: F^1(\boldsymbol{x})=\cdots=F^{n-k}(\boldsymbol{x})=0\right\}.$$

如果 $\boldsymbol{F}=(F^1,\cdots,F^{n-k})$ 在 S 上每一点的秩都是 $n-k$, 则 $S=\varnothing$ 或者 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 k 维 C^m 曲面.

证: 这是因为根据隐函数定理, **定理 12.4.6**, 在每点 $\boldsymbol{x}_0\in S$ 附近我们得到

$$x^{k+1}=f^{k+1}(x^1,\cdots,x^k),\quad\cdots,\quad x^n=f^n(x^1,\cdots,x^k),$$

这里 $f^{k+1},\cdots,f^n\in C^m$. 这样就得到了局部坐标卡映射

$$\boldsymbol{t}=(t^1,\cdots,t^k)\longmapsto(x^1,\cdots,x^k,x^{k+1},\cdots,x^n)=(\boldsymbol{t},f^{k+1}(\boldsymbol{t}),\cdots,f^n(\boldsymbol{t})).$$

因此 S 是 k 维 C^m 曲面. □

(2) 若考虑函数

$$F(x^1,\cdots,x^n):=\sum_{1\le i\le n}(x^i)^2-r^2,\quad \boldsymbol{x}=(x^1,\cdots,x^n)\in\mathbb{R}^n,\ r>0,$$

根据 (1) 可知

$$S:=\mathrm{Ker}(F)=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:|\boldsymbol{x}|^2=r^2\right\},\quad r>0,$$

是 $\mathbb{R}^n$ 中的 $(n-1)$ 维光滑曲面, 即球面 $\mathbb{S}_r^{n-1}=\mathbb{S}^{n-1}(\boldsymbol{0},r)$ 是我们意义下的光滑曲面.

(3) 环面 $\mathbb{T}^2$.

(4) **Möbius 带[4] (Möbius band)**.

(5) **Klein 瓶[5] (Klein bottle)**.

H. Whitney[6]在 1936 年证明了任何 k 维光滑曲面都可以微分同胚地映到 $\mathbb{R}^{2k+1}$ 中的曲面上.

---

[4]August Ferdinand Möbius, 1790 年 11 月 17 日 - 1868 年 9 月 26 日, 今德国萨克森 - 安哈尔特州舒尔佛特人, 德国数学家和天文学家. 他最出名的工作是发现了不可定向的二维曲面 Möbius 带, 此外有众多数学概念与他有关: Möbius 变换、Möbius 函数、Möbius 反演公式等.

[5]Christian Felix Klein, 1849 年 4 月 25 日 - 1925 年 6 月 22 日, 今德国北莱茵 - 威斯特法伦州杜塞尔多夫人, 德国杰出的数学家. Klein 是第一个认识到不需要用曲面来获得非欧几何模型的人 (1871). 在 1872 年, 他发表了著名的 Erlangen 纲领, 在演说《Vergleichende betrachtungen über neuere geometrische forschungen》中利用对称群来分类几何学.

[6]Hassler Whitney, 1907 年 3 月 23 日 - 1989 年 5 月 10 日, 美国纽约市人, 美国数学家. 1983 年 Wolf 奖得主. 他在 1936 年证明了著名的 Whitney 嵌入和浸入定理; 他是上同调理论、示性类理论 (Stiefel - Whitney 类) 的主要发展者之一; 他在 1950 年代主要研究奇异空间的拓扑和光滑映射的奇点理论.

曲面的定向. 假设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 k 维光滑曲面. 任取两个坐标卡 (U_i,φ_i) 和 (U_j,φ_j) 满足 $U_i\cap U_j\neq\emptyset$. 从而得到两个微分同胚映射

$$\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}:\varphi_i^{-1}(U_i\cap U_j)\longrightarrow\varphi_j^{-1}(U_i\cap U_j),$$

和

$$\varphi_i\circ\varphi_j^{-1}:\varphi_j^{-1}(U_i\cap U_j)\longrightarrow\varphi_i^{-1}(U_i\cap U_j).$$

称两个局部坐标卡 (U_i,φ_i) 和 (U_j,φ_j) 是**相容的 (consistent)** 如果 $U_i\cap U_j=\emptyset$, 或者 $U_i\cap U_j\neq\emptyset$ 且 $\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}$ 与 $\varphi_i\circ\varphi_j^{-1}$ 的 Jacobian 矩阵都是正定的.

(1) 曲面 S 上的坐标集称为**定向坐标集 (orienting atlas)** 如果它是由互相相容的局部坐标卡所构成.

(2) 称曲面 S 是**可定向的 (orientable)** 如果它有一个定向坐标集, 否则的话称为**不可定向的 (nonorientable)**.

(3) 曲面 S 上两个定向坐标集是**等价的 (equivalent)** 如果它们的并仍旧是 S 的定向坐标集.

　　若记 $\mathfrak{O}$ 是曲面 S 上的所有定向坐标集的全体, 则定向坐标集等价就构成了 $\mathfrak{O}$ 中的等价关系 $\sim$. 这是因为如果

$$\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\geq1}\sim\{(V_j,\psi_j)\}_{j\geq1},\quad\{(V_j,\psi_j)\}_{j\geq1}\sim\{(W_k,\phi_k)\}_{k\geq1},$$

则根据等式

$$\varphi_i\circ\phi_k^{-1}=\left(\varphi_i\circ\psi_j^{-1}\right)\circ\left(\psi_j\circ\phi_k^{-1}\right)$$

可知 $\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\geq1}\sim\{(W_k,\phi_k)\}_{k\geq1}$.

　　因此把 $\mathfrak{O}/\sim$ 中的等价类称为曲面 S 的**坐标集定向类 (orientation class of atlases)** 或简称为曲面的**定向 (orientation)**.

(4) 曲面 S 称为**定向曲面 (oriented surface)** 如果 S 上有一个定向.

性质13.6.6. 可定向的连通光滑曲面 S 上有且仅有两个定向.

证: 具体证明细节会在微分流形这章展开. □

例13.6.7. (1) $\mathbb{R}^n$ 是定向曲面. 任取 $\mathbb{R}^n$ 上的两个标架 $\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$ 和 $\{e_i'\}_{1\leq i\leq n}$, 则得到

$$e_i'=\sum_{1\leq j\leq n}a_{ij}e_j,\quad 1\leq i\leq n,\quad A=[a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}.$$

因此$\det A\neq0$ 且所有标架根据$\det A>0$ 或$\det A<0$ 分为两类, 使得每一类中的任何两个标架间的转移矩阵都是正定的. 这样就验证了**性质13.6.6**. 把每个等价类里的标架叫做$\mathbb{R}^n$ 的**定向标架 (orienting frame)**.

(2) Möbius 带是不可定向的曲面. 把矩形扭转180 度后, 再将两侧边粘合. 这样就得到了著名的Möbius 带.

(3) Klein 瓶也是不可定向的曲面. 把矩形上下两边粘合得到圆柱体, 再把该圆柱体的上下底面扭转180 度后粘合. 这样就得到了著名的Klein 带. 在三维空间里无法实现这个曲面, 而在四维空间就可以了.

(4) $\mathbb{S}^k \subset \mathbb{R}^n$ 是可定向的曲面.

(5) 环面$\mathbb{T}^2$ 是可定向的曲面. 把矩形上下两边粘合得到圆柱体, 再把该圆柱体的上下底面粘合. 这样就得到了环面.

现在假设S 是可定向的$(n-1)$ 维曲面且嵌入到$\mathbb{R}^n$ 中, 并令$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 是$\mathbb{R}^n$ 上一个固定的定向标架. 令$\mathbf{T}_{\boldsymbol{x}}S$ 表示S 在$\boldsymbol{x} \in S$ 处的$(n-1)$ 维切平面, 而$\mathbf{n}$ 表示和$\mathbf{T}_{\boldsymbol{x}}S$ 垂直的单位向量(即曲面S 在$\boldsymbol{x} \in S$ 处的法向量). 在$\mathbf{T}_{\boldsymbol{x}}S$ 上取标架$\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-1}$ 使得$(\mathbf{n}, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-1})$ 和$(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ 属于$\mathbb{R}^n$ 上的相同定向类. 这样不仅确定了$\mathbf{T}_{\boldsymbol{x}}S$ 上的定向类, 而且, 给定$\mathbf{T}_{\boldsymbol{x}}S$ 上的定向类, 可定向的连通曲面的定向可以由法向量$\mathbf{n}$ 所确定.

可以证明$\mathbb{R}^n$ 中$(n-1)$ 维嵌入曲面的定向等价于曲面上非零连续法向量场的存在性. 在几何里, 我们把其上存在单位连续法向量场的$\mathbb{R}^n$ 中的连通$(n-1)$ 维曲面称为**双侧曲面 (two-sided surface)**, 否则的话称为**单侧曲面 (one-sided surface)**. 比如, $\mathbb{R}^3$ 中的球面、环面和平面都是双侧曲面, 而Möbius 带是单侧曲面.

任给$\mathbb{R}^n$ 中的连通光滑曲面S 和任意的点$\boldsymbol{x} \in S$, 我们可以在$\boldsymbol{x}$ 附近把曲面局部参数化. 在切平面$\mathbf{T}_{\boldsymbol{x}}S$ 中, 我们利用曲面坐标系统的坐标线来构造一组标架$\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-1}$ 使它们和坐标线相切.

如果$\mathbb{R}^n$ 已经是定向的(取定向标为$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$))且曲面$S$ 的定向已通过单位连续法向量场所确定了, 此时我们选择该法向量场在$\boldsymbol{x}$ 处的单位向量$\mathbf{n}$ 并比较标架$(\mathbf{n}, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-1})$ 和标架$(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$. 如果这两个标架在同一个定向类中, 那么通过曲面局部参数化而确定的局部坐标卡就给出了曲面S 的已知定向. 如果这两个标架不在同一个定向类中, 那么通过曲面局部参数化而确定的局部坐标卡就给出了曲面S 上已知定向的反向; 但是此时如果交换坐标的次序就得到了曲面S 的已知定向.

比如考虑$\mathbb{R}^2$ 中的曲线情形. 此时定向定义为曲线的切向量场, 并称为**物体沿着曲线的方向 (direction of motion along the curve)**. 假设$\mathbb{R}^2$ 的定向标架已给定且C 是闭光滑曲线, 那么由闭曲线C 所围区域D 的**环路正方向 (positive direction of circuit)** 定义为标架$(\mathbf{n}, \mathbf{v})$ 使得它和所给$\mathbb{R}^2$ 的定向标架相容, 这里$\mathbf{n}$ 是闭曲线C 相对于区域D 的外法向量而$\mathbf{v}$ 是曲线的切向量. 这就给出了

区域D 的一个定向, 即沿着$C = \partial D$ 走一圈区域D 总在左侧– **传统定义**.

曲面的边界及其定向. 在$\mathbb{R}^k$ 中考虑半平面

$$\mathbb{H}^k := \{\boldsymbol{t} = (t^1, \cdots, t^k) \in \mathbb{R}^k : t^k \geq 0\}. \tag{13.6.9}$$

超平面

$$\partial\mathbb{H}^k := \{\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^k : t^k = 0\} \tag{13.6.10}$$

称为$\mathbb{H}^k$ 的**边界 (boundary)**. 开集$\mathring{\mathbb{H}}^k := \mathbb{H}^k \setminus \partial\mathbb{H}^k$ 是$\mathbb{R}^k$ 中的k 维曲面.

(1) 称集合$S \subset \mathbb{R}^n$ 是**带边k 维曲面 (k-dimensional surface with boundary)** 如果对每个点$\boldsymbol{x} \in S$ 都存在S 中的邻域U 和同胚映射$\boldsymbol{\varphi} : \widetilde{U} \to U$, 这里$\widetilde{U} = \mathbb{R}^k$ 或者$\widetilde{U} = \mathbb{H}^k$. 如果$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) \in \partial\mathbb{H}^k$, 则把点$\boldsymbol{x}$ 称为带边曲面S 的**边界点 (boundary point)**. 边界点的全体称为带边曲面S 的**边界 (boundary)** 并记为∂S.

因为$\mathbb{R}^k \cong (-1,1)^k$, 我们也可以用

$$(-1,1)^k_{\mathbf{H}} := \left\{\boldsymbol{t} = (t^1, \cdots, t^k) \in \mathbb{R}^k : t^k > 0\right\}$$

来代替$\mathbb{H}^k$.

(2) 显然$\mathbb{H}^k$ 按照定义(1) 是k 维带边曲面且其边界就是(13.6.10). 注意到

$$\partial\mathbb{H}^k = \mathbb{R}^{k-1}, \quad k \geq 1. \tag{13.6.11}$$

这里我们把$\mathbb{R}^0$ 规定为单点集且把$\partial\mathbb{R}^0$ 看成是空集.

(3) 同样我们可以定义**带边C^m 曲面**, 不过要注意的是边界点上的导数往往只有单侧的.

(4) 带边C^m 曲面S 的边界∂S, 就其本身来说也是一个C^m 曲面、无边界的且$\dim \partial S = \dim S - 1$. 实际上, 如果, 这里$k = \dim S$,

$$\{(\mathbb{H}^k, \boldsymbol{\varphi}_i, U_i)\}_{i \geq 1} \cup \{(\mathbb{R}^k, \boldsymbol{\psi}_i, V_i)\}_{i \geq 1}$$

是带边曲面S 的一个坐标集, 则显然

$$\{(\mathbb{R}^{k-1}, \boldsymbol{\varphi}_i|_{\partial\mathbb{H}^k = \mathbb{R}^{k-1}}, \partial U_i)\}_{i \geq 1}$$

就构成了∂S 的一个坐标集.

例13.6.8. (1) n 维闭球$\overline{\mathbb{B}^n} \equiv \overline{\mathbb{B}}^n$ 是n 维带边曲面, $\partial\overline{\mathbb{B}}^n = \mathbb{S}^{n-1}$.

(2) n 维闭立方体$\overline{(-1,1)^k} = [-1,1]^k$ 是n 维带边曲面, 且拓扑同胚于$\overline{\mathbb{B}}^n$.

(3) Möbius 带是$\mathbb{R}^3$ 中的2 维带边曲面, 且其边界是$\mathbb{R}^3$ 中的**扭结 (knot)**, 即和$\mathbb{S}^1$ 拓扑同胚的$\mathbb{R}^3$ 中的闭曲线.

令$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是$\mathbb{R}^k$ 的标准定向正交标架(诱导出Cartesian 坐标$x^1,\cdots,x^n$), 则$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_{n-1}$ 定义了$\mathbb{H}^k$ 边界$\partial\mathbb{H}^n=\mathbb{R}^{n-1}$ 的一个定向.

性质13.6.9. *可定向的光滑带边曲面S 的边界∂S, 就其本身来说也是可定向的光滑曲面.*

证: 假设$k=\dim S$, 我们已经证明了如果

$$\mathscr{A}:=\{(\mathbb{H}^k,\boldsymbol{\varphi}_i,U_i)\}_{i\geq 1}\cup\{(\mathbb{R}^k,\boldsymbol{\psi}_i,V_i)\}_{i\geq 1}$$

是带边曲面S 的一个定向坐标集, 则显然

$$\partial\mathscr{A}:=\{(\mathbb{R}^{k-1},\boldsymbol{\varphi}_i|_{\partial\mathbb{H}^k=\mathbb{R}^{k-1}},\partial U_i)\}_{i\geq 1}$$

就构成了∂S 的一个坐标集. 下证$\partial\mathscr{A}$ 是∂S 的一个定向坐标集.

考虑光滑微分同胚映射

$$\boldsymbol{\psi}:U_{\mathbb{H}^k}(\boldsymbol{t}_0)\longrightarrow U_{\mathbb{H}^k}(\widetilde{\boldsymbol{t}}_0),\quad \boldsymbol{t}\longmapsto\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{t})=\widetilde{\boldsymbol{t}},$$

其中$\boldsymbol{t}_0,\widetilde{\boldsymbol{t}}_0\in\partial\mathbb{H}^k$, $U_{\mathbb{H}^k}(\cdot)$ 表示点$\cdot$ 在$\mathbb{H}^k$ 中的邻域. 如果$\mathbf{Jac}_{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{\psi})>0$ 对任意$\boldsymbol{t}\in U_{\mathbb{H}^k}(\boldsymbol{t}_0)$ 都成立, 我们将证明诱导的微分同胚映射

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}:=\boldsymbol{\psi}|_{\partial U_{\mathbb{H}^k}(\boldsymbol{t}_0)}:U_{\partial\mathbb{H}^k}(\boldsymbol{t}_0)=\partial U_{\mathbb{H}^k}(\boldsymbol{t}_0)\longrightarrow U_{\partial\mathbb{H}^k}(\widetilde{\boldsymbol{t}}_0)=\partial U_{\mathbb{H}^k}(\widetilde{\boldsymbol{t}}_0),$$

的Jacobian 矩阵在$U_{\partial\mathbb{H}^k}(\boldsymbol{t}_0)$ 上也是正定的. 对任意$\boldsymbol{t}\in U_{\partial\mathbb{H}^k}(\boldsymbol{t}_0)$, 我们有$t^k=0$ 和$\widetilde{\boldsymbol{t}}=\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{t})$ 满足$\widetilde{t}^k=\psi^k(\boldsymbol{t})=0$, 这里$\boldsymbol{\psi}=(\psi^1,\cdots,\psi^k)$. 直接计算得到

$$\mathbf{Jac}_{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{\psi})=\begin{bmatrix}\psi_0^1 & \cdots & \psi_{k-1}^1 & \psi_k^1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ \psi_1^{k-1} & \cdots & \psi_{k-1}^{k-1} & \psi_k^{k-1}\\ 0 & \cdots & 0 & \psi_k^k\end{bmatrix}$$

这是因为$0=\psi^k(t^1,\cdots,t^{k-1},0)$, 从而得到

$$\left|\mathbf{Jac}_{\boldsymbol{t}}(\hat{\boldsymbol{\psi}})\right|=\psi_k^k(\boldsymbol{t})\left|\mathbf{Jac}_{\boldsymbol{t}}(\hat{\boldsymbol{\psi}})\right|,\quad \boldsymbol{t}\in U_{\partial\mathbb{H}^k}(\boldsymbol{t}_0).$$

如果对$\boldsymbol{t}=(t^1,\cdots,t^{k-1},0)\in U_{\partial\mathbb{H}^k}(\boldsymbol{t}_0)$ 有$\psi_k^k(t^1,\cdots,t^{k-1},0)\leq 0$, 我们得到对满足$(\boldsymbol{t},t^k)\in U_{\mathbb{H}^k}(\boldsymbol{t}_0)$ 的任意$t^k>0$ 有

$$\psi^k(t^1,\cdots,t^{k-1},t^k)\leq\psi^k(t^1,\cdots,t^{k-1},0)=0,$$

即$\widetilde{\boldsymbol{t}}:=\boldsymbol{\psi}(t^1,\cdots,t^{k-1},t^k)\in U_{\mathbb{H}^k}(\widetilde{\boldsymbol{t}}_0)$ 但有$\widetilde{t}^k\leq 0$, 矛盾! 故必有$\psi_k^k(\boldsymbol{t})>0$ 对任何$\boldsymbol{t}\in U_{\partial\mathbb{H}^k}(\boldsymbol{t}_0)$ 成立. 从而得到$\mathbf{Jac}_{\boldsymbol{t}}(\hat{\boldsymbol{\psi}})$ 是正定的. □

假设S 是k 维光滑带边曲面. 如果

$$\mathscr{A} := \{(\mathbb{H}^k, \boldsymbol{\varphi}_i, U_i)\}_{i\geq 1} \cup \{(\mathbb{R}^k, \boldsymbol{\psi}_i, V_i)\}_{i\geq 1}$$

是S 的一个定向坐标集, 则

$$\partial\mathscr{A} := \{(\mathbb{R}^{k-1}, \boldsymbol{\varphi}_i|_{\partial\mathbb{H}^k=\mathbb{R}^{k-1}}, \partial U_i)\}_{i\geq 1}$$

为边界∂S 的定向坐标集. 由此确定的∂S 上的定向称为S 在∂S 上的**诱导定向 (induced orientation)**.

$\mathbb{R}^n$ 中的k 维嵌入光滑带边曲面的定向可由曲面切空间的标架所定义. 考虑$\boldsymbol{x}_0 \in \partial S$ 处的切空间$\mathbf{T}_{\boldsymbol{x}_0}S$ 并取$\mathbf{T}_{\boldsymbol{x}_0}S$ 的定向正交标架$(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n)$, 这里$\boldsymbol{\xi}_n$ 是$\boldsymbol{x}_0$ 处的外法向量$\mathbf{n}$. 这样我们就得到了$(k-1)$ 维切平面$\mathbf{T}_{\boldsymbol{x}_0}\partial S$ 的一组定向标架$(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{k-1})$, 从而就得到了$\partial S$ 的定向.

在$\mathbb{R}^k$ 中我们考虑上半平面

$$\mathbb{H}^n_+ \equiv \mathbb{H}^k = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k : x^k > 0\}$$

和下半平面

$$\mathbb{H}^n_- := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k : x^k < 0\}.$$

则$\mathbb{H}^k_\pm$ 都是k 维光滑带边曲面且

$$\partial\mathbb{H}^k_+ = \partial\mathbb{H}^k_- =: \Gamma \cong \mathbb{R}^{k-1}.$$

注意到超平面Γ 上有两个方向相反的诱导定向.

一般地, 如果定向k 维光滑曲面S 被某个$(k-1)$ 维光滑曲面Γ 分成两部分S_+ 和S_-, 则$S_\pm$ 上的自然定向在$\Gamma = \partial S_+ = \partial S_-$ 上诱导出两个方向相反的诱导定向.

最后来定义$\mathbb{R}^n$ 中的分段光滑曲面.

定义13.6.10. ($\mathbb{R}^n$ 中的分段光滑曲面) 我们规定把任何点都称为0 **维曲面 (zero dimensional surface)**.

1 **维分段光滑曲线 (1 dimensional piecewise smooth surface)** 是指$\mathbb{R}^n$ 中的曲线, 从中去掉有限个或可数个0 维曲面后, 剩下的部分是一些1 维光滑曲面的并.

k 维曲面$S \subset \mathbb{R}^n$ 称为是**分段光滑的 (piecewise smooth)** 如果把有限个或可数个i 维分段光滑曲面去掉后, $0 \leq i \leq k-1$, 剩下的部分是一些k 维光滑曲面S_i, 无边的或带边的, 的并.

分段光滑曲面的例子很多, 比如平面角、矩形的边界、立方体的边界、直圆锥的边界等.

0 维分段光滑曲面的定向用$+$ 或$-$ 标记. 特别地, 如果闭区间$[a,b]\subset\mathbb{R}$ 的定向是从a 到b, 则两个端点处的诱导定向记作$(a,-)=-a$ 和$(b,+)=+b$.

现在考虑k 维分段光滑曲面$S\subset\mathbb{R}^n$, 这里$k\geq 1$. 假设S_i 和S_j 是**定义13.6.10** 中的k 维光滑曲面且是定向的, 并且假设$\overline{S_i}\cap\overline{S_j}\neq\emptyset$. 如果对任意$(k-1)$ 维光滑曲面棱$\Gamma\subset\overline{S_i}\cap\overline{S_j}$, 其上由$S_i$ 和S_j 分别诱导出来的两个诱导定向是相反的, 则称S_i 和S_j 的定向是**相容的 (consistent)**. 如果$\overline{S_i}\cap\overline{S_j}$ 是空集或维数小于$(k-1)$, 此时就认为S_i 和S_j 上的任何定向都是相容的.

定义13.6.11. *k 维分段光滑曲面, $k\geq 1$, 是***可定向的 (orientable)** *如果, 相差有限个或可数个i 维分段光滑曲面, $0\leq i\leq k-1$, 外, 它是一些k 维可定向的光滑曲面S_i 的并, 其中任何两个曲面的定向都是相容的.*

比如$\mathbb{R}^3$ 中的立方体的表面就是一个可定向的分段光滑曲面.

§13.7 第一型曲线积分和曲面积分

本节引入第一型曲线和曲面积分, 来源于, 比如, 求曲线形细长构件的质量和曲面形构件的质量.

§13.7.1 第一型曲线积分

假设 $L\subset\mathbb{R}^3$ 是一条可求长的连续曲线 (定义域为某个区间 $I\subset\mathbb{R}$), 起点和终点分别为 A 和 B (为了简便, 也记作 s_L 和 e_L). L 的分割 $\boldsymbol{T}$ 是指 L 上的有序有限点列[7]

$$A=P_0\to P_1\to\cdots\to P_{n-1}\to P_n=B.$$

令

$$\Delta s_i:=\left|\widehat{P_{i-1}P_i}\right|,\quad ||\boldsymbol{T}||:=\max_{1\leq i\leq n}\Delta s_i.$$

定义13.7.1. *假设 L 和 $\boldsymbol{T}$ 如上定义, f 是 L 上的有界函数. 任取 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\widehat{P_{i-1}P_i}$ 并考虑有限和*

$$S(f,\boldsymbol{T},(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})):=\sum_{1\leq i\leq n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i.$$

如果 $||\boldsymbol{T}||\to 0$ 时, $S(f,\boldsymbol{T},(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta}))$ 存在极限且极限和分割 $\boldsymbol{T}$ 及点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 无关, 称该极限

$$\int_L f\,ds\equiv\int_L f(x,y,z)\,ds:=\lim_{||\boldsymbol{T}||\to 0}\sum_{1\leq i\leq n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\Delta s_i \tag{13.7.1}$$

[7]但是这些 L 上的点在 I 上的原像不一定是有序的, 这是因为 L 有可能是自相交的或者是闭的.

为函数 f 在曲线 L 上的**第一型曲线积分(type I line integral)**. 此时称 f 为**被积函数 (integrable function)** 而 L 称为**积分路径 (path of integration)**.

如果取函数 $f\equiv 1$ 则得到曲线的长度

$$\int_L ds = \lim_{||\boldsymbol{T}||\to 0}\sum_{1\le i\le n}\Delta s_i = |L|.$$

从而可把 ds 看成曲线上的弧微元.

如果 A 和 B 重合, 即 L 是闭曲线, 我们使用如下记号

$$\oint_L f\,ds = \oint_L f(x,y,z)\,ds.$$

如果 $L\subset\mathbb{R}^3$ 落在某个平面内 (比如落在和 xoy 坐标面平行的平面内), 此时我们得到了**平面曲线的第一型曲线积分**的定义,

$$\int_L f\,ds \equiv \int_L f(x,y)\,ds := \lim_{||\boldsymbol{T}||\to 0}\sum_{1\le i\le n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i \tag{13.7.2}$$

如果 $\mathbb{R}^3$ 中两条可求长的连续曲线 L_1 和 L_2, 满足 $e_{L_1}=s_{L_2}$, 则可定义 L_1+L_2 使得新的曲线也是可求长的和连续的 (即把这两条曲线首尾拼接起来).

性质13.7.2. (1) **(被积函数线性)** 如果函数 f,g 在 L 上的第一型曲线积分都存在, 则对任意常数 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 函数 $\alpha f+\beta g$ 在 L 上的第一型曲线积分也存在且

$$\int_L(\alpha f+\beta g)\,ds = \alpha\int_L f\,ds+\beta\int_L g\,ds. \tag{13.7.3}$$

(2) **(路径可加性)** 如果函数 f 在 L_1 和 L_2 上的第一型曲线积分都存在且 $e_{L_1}=s_{L_2}$, 则其在 L_1+L_2 上的第一型曲线积分也存在且

$$\int_{L_1+L_2} f\,ds = \int_{L_1} f\,ds+\int_{L_1} f\,ds. \tag{13.7.4}$$

定理13.7.3. (第一型曲线积分的计算公式) 假设 L 是分段光滑曲线

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t),\quad \alpha\le t\le\beta,$$

且函数 f 在 L 上连续. 则 f 在 L 上的第一型曲线积分存在且

$$\int_L f\,ds = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}dt. \tag{13.7.5}$$

若把曲线 L 写成向量形式 $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$, 则 (13.7.5) 可记成

$$\int_L f\,ds = \int_\alpha^\beta f(\boldsymbol{r}(t))|\boldsymbol{r}'(t)|\,dt. \tag{13.7.6}$$

在给出证明之前,首先对定理中的符号做些说明. L 是分段光滑曲线是指

$$L = L_1 + L_2 + \cdots + L_k, \quad L_i \in C^1([\alpha_i, \beta_i]) \ (1 \leq i \leq k),$$

这里曲线 $+$ 的定义如上, 且

$$\alpha = \alpha_0 < \beta_0 = \alpha_1 < \beta_1 = \alpha_2 < \cdots < \beta_{k-1} = \alpha_k < \beta_k = \beta.$$

根据定积分可知

$$s_i = |C_i| = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} |\boldsymbol{r}'(t)| dt$$

从而得到

$$s = \sum_{1 \leq i \leq k} s_i = \sum_{1 \leq i \leq k} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} |\boldsymbol{r}'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} |\boldsymbol{r}'(t)| dt.$$

故 L 是可求长连续曲线. (13.7.5) 或 (13.7.6) 的积分定义为

$$\int_L f ds := \sum_{1 \leq i \leq k} \int_{L_i} f ds.$$

根据**性质 13.7.2** (2), 只要对每个 L_i 证明即可, 换句话说, 我们可以事先假设 L 是光滑曲线.

证: 根据上述说明, 不失一般性不妨假设 L 是光滑曲线. 前面已证

$$ds = |\boldsymbol{r}'(t)| dt.$$

利用积分的变量替换得到

$$\int_L f ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\boldsymbol{r}(t)) \frac{ds}{dt} dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\boldsymbol{r}(t)) |\boldsymbol{r}'(t)| dt. \quad \square$$

作为直接推论得到了**平面曲线的第一型曲线积分的计算公式**: 假设 L 是分段光滑曲线

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

且函数 f 在 L 上连续. 则 f 在 L 上的第一型曲线积分存在且

$$\int_L f ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt. \tag{13.7.7}$$

若把曲线 L 写成向量形式 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$, 则 (13.7.7) 可记成

$$\int_L f ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\boldsymbol{r}(t)) |\boldsymbol{r}'(t)| dt. \tag{13.7.8}$$

特别地,

- 如果 $\boldsymbol{r}(x)=(x,y(x)), a\le x\le b$, 则

$$\int_L f\,ds=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx. \tag{13.7.9}$$

- 如果 $\boldsymbol{r}(t)=(r(t)\cos t, r(t)\sin t), \alpha\le t\le\beta$, 则

$$\int_L f\,ds=\int_\alpha^\beta f(r(t)\cos t, r(t)\sin t)\sqrt{r(t)^2+r'(t)^2}\,dt. \tag{13.7.10}$$

例13.7.4. (1) 计算

$$I:=\int_L \sin\sqrt{x^2+y^2}\,ds,$$

其中 L 为由圆周 $x^2+y^2=a^2$, 直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限所围图形的边界.

解: 令 $A=(a,0)$ 和 $B=(a/\sqrt{2},a/\sqrt{2})$. 则

$$\begin{aligned}I&=\int_{\overline{OA}}\sin\sqrt{x^2+y^2}\,ds+\int_{\widehat{AB}}\sin\sqrt{x^2+y^2}\,ds+\int_{\overline{OB}}\sin\sqrt{x^2+y^2}\,ds\\&=\int_0^a\sin x\,dx+\int_{\widehat{AB}}\sin a\,ds+\int_0^{a/\sqrt{2}}\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x\,dx\\&=1-\cos a+\frac{\pi a}{4}\sin a+1-\cos a=2(1-\cos a)+\frac{\pi a}{4}\sin a.\ \square\end{aligned}$$

(2) 计算

$$I:=\int_L |x|\,ds,$$

其中 L 是双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

解: 利用对称性得到

$$\begin{aligned}I&=4\int_{r=a\sqrt{\cos 2\theta}}x\,ds=4\int_0^{\pi/4}r\cos\theta\sqrt{r(\theta)^2+r'(\theta)^2}\,d\theta\\&=4\int_0^{\pi/4}a^2\cos\theta\,d\theta=2\sqrt{2}a^2.\ \square\end{aligned}$$

(3) 计算

$$I:=\int_L(x^2+2y+z)\,ds,$$

其中 L 是由曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和 $x+y+z=0$ 所确定的曲线.

解: 根据对称性得到

$$\int_L x^2ds=\frac{1}{3}\int_L(x^2+y^2+z^2_ds=\frac{1}{3}\cdot 2\pi a^3=\frac{2}{3}\pi a^3.$$

同理可证

$$\int_L x\,ds=\int_L y\,ds=\int_L z\,ds=\frac{1}{3}\int_L(x+y+z)ds=0.$$

因此 $I=\frac{2}{3}\pi a^3$. $\square$

(4) 计算

$$I := \int_L \sqrt{1-x^2-y^2}ds, \quad L: x^2+y^2=x.$$

解: 令 $x=\frac{1}{2}(1+\cos t)$ 和 $y=\frac{1}{2}\sin t, 0\le t\le 2\pi$. 则

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}dt=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}dt=2. \quad \square$$

(5) 计算

$$I=\int_\Gamma (x+y)^2 ds,$$

其中 $\Gamma=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2=1,\ y\ge 0\}\cup\{(x,0)\in\mathbb{R}^2: -1\le x\le 1\}$.

解: 定义 $\Gamma_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2=1,\ y\ge 0\}$ 和 $\Gamma_2=\{(x,0)\in\mathbb{R}^2: -1\le x\le 1\}$. 从而得到

$$I_1 := \int_{\Gamma_1}(x+y)^2 ds=\int_{\Gamma_1}(x^2+y^2+2xy)ds=\int_{\Gamma_1}ds+2\int_{\Gamma_1}xyds=\pi,$$

$$I_2 := \int_{\Gamma_2}(x+y)^2 ds=\int_1^{-1}x^2dx=\frac{2}{3}.$$

故 $I=I_1+I_2=\frac{2}{3}+\pi$. □

(6) **(第一型曲线积分的中值定理)**: 假设函数 $f(x,y)$ 在光滑曲线 $L: x=x(t), y=y(t)$ 上连续, $\alpha\le t\le\beta$, 则存在 $(x_0,y_0)\in L$ 满足

$$\int_L f(x,y)ds=f(x_0,y_0)|L|.$$

证: 根据 (13.7.7) 得到

$$\int_L fds=\int_\alpha^\beta F(t)dt, \quad F(t):=f(x(t),y(t))\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}.$$

定积分的(广义)第一中值定理告诉我们

$$\int_\alpha^\beta F(t)dt=f(x(t_0),y(t_0))\int_\alpha^\beta\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}dt=f(x_0,y_0)|L|$$

其中 $(x_0,y_0)=(x(t_0),y(t_0))$. □

§13.7.2 第一型曲面积分

假设曲面 Σ 是可求面积的连续曲面. Σ 上的分割 $\boldsymbol{T}$ 是指用坐标曲线网将 Σ 分成的 n 个小曲面 $\Sigma_1,\cdots,\Sigma_n$. 令

$$\Delta S_i := |\Sigma_i|, \quad ||\boldsymbol{T}|| := \max_{1\le i\le n}\Delta S_i.$$

定义13.7.5. 假设 Σ 和 $\boldsymbol{T}$ 如上定义, f 是 Σ 上的有界函数. 任取 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Sigma_i$ 并考虑有线和

$$S(f,\boldsymbol{T},(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})):=\sum_{1\le i\le n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i.$$

如果 $||\boldsymbol{T}||\to 0$ 时, $S(f,\boldsymbol{T},(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta}))$ 存在极限且极限和分割 $\boldsymbol{T}$ 及点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 无关, 称该极限

$$\iint_\Sigma f\,dS\equiv\iint_\Sigma f(x,y,z)\,dS:=\lim_{||\boldsymbol{T}||\to 0}\sum_{1\le i\le n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i \tag{13.7.11}$$

为函数 f 在曲面 Σ 上的**第一型曲面积分(type I surface integral)**. 此时称 f 为**被积函数 (integrable function)** 而 Σ 称为**积分曲面 (surface of integration)**.

如果取函数 $f\equiv 1$ 则得到曲面的面积

$$\iint_\Sigma dS=\lim_{||\boldsymbol{T}||\to 0}\sum_{1\le i\le n}\Delta S_i=|\Sigma|.$$

从而可把 dS 看成曲面的面积微元.

类似**定理 13.7.3** 可得到

定理13.7.6. (第一型曲面积分的计算公式) 假设曲面 Σ 是由参数方程给出:

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v),\quad (u,v)\in D,$$

或记为向量形式 $\boldsymbol{r}(u,v)$. 这里 D 是 uv 平面上具有段光滑边界的有界闭区域, $\boldsymbol{r}:D\to\Sigma$ 是单的且 C^1 的, 且Jacobi 矩阵 (13.6.1) 是满秩的. 此时对任何连续函数 $f\in C(\Sigma)$, f 在 Σ 上的第一型曲面积分存在且

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma f\,dS &= \iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,dudv\\ &= \iint_D f(\boldsymbol{r}(u,v))|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|(u,v)\,dudv.\end{aligned} \tag{13.7.12}$$

其中 E,F,G 是 (13.6.5) 中定义的曲面Gauss 系数.

如果 $\boldsymbol{r}(x,y)=(x,y,z(x,y))$, 则

$$\iint_\Sigma f\,dS=\iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+|\nabla z|^2}\,dxdy. \tag{13.7.13}$$

例13.7.7. (1) 计算

$$I:=\iint_S(x^2+y^2-z^2+2x-1)\,dS,$$

其中 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z=1$ 所截的下半部分.

解: 因为锥面关于 yoz 平面对称, 所以

$$\iint_S 2x\,dS=0.$$

从而得到

$$I=\iint_S(-1)dS=\iint_{x^2+y^2\le1}-\sqrt{2}dxdy=-\sqrt{2}\pi.\ \square$$

(2) 计算

$$I:=\iint_\Sigma x^2zdS,$$

其中 $\Sigma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:z=\sqrt{1-x^2-y^2}\}$.

解: 计算可得

$$\begin{aligned}I&=\iint_{x^2+y^2\le1}x^2\sqrt{1-x^2-y^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}}dxdy\\&=\iint_{x^2+y^2\le1}x^2dxdy=\frac{1}{2}\iint_{x^2+y^2\le1}(x^2+y^2)dxdy=\frac{\pi}{4}.\ \square\end{aligned}$$

(3) 证明**Poisson 公式**:

$$\iint_\Sigma f(ax+by+cz)dS=2\pi\int_{-1}^1 f(w\sqrt{a^2+b^2+c^2})dw,$$

其中 $\Sigma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+y^2+z^2=1\}$.

解: 令 $k=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. 考察变换 $w=(ax+by+cz)/k$ 和新的 uvw 坐标轴使得原点和原来的 xyz 坐标轴重合且 $ax+by+cz=0$ 和 w 轴垂直. 从而 u,v 落在平面 $ax+by+cz=0$ 内. 但是球 Σ 是完全对称的, 故在坐标变换 $(x,y,z)\mapsto(u,v,w)$ 下, Σ 变成 $\Sigma'=\{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3|u^2+v^2+w^2=1\}$, 从而

$$I:=\iint_\Sigma f(ax+by+cz)dS=\iint_{\Sigma'}f(kw)dS'.$$

作变量替换 $u=\sqrt{1-w^2}\cos\theta$, $v=\sqrt{1-w^2}\sin\theta$, $w=w$, 这里 $|w|\le1$ 且 $0\le\theta\le2\pi$. 即得到

$$\boldsymbol{r}(\theta,w)=(u,v,w)=(\sqrt{1-w^2}\cos\theta,\sqrt{1-w^2}\sin\theta,w).$$

计算得到

$$\boldsymbol{r}_\theta=\sqrt{1-w^2}(-\sin\theta,\cos\theta,0),\quad \boldsymbol{r}_w=\left(-\frac{w\cos\theta}{\sqrt{1-w^2}},-\frac{w\sin\theta}{\sqrt{1-w^2}},1\right).$$

故

$$\boldsymbol{r}_\theta\cdot\boldsymbol{r}_\theta=1-w^2,\quad \boldsymbol{r}_\theta\cdot\boldsymbol{r}_w=0,\quad \boldsymbol{r}_w\cdot\boldsymbol{r}_w=\frac{1}{1-w^2}.$$

根据 (13.7.12) 得到

$$\iint_\Sigma f(ax+by+cz)dS=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{-1}^1 f(kw)dw=2\pi\int_{-1}^1 f(kw)dw.\ \square$$

(4) 令 Σ_r 为以 $\boldsymbol{P}_0=(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ 为中心 $r>0$ 为半径的球面, 并假设 $u(\boldsymbol{P})=u(x,y,z)\in C^2(\mathbb{R}^3)$, 则

$$\Delta u(\boldsymbol{P}_0)=6\lim_{r\to0+}\frac{I_r(u,\boldsymbol{P}_0)-u(\boldsymbol{P}_0)}{r^2}.$$

这里

$$I_r(u,\boldsymbol{P}_0):=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{\Sigma_r}u(x,y,z)dS.$$

解: 作 Taylor 展开得到

$$u(\boldsymbol{P})=u(\boldsymbol{P}_0)+\sum_{1\le|\boldsymbol{\alpha}|\le2}\frac{u^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{P}_0)}{\boldsymbol{\alpha}!}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0)^{\boldsymbol{\alpha}}+o(|\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0|^2)$$

$$=u(\boldsymbol{P}_0)+u_x(\boldsymbol{P}_0)(x-x_0)+u_y(\boldsymbol{P}_0)(y-y_0)+u_z(\boldsymbol{P}_0)(z-z_0)$$

$$+u_{xy}(\boldsymbol{P}_0)(x-x_0)(y-y_0)+u_{yz}(\boldsymbol{P}_0)(y-y_0)(z-z_0)+u_{zx}(\boldsymbol{P}_0)(z-z_0(x-x_0)$$

$$+\frac{1}{2}u_{xx}(\boldsymbol{P}_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{2}u_{yy}(\boldsymbol{P}_0)(y-y_0)^2+\frac{1}{2}u_{zz}(\boldsymbol{P}_0)(z-z_0)^2+o(\rho^2)$$

这里 $\rho=|\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0|$. 利用球对称性可知

$$\iint_{\Sigma_r}[u(\boldsymbol{P})-u(\boldsymbol{P}_0)]dS=\frac{1}{2}\Delta u(\boldsymbol{P}_0)\cdot\frac{r^2}{3}4\pi r^2+o(r^4)=\frac{r^2}{6}|\Sigma_r|\Delta u(\boldsymbol{P}_0)+o(r^4),$$

这里用到了等式

$$\iint_{\Sigma_r}(x-x_0)^2dS\iint_{\Sigma_r}(y-y_0)^2dS=\iint_{\Sigma_r}(z-z_0)^2dS$$

$$=\frac{1}{3}\iint_{\Sigma_r}\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]dS=\frac{1}{3}\cdot r^2\cdot4\pi r^2=\frac{4\pi}{3}r^4.$$

从而得到

$$I_r(u,\boldsymbol{P}_0)-u(\boldsymbol{P}_0)=\frac{r^2}{6}\Delta u(\boldsymbol{P}_0)+o(r^4).\quad\square$$

§13.8 第二型曲线积分和曲面积分

第二型曲线积分和定义域的方向有关, 如果方向相反则相应的积分变号. 物理上的背景, 比如, 为在变力作用下沿曲线做功问题和流量问题.

§13.8.1 第二型曲线积分

假设 $L\subset\mathbb{R}^3$ 是定向的可求长的连续曲线, 即给定起点 $s_L=A$ 和终点 $e_L=B$ 的可求长的连续曲线. 在 L 上每点处取单位切向量

$$\boldsymbol{\tau}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma),$$

使得其与 L 的定向一致.

定义13.8.1. 假设 L 和 $\boldsymbol{\tau}$ 为如上定义, $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$ 是 L 上的向量值函数. 定义函数 $\boldsymbol{F}$ 沿着曲线 L 的**第二型曲线积分(type II line integral)** 为

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau}ds := \int_L [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]\,ds. \tag{13.8.1}$$

在第一型曲线积分中, 已经知道 ds 是 L 的弧微元. 定义**弧微元向量 (vector of arc-length element)**

$$d\boldsymbol{s} := \boldsymbol{\tau}ds = (dx,dy,dz).$$

从而 (13.8.1) 可记成

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz, \tag{13.8.2}$$

也称为**微分 1- 形式(differential 1-form)** $\omega := Pdx+Qdy+Rdz$ 在 L 上的第二型曲线积分,

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_L \omega. \tag{13.8.3}$$

若取 $\boldsymbol{F}=f\boldsymbol{\tau}$, 则 $\boldsymbol{F}$ 在 L 上的第二型曲线积分等于 f 在 L 上的第一型曲线积分.

如果 A 和 B 重合, 即 L 是闭曲线, 我们使用如下记号

$$\oint_L \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \oint_L \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}.$$

特别地, 如果 L 为 xoy 平面的定向光滑曲线, 则

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_L [P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\sin\alpha]ds. \tag{13.8.4}$$

其中 α 是定向曲线 L 和 x 正轴的夹角.

我们也称 (13.8.1) 为力 $\boldsymbol{F}$ 沿着曲线 L 所做的**功 (work)**, 也叫作**功积分 (work integral)**.

性质13.8.2. (1) **(反向性)** 假设向量值函数 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$ 在 L 上的第二型曲线积分存在, 则

$$\int_{-L} Pdx+Qdy+Rdz = -\int_L Pdx+Qdy+Rdz, \tag{13.8.5}$$

这里 $-L$ 表示曲线 L 的反向曲线.

(2) **(路径可加性)** 如果向量值函数 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$ 在 L_1 和 L_2 上的第二型曲线积分都存在且 $e_{L_1}=s_{L_2}$, 则其在 L_1+L_2 上的第二型曲线积分也存在且

$$\int_{L_1+L_2} Pdx+Qdy+Rdz = \sum_{1\le i\le 2}\int_{L_i} Pdx+Qdy+Rdz. \tag{13.8.6}$$

(3) **(被积函数线性)** 如果向量值函数 $\boldsymbol{F}_1=(P_1,Q_1,R_1),\boldsymbol{F}_2=(P_2,Q_2,R_2)$ 在 L 上的第二型曲线积分都存在, 则对任何常数 $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, 向量值函数 $c_1\boldsymbol{F}_1+c_2\boldsymbol{F}_2$ 在 L 上的第二型曲线积分也存在且

$$\begin{aligned}&\int_L(c_1P_1+c_2P_2)dx+(c_1Q_1+c_2Q_2)dy+(c_1R_1+c_2R_2)dz\\=&\sum_{1\le i\le 2}c_i\left(\int_L P_idx+Q_idy+R_idz\right).\end{aligned}\tag{13.8.7}$$

现在假设 L 是定向的光滑曲线[8]:

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t),\quad t\in[a,b],$$

或写成向量形式 $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$, 此时曲线 L 可求长且切向量为

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}.$$

定理13.8.3. (第二型曲线积分的计算公式) 假设曲线 L 如上定义, 且向量值函数 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$ 在 L 上连续. 则

$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz=\int_a^b\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\boldsymbol{r}'(t)dt.\tag{13.8.8}$$

证: 根据积分变量替换得到

$$\int_L\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau}ds=\int_a^b\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}|\boldsymbol{r}'(t)|dt=\int_a^b\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\boldsymbol{r}'(t)dt.\quad\square$$

类似地, 如果 L 为平面 xoy 上地光滑曲线:

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad a\le t\le b,$$

或写成向量形式 $\boldsymbol{r}(t)$, 则

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b[P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)]dt.\tag{13.8.9}$$

如果 $\boldsymbol{r}(x)=(x,y(x)),a\le x\le b$, 则

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b[P(x,y(x))+Q(x,y(x))y'(x)]dx.\tag{13.8.10}$$

---

[8]注意到, 此时 $[a,b]$ 不一定是通常意义下的闭区间, 这是因为 a 对应起点 s_L 而 b 对应终点 e_L.

例13.8.4. (1) 计算第二型曲线积分

$$I := \int_L 2xy\,dx + x^2 dy,$$

其中 L 为以 $O=(0,0)$ 为起点而以 $B=(1,1)$ 为终点地曲线, 具体路径分别为 (a) 抛物线 $y=x^2$; (b) 抛物线 $x=y^2$; (c) 折线段 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$ 其中 $A=(1,0)$.

解: 计算结果都是 1. □

(2) 计算

$$I := \oint_C (z-y)dx + (x-z)dy + (x-y)dz,$$

其中 C 是两个曲面 $x^2+y^2=1$ 和 $x-y+z=2$ 的交线, 且从 z 正轴往 z 负轴看 C 的方向是顺时针的.

解: 令 $x=\cos\theta$ 和 $y=\sin\theta$. 因此 $z=2-\cos\theta+\sin\theta$, 其中 $\theta\in[2\pi,0]$, 注意方向! 故得到

$$I = \oint_C (z-y)dx + (x-z)dy + (x-y)dz$$

$$= \int_{2\pi}^0 [(\cos\theta-2)\sin\theta + (2\cos\theta-2-\sin\theta)\cos\theta + (\cos^2\theta-\sin^2\theta)]d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}(1-4\cos^2\theta)d\theta = 2\pi - 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi = -2\pi. \quad \square$$

(3) 计算

$$I := \int_L -y\,dx + x\,dy,$$

其中 $L=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+y^2=1\ y\geq 0\}$.

解: 令 $x=\cos t$ 和 $y=\sin t$, $0\leq t\leq\pi$, 得到

$$I = \int_0^{\pi}[-\sin t(-\sin t)+\cos t\cdot\cos t]dt = \pi. \quad \square$$

(4) 计算

$$I := \int_L (x^2-y^2)dx - 2xydy,$$

其中 $L=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | y=x^\alpha,\ \alpha>0,\ 0\leq x\leq 1\}$.

解: 令 $x=t$ 和 $y=t^\alpha$, $0\leq t\leq 1$. 则

$$I = \int_0^1 (t^2-t^{2\alpha})dt - \int_0^1 2\alpha t^{1+\alpha}t^{\alpha-1}dt = \int_0^1 (t^2-t^{2\alpha}-2\alpha t^{2\alpha})dt$$

$$= \int_0^1 [t^2-(1+2\alpha)t^{2\alpha}]dt = \frac{-1}{3}t^{2\alpha+1}\Big|_0^1 = -\frac{2}{3}. \quad \square$$

(5) 计算

$$I := \int_L x\,dx + y\,dy + z\,dz,$$

其中 $L=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2=1\}\cap\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x+y+z=0\}$.

解: 令 $\mathbf{n}$ 表示 $\mathbb{S}^2$ 的法向量. 则

$$I=\int_L(x,y,z)\cdot\boldsymbol{\tau}\,ds=\int_L\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}\,ds=0.\quad\Box$$

(6) 计算

$$I:=\int_L x\,dy-y\,dx,$$

其中 $L=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^{2n+1}+y^{2n+1}=ax^ny^n,\ x,y\geq 0\}$.

解: 利用极坐标 $x=r\cos\theta$ 和 $y=r\sin\theta$ 得到

$$r=\frac{a\cos^n\theta\sin^n\theta}{\cos^{2n+1}\theta+\sin^{2n+1}\theta},$$

从而

$$x=\frac{a\tan^n\theta}{1+\tan^{2n+1}\theta},\quad y=\frac{a\tan^{n+1}\theta}{1+\tan^{2n+1}\theta}.$$

再令 $t=\tan\theta$ 得到

$$x=\frac{at^n}{1+t^{2n+1}},\quad y=\frac{at^{n+1}}{1+t^{2n+1}}=tx.$$

因为

$$dy=x\,dt+t\,dx,\quad x\,dy=x^2dt-y\,dx,\quad x\,dy-y\,dx=x^2dt.$$

故

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{a^2t^{2n}}{(1+t^{2n+1})^2}dt=\frac{a^2}{2n+1}\int_0^{+\infty}\frac{dt^{2n+1}}{(1+t^{2n+1})^2}=\frac{a^2}{2n+1}.\quad\Box$$

§13.8.2 第二型曲面积分

曲面以及曲面定向的严格定义请参见§13.6.3.

定义13.8.5. 假设 Σ 是光滑曲面, P_0 是 Σ 上的任意给定的点. 过 P_0 点可做两条方向相反的法线, 我们指定其中一个方向并记为 $\mathbf{n}_{P_0}$. 任取过 P_0 点的且完全包含在 Σ 内的光滑闭曲线 Γ_0. 称曲面 Σ 是**可定向的(orientiable)**或者是**定向曲面(oriented surface)**, 如果 Γ_0 上的任意点 P 的法线 $\mathbf{n}_P$ 是连续变化地从 $\mathbf{n}_{P_0}$ 出发绕着 Γ_0 一周后最终回到 $\mathbf{n}_{P_0}$.

存在不可定向的曲面, 比如**Möbius 带(Möbius band)**.

假设定向曲面 Σ 由参数方程给出:

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v),\quad (i,v)\in D,$$

或写成向量形式 $\boldsymbol{r}(u,v)$. 这里 D 是 uv 平面上具有分段光滑边界的有界闭区域, $\boldsymbol{r}:D\to\Sigma$ 是单的且 C^1 的, 且 Jacobi 矩阵 (13.6.1) 是满秩的. 此时曲面 Σ 的法向量可表示为

$$\pm\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=\pm\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right),$$

这里 $\pm$ 表示曲面上每个点都有方向相反的两个法向量. 从而得到单位法向量

$$\mathbf{n} = \pm\frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|} = \pm\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right), \tag{13.8.11}$$

其中

$$EG-F^2 = \left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^2.$$

特别地, 若 $\boldsymbol{r}(x,y) = (x,y,z(x,y))$, 则

$$\mathbf{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(-z_x, z_y, 1). \tag{13.8.12}$$

此时若取 $+$ 号, 即表示 $\mathbf{n}$ 在 z 轴上的投影永远是正的 (对应曲面位于 z 正轴的部分).

定义13.8.6. 假设 Σ 和 $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 如上定义, $\boldsymbol{F} = (P,Q,R)$ 是 Σ 上的向量值函数. 定义函数 $\boldsymbol{F}$ 沿着曲面 Σ 的**第二型曲面积分(type II surface integral)** 为

$$\iint_\Sigma \boldsymbol{F}\cdot\mathbf{n}dS := \iint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS. \tag{13.8.13}$$

在第一型曲面积分中, 已经知道 dS 是 Σ 的面积微元. 定义**面积微元向量**

$$d\boldsymbol{S} := \mathbf{n}dS = (dydz, dzdx, dxdy).$$

从而 (13.8.13) 可记成

$$\iint_\Sigma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \iint_\Sigma P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy. \tag{13.8.14}$$

我们也称 (13.8.13) 为流体以速度$\boldsymbol{F}$ 通过曲面Σ 所产生的**流量 (flow)**, 也叫作**流积分 (flow integral)**.

性质13.8.7. (1)**(反向性)** 假设向量值函数 $\boldsymbol{F} = (P,Q,R)$ 在 Σ 上的第二型曲面积分存在, 则

$$\iint_{-\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iint_\Sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy, \tag{13.8.15}$$

这里 $-\Sigma$ 表示曲面 Σ 的反向曲面.

(2) **(路径可加性)** 如果向量值函数 $\boldsymbol{F} = (P,Q,R)$ 在 Σ_1 和 Σ_2 上的第二型曲面积分都存在且 Σ_1 与 Σ_2 定向相同, 则其在 $\Sigma_1+\Sigma_2$ 上的第二型曲线积分也存在且

$$\iint_{\Sigma_1+\Sigma_2} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \sum_{1\le i\le 2}\iint_{\Sigma_i} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy. \tag{13.8.16}$$

(3) **(被积函数线性)** 如果向量值函数 $\boldsymbol{F}_1=(P_1,Q_1,R_1),\boldsymbol{F}_2=(P_2,Q_2,R_2)$ 在 Σ 上的第二型曲面积分都存在, 则对任何常数 $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, 向量值函数 $c_1\boldsymbol{F}_1+c_2\boldsymbol{F}_2$ 在 L 上的第二型曲面积分也存在且

$$\begin{aligned}&\iint_\Sigma (c_1P_1+c_2P_2)dydz+(c_1Q_1+c_2Q_2)dzdx+(c_1R_1+c_2R_2)dxdy\\ =&\sum_{1\le i\le 2} c_i\left(\iint_\Sigma P_idydz+Q_idzdx+R_idxdy\right).\end{aligned}\tag{13.8.17}$$

定理13.8.8. (第二型曲线积分的计算公式) 假设定向的光滑曲面 Σ 是由参数方程给出:

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v),\quad (u,v)\in D,$$

或记为向量形式 $\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$, 这里 D 是 uv 平面上具有分段光滑边界的有界闭区域, $\boldsymbol{r}:D\to\Sigma$ 是单的且 C^1 的, 且Jacobi 矩阵 (13.6.1) 是满秩的. 此时对任何连续的向量值函数 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)\in C(\Sigma)$, $\boldsymbol{F}$ 在 Σ 上的第二型曲面积分存在且

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\pm\iint_D\Big[&P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\\ +\ Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}&+R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big]dudv.\end{aligned}\tag{13.8.18}$$

证: 根据**定理13.7.6** 得到

$$\iint_\Sigma \boldsymbol{F}\cdot\mathbf{n}dS=\iint_\Sigma \boldsymbol{F}\cdot\pm\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}dS=\pm\iint_D \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(u,v))\cdot\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_vdudv.\ \square$$

如果 $\boldsymbol{r}(x,y)=(x,y,z(x,y))$, $(x,y)\in D$, 其中 D 是 xy 平面上具有分段光滑边界的有界闭区域, 则

$$\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy=\pm\iint_D R(x,y,z(x,y))dxdy.\tag{13.8.19}$$

注意到 (13.8.19) 右端是二重积分, 当曲面的定向为朝着 z 正轴则积分号前取 $+$, 当曲面的定向为朝着 z 负轴则积分号前取 $-$.

如果在计算

$$\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz$$

中 Σ 的方程可表示为 $\boldsymbol{r}(y,z)=(x(y,z),y,z)$, $(y,z)\in D$, 其中 D 是 yz 平面上具有分段光滑边界的有界闭区域. 此时

$$\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz=\pm\iint_D P(x(y,z),y,z)dydz.\tag{13.8.20}$$

当曲面的定向为朝着 x 正轴则积分号前取 $+$, 当曲面的定向为朝着 x 负轴则积分号前取 $-$.

另一方面如果 $\boldsymbol{r}(x,y)=(x,y,z(x,y))$, $(x,y)\in D$, 其中 D 是 xy 平面上具有分段光滑边界的有界闭区域, 则作变量替换

$$dydz=\cos\alpha dS=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\cdot\cos\gamma dS,\quad \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ z_x & z_y\end{vmatrix}=-z_x$$

从而得到

$$\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz=\iint_\Sigma P(x,y,z)(-z_x)dxdy=\mp\iint_D P(x,y,z(x,y))z_x dxdy. \tag{13.8.21}$$

曲面的定向为朝着 z 正轴则积分号前取 $-$, 当曲面的定向为朝着 z 负轴则积分号前取 $+$.

例13.8.9. (1) 计算

$$I:=\iint_\Sigma xyzdxdy,$$

其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧在第一、第五卦限的部分.

解: 根据对称性得到

$$I=2\iint_D xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy=2\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^1 r^2\sin\theta\cos\theta\sqrt{1-r^2}rdr$$

$$=\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}dr=\int_0^1(1-u^2)u^2du=\frac{2}{15},$$

其中$D:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\le 1,\ x,y\ge 0\}$. $\square$

(2) 计算

$$I:=\iint_S xdydz+ydzdx+zdxdy,$$

其中 S 是椭球面 $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ 的外侧.

解: 椭球面的参数方程为

$$x=a\sin\varphi\cos\theta,\quad y=b\sin\varphi\sin\theta,\quad z=c\cos\varphi,$$

其中$(\varphi,\theta)\in D:=[0,2\pi]\times[0,\pi]$. 则得到

$$I=\iint_D abc\left(\sin^3\varphi\cos^2\theta+\sin^3\varphi\sin^2\theta+\sin\varphi\cos^2\varphi\right)d\varphi d\theta$$

$$=abc\int_0^\pi d\varphi\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\theta=4\pi abc.\quad\square$$

(3) 计算

$$I:=\iint_S(z^2+x)dydz+\sqrt{z}dxdy,$$

其中 S 为抛物面 $z=(x^2+y^2)/2$ 在 $z=0$ 和 $z=2$ 之间的部分, 定向取下侧.

解: 根据(13.8.21) 和S 的定向取下侧得到

$$I=\iint_S\left[(z^2+x)(-x)+\sqrt{z}\right]dxdy$$

$$=-\iint_D\left[(-x)\left(\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x\right)+\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\right]dxdy$$

$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\left[\left(\frac{r^4}{4}+r\cos\theta\right)(-r\cos\theta)+\frac{r}{\sqrt{2}}\right]rdr$$

$$=\pi\int_0^2 r^3dt-\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\int_0^2 r^2dr=4\pi-\frac{16\pi}{3\sqrt{2}}=\left(4-\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)\pi,$$

这里$D:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2\le 4\}$. □

(4) 计算

$$I:=\iint_\Sigma x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy,$$

其中 $\Sigma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1,\ z\ge 0\}$. 这里 $a,b,c>0$.

解: 令

$$x=a\sin\varphi\cos\theta,\quad y=b\sin\varphi\sin\theta,\quad z=c\cos\varphi,\quad 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$$

则得到

$$I=abc\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{2\pi}\left(a^2\sin^5\varphi\cos^4\theta+b^2\sin^5\varphi\sin^4\theta+c^2\sin\varphi\cos^4\varphi\right)d\theta.$$

利用Beta 函数的基本性质, 参见(13.4.7),

$$\begin{aligned}I&=abc\left[a^2B\left(3,\frac{1}{2}\right)B\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)+b^2B\left(3,\frac{1}{2}\right)B\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)+c^2\pi B\left(\frac{5}{2},1\right)\right]\\&=abc(a^2+b^2+c^2)\frac{\pi\Gamma(5/2)}{\Gamma(7/2)}=\frac{2\pi}{5}abc(a^2+b^2+c^2).\end{aligned}$$

(5) 计算

$$I:=\iint_\Sigma f(x)dydz+g(y)dxdz+h(z)dxdy,$$

其中 $f,g,h\in C([0,+\infty))$ 且 Σ 是长方体 $[0,a]\times[0,b]\times[0,c]$ 的表面外侧.

解: 对积分

$$\iint_\Sigma f(x)dydz$$

来说, 只有在两个表面 $\Sigma_0=\{0\}\times[0,b]\times[0,c]$ 和 $\Sigma_a:=\{a\}\times[0,b]\times[0,c]$ 上的积分是有贡献的. 故

$$\iint_\Sigma f(x)dydz=\iint_{\Sigma_0}f(0)dydz+\iint_{\Sigma_a}f(a)dydz$$

$$= -f(0)\iint_{0\le y\le b, 0\le z\le c} dydz + f(a)\iint_{0\le y\le b, 0\le z\le c} dydz \;=\; [f(z)-f(0)]bc.$$

同理得到

$$\iint_\Sigma g(y)\,dzdx = [g(b)-b(0)]cz, \quad \iint_\Sigma h(z)\,dxdy = [h(c)-h(0)]ab.$$

相加得到

$$I = abc\left[\frac{f(a)-f(0)}{a} + \frac{g(b)-g(0)}{b} + \frac{h(c)-h(0)}{c}\right]. \;\square$$

(6) 计算

$$I := \iint_\Sigma [f(x,y,z)+x]dydz + [2f(x,y,z)+y]dzdx + [f(x,y,z)+z]dxdy,$$

其中 Σ 是 $x-y+z=1$ 位于第四象限的上侧且 $f\in C(\Sigma)$.

解: 考虑向量值函数

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (f(x,y,z)+x, 2f(x,y,z)+y, f(x,y,z)+z)$$

和单位法向量

$$\mathbf{n} := \frac{(1,-1,1)}{\sqrt{3}}.$$

则第二型曲面积分可写成

$$I = \iint_\Sigma \boldsymbol{F}\cdot\mathbf{n}dS = \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma (x-y+z)\,dS = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}. \;\square$$

§**13.9** Green 公式、Gauss 公式和Stokes 公式

在这节中我们把一元函数 $f(x)$ 的Newton - Leibniz 公式

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b)-f(a)$$

推广到高维情形. 在§13.6.3 中对定向闭区间$[a,b]$ 我们给出了其边界$\partial[a,b] = \{a,b\}$ 的定向, 即$-a$ 和$+b$. 因此我们可以定义$\partial[a,b]$ 上的积分为

$$\int_{\partial[a,b]} f(x) := f(b)-f(a).$$

从而可以把Newton - Leibniz 公式写成

$$\int_{[a,b]} df(x) = \int_{[a,b]} f'(x)\,dx = \int_{\partial[a,b]} f(x).$$

§13.9.1 Green 公式

曲线 $L \subset \mathbb{R}^2$, 其曲线方程为$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$ $(\alpha \le t \le \beta)$, 称为**Jordan 曲线 (Jordan curve)** 如果 $\boldsymbol{r}(\alpha) = \boldsymbol{r}(\beta)$ 且 $\boldsymbol{r}(t_1) \neq \boldsymbol{r}(t_2)$ 对任何 $t_1 \neq t_2$ $(t_1, t_2 \in (\alpha, \beta))$ 都成立.

回顾§11.2.3 中关于基本群的内容. 给定区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 并令

$$\Omega(D, p) := \{f \in C([0,1], D) | f(0) = f(1) = p\},$$

这里 $p \in D$ 且 $C([0,1], D)$ 表示 $[0,1]$ 到 D 的所有连续映射. 显然常值映射

$$c_p : [0,1] \to D, \quad s \mapsto p,$$

属于 $\Omega(D, p)$. 映射 f 和 g 是**同伦的(homotopic)**, 记为 $f \sim g$, 如果存在连续映射

$$H : [0,1] \times [0,1] \to D, \quad (s,t) \mapsto H(s,t),$$

满足条件

$$H(s,0) = f(s), H(s,1) = g(s), f(0) = g(0) = H(0,t) = H(1,t) = f(1) = g(1).$$

练习13.9.1. *证明 $\sim$ 是 $\Omega(D, p)$ 上的等价关系.*

根据**练习13.9.1** 令

$$[f] := \{g \in \Omega(D, p) | g \sim f\}$$

为 f 的等价类并定义 D 在 p 处的**基本群(fundamental group)** 为

$$\pi_1(D, p) := \{[f] | f \in \Omega(D, p)\}. \tag{13.9.1}$$

任取 $f, g \in \Omega(D, p)$ 定义 $f * g$ 为

$$(f * g)(s) := \begin{cases} f(2s), & 0 \le s \le \frac{1}{2}, \\ g(1-2s), & \frac{1}{2} \le s \le 1. \end{cases}$$

在 $\Omega(D, p)$ 中引入乘法:

$$[f] \cdot [g] := [f * g].$$

练习13.9.2. *验证上述乘法 $\cdot$ 的定义不依赖代表元的选取. 从而 $(\pi_1(D, p), \cdot)$ 构成一个群而且单位元是 $[c_p]$.*

称区域 D 是**单连通的(simply-connected)** 如果 $\pi_1(D, p) = \{[c_p]\}$, 即如果 $f \sim c_p$ 对任何 $f \in \Omega(D, p)$ 都成立.

给定区域 $D \subset \mathbb{R}^2$, 它的边界 $\partial\Omega$ 是平面曲线从而有两个方向. 定义 ∂D 的**正向**如下: 如果沿着 ∂D 走一圈 D 总是在左边. 这个正向也称为**诱导定向(induced orientation)**. 关于边界诱导定向的严格定义请参见§13.6.3.

定理13.9.3. (Green 公式) (Green, 1828) 假设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是由有限条光滑或分段光滑的 Jordan 曲线所围成的区域, 并取定 ∂D 的正向. 对任何 $P, Q \in C^1(D)$, 有

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy. \tag{13.9.2}$$

证: (1) 首先对区域

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \varphi(y) \le x \le \psi(y),\ c \le y \le d\right\}$$

完成证明. 计算得到

$$\int_{\partial D} Qdy = \int_{\overline{AB}} Q(x,y)dy + \int_{\widehat{BC}} Q(x,y)dy + \int_{\overline{CE}} Q(x,y)dy + \int_{\widehat{EA}} Q(x,y)dy$$

$$= \int_c^d Q(\psi(y), y)dy - \int_c^d Q(\varphi(y), y)dy = \int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy,$$

这里

$$A = (\varphi(c), c),\ \ B = (\psi(c), c),\ \ C = (\psi(d), d),\ \ D = (\varphi(d), d).$$

同理对区域

$$\tilde{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \tilde{\varphi}(x) \le y \le \tilde{\psi}(x)\right\}$$

得到

$$\int_{\partial \tilde{D}} Pdx = -\iint_{\tilde{D}} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.$$

如果区域 D 可写成

$$\begin{aligned} D &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(y) \le x \le \psi(y),\ c \le y \le d\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \tilde{\varphi}(x) \le y \le \tilde{\psi}(x)\right\} \end{aligned}$$

则得到

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

(2) (D 是单连通的) 接下来假设区域 D 可分割成有限多个形如

$$D_y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(y) \le x \le \psi(y),\ c \le y \le d\}$$

的子区域. 根据积分区域的可加性, 区域 D 上的二重积分等于子区域 D_y 上的二重积分的和. 公式 (13.9.2) 对每个子区域都成立. 但是相邻两个子区域在它们的公共边界上诱导出相反的定向, 所以边界 ∂D 上的二重积分的总体贡献为零, 从而此时 (13.9.2) 也成立.

如果 D 可分割成有限多个形如 $D_x = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \tilde{\varphi}(x) \le y\tilde{\psi}(x)\}$ 的子区域, 同理可证公式 (13.9.2) 也成立.

(3) (D 是一般区域) 如果区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 包含子区域 D', 则 $D \setminus D'$ 诱导出 $\partial(D \setminus D')$ 上的自然定向. 沿着包含在 D 中的线把 $D \setminus D'$ 割成单连通区域, 此时两条割线的定向互为相反. 利用之前的证明可知 (13.9.2) 也成立.

如果区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 包含有限多个子区域, 对每个子区域作如上类似的分割, 同理也可证明 (13.9.2) 成立. □

假设边界 ∂D 是光滑曲线:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \le t \le \beta.$$

如果令 $\boldsymbol{\tau}$ 为 ∂D 正向的单位切向量, 即

$$\boldsymbol{\tau} \equiv \boldsymbol{\tau}(t) := \frac{(x'(t), y'(t))}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}},$$

则

$$dx = x'(t)dt = \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

若令 $(\boldsymbol{\tau}, x)$ 为 $\boldsymbol{\tau}$ 和 x 正轴的夹角, 则得到

$$\cos(\boldsymbol{\tau}, x) = \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}.$$

因此

$$dx = \cos(\boldsymbol{x}, x) ds.$$

类似地令 $(\boldsymbol{\tau}, y)$ 为 $\boldsymbol{\tau}$ 和 y 正轴的夹角, 则得到

$$\cos(\boldsymbol{\tau}, y) = \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$$

和

$$dy = \cos(\boldsymbol{\tau}, y) ds.$$

另一方面令 $\mathbf{n}$ 为 ∂D 的 (外) 单位法向量, 则

$$\cos(\boldsymbol{\tau}, x) = -\cos(\mathbf{n}, y), \quad \cos(\boldsymbol{\tau}, y) = \cos(\mathbf{n}, x).$$

如果 $F, G \in C^1(D)$, 则根据**定理13.9.3** 得到

$$\int_{\partial D} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\partial D} F dy - G dx$$

$$= \int_{\partial D} [F \cos(\boldsymbol{\tau}, y) - G \cos(\boldsymbol{\tau}, x)] ds = \int_{\partial D} [F \cos(\mathbf{n}, x) + G \cos(\mathbf{n}, y)] ds. \tag{13.9.3}$$

注13.9.4. (1) 如果 $f \in C^1([a,b])$, 对区域 $D := [a,b] \times [0,1]$ 应用**定理13.9.3** 得到

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)dx &= \int_0^1 dy \int_a^b f'(x)dx = \iint_D f'(x)dxdy \\ &= \int_{\partial D} f(x)dy = \int_0^1 f(b)dy + \int_1^0 f(a)dy = f(b) - f(a).\end{aligned}$$

即得到 Newton − Leibniz 公式.

(2) 如果 D 是单连通区域且边界 ∂D 是光滑的, 则

$$|D| = \iint_D dxdy = \int_{\partial D} xdy = -\int_{\partial D} ydx = \frac{1}{2}\int_{\partial D}(xdy - ydx). \tag{13.9.4}$$

例13.9.5. (1) 求

$$x = a\cos^3 t, \quad y = b\sin^3 t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

所围成区域的面积.

解: 利用(13.9.4) 得到

$$\begin{aligned}|D| &= \frac{1}{2}\int_{\partial D}(xdy - ydx) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3ab\left(\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t\right)dt \\ &= \frac{3ab}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{3\pi ab}{8}. \quad \square\end{aligned}$$

(2) 求

$$I := \int_L [e^x \sin y - b(x+y)]\,dx + (e^x\cos y - ax)\,dy,$$

其中 a, b 为正常数, L 为从点 $A = (2a, 0)$ 沿着曲线 $y = \sqrt{2ax - x^2}$ 到点 $O = (0,0)$ 的弧.

解: 记$O = (0,0)$ 到A 的有向直线段为L_0, 则$L_0 + L$ 构成了Jordan 曲线. 根据Green 公式得到

$$\int_{L_0+L}[e^x\sin y - b(x+y)]\,dx + (e^x\cos y - ax)\,dy$$

$$= \iint_D [(e^x\cos y - a) - (e^x\cos y - b)]\,dxdy = \iint_D (b-a)dxdy = \frac{\pi a^2(b-a)}{2},$$

这里D 是由L_0 和L 所围成的区域. 因此

$$\begin{aligned}I &= \frac{\pi a^2(b-a)}{2} - \int_{L_0}[e^x\sin y - b(x+y)]\,dx \\ &= \frac{\pi a^2(b-a)}{2} + \int_0^{2a} bx\,dx = \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)a^2 b - \frac{\pi a^3}{2}. \quad \square\end{aligned}$$

(3) 计算曲线积分

$$I := \oint_L \frac{(yx^3 + e^y)dx + (xy^3 + xe^y - 2y)dy}{9x^2 + 4y^2},$$

其中 L 是椭圆 $x^2/4+y^2/9=1$, 且沿顺时针方向.

解: 因为$(0,0)$ 包含在由椭圆所围的区域D 内, 所以被积函数在D 内无界. 首先根据L 的方程化简得到

$$L=\frac{1}{36}\oint_L\left(yx^3+e^y\right)dx+\left(xy^3+xe^y-2y\right)dy.$$

利用Green 公式得到, 注意方向,

$$I=-\frac{1}{36}\iint_D\left[\left(y^3+e^y\right)-\left(x^3+e^y\right)\right]=-\frac{1}{36}\iint_D(y^3-x^3)dxdy=0.\ \square$$

(4) 计算

$$I:=\int_L 2xydx+(x^2-y^2)dy,$$

这里 L 是从 $A=(0,0)$ 到 $B=(1,0)$ 的任何位于 x 轴上方的光滑曲线.

解: 连接 A 和 B 得到闭区域 D. 则得到

$$-I+\int_{\overrightarrow{AB}}2xydx+(x^2-y^2)dy=\iint_D(Q_x-P_y)dxdy=0,$$

这里 $P=2xy$ 和 $Q=x^2-y^2$. 故 $I=0$. $\square$

(5) 设 L 是以 (x_0,y_0) 为圆心半径为 r 的圆周, L 所围的区域记为 D. 假设 $\boldsymbol{F}=(P,Q)\in C^1$. 求

$$I:=\lim_{r\to0+}\frac{1}{|D|}\oint_L\boldsymbol{F}\cdot\mathbf{n}ds$$

其中 $\mathbf{n}$ 是 L 的外法线方向.

解: 根据 (13.9.3) 得到

$$I=\lim_{r\to0+}\frac{1}{|D|}\oint_L\boldsymbol{F}\cdot\mathbf{n}ds=\lim_{r\to0+}\frac{1}{|D|}\oint_L[P\cos(\mathbf{n},x)+G\cos(\mathbf{n},y)]ds$$

$$=\lim_{r\to0+}\frac{1}{|D|}\oint_L\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy=P_x(x_0,y_0)+Q_y(x_0,y_0).\ \square$$

(6) 假设 L 是平面中一条简单光滑闭曲线, 记所围区域为 D 而 $\mathbf{n}$ 为 L 上的单位外法向量. 对固定点 $P_0:=(x_0,y_0)\notin L$, 令 $\boldsymbol{r}$ 为向量 $\overrightarrow{P_0P}$ 其中 $P=(x,y)\in L$. 计算

$$I:=\int_L\frac{\cos(\boldsymbol{r},\mathbf{n})}{r}ds,\quad r:=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}.$$

解: 因为 $\cos(\boldsymbol{r},\mathbf{n})=\boldsymbol{r}\cdot\mathbf{n}/r$ 所以如果 P_0 在 D 外面则得到

$$I=\int_L\frac{\boldsymbol{r}\cdot\mathbf{n}}{r^2}ds=\int_L\left(\frac{x-x_0}{r^2},\frac{y-y_0}{r^2}\right)\cdot\mathbf{n}ds$$

$$=\int_L\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-x_0}{r^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y-y_0}{r^2}\right)\right)dxdy$$

$$= \int_L \left(\frac{r^2 - (x - x_0)2(x - x_0)}{r^4} + \frac{r^2 - (y - y_0)2(y - y_0)}{r^4} \right) dxdy = 0.$$

如果 P_0 在 D 内部, 取 $\epsilon > 0$ 充分小使得 $\mathbb{B}^2(P_0, \epsilon) \subset D$. 根据 Green 公式得到

$$I = \iint_{\partial \mathbb{B}^2(P_0, \epsilon)} \frac{\boldsymbol{r} \cdot \mathbf{n}}{r^2} ds$$

此时 $\partial \mathbb{B}^2(P_0, \epsilon)$ 的定向和 L 的定向相反. 故

$$I = \frac{1}{\epsilon^2} \iint_{\partial \mathbb{B}^2(P_0, \epsilon)} \epsilon ds = 2\pi. \quad \square$$

(7) 假设 L 是从 $A = (1, 0)$ 到 $B = (0, 2)$ 且位于第一象限内的简单光滑曲线, $\mathbf{n}$ 是 L 上的方单位法向量且指向原点, r 是 L 上的点到原点的距离. 计算

$$I := \int_L \frac{\partial \ln r}{\partial \mathbf{n}} ds.$$

解: 考虑曲线段

$$L_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = \epsilon, \ x, y \geq 0\},$$

和 L_1 (从 B 到 $(0, \epsilon)$ 的直线段) 和 L_3 (从 $(\epsilon, 0)$ 到 A 的直线段). 记这些曲线段构成闭曲线 C, 而把所围的区域记为 D. 利用公式 (13.9.3) 并注意到 I 中的 $\mathbf{n}$ 是内单位法向量, 得到

$$\int_C \frac{\partial \ln r}{\partial \mathbf{n}} ds = \iint_D \left[((\ln r)_x)_x + ((\ln r)_y)_y \right] dxdy = \iint_D \Delta \ln r dxdy = 0.$$

在 L_1 和 L_2 上 $\mathbf{grad}(\ln r)$ 和 $\mathbf{n}$ 垂直, 所以得到

$$I = \int_{L_2} \frac{\partial \ln r}{\partial \mathbf{n}} ds = \int_{L_2} \left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2} \right) \cdot \left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{y}{\epsilon} \right) ds = \frac{1}{\epsilon} \int_{L_2} ds = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

(8) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq a^2\}$ $(a \geq 0)$, $f(x, y) \in C^1(D)$, 且 $f|_{\partial D} = 0$. 证明

$$\left| \iint_D f(x, y) dxdy \right| \leq \frac{\pi a^2}{3} \max_D |\mathbf{grad}(f)|.$$

证: 利用 Green 公式和 $f|_{\partial D} = 0$ 得到

$$\iint_D [f(x, y) + y f_y(x, y)] dxdy = \iint_D (yf)_y dxdy = \int_{\partial D} (-y f(x, y)) dx = 0.$$

同理可得

$$\iint_D [f(x, y) + x f_x(x, y)] dxdy = 0.$$

因此

$$\left| \iint_D f(x, y) dxdy \right| = \left| -\frac{1}{2} \iint_D \left(x f_x(x, y) + y f_y(x, y) \right) dxdy \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{f_x^2 + f_y^2} dxdy \leq \frac{1}{2} \max_D |\mathbf{grad}(f)| \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\max_{D}|\mathbf{grad}(f)|\int_0^{2\pi}\int_0^a r^2dr = \frac{\pi a^3}{3}\max_D|\mathbf{grad}(f)|. \quad \square$$

(9) **(Poincaré 不等式)** 假设 D 是有由简单光滑闭曲线 L 围成的区域, $f\in C^1(\overline{D})$, $f|_L=0$. 证明

$$\iint_D f^2(x,y)dxdy \le \left(\max_{(x,y)\in D}(x^2+y^2)\right)\iint_D|\mathbf{grad}(f)|^2dxdy.$$

证: 利用 (8) 中的公式得到

$$\begin{aligned}\iint_D f^2(x,y)dxdy &= -\frac{1}{2}\iint_D\left[x(f^2)_x(x,y)+y(f^2)_y(x,y)\right]dxdy\\ &= -\iint_D\left[xf(x,y)f_x(x,y)+yf(x,y)f_y(x,y)\right]dxdy\\ &\le \iint_D\sqrt{x^2+y^2}|f(x,y)|\mathbf{grad}(f)|(x,y)dxdy\\ &\le \left(\max_{(x,y)\in D}\sqrt{x^2+y^2}\right)\iint_D|f||\mathbf{grad}(f)|dxdy\end{aligned}$$

$$\le \left(\max_{(x,y)\in D}\sqrt{x^2+y^2}\right)\left(\iint_D f^2(x,y)dxdy\right)^{1/2}\left(\iint_D|\mathbf{grad}(f)|^2dxdy\right)^{1/2}. \quad \square$$

§13.9.2 曲线积分的路径无关性

例13.9.5 (4) 告诉我们曲线积分和曲线 L 无关. 这样的性质称为**曲线积分的路径无关性 (path independence of line integrals)**, 即下面的**Green 定理**[9].

定理13.9.6. (Green 定理) (1) 假设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是区域且 $P,Q\in C(D)$. 则下列命题等价:

(a) 对 D 内任意分段光滑曲线 L, 曲线积分

$$\int_L Pdx+Qdy$$

与路径 L 无关, 只与 L 的起点和终点有关;

(b) $Pdx+Qdy$ 在 D 上是**正合的 (exact)**, 即存在 $U\in C^1(D)$, 使得 $dU=Pdx+Qdy$, 这时称 U 为微分形式 $Pdx+Qdy$ 的**原函数 (primitive)**;

(c) 沿着 D 内任意分段光滑闭曲线 L, 有

$$\oint_L Pdx+Qdy=0.$$

[9] George Green, 1793 年7 月14 日- 1841 年5 月31 日, 今英国诺丁汉郡斯奈顿人, 英国数学物理学家. 他在《An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism》(1828) 中提出了很多重要的概念, 比如如今的Green 定理、势函数、如今的Green 函数等.

(2) 如果进一步假设 $P, Q \in C^1(D)$, 则上述等价的 $(a), (b), (c)$ 可推出 (d) 在 D 内处处成立

$$Q_x = P_y. \tag{13.9.5}$$

(3) 如果 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是单连通的且 $P, Q \in C^1(D)$, 则 $(a), (b), (c), (d)$ 互相等价.

证: (1) 假设 (a) 成立. 任取 $(x_0, y_0) \in D$. 则曲线积分

$$U(x,y) := \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P dx + Q dy \tag{13.9.6}$$

由 (x,y) 唯一确定. 既然曲线积分和路径无关, 利用定积分第一中值定理得到

$$\Delta U := U(x+\Delta x, y) - U(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} P dx + Q dy - \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P dx + Q dy$$

$$= \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P dx + Q dy = \int_x^{x+\Delta x} P dx = P(\xi, y)\Delta x,$$

这里 ξ 介于 x 和 $x + \Delta$ 之间. 故

$$U_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} = P(x,y).$$

同理可证 $U_y = Q(x,y)$. 根据**定理12.1.6** 原函数 U 必可微且偏导数都是连续的.

反之, 假设 $P dx + Q dy$ 是正合的, 即存在原函数 U 满足 $dU = P dx + Q dy$. 对 D 内的任意分段光滑曲线 L, 根据定义, L 是由有限多条光滑曲线所组成. 为了证明曲线积分与路径 L 无关, 不妨假设 L 本身就是光滑的:

$$L: \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \le t \le b.$$

从而得到

$$\int_L P dx + Q dy = \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt$$

$$= \int_a^b dU(x(t), y(t)) = U(x(t), y(t))\Big|_a^b = U(x(b), y(b)) - U(x(a), y(a)).$$

故取曲线积分只和路径的起点和终点有关.

假设 (a) 或 (b), 则直接由上述公式得到 (c). 反之假设 (c) 成立并任取两条封端光滑曲线 L_1 和 L_2 使得 $s_{L_1} = s_{L_1}$ 且 $e_{L_1} = e_{L_2}$. 因为 $L_1 + (-L_2)$ 构成了一个分段光滑闭曲线, 从而得到

$$0 = \oint_{L_1+(-L_2)} P dx + Q dy = \left(\int_{L_1} P dx + Q dy\right) + \left(\int_{-L_2} P dx + Q dy\right)$$

即
$$\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy.$$
(2) 假设 $P, Q \in C^1(D)$ 且满足 (b). 则得到 $P = U_x$ 和 $Q = U_y$. 因此
$$P_y = U_{xy} = U_{yx} = Q_x$$
这里用到了**定理12.1.13**.

(3) 利用**定理13.9.3**. □

例13.9.7. (1) 求积分
$$I = \int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$
解: 令$P = x/\sqrt{x^2+y^2}$ 和$Q = y/\sqrt{x^2+y^2}$. 因为
$$P_y = Q_x = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad Pdx + Qdy = dU, \quad U := \sqrt{x^2+y^2},$$
所以积分和路径无关从而得到$I = U(6,8) - U(1,0) = 9$. □

(2) 证明 $\mathbb{R}^2$ 上
$$\omega = (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - mx)dy$$
是某个函数的全微分, 并计算积分
$$I := \int_L \omega,$$
其中 L 是从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的任意路径.

解: 令$\omega = Pdx + Qdy$ 则得到
$$P_y = Q_x = e^x \cos y - m, \quad Pdx + Qdy = dU, \quad U := e^x \sin y - mxy.$$
因此得到$I = U(1,1) - U(0,0) = e\sin 1 - m$. □

(3) 计算
$$I := \oint_L \frac{xdy - ydx}{4x^2+y^2},$$
其中 L 是以 $(1,0)$ 为中心 R 为半径的圆 $(R \neq 1)$, 且取逆时针方向.

解: 令$Q = x/(4x^2+y^2)$ 和$P = -y/(4x^2+y^2)$, 则得到
$$P_y = Q_x = \frac{y^2 - 4x^2}{(4x^2+y^2)^2}.$$
记由L 所围的区域为D, 并记由椭圆$L_\epsilon := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = \epsilon^2\}$ 所围的区域为D_ϵ.

如果$R < 1$, 则
$$I = \iint_D (P_y - Q_x)dxdy = 0.$$

如果$R>1$, 则

$$I+\oint_{L_\epsilon} Pdx+Qdy=\iint_{D\setminus D_\epsilon}(P_y-Q_x)dxdy=0.$$

另一方面, 在C_ϵ 令$x=\frac{\epsilon}{2}\cos\theta$ 和$y=\epsilon\sin\theta$, $\theta\in[0,2\pi]$,

$$\oint_{L_\epsilon} Pdx+Qdy=-\frac{1}{\epsilon^2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\epsilon^2}{2}\cos^2\theta+\frac{\epsilon^2}{2}\sin^2\theta\right)d\theta=-\pi,$$

注意定向! 最后得到$I=-(-\pi)=\pi$. □

(4) 假设 L 为由 $A=(\pi/2,0)$ 沿着曲线 $y=\frac{\pi}{2}\cos x$ 到 $B=(0,\pi/2)$ 的弧段, 求积分

$$I:=\int_L\frac{(3y-x)dx+(y-3x)dy}{(x+y)^3}.$$

解: 记连接B 到A 的有向直线段为L_0, 并令由L_0 和L 所围的区域为D. 则得到

$$I+\int_{L_0}\frac{(3y-x)dx+(y-3x)dy}{(x+y)^3}$$
$$=\iint_D\left[\left(\frac{y-3x}{(x+y)^3}\right)_x-\left(\frac{3y-x}{(x+y)^3}\right)_y\right]dxdy=0.$$

从而得到

$$I=-\int_0^{\pi/2}\frac{(\frac{3\pi}{2}-4x)dx-(\frac{\pi}{2}-4x)dx}{(\pi/2)^3}=-\frac{8}{\pi^3}\int_0^{\pi/2}\pi dx=-\frac{4}{\pi}.\ \square$$

(5) 假设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 为不含原点的区域, 考虑 Ω 上的向量函数 $f(r)$, 其中 $r=|\boldsymbol{r}|$ 且 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)\in\Omega$. 如果函数 $f(r)$ 在 $r>0$ 上连续, 则曲线积分

$$\int_L f(r)(xdx+ydy+zdz)$$

和 Ω 内的曲线 L 无关.

证: 注意到

$$f(r)(xdx+ydy+zdz)=rf(r)\left(\frac{x}{r}dx+\frac{y}{r}dy+\frac{z}{r}dz\right)=rf(r)dr.$$

因此 $du=f(r)(xdx+ydy+zdz)$, 其中 u 是 $rf(r)$ 的一个原函数. 根据Green定理得到曲线积分和 L 无关. □

(6) 假设 $f(x,y)\in C^2(\mathbb{R}^2)$ 且

$$\Delta f+f_x=0\quad((x,y)\neq(0,0)),\quad 2\pi rf_x\sim x\quad(r\to 0),\quad 2\pi rf_y\sim y\quad(r\to 0).$$

证明曲线积分

$$I:=\int_{L_R}e^x\left(-f_ydx+f_xdy\right)$$

和 R 无关, 其中 $L_R := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2=R^2\}$.

证: 令

$$P=-e^x f_y,\quad Q=e^x f_x.$$

计算得到

$$P_y-Q_x=-e^x f_{yy}-e^x f_x-e^x f_{xx}=-e^x(\Delta f+f_x)=0,\quad (x,y)\neq(0,0).$$

对任意 $r\in(0,R)$ 考察区域 $D:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|r^2\le x^2+y^2\le R^2\}$. 利用Green 公式得到

$$I=\int_{L_r} e^x\left(-f_y dx+f_x dy\right)$$

$$=\int_0^{2\pi} e^{r\cos\theta}\left[\sin\theta f_y(r\cos\theta,r\sin\theta)+\cos\theta f_x(r\cos\theta,r\sin\theta)\right]rd\theta$$

$$\to\int_0^{2\pi}\left[\frac{\sin\theta}{2\pi}\sin\theta+\frac{\cos\theta}{2\pi}\cos\theta\right]d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}=1.\quad\square$$

(7) 求 $P,Q\in C^1(\mathbb{R}^2)$ 的关系使得曲线积分

$$I(\alpha,\beta)=\int_L P(x+\alpha,y+\beta)dx+Q(x+\alpha,y+\beta)dy$$

和常数 α,β 无关, 其中 $L\subset\mathbb{R}^3$ 是任意光滑闭曲线.

解: 根据题意

$$0=I(\alpha,\beta)-I(0,0)=\int_L[P(x+\alpha,y+\beta)-P(x,y)]dx+[Q(x+\alpha,y+\beta)-Q(x,y)]dy$$

$$=\iint_D[f(x+\alpha,y+\beta)-f(x,y)]dxdy$$

这里 $f(x,y):=Q_x(x,y)-P_y(x,y)$. 对任意 $(x_0,y_0)\in D$ 和任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 考虑区域, n 充分大,

$$D_n:=\left\{(x,y)\in D|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le\frac{1}{n^2}\right\}\subset D.$$

利用积分中值定理得到

$$0=\iint_{D_n}[f(x+\alpha,y+\beta)-f(x,y)]dxdy=\frac{\pi}{n^2}[f(x_n+\alpha,y_n+\beta)-f(x_n,y_n)],$$

这里 $(x_n,y_n)\in D_n$. 连续性推出 $f(x_0+\alpha,y_0+\beta)=f(x_0,y_0)$, 即 $f(x,y)=C$ 是常数. 故

$$Q_x-P_y=C.$$

上述条件可写成

$$(Q-Cx)_x-P_y=0\quad 或\quad Q_x-(P+Cy)_y=0.$$

根据Green 定理存在 $u \in C^1(D)$ 或者 $v \in C^1(D)$ 满足

$$u_x = P, \quad u_y = Q - Cx, \quad 或 \quad v_x = P + Cy, \quad v_y = Q.$$

反之假设这个条件成立, 则得到

$$I(\alpha, \beta) = \iint_D (Q_x - P_y) dxdy = \iint_D (u_{xy} + C - u_{xy}) dxdy = C|D|.$$

即和 α, β 无关. □

§13.9.3 Gauss 公式

之前关于平面区域的单连通性定义可推广高维. 区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 称为**单连通的 (simply-connected)** 如果对任意 $p \in \Omega$ 有

$$f \sim c_p, \quad 任意\ f \in C([0,1], \Omega)\ 且\ f(0) = f(1) = p,$$

即存在连续映射 $H : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$, $(s,t) \mapsto H(s,t)$, 满足条件

$$H(s,0) = f(s),\ H(s,1) = c_p,\ f(0) = c_p(0) = H(0,t) = H(1,t) = f(1) = c_p(1),$$

这里 $c_p : s \mapsto p$ 是 $[0,1]$ 上的常值函数.

定理13.9.8. (Gauss 公式, 1813; Ostrogradsky 公式, 1826) 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是区域且边界 $\partial\Omega$ 是由分段光滑的定向（取外侧）曲面所构成. 如果函数 $P, Q, R \in C^1(\Omega)$, 则

$$\iint_{\partial\Omega} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz. \tag{13.9.7}$$

证: (1) 首先考虑特殊区域

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (y,z) \in D,\ \varphi(y,z) \le x \le \psi(y,z)\},$$

这里 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是 Ω 在 yz 平面上的投影. 定义定向曲面

$$\begin{aligned} S_1 &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = \psi(y,z),\ (y,z) \in D\}, \\ S_2 &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = \varphi(y,z),\ (y,z) \in D\} \end{aligned}$$

其上的定向是由 Ω 所诱导出来的 (因此 S_1 的定向指向 x 正轴而 S_2 的定向指向 x 负轴). 故

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega P_x dxdydz &= \iint_D dydz \int_{\varphi(y,z)}^{\psi(y,z)} P_x dx \\ &= \iint_D [P(\psi(y,z), y, z) - P(\varphi(y,z), y, z)] dydz \\ &= \iint_{S_1} Pdydz + \iint_{S_2} Pdydz = \iint_{\partial\Omega} Pdydz. \end{aligned}$$

同理如果 $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\varphi(x,y)\leq z\leq\psi(x,y),\ (x,y)\in D\}$, 则

$$\iiint_\Omega R_z\,dxdydz=\iint_{\partial\Omega}R\,dxdy;$$

如果 $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\varphi(z,x)\leq y\leq\psi(z,x),\ (z,x)\in D\}$, 则

$$\iiint_\Omega Q_y\,dxdydz=\iint_{\partial\Omega}Q\,dzdx.$$

(2) (Ω 是单连通区域) 此时 Ω 可分解成有限个上述三种子区域的并. 在每个子区域上 (13.9.7) 成立, 而在相邻两个子区域的公共边界上, 方向互反的两个曲面积分抵消, 从而第二型曲面积分就等于这些子区域上三重积分的和.

(3) (Ω 是一般区域) 此时用 n 个光滑定向曲面把区域 Ω 分成 $n+1$ 个单连通区域 (这里 n 表示 Ω 的 "洞" 数目). 注意到此时每个这样的光滑定向曲面把 "洞" 切开, 得到的的相邻边界的定向是相反的. 也就是说新形成的边界对第二型曲面积积分没有任何贡献, 故 (13.9.7) 此时也成立. □

注13.9.9. (1) 如果 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 中的具有光滑边界的有界闭区域, 则其可求体积且体积为

$$\begin{aligned}|\Omega|=\iiint_\Omega dxdydz&=\iint_{\partial\Omega}x\,dtydz=\iint_{\partial\Omega}y\,dzdx=\iint_{\partial\Omega}z\,dxdy\\&=\frac{1}{3}\iint_{\partial\Omega}x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy,\end{aligned}\tag{13.9.8}$$

这里 $\partial\Omega$ 的定向取外侧.

(2) 假设 $D\subset\mathbb{R}^3$ 是有界光滑闭曲面并任取固定点 $(\xi,\eta,\zeta)\in\mathbb{R}^3\setminus D$. 计算Gauss 积分

$$I(\xi,\eta,\zeta):=\iint_D\frac{\cos(\boldsymbol{r},\mathbf{n})}{|\boldsymbol{r}|^2}dS\tag{13.9.9}$$

这里 $\boldsymbol{r}=(x-\xi,y-\eta,z-\zeta)$, $\mathbf{n}$ 是 D 的外法向量.

解: 因为

$$\cos(\boldsymbol{r},\mathbf{n})=\frac{x-\xi}{r}\cos(\mathbf{n},x)+\frac{y-\eta}{r}\cos(\mathbf{n},y)+\frac{z-\zeta}{r}\cos(\mathbf{n},z),$$

这里 $r:=|\boldsymbol{r}|$, 得到

$$I(\xi,\eta,\zeta)=\iint_S\frac{x-\xi}{r^2}dydz+\frac{y-\eta}{r^3}dzdx+\frac{z-\zeta}{r^3}dxdy.$$

令 Ω 是由 D 所围成的区域. 如果 $(\xi,\eta,\zeta)\notin\Omega$, 则

$$I(\xi,\eta,\zeta)=\iiint_\Omega\left(\frac{3}{r^3}-\frac{3|\boldsymbol{r}|^2}{r^5}\right)dxdydz=0.$$

如果 $(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega$, 则考虑 Ω 内的小球面

$$D_\epsilon:=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2=\epsilon^2\right\}$$

及其所围成的小球 Ω_ϵ. 应用**定理13.9.8** 到区域 $\Omega\setminus\Omega_\epsilon$ 得到

$$I(\xi,\eta,\zeta)=\iint_{D_\epsilon}\frac{\cos(\boldsymbol{r},\mathbf{n})}{r^2}dS=\iint_{D_{0\epsilon}}\frac{dS}{\epsilon^2}=\frac{1}{\epsilon^2}\cdot 4\pi\epsilon^2=4\pi.\quad\square$$

例13.9.10. (1) 计算积分

$$I:=\iint_\Sigma (x+1)dydz+(y+1)dzdx+(z+1)dxdy,$$

其中 Σ 为平面 $x+y+z=1, x=0, y=0$ 和 $z=0$ 所围区域的边界, 并取定向为外侧.

解: 根据Gauss 公式得到

$$I=\iiint_\Omega 3dxdydz=3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2},$$

其中Ω 是Σ 所围的区域. $\square$

(2) 求曲面积分

$$I:=\iint_S yzdzdx+2dxdy,$$

其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 外侧在 $z\geq 0$ 的部分(定向取上侧), 即上半球面.

解: 记$S_0:=\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2\leq 4\}$ 和D_0 为S_0 在xy 平面上的投影. 根据Gauss 公式得到

$$I+\iint_{S_0} yzdzdx+2dxdy=\iiint_\Omega zdxdydz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^2 r\cos\varphi r^2\sin\varphi dr=4\pi\int_0^{\pi/2}\sin(2\varphi)d\varphi=4\pi.$$

另一方面

$$\iint_{S_0} yzdzdx+2dxdy=\iint_{D_0}2dxdy=8\pi$$

从而得到$I=12\pi$. $\square$

§13.9.4 Stokes 公式

假设 Σ 是具有分段光滑或光滑边界的光滑定向曲面, 并取定 Σ 的定向. 定义 $\partial\Sigma$ 的正向如下: 沿着 $\partial\Sigma$ 走曲面 Σ 总是在左边. 把这个定向称为边界 $\partial\Omega$ 上的**诱导定向(inherited orientation)**. 即, 边界上每个点沿着曲线 $\partial\Omega$ 的切向量和曲面 Σ 的外法向量构成了一个自然坐标架. 边界诱导定向严格定义参见§13.6.3.

定理13.9.11. (Stokes 公式, 1854) 假设 Σ 是光滑定向曲面且且边界 $\partial\Sigma$ 为分段光滑闭曲面(取诱导定向). 对任何 $P,Q,R\in C^1(\overline{\Sigma})$, 有

$$\int_{\partial\Sigma}Pdx+Qdy+Rdz=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}.\qquad(13.9.10)$$

证: 和之前一样, 不妨假设

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = f(x,y),\ (x,y) \in D\}.$$

这里 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是由分段光滑的 Jordan 曲线所围成的区域. 利用**定理13.9.3** 得到

$$\int_{\partial\Sigma} P dx = \int_{\partial D} P(x,y,f(x,y))dx = -\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} f_y\right) dxdy.$$

另一方面

$$\int_\Sigma \frac{\partial P}{\partial x} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} f_y\right) dxdy.$$

故

$$\int_{\partial\Sigma} P dx = \iint_\Sigma P_z dzdx - P_y dxdy.$$

同理可证

$$\int_{\partial\Sigma} Q dy = \iint_\Sigma Q_x dxdy - Q_z dydz$$

和

$$\int_{\partial\Sigma} R dz = R_y dydz - R_x dzdx.$$

三式相加得到 (13.9.10). □

公式 (13.9.10) 也可写成

$$\int_{\partial\Sigma} P dx + Q dy + R dz = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS. \tag{13.9.11}$$

这里 $\alpha = (\mathbf{n}, x)$, $\beta = (\mathbf{n}, y)$, $\gamma = (\mathbf{n}, z)$.

例13.9.12. (1) 计算积分

$$I := \oint_C (z-y)dx + (x-z)dy + (x-y)dz,$$

其中 C 是两个曲面 $x^2 + y^2 = 1$ 和 $x - y + z = 2$ 的交线从 z 正轴往 z 负轴看, 并取 C 的方向为顺时针.

解: 令Σ 为$x - y + z = 2$ 上的以C 为边界的部分, 定向取上侧. 则根据Stokes 公式得到

$$I = -\iint_\Sigma 2dxdy = -2\pi. \ \square$$

(2) 计算

$$I := \int_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz,$$

其中 L 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geq 0, a>0)$ 和圆柱面 $x^2+y^2+ax=0$ 的交线, 从 z 正轴看下去定向是逆时针的.

解: 记在球面$x^2+y^2+z^2=a^2$ 上由L 所围的曲面为Σ, 定向取上侧. 则其法向量的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x}{a},\quad \cos\beta=\frac{y}{a},\quad \cos\gamma=\frac{z}{a}.$$

根据Stokes 公式得到

$$I=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\frac{x}{a} & \frac{y}{a} & \frac{z}{a}\\ \partial_a & \partial_y & \partial_z\\ y^2 & z^2 & x^2\end{vmatrix}dS=-\frac{2}{a}\iint_{\Sigma}(xy+yz+zx)dS$$

$$=-\frac{2}{a}\iint_{\Sigma}xzdS=-2\iint_{\Sigma}\cos\gamma dS=-2\iint_{D_{xy}}xdxdy$$

$$=-2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{a/2}\left(r\cos\theta-\frac{a}{2}\right)rdr=2\pi a\int_0^a rdr=\frac{\pi a^3}{4},$$

其中$D_{xy}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2+ax\leq 0\}$ 是Σ 在xy 平面上的投影. □

定理13.9.13. (1) 假设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是区域且 $P,Q,R\in C(\Omega)$. 则下列命题等价:

(a) 对 Ω 被的任意分段光滑曲线 L, 曲线积分

$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz$$

与路径 L 无关, 只与 L 的起点和终点有关;

(b) $Pdx+Qdy+Rdz$ 在 Ω 内是**正合的**, 即存在 $U\in C^1(\Omega)$ 使得 $dUPdx+Qdy+Rdz$, 这是称 U 为微分形式 $Pdx+Qdy+Rdz$ 的**原函数**;

(c) 沿着 Ω 内任意分段光滑闭曲线 L, 有

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=0.$$

(2) 如果进一步假设 $P,Q,R\in C^1(\Omega)$, 则上述等价的 $(a),(b),(c)$ 可推出

(d) 在 Ω 内处处成立

$$R_y=Q_z,\quad P_z=R_x,\quad Q_x=P_y. \tag{13.9.12}$$

(3) 如果 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是单连通的且 $P,Q,R\in C^1(\Omega)$, 则 $(a),(b),(c),(d)$ 互相等价.

证: 证明和**定理13.9.6** 类似. □

例13.9.14. (1) 证明积分

$$I := \int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} x\,dx + y^2 dy - z^3 dz$$

和路径无关.

证: 令$P = x, Q = y^2, R = -z^3$. 我们得到

$$R_y = Q_z = P_z = R_x = Q_x = P_y = 0.$$

根据**定理13.9.13** 可知积分和路径无关. 进一步得到

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = dU, \quad U = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}z^4$$

和$I = U(2,3,-4) - U(1,1,1) = -643/12$. □

(2) 假设函数 $u = u(x,y,z)$ 在光滑定向曲面 S 所围成的区域 Ω 内是 C^2 的. 证明

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = \iiint_\Omega \Delta u\,dxdydz, \tag{13.9.13}$$

$$\iint_S u\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = \iiint_\Omega \left(|\mathbf{grad}(u)|^2 + u\Delta u\right) dxdydz, \tag{13.9.14}$$

这里 $\mathbf{n}$ 是曲面的外法向量.

解: 利用**定理13.9.8** 得到

$$\begin{aligned}\iint_S \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS &= \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\cos\alpha\,dydz + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\cos\beta\,dzdx + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\cos\gamma\,dxdy\right) \\ &= \iint_S \left(u_x dydz + u_y dzdx + u_z dxdy\right) = \iiint_\Omega \Delta u\,dxdydz.\end{aligned}$$

同理可得到

$$\begin{aligned}\iint_S u\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS &= \iint_S u\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\cos\alpha\,dydz + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\cos\beta\,dzdx + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\cos\gamma\,dxdy\right) \\ &= \iint_S u\left(u_x dydz + u_y dzdx + u_z dxdy\right) \\ &= \iiint_\Omega \left((uu_x)_x + (uu_y)_y + (uu_z)_z\right) dxdydz \\ &= \iiint_\Omega \left(u\Delta u + u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\right) dxdydz. \quad \square\end{aligned}$$

§13.9.5 * 流形上的Stokes 公式

这里只叙述高维区域的 Stokes 公式, 对任意流形上的 Stokes 公式可参见之后的章节. 令 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是区域且取 $\omega \in \Lambda^k_\infty(U)$ (定义见 (13.5.9)). 外微分算子 (13.5.10) 是指

$$\mathbf{d}\omega = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} (d\omega_{i_1\cdots i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \sum_{|I|=l} d\omega_I \wedge d\mathbf{x}^I,$$

这里 $\omega = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \omega_{i_1\cdots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \sum_{|I|=k} \omega_I d\mathbf{x}^I$. 易证 $\mathbf{d}^2 = 0$.

(1) $U \subset \mathbb{R}$: 若 $\omega = f \in \Lambda^0_\infty(U)$, 则

$$\mathbf{d}\omega = f'(x)dx.$$

(2) $U \subset \mathbb{R}^2$: 若 $\omega = Pdx + Qdy \in \Lambda^1_\infty(U)$ 则

$$\mathbf{d}\omega = (Q_z - P_y)dx \wedge dy.$$

(3) $U \subset \mathbb{R}^3$: 若 $\omega = Pdx + Qdy + Rdz \in \Lambda^1_\infty(U)$, 则

$$\mathbf{d}\omega = (R_y - Q_z)dy \wedge dz + (P_z - R_x)dz \wedge dx + (Q_x - P_y)dx \wedge dy.$$

(4) $U \subset \mathbb{R}^3$: 若 $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy \in \Lambda^2_\infty(U)$, 则

$$\mathbf{d}\omega = (P_x + Q_y + R_z)dx \wedge dy \wedge dz.$$

定理13.9.15. (Leibniz 公式) 如果 $\omega \in \Lambda^p_\infty(U)$ 和 $\eta \in \Lambda^q_\infty(U)$, 则

$$\mathbf{d}(\omega \wedge \eta) = \mathbf{d}\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge \mathbf{d}\eta. \tag{13.9.15}$$

证: 对 $\omega = \sum_{|I|=p} \omega_I d\mathbf{x}^I$ 和 $\eta = \sum_{|J|=q} \eta_J d\mathbf{x}^J$ 得到

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}(\omega \wedge \eta) &= \sum_{|I|=p,|J|=q} \mathbf{d}\left(\omega_I \eta_J d\mathbf{x}^I \wedge d\mathbf{x}^J\right) \\
&= \sum_{|I|=p,|J|=q} \left[\eta_J \left(d\omega_I \wedge d\mathbf{x}^I\right) \wedge d\mathbf{x}^J + \omega_I d\eta_J \wedge d\mathbf{x}^I \wedge d\mathbf{x}^J\right] \\
&= \mathbf{d}\omega \wedge \eta + \sum_{|I|=p,|J|=q} \omega_I (-1)^{|I|} d\mathbf{x}^I \wedge d\eta_J \wedge d\mathbf{x}^J \\
&= \mathbf{d}\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge \mathbf{d}\eta. \quad \square
\end{aligned}$$

对 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上的 n- 形式 $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ 定义积分如下

$$\int_U \omega := \int_U f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \tag{13.9.16}$$

从而得到 (暂不考虑假设条件)

- **(Newton-Leibniz 公式)**: (5.4.24) 可写成

$$\int_{\partial I} \omega = \int_I \mathbf{d}\omega. \tag{13.9.17}$$

- **(Green 公式)**: (13.9.2) 可写成
$$\int_{\partial D}\omega=\int_D \mathbf{d}\omega. \tag{13.9.18}$$
- **(Gauss 公式)**: (13.9.7) 可写成
$$\int_{\partial\Omega}\omega=\int_\Omega \mathbf{d}\omega. \tag{13.9.19}$$
- **(Stokes 公式)**: (13.9.10) 可写成
$$\int_{\partial\Sigma}\omega=\int_\Sigma \mathbf{d}\omega. \tag{13.9.20}$$

一般区域 $U\subset\mathbb{R}^n$ 上的**Stokes 公式**为
$$\int_{\partial U}\omega=\int_U \mathbf{d}\omega,\quad \omega\in\Lambda^{n-1}_\infty(U). \tag{13.9.21}$$
这里 U 是光滑定向区域且在其光滑边界 ∂U 上诱导出定向.

§13.9.6 Stokes 公式的历史

本小节主要参考了Katz 的如下文章:

Katz, Victor, J. *The history of Stokes' theorem*, Math. Mag., **52**(1979), no. 3, 146-156.

前面证明了的Green 定理、Gauss 定理、Stokes 定理以及流形上的Stokes 定理, 都是讲如何把$(k-1)$ 维积分与k 维积分联系起来. 因为最核心的证明仍旧是微积分基本定理, 所以这些定理可追溯到17世纪下叶. 在18世纪晚期, Lagrange 和Laplace 实际上都使用了微积分基本定理递推地把k 维积分归结到$(k-1)$ 维积分. 然而这些定理的显示形式直到十九世纪才出现.

这三个定理中第一个本质上给出如今形式的陈述与证明的是Gauss 定理或称为散度定理(为了方便, 下面统称为散度定理). 散度定理的三种特殊形式出现在1813 年Gauss 的论文《Theoria attractions corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodo nova tractata, commentationes societatis regiae scientiarium Gottingensis recentiores》中. 在1833 年和1839 年Gauss 发表了散度定理的其它形式, 但是在那个时期, 散度定理的一般形式已经被Mikhail Ostrogradsky[10] 所陈述和证明了. Ostrogradsky 在1826 年2

[10] Mikhail Vasilyevich Ostrogradsky, 1801 年9 月24 日- 1862 年1 月1 日, 今乌克兰波尔塔瓦州人, 俄国数学家、理学家和物理学家. 他的工作包括变分学、代数函数的积分、数学物理、古典力学, 是当时俄国数学界的重要人物. 在1816 年入读University of Kharkiv, 1820 年参加毕业考试, 但宗教兼国民教育主任要求他重考. 官方原因是他没有上过哲学和神学课, 实际原因是他的老师Timofei Osipovsky 之前因宗教问题被停职, 而校方认为这事也和Timofei Osipovsky 的学生有关. 他拒绝重考不取学位便离开俄罗斯到巴黎求学. 在1822 年到1826 年期间, 他在Sorbonne 和Collège de France in Paris 求学. 1828 年他回到俄罗斯定居在圣彼得堡, 而后被选为俄国科学院院士. 2007 年, 乌克兰把1960 年创立的Kremenchuk State Polytechnic University 命名为Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University.

月13 日在巴黎科学院上宣读了论文《Démonstration d'un théorème du calcul intégral》. 在1827 年8 月6 日, Ostrogradsky 再次在巴黎宣读了他的这个定理, 而最后一次是1828 年11 月5 日在圣彼得堡. 前面两次报告只存在手稿中虽然已经用俄语发表了,最后一次报告是Ostrogradsky 唯一一次正式发表的, 它以标题《Note sur la Théorie de la chaleur》在1831 年发表在圣彼得堡皇家科学院院报上.

在同一时期, 散度定理以及相关的定理出现在其他三位数学家的论文里: Simeon Denis Poisson 于1828 年4 月14 日在巴黎宣布的论文(正式论文以标题《Mémoire sur l'Équilibre et le M ouvement des corps Élastiques》在1829 年出版); Frederic Sarrus 在1828 年发表的论文《Mémoire sur les oscillations des corps flottans》, 但是他的记号和想法却不如Ostrogrsdsky 和Poisson 的清晰; George Green 于1828 年在其私人文集中发表了论文《An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism》.

所有上面提到的数学家所陈述和证明的各种版本的散度定理有其特殊的物理意义. Gauss 感兴趣在磁吸引力理论, Ostrogradsky 感兴趣在热理论, Green 感兴趣在电磁理论, Poisson 感兴趣在弹性体, Sarrus 感兴趣在浮体.

通常称为的Green 定理的定理是Green 本人没有考虑过的一个二维结果, 但我们可以通过“Green 版本”来导出它. 可是没有证据表明Green 本人做过这件事情.

Green 定理在复变函数理论中是非常重要的, 第一次以没有给出证明的形式出现在Augustin Cauchy 在1846 年的论文《Sur les intégrales qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée》里, Cauchy 用这个定理证明了关于复变函数在闭曲线上积分的Cauchy 定理. Cauchy 允诺在《Exercises d'analyse et de physique mathématique》中给出一个证明, 但是却从来就没有发表过.

1851 年Berhard Riemann 在其博士论文《Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse》中陈述了相同的定理并给出了证明. 在这篇博士论文中Riemann 引入了Riemann 面, 提出并给出证明框架的Riemann 映照定理等.

Stokes 定理最早发表版本是出现在1854 年2 月, 但是早在1850 年7 月2 日William Thomson 写给George Stokes 的信中就出现了. 该定理第一个正式发表的证明似乎出现在Hermann Hankel 的专著《Zur allgemeinen Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten》(1861) 中. 稍微有些不同的证明概略出现在Thomson 和Tait 的专著《Treatise on Natural Philosophy》(1867) 中.

Tait 在1870 年的论文《On Green's and other allied Theorems》中给出了散度定理的向量场形式, 而在1876 年Maxwell 把Tait 定理重新陈述成和如今记号更加接近的版本(其中引入了散度和旋度), 具体参见§13.10.

Ostrogradsky 在1836 年的论文《Sur le calcul des variations des intégrales multiples》中推广了他自己的定理, 即前面说的散度定理. 第一位把三大定理统一在一般定理下的是Vito Volterra, 他的结果发表在《Delle Variabili Complesse Negli Iperspazi》(1889). Henri Poincaré 在1899 年出版的《Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique》中, 也给出 Volterra 的结果不过在记号上更加简洁.

Elie Cartan 在《Sur certaines expressions différentielles et sur le problème de Pfaff》(1899) 中定义了微分表达式, 而在1922 年引入了外微分形式和外导数. 外导数中的"d"记号最早是Theodore DeDonder 在1902 年使用过, 但是直到1934 年Erich Kähler 在其专著《Einführung in die Theoie der Systeme von Differentialgleichungen》中才重新引入. 这个记号和我们现在使用的有细微的的差别, 但是更加接近于Cartan 于1936 年到1937 年在巴黎授课时使用的记号(授课讲义《Les Systèmes Différentiels Extérieurs et leurs Applications Géométriques》(1945) 出版). Cartan 注意到三大定理(他分别称为Ostrogradsky 定理、Cauchy-Green 定理和Stokes 定理)可以写成并推广到(13.9.20).

§13.10 场论简介

本节引入**场(field)** 的概念及常用的**微分算子(differential operators)**. 如果对给定区域D 里的每点x 都指定一个对象$\mathbf{T}(x)$, 称为**张量 (tensor)**, 我们就把映射

$$\mathbf{T}: x \longmapsto \mathbf{T}(x)$$

称为定义在D 上的**张量场 (tensor field)**. 张量场的严格定义在之后的微分流形章节中给出, 大意是指多重线性映射.

我们仅考虑$\mathbf{T}(x)$ 是向量值映射的张量场$\mathbf{T}$, 为了方便期间, 就简单地称为**向量场 (vector field)**

§13.10.1 向量场

向量场 $\underset{\sim}{T}$ 是指对每个时间 t 都指定了一个向量值映射$\mathbf{T}_t$. 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是区域.

(1) **数量场(scalar field)**: t 时刻指定区域 Ω 上的函数 $f(x,y,z,t)$.

(2) **向量场(vector field)**: t 时刻指定区域 Ω 上的向量值映射 $\boldsymbol{f}(x,y,z,t)$.

(3) 若场不随时间变化而变化, 则称为**稳定场 (stationary field)**, 否者称为**不稳定场 (non-stationary field)**. 一般来说稳定向量场都可以表示称

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)), \quad (x,y,z) \in \Omega. \qquad (13.10.1)$$

(4) 给定 Ω 上的稳定向量场 $\boldsymbol{F}$. Ω 中的光滑曲线 Γ 称为 $\boldsymbol{F}$ 的**向量线(vector line)** 或**流线 (stream line)**, 如果 Γ 上每点出的切线方向都和 $\boldsymbol{F}$ 一致. 显然流线方程为

$$\frac{x'(t)}{P(\boldsymbol{r}(t))}=\frac{y'(t)}{Q(\boldsymbol{r}(t))}=\frac{z'(t)}{R(\boldsymbol{r}(t))}, \tag{13.10.2}$$

这里 $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ 是 Γ 的向量表达式. 如果进一步要求

$$\boldsymbol{r}'(t)=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)),\quad t\in I, \tag{13.10.3}$$

这里 $\boldsymbol{r}(t)$ 是 Γ 的向量表达式, 则称 Γ 是 $\boldsymbol{F}$ 的**积分曲线(integral curve)**.

§13.10.2 数量场的等值面和梯度场

数量场 $f(x,y,z)$ 的**等值面 (isosurface)** 或**水平集 (level set)** 为

$$f^{-1}(c)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:f(x,y,z)=c\}, \tag{13.10.4}$$

其中 c 是常数. 注意到等值面有可能为空集, 比如当 $c\notin f(\Omega)$ 时.

若 $f\in C^1(\Omega)$, 定义其**梯度(gradient)** 为

$$\mathbf{grad}(f):=(f_x,f_y,f_z),$$

这个向量场称为**梯度场(gradient field)**. 函数 f 沿着方向

$$\boldsymbol{\nu}=(\cos(\boldsymbol{\nu},x),\cos(\boldsymbol{\nu},y),\cos(\boldsymbol{\nu},z))$$

的方向导数可表示成(参见(12.1.17))

$$\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\nu}}=\mathbf{grad}(f)\cdot\boldsymbol{\nu}=|\mathbf{grad}(f)|\cos\theta=|\mathbf{grad}(f)|\cos(\mathbf{gradf}(f),\boldsymbol{\nu}),$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{\nu}$ 和梯度方向的夹角.

等值面 (13.10.4) 上的单位法向量为

$$\mathbf{n}=\frac{1}{|\mathbf{grad}(f)|}(f_x,f_y,f_z),$$

此时

$$\frac{\partial f}{\partial\mathbf{n}}=|\mathbf{grad}(f)|\geq 0,\quad \mathbf{grad}(f)=\frac{\partial f}{\partial\mathbf{n}}\mathbf{n}.$$

即函数 f 在一点的梯度和其等值面在该点的单位法向量是平行的, 且这个方向是方向导数取得最大值 $|\mathbf{grad}(f)|$ 的方向.

§13.10.3 向量场的散度

假设 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)\in C(\Omega)$ 且 Σ 是 Ω 中的光滑定向曲面, 则曲面积分

$$\Phi(\boldsymbol{F},\Sigma):=\iint_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\mathbf{n}dS \tag{13.10.5}$$

称为向量场 $\boldsymbol{F}$ 沿着曲面 Σ 的**通量(flux)**. 当 $\boldsymbol{F}\in C^1(\Omega)$ 时, 称

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{F}) := P_x + Q_y + R_z \tag{13.10.6}$$

为 $\boldsymbol{F}$ 的**散度 (divergence)**. $\boldsymbol{F}$ 称为**无源场（divergence-free field)** 若 $\mathbf{div}(\boldsymbol{F})=0$. 用上述Gauss 公式 (13.9.7) 可写成

$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_{\Omega} \mathbf{div}(\boldsymbol{F}) dV. \tag{13.10.7}$$

性质13.10.1. (1) $\mathbf{div}(\lambda\boldsymbol{F}+\mu\boldsymbol{G}) = \lambda\mathbf{div}(\boldsymbol{F})+\mu\mathbf{div}(\boldsymbol{G})$, 这里 λ,μ 是常数.

(2) $\mathbf{div}(f\boldsymbol{F}) = f\mathbf{div}(\boldsymbol{F})+\mathbf{grad}(f)\cdot\boldsymbol{F}$.

证: 显然. □

§13.10.4 向量场的旋度

假设 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)\in C(\Omega)$ 且 Γ 是 Ω 中的光滑定向曲线, 则曲线积分

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau} ds = \int_{\Gamma} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} \tag{13.10.8}$$

称为向量场 $\boldsymbol{F}$ 沿着曲线 Γ 的**环量 (circulation)**. 当 $\boldsymbol{F}\in C^1(\Omega)$ 时, 称

$$\mathbf{rot}(\boldsymbol{F}) := \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y\right) \tag{13.10.9}$$

为 $\boldsymbol{F}$ 的**旋度 (rotation)**. $\boldsymbol{F}$ 称为**无旋场 (rotation-free field)** 如果$\mathbf{rot}(\boldsymbol{F})=0$. 此时Stokes 公式 (13.9.10) 此时可写成

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{rot}(\boldsymbol{F})\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\partial\Sigma} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}. \tag{13.10.10}$$

性质13.10.2. (1) $\mathbf{rot}(\lambda\boldsymbol{F}+\mu\boldsymbol{G}) = \lambda\mathbf{rot}(\boldsymbol{F})+\mu\mathbf{rot}(\boldsymbol{G})$, 这里 λ,μ 是常数.

(2) $\mathbf{rot}(f\boldsymbol{F}) = f\mathbf{rot}(\boldsymbol{F})+\mathbf{grad}(f)\times\boldsymbol{F}$.

(3) $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}(f)) = \mathbf{0}$.

证: 显然. □

§13.10.5 管量场和有势场

假设向量场 $\boldsymbol{F}$ 是无源场, 即$\mathbf{div}(\boldsymbol{F})=0$. 对任一**向量管**, 即用光滑定向曲面 S_1,S_2 截 $\boldsymbol{F}$ 的向量流围成的管状曲面 ($\boldsymbol{F}\cdot\mathbf{n}=0$). 由此得到一个光滑区域 Ω 且边界 $\partial\Omega$ 是由分段光滑定向曲面 S_1,S_2,S 所构成 (相对 Ω, S_1 和 S_2 的定向是互反的). 根据 Gauss 公式得到

$$0 = \iiint_{\Omega} \mathbf{div}(\boldsymbol{F}) dxdydz = \iint_{-S_1+S+S_2} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{-S_1+S_2} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

从而得到

$$\iint_{S_1} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{S_2} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

在流体力学上这个是说流体通过向量管任意截面的流量是相同的.

假设向量场 $\boldsymbol{F}$ 是无旋场, 即$\mathbf{rot}(\boldsymbol{F}) = 0$. 根据**定理(13.9.13)** 可知对单连通区域内的任意分段光滑曲线 L, 曲线积分

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}$$

和 L 无关, 且 $Pdx + Qdy + Rdz$ 存在原函数.

假设 $\boldsymbol{F} \in C(\Omega)$.

(1) 如果存在函数 U 满足 $\boldsymbol{F} = \mathbf{grad}(U)$ 则称向量场 $\boldsymbol{F}$ 是**有势场(potential field)**. 并称 $V := -U$ 为**势函数(potential function)**.

(2) 如果对任意分段光滑曲线 L, 曲线积分

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}$$

和 L 无关, 则称 $\boldsymbol{F}$ 是**保守场(conservative field)**.

定理13.10.3. *假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是单连通区域且 $\boldsymbol{F} \in C^1(\Omega)$. 则下列三个命题等价:*

(1) 向量场 $\boldsymbol{F}$ 是保守场; (2) 向量场 $\boldsymbol{F}$ 是有势场; (3) 向量场 $\boldsymbol{F}$ 是无旋场.

证: 利用**定理13.9.13**. □

坐标原点处质量为 m 的质点的引力场为

$$\boldsymbol{F} = -\frac{Gm\boldsymbol{r}}{r^3} = -\frac{Gm}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z).$$

向量场 $\boldsymbol{F}$ 的一个势函数为 $U = -Gm/r$.

坐标原点处电荷量为q 的电荷的电场强度为

$$\boldsymbol{E} = \frac{q\boldsymbol{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z),$$

其中ϵ_0 是真空电容率. 向量场 $\boldsymbol{E}$ 的一个势函数为 $U = q/4\pi\epsilon_0 r$.

§13.10.6 Hamilton 四元数和Hamilton 算子

Hamilton[11] 在1843 年发现了**四元数 (quaternions)** $\mathbb{H}$. 形式上四元数p 看写成

$$p := x^0 + x^1\mathbf{e} + x^2\mathbf{f} + x^3\mathbf{g} = p^{\mathbf{S}} + p^{\mathbf{V}},$$

其中$x^0, x^1, x^2, x^3 \in \mathbb{R}$, $p^{\mathbf{S}} = x^0$ 称为p 的标量部分, $p^{\mathbf{V}}$ 称为p 的向量部分, 而$\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}$ 是四元数中的单位元满足如下的乘法法则

$\times$	1	$\mathbf{e}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{g}$
1	1	$\mathbf{e}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{g}$
$\mathbf{e}$	$\mathbf{e}$	-1	$\mathbf{g}$	$-\mathbf{f}$
$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$-\mathbf{g}$	-1	$\mathbf{e}$
$\mathbf{g}$	$\mathbf{g}$	$\mathbf{f}$	$-\mathbf{e}$	-1

$$\mathbf{ef} = \mathbf{g}, \quad \mathbf{fg} = \mathbf{e}, \quad \mathbf{ge} = \mathbf{f}.$$

按照现代观点$\mathbb{H}$ 就是Clifford 代数[12] $\mathbf{Cl}_{2,0}$. 对两个四元数

$$p := x^0 + x^1\mathbf{e} + x^2\mathbf{f} + x^3\mathbf{g}, \quad q := y^0 + y^1\mathbf{e} + y^2\mathbf{f} + y^3\mathbf{g},$$

我们得到

$$\begin{aligned} \mathbf{pq} &= (x^0y^0 - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3) + (x^2y^3 - y^2x^3)\mathbf{e} \\ &\quad + (x^3y^1 - y^3x^1)\mathbf{f} + (x^1y^2 - x^2y^1)\mathbf{g}. \end{aligned}$$

把Hamilton 原始$\nabla^{\mathbf{H}}$ 算子

$$\nabla^{\mathbf{H}} := \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{f} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{g}$$

应用到向量值函数$\sigma = X\mathbf{e} + Y\mathbf{f} + Z\mathbf{g}$ 得到

$$\begin{aligned} \nabla^{\mathbf{H}}\sigma &= -\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\mathbf{e} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\mathbf{f} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\mathbf{g}. \end{aligned}$$

Tait 在1870 年利用Hamilton 的原始$\nabla^{\mathbf{H}}$ 算子把散度公式和Stokes 公式重新写成向量形式[13]. Maxwell 在1876 年把

$$(\nabla^{\mathbf{H}}\sigma)^{\mathbf{S}} = -\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)$$

---

[11] William Rowan Hamilton, 1805 年8 月3 日- 1865 年9 月2 日, 今爱尔兰都柏林人, 爱尔兰数学家. 他在数学和物理上的贡献有Hamiltonian 力学、四元数的发现、Hamilton 原理、Cayley - Hamilton 定理等.

[12] Lawson, H. Blaine, Jr.; Michelsohn, Marie-Louise. *Spin geometry*, Princeton Mathematical Series, **38**. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989. xii+427 pp. ISBN: 0-691-08542-0.

[13] 参见: Katz, Victor, J. *The history of Stokes' theorem*, Math. Mag., **52**(1979), no. 3, 146-156.

称为σ 的**敛度 (convergence)** 而把

$$(\boldsymbol{\nabla}^{\mathbf{H}}\sigma)^{\mathbf{V}} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\mathbf{e} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\mathbf{f} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\mathbf{g}$$

称为σ 的**旋度 (curl)**. 注意到σ 的敛度其实就是负的σ 的散度, 并且当$\boldsymbol{p}$ 和$\boldsymbol{q}$ 都是**纯向量 (pure vector)** 时, $(\boldsymbol{pq})^{\mathbf{S}}$ 就是负的内积$\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}\rangle$.

下面我们按照目前的方式来引入Hamilton 的形式算子:

$$\boldsymbol{\nabla} := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \equiv (\partial_x, \partial_y, \partial_z) = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{13.10.11}$$

对 $f, P, Q, R \in C^1(\Omega)$ 和 $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$, 定义

$$\boldsymbol{\nabla} f \quad := \quad (\partial_x, \partial_y, \partial_z) f \quad = \quad \mathbf{grad}(f), \tag{13.10.12}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F} \quad := \quad (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \cdot (P, Q, R) \quad = \quad \mathbf{div}(\boldsymbol{F}), \tag{13.10.13}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \quad := \quad (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \times (P, Q, R) \quad = \quad \mathbf{rot}(\boldsymbol{F}). \tag{13.10.14}$$

特别地得到

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} f = \mathbf{div}(\mathbf{grad}(f)) = \Delta f. \tag{13.10.15}$$

性质13.10.4. (1) $\mathbf{div}(\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = \boldsymbol{G} \cdot \mathbf{rot}(\boldsymbol{F}) - \boldsymbol{F} \cdot \mathbf{rot}(\boldsymbol{G})$,
(2) $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = \boldsymbol{G} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) - \boldsymbol{F} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{G})$.

证: 显然. □

此时Gauss 公式 (13.9.7) 可写成

$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{F} dV, \tag{13.10.16}$$

而 Stokes 公式 (13.9.10) 可写成

$$\int_{\partial\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \iint_{\Sigma} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{S}. \tag{13.10.17}$$

定理13.10.5. (Green 公式) 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是定向区域且边界 $\partial\Omega$ 是光滑定向曲面. 任意 $f, g \in C^2(\Omega)$, 有

$$\iiint_{\Omega} (\boldsymbol{\nabla} f \cdot \boldsymbol{\nabla} g + f\Delta g) dV \quad = \quad \iint_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} dS, \tag{13.10.18}$$

$$\iiint_{\Omega} (f\Delta g - g\Delta f) dV \quad = \quad \iint_{\partial\Omega} \left(f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\right) dS. \tag{13.10.19}$$

证: 利用 Gauss 公式 (13.10.16) 得到

$$\iiint_\Omega (\nabla f\cdot\nabla g + f\Delta g)dV = \iiint_\Omega \nabla\cdot(f\nabla g)dV$$

$$= \iint_{\partial\Omega} f\nabla g\cdot\mathbf{n}dS = \iint_{\partial\Omega} f\frac{\partial g}{\partial\mathbf{n}}dS.$$

交换函数 f 和 g 位置, 并结合 (13.10.18) 得到第二个等式. □

在 (13.10.19) 中取 $g\equiv 1$ 则得到**散度公式(divergence theorem)**

$$\iiint_\Omega \Delta f dV = \iint_{\partial\Omega}\frac{\partial f}{\partial\mathbf{n}}dS. \tag{13.10.20}$$

例13.10.6. (1) 假设 L 是平面中的简单光滑闭曲线, 记所围区域为 D, $u(x,y)$ 是 D 上的调和函数. 证明

$$I := \frac{1}{2\pi}\int_L\left[\partial u(\xi,\eta)\frac{\ln r}{\partial\mathbf{n}} - \ln r\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial\mathbf{n}}\right]ds = u(x,y)$$

这里 $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$.

证: 因为 $(x,y)\in D$ 故存在 $\epsilon>0$ 使得 $\mathbb{B}^2((x,y),\epsilon)\subset D$. 利用 (13.10.19) 得到

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{B}^2((x,y),\epsilon)}\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial\mathbf{n}} - \ln r\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)ds + \iint_D(u\Delta\ln r - \ln r\Delta u)\,dS$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{\partial\mathbb{B}^2((x,y),\epsilon)}u(\xi,\eta)\frac{ds}{\epsilon} - \ln\epsilon\int_{\partial\mathbb{B}^2((x,y),\epsilon)}\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}ds\right]$$

$$= u(\xi',\eta') - \epsilon\ln\epsilon\cdot\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}(\xi'',\eta'')$$

这里$(\xi',\eta'),(\xi'',\eta'')\in\partial\mathbb{B}^2((x,y),\epsilon)$. 当 $\epsilon\to 0+$ 时得到$I=u(x,y)$. □

§13.11 * 调和函数

我们已经在§13.4.4 中引入了调和函数的概念, 本节进一步研究调和函数的性质, 并将证明调和函数必光滑. 主要参考文献是

- Gilbarg, David; Trudinger, Neil S. *Elliptic partial differential equations of second order*, Second edition, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **224**, Springer-Verlag, Berlin, 1983. xiii+513 pp. ISBN: 3-540-13025-X

- Han, Qing; Lin, Fanghjua. *Elliptic partial differential equations*, Second edition, Courant Lecture Notes in Mathematics, **1**, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. x+147 pp. ISBN: 978-0-8218-5313-9

§13.11.1 * 平均值性质

假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是区域.

定义13.11.1. 任给函数 $u \in C(\Omega)$. 称

(1) u 满足**第一类平均值性质(first mean value property)** 如果

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)} u(\boldsymbol{y}) dS_{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{|\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)|} \int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)} u(\boldsymbol{y}) dS_{\boldsymbol{y}} \tag{13.11.1}$$

对 $\boldsymbol{x}$ 的任何球邻域 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r) \subset \Omega$ 都成立, 这里 $dS_{\boldsymbol{y}}$ 表示球面积元.

(2) u 满足**第二类平均值性质(second mean value property)** 如果

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)} u(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} = \frac{1}{|\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)|} \int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)} u(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} \tag{13.11.2}$$

对 $\boldsymbol{x}$ 的任何球邻域 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r) \subset \Omega$ 都成立, 这里 $d\boldsymbol{y}$ 表示球体积元.

这里 ω_n 表示 $\mathbb{R}^n$ 中单位球面的表面积, ω_n/n 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位球的体积.

注13.11.2. 如果 u 满足第一类平均值性质, 则

$$\frac{r^n}{n} u(\boldsymbol{x}) = \int_0^r u(\boldsymbol{x}) s^{n-1} ds = \frac{1}{\omega_n} \int_0^r \int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},s)} u(\boldsymbol{y}) dS_{\boldsymbol{y}} ds = \frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)} u(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}.$$

反之, 如果 u 满足第二类平均值性质则

$$u(\boldsymbol{x}) r^n = \frac{n}{\omega_n} \int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)} u(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} = \frac{n}{\omega_n} \int_0^r \int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},s)} u(\boldsymbol{y}) dS_{\boldsymbol{y}} ds$$

从而经过求导后得到 (13.11.2).

注13.11.3. **定义13.11.1** 等价于如下说法:

(1′) u 满足第一类平均值性质如果

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\boldsymbol{w}|=1} u(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{w}) dS_{\boldsymbol{w}} \tag{13.11.3}$$

对任何 $\boldsymbol{x}$ 的球邻域 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r) \subset \Omega$ 都成立.

(2′) u 满足第二类平均值性质如果

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{n}{\omega_n} \int_{|\boldsymbol{z}|\le 1} u(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{z}) d\boldsymbol{z} \tag{13.11.4}$$

对任何 $\boldsymbol{x}$ 的球邻域 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r) \subset \Omega$ 都成立.

根据这点, 称函数 u 满足**平均值性质(mean value property)**如果 u 满足第一类平均值性质或者第二类平均值性质.

性质13.11.4. (最大值原理) 如果 $u \in C(\overline{\Omega})$ 在 Ω 上满足平均值性质, 则 u 只在边界 $\partial\Omega$ 上达到最大值或最小值, 除非 u 是常数.

证: 仅对最大值情形给出证明. 令

$$\Sigma := \left\{ \boldsymbol{x} \in \Omega : u(\boldsymbol{x}) = M := \sup_{\overline{\Omega}} u \right\} \subset \Omega.$$

显然 Σ (在 Ω 中)是闭的.

对任意 $\boldsymbol{x}_0 \in \Sigma$, 由于 Ω 是开集, 取 $\boldsymbol{x}_0$ 的某个闭球 $\overline{\mathbb{B}}^n(\boldsymbol{x}_0, r) \subset \Omega$ (这里 $r > 0$). 利用平均值性质得到

$$M = u(\boldsymbol{x}_0) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,r)} u(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} \leq M \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,r)} d\boldsymbol{y} = M.$$

故 $u = M$ 在 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0, r)$ 内成立故 Σ 是开的. 根据连通性知 $\Sigma = \emptyset$ 或 $\Sigma = \Omega$. □

定义13.11.5. 称函数 $u \in C^2(\Omega)$ 是**调和的(harmonic)** 若$\Delta u = 0$ 在 Ω 内成立.

定理13.11.6. 假设 $u \in C^2(\Omega)$ 在 Ω 内是调和的. 则 u 在 Ω 内满足平均值性质.

证: 对任何球 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}, r)) \subset \Omega$ 和任意 $\rho \in [0, r]$, 有

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},\rho)} \Delta u(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} &= \int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},\rho)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\boldsymbol{y}) dS_{\boldsymbol{y}} = \rho^{n-1} \int_{|\boldsymbol{w}|=1} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\boldsymbol{x} + \rho \boldsymbol{w}) dS_{\boldsymbol{w}} \\ &= \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{|\boldsymbol{w}|=1} u(\boldsymbol{x} + \rho \boldsymbol{w}) dS_{\boldsymbol{w}}. \end{aligned}$$

从而得到

$$u(\boldsymbol{x}) \omega_n = \int_{|\boldsymbol{w}|=1} u(\boldsymbol{w}) dS_{\boldsymbol{w}} = \int_{|\boldsymbol{w}|=1} u(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{w}) dS_{\boldsymbol{w}};$$

即 u 满足第一类平均值性质. □

注13.11.7. 在**定义13.11.1** 中, 函数 u 不需要是光滑的. 但是下面定理告诉我们满足平均值性质的连续函数必是光滑的且是调和的.

定理13.11.8. 如果 $u \in C(\Omega)$ 在 Ω 内满足平均值性质, 则 u 在 Ω 内必是光滑的且是调和的.

证: 基本想法是利用卷积来提高光滑性. 选择 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{B}^n(\boldsymbol{0}, 1))$ 满足

$$\int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{0},1)} \varphi(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 1$$

和 $\varphi(\boldsymbol{x}) = \psi(|\boldsymbol{x}|)$ (即 φ 是径向函数), 即

$$\omega_n \int_0^1 r^{n-1} \psi(r) dr = 1.$$

定义 $\varphi_\epsilon(\boldsymbol{x}) \doteqdot \frac{1}{\epsilon^n}\varphi(\frac{x}{\epsilon}), \epsilon > 0$. 对任意 $\boldsymbol{x} \in \Omega$ 和 $\epsilon < \text{dist}(x, \partial\Omega)$, 得到

$$(\varphi_\epsilon * u)(\boldsymbol{x}) = \int_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|<\epsilon} u(\boldsymbol{y})\varphi_\epsilon(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} = \int_{|\boldsymbol{y}|\leq\epsilon} u(\boldsymbol{x}+\epsilon\boldsymbol{y})\varphi_\epsilon(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$$

$$= \frac{1}{\epsilon^n}\int_{|\boldsymbol{y}|\leq\epsilon} u(\boldsymbol{x}+\epsilon\boldsymbol{y})\varphi\left(\frac{\boldsymbol{y}}{\epsilon}\right)d\boldsymbol{y} = \int_{|\boldsymbol{y}|\leq 1} u(\boldsymbol{x}+\epsilon\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$$

$$= \int_0^1 r^{n-1}dr\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{0},1)} u(\boldsymbol{x}+\epsilon r\boldsymbol{w})\varphi(r\boldsymbol{w})dS_{\boldsymbol{w}}$$

$$= \int_0^1 r^{n-1}\psi(r)dr\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{0},1)} u(x+\epsilon r\boldsymbol{w})dS_{\boldsymbol{w}} = u(\boldsymbol{x})\omega_n\int_0^1 r^{n-1}\psi(r)dr = u(\boldsymbol{x}).$$

故得到

$$u = \varphi_\epsilon * u \tag{13.11.5}$$

在 $\Omega_\epsilon = \{\boldsymbol{y} \in \Omega : \text{dist}(\boldsymbol{y}, \partial\Omega) > \epsilon\}$ 上成立. 根据 (13.11.5), 我们推出 u 在 Ω 内是光滑的. 利用**定理13.11.6** 中的公式得到

$$\int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)}\Delta u(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} = r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}\int_{|\boldsymbol{w}|=1} u(\boldsymbol{x}+r\boldsymbol{w})dS_{\boldsymbol{w}} = \omega_n r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}(u(\boldsymbol{x})) = 0$$

对任何 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}, r) \subset \Omega$ 都成立. 则 $\Delta u = 0$ 在 Ω 内成立. □

注13.11.9. (1) 根据**定理13.11.6** 和**定理13.11.8**, 我们推出调和函数是光滑的且满足平均值性质. 因此调和函数满足最大值原理.

(2) 有界区域上的**Dirichlet** 问题

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ u = \varphi, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases}$$

这里 $f \in C(\Omega)$ 和 $\varphi \in C(\partial\Omega)$, 若解存在必是唯一的.

(3) 一般来说, 唯一性对无界区域是不成立的. 比如考察如下的**Dirichlet** 问题:

$$\begin{cases} \Delta u = 0f, & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases}$$

这里 $\Omega = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x}| > 1\}$. 显然 $u = 0$ 时平凡解. 对 $n = 2$, $u(\boldsymbol{x}) = \ln|\boldsymbol{x}|$ 是一个解; 注意到 $u \to \infty$ 当 $r \to \infty$ 时. 对 $n \geq 3$, $u(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^{2-n} - 1$ 是一个解; 注意到 $u \to -1$ 当 $r \to \infty$ 时. 如果考察上半平面 $\Omega = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : x^n > 0\}$, 则 $u(\boldsymbol{x}) = x^n$ 是无界的非平凡解.

引理13.11.10. 假设 $u \in C(\overline{\mathbb{B}}^n(\boldsymbol{x}_0, R))$ 是调和的, 则

$$|\boldsymbol{D}u(\boldsymbol{x}_0)| \leq \frac{n}{R}\max_{\overline{\mathbb{B}}^n(\boldsymbol{x}_0,R)}|u|. \tag{13.11.6}$$

证: 根据**注13.11.9** (1), u 是光滑的且满足 $\Delta(D_iu)=0$. 因此 D_iu 在 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,R)$ 内也是调和的且也满足平均值性质. 故

$$D_iu(\boldsymbol{x}_0)=\frac{n}{\omega_nR^n}\int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,R)}D_iu(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}=\frac{n}{\omega_nR^n}\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,R)}u(\boldsymbol{y})\nu_i(\boldsymbol{y})dS_{\boldsymbol{y}}$$

从而

$$|Du(\boldsymbol{x}_0)|\le\frac{n}{\omega_nR^n}\max_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,R)}|u|\cdot\omega_nR^{n-1}=\frac{n}{R}\max_{\overline{\mathbb{B}}^n(\boldsymbol{x}_0,R)}|u|.\ \Box$$

引理13.11.11. *如果 $u\in C(\overline{\mathbb{R}}^n(\boldsymbol{x}_0,R))$ 在 $\mathbb{R}^n(\boldsymbol{x}_0,R)$ 内是非负调和的, 则*

$$|\boldsymbol{D}u(\boldsymbol{x}_0)|\le\frac{n}{R}u(\boldsymbol{x}_0).\tag{13.11.7}$$

证: 类似**引理13.11.10** 的证明, 利用平均值性质得到

$$|\boldsymbol{D}u(\boldsymbol{x}_0)|\le\frac{n}{\omega_nR^n}\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,R)}u(\boldsymbol{x})dS_{\boldsymbol{y}}=\frac{n}{R}u(\boldsymbol{x}_0).\ \Box$$

推论13.11.12. *$\mathbb{R}^n$ 上有上界或下界的调和函数必是常值函数.*

证: 不失一般性不妨假设 u 是 $\mathbb{R}^n$ 上的调和函数且有下界 $-C$, 故 $u+C\ge0$. 注意到 $u+C$ 仍旧是调和的. 根据**引理13.11.10** 得到

$$|\boldsymbol{D}u(\boldsymbol{x})|\le\frac{n}{R}\left[u(\boldsymbol{x}_0)+C\right]$$

对任何 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 都成立. 令 $R\to\infty$ 推出 $\boldsymbol{D}u\equiv0$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上成立. 故 u 是常数. $\Box$

性质13.11.13. *假设 $u\in C(\overline{\mathbb{B}}^n(\boldsymbol{x}_0,R))$ 在 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,R)$ 内调和的. 则*

$$|\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u(\boldsymbol{x}_0)|\le\frac{n^me^{m-1}m!}{R^m}\max_{\overline{\mathbb{B}}^n(\boldsymbol{x}_0,R)}|u|\tag{13.11.8}$$

对任意 n 重指标 $\boldsymbol{\alpha}$, 这里 $|\boldsymbol{\alpha}|=m$, 都成立.

证: 不等式 (13.11.8) 对 $m=1$ 成立, 这可由**引理13.11.10** 得到. 假设 (13.11.8) 对 m 成立. 对 $\theta\in(0,1)$ 定义 $r:=(1-\theta)R\in(0,R)$.

根据**引理13.11.10** 得到

$$\left|\boldsymbol{D}^{m+1}u(\boldsymbol{x}_0)\right|=\left|\boldsymbol{D}\left(\boldsymbol{D}^mu\right)(\boldsymbol{x}_0)\right|\le\frac{n}{r}\max_{\overline{\mathbb{R}}^n(\boldsymbol{x}_0,R)}|\boldsymbol{D}^mu|.$$

归纳假设推出

$$\max_{\overline{\mathbb{B}}^n(\boldsymbol{x}_0,r)}|\boldsymbol{D}^mu|\le\frac{n^me^{m-1}m!}{(R-r)^m}\max_{\overline{\mathbb{B}}^n(\boldsymbol{x}_0,R-r)}|u|\le\frac{n^me^{m-1}m!}{(R-r)^m}\max_{\overline{\mathbb{B}}^n(\boldsymbol{x}_0,R)}|u|$$

从而

$$\left|\boldsymbol{D}^{m+1}u(\boldsymbol{x}_0)\right|\le\frac{n^{m+1}e^{m-1}m!}{r(R-r)^m}\max_{\overline{\mathbb{B}}^n(\boldsymbol{x}_0,R)}|u|\le\frac{n^{m+1}e^{m-1}m!}{(1-\theta)\theta^mR^{m+1}}\max_{\overline{\mathbb{B}}^n(\boldsymbol{x}_0,R)}|u|.$$

因为 $(1+\frac{1}{m})^m < e$, 在上述不等式中取 $\theta = \frac{m}{m+1}$ 得到

$$\left|D^{m+1}u(x_0)\right| \le \frac{n^{m+1}e^m(m+1)!}{R^{m+1}} \max_{\mathbb{B}^n(x_0,R)} |u|.$$

一般地, 对任意 n 重指标 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 有

$$\begin{aligned}|D^\alpha u(x_0)| = \left|D^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} u(x_0)\right| &\le \prod_{1\le i\le n} \frac{n^{\alpha_i}e^{\alpha_i-1}\alpha_i!}{R^{\alpha_i}} \max_{\mathbb{B}^n(x_0,R)} |u| \\ &= \frac{n^{|\alpha|}e^{|\alpha|-1}}{R^{|\alpha|}}\left(\prod_{1\le i\le n}\alpha_i!\right) \max_{\mathbb{B}^n(x_0,R)} |u| \le \frac{n^{|\alpha|}e^{|\alpha|-1}|\alpha|!}{R^{|\alpha|}} \max_{\mathbb{B}^n(x_0,R)} |u|\end{aligned}$$

这是因为 $\alpha_1!\cdots\alpha_n! \le |\alpha|!$. □

定理13.11.14. *调和函数必是实解析的.*

证: 假设 u 在 Ω 内是调和的. 固定 $x \in \Omega$ 并取 $\mathbb{B}^n(x, 2R) \subset \Omega$ 和 $h \in \mathbb{R}^n$ 满足 $|h| \le R$. Taylor 展开告诉我们

$$u(x+h) = u(x) + \sum_{1\le|\alpha|\le m-1} \frac{D^\alpha u(x)}{\alpha!}h^\alpha + R_m(h)$$

这里

$$R_m(h) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{D^\alpha u(x+\theta h)}{\alpha!}h^\alpha, \quad 存在\ \theta \in (0,1).$$

因为 $x+h \in \mathbb{B}^n(x,R)$ ($|h| < R$), 根据**性质13.11.13** 得到

$$|R_m(h)| \le \frac{1}{m!}|h|^m \frac{n^m e^{m-1} m!}{R^m} \max_{\mathbb{B}^n(x_0,2R)} |u| \le \left(\frac{|h|ne}{R}\right)^m \max_{\mathbb{B}^n(x_0,2R)} |u|.$$

如果取 $|h| < R/2ne$, 则当 $m \to \infty$ 时有 $R_m(h) \to 0$. □

定理13.11.15. (Harnack 不等式) *假设 u 在 Ω 内是非负调和的. 则对 Ω 中的任意紧子集 K 存在正常数 $C = C(\Omega, K)$ 使得不等式*

$$\frac{1}{C}u(y) \le u(x) \le Cu(y) \tag{13.11.9}$$

对任何 $x, y \in K$ 都成立.

证: 取 $\mathbb{B}^n(x_0, 4R) \subset \Omega$ 则得到

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{n}{\omega_n R^n}\int_{\mathbb{B}^n(x,R)} u(z)dz \le \frac{n}{\omega_n R^n}\int_{\mathbb{B}^n(x_0,2R)} u(z)dz, \\ u(y) &= \frac{n}{\omega_n (3R)^n}\int_{\mathbb{B}^n(y,3R)} u(z)dz \ge \frac{n}{3^n\omega_n R^n}\int_{\mathbb{B}^n(x_0,2R)} u(z)dz \end{aligned}$$

对任何 $x, y \in \mathbb{B}^n(x_0, R)$ 都成立, 这是因为 $\mathbb{B}^n(x,R) \subset \mathbb{B}^n(x_0,2R) \subset \mathbb{B}^n(y,3R)$. 因此

$$\frac{1}{3^n}u(y) \le u(x) \le 3^n u(y) \tag{13.11.10}$$

对所有 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_0,R)$. □

任给紧子集 K, 取 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_N\in K$ 使得 $\{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_i,R)\}_{1\le i\le N}$ 是 K 的开覆盖且 $4R<\mathrm{dist}(K,\partial\Omega)$. 此时我们可以在 (13.11.9) 中取 $C=3^{nN}$.

假设 u 在 Ω 内是调和的. 利用分部积分法得到

$$\int_\Omega u(\boldsymbol{y})\Delta\varphi(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}=\int_\Omega \Delta u(\boldsymbol{y})\,\varphi(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}=0 \tag{13.11.11}$$

对任何 $\varphi\in C_0^2(\Omega)$ 都成立. Weyl 反过来证明了如果 (13.11.11) 对任何 $\varphi\in C_0^2(\Omega)$ 都成立, 则 u 必是调和的.

定理13.11.16. (Weyl) *如果 $u\in C(\Omega)$ 且*

$$\int_\Omega u(\boldsymbol{y})\Delta\varphi(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}=0$$

对任何 $\varphi\in C_0^2(\Omega)$ 都成立, 则 u 在 Ω 内必是调和的.

证: 根据**定理13.11.8**, 只要证明 u 在 Ω 内满足平均值性质. 对$\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)\subset\Omega$ 我们断言有

$$r\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)}u(\boldsymbol{y})\,dS_{\boldsymbol{y}}=n\int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)}u(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y} \tag{13.11.12}$$

成立. 若断言成立则得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)}u(\boldsymbol{y})\,dS_{\boldsymbol{y}}\right)&=\frac{n}{\omega_n}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^n}\int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)}u(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}\right)\\ =\frac{n}{\omega_n}\left(-\frac{n}{r^{n+1}}\int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)}u(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}+\frac{1}{r^n}\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)}u(\boldsymbol{y})\,dS_{\boldsymbol{y}}\right)&=0.\end{aligned}$$

这意味着

$$\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)}u(\boldsymbol{y})\,dS_{\boldsymbol{y}}=\text{常数}.$$

令 $r\to 0$ 得到 $u(x)$ 是常数(根据积分中值定理). 故

$$u(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)}u(\boldsymbol{y})\,dS_{\boldsymbol{y}}$$

对任意 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)\subset\Omega$ 都成立.

为了证明 (13.11.12), 不妨假设 $n\ge 3$ 且 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 令

$$\varphi(\boldsymbol{y},r)\doteqdot\begin{cases}\left(|\boldsymbol{y}|^2-r^2\right)^n, & |\boldsymbol{y}|\le r,\\ 0, & |\boldsymbol{y}|>r\end{cases}$$

和

$$\varphi_k(\boldsymbol{y},r)=\left(|\boldsymbol{y}|^2-r^2\right)^{n-k}\left[2(n-k+1)|\boldsymbol{y}|^2+n(|\boldsymbol{y}|^2-r^2)\right]$$

(这里 $|\boldsymbol{y}|\le r$ 且 $k=2,3,\cdots,n$). 因为 $n\ge 3$, 所以 $\varphi(\cdot,r)\in C_0^2(\Omega)$ 和

$$\Delta_{\boldsymbol{y}}\varphi(\boldsymbol{y},r)=\begin{cases}2n\varphi_2(\boldsymbol{y}y,r), & |\boldsymbol{y}|\le r,\\ 0, & |\boldsymbol{y}|>r.\end{cases}$$

根据假设得到

$$\int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{0},r))}u(\boldsymbol{y})\varphi_2(\boldsymbol{y},r)d\boldsymbol{y}=0.$$

一般地可以证明

$$\int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{0},r)}u(\boldsymbol{y})\varphi_k(\boldsymbol{y},r)d\boldsymbol{y}=0 \tag{13.11.13}$$

对任何 $k=2,\cdots,n$ 都成立. 如果 (13.11.13) 对 k 成立, 则

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{0},r)}u(\boldsymbol{y})\frac{\partial\varphi_k}{\partial r}(\boldsymbol{y},r)d\boldsymbol{y}+\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{0},r)}u(\boldsymbol{y})\varphi_k(\boldsymbol{y},r)dS_{\boldsymbol{y}}\\ &= \int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{0},r)}\frac{\partial\varphi_k}{\partial r}(\boldsymbol{y},r)d\boldsymbol{y}\end{aligned}$$

这是因为 $\varphi_k(\boldsymbol{y},r)=0$ 对 $|\boldsymbol{y}|=r$ 和 $2\le k<n$ 成立. 简单计算表明

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_k}{\partial r}(\boldsymbol{y},r)&=(n-k)(|\boldsymbol{y}|^2-r^2)^{n-k-1}(-2r)\left[2(n-k+1)|y|^2+n(|\boldsymbol{y}|^2-r^2)\right]\\ &+(|\boldsymbol{y}|^2-r^2)^{n-k}(-2nr)=(-2r)(|\boldsymbol{y}|^2-r^2)^{n-k-1}\Big[2(n-k)(n-k+1)|y|^2\\ &+n(n-k+1)(|\boldsymbol{y}|^2-r^2)\Big]=(-2r)(n-k+1)\varphi_{k+1}(\boldsymbol{y},r).\end{aligned}$$

这就证明了 (13.11.13) 对 $k+1$ 也成立. 在 (13.11.13) 中取 $k=n$ 得到

$$0=\int_{\mathbb{B}^n(\boldsymbol{0},r)}u(\boldsymbol{y})[(n+2)|\boldsymbol{y}|^2-nr^2]d\boldsymbol{y}$$

从而对 r 微分得到 (13.11.12). □

定理13.11.16 给出了调和函数更加广泛的定义. 即称可积函数 $u\in R(\Omega)$ 是调和的, 如果 (13.11.11) 对任何 $\varphi\in C_0^2(\Omega)$ 都成立. 当可积函数是连续时, 根据**定理13.11.16** 得到广义的调和函数定义和之前是一样的.

§13.11.2 * 基本解

首先来寻找**径向调和函数** u, 即满足

$$\Delta u=0 \ \ \text{在 } \mathbb{R}^n \text{ 内} \ \ \text{且} \ \ u(\boldsymbol{x})=u(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|) \tag{13.11.14}$$

其中 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n$ 是固定的点. 令

$$r:=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|,\quad v(r):=u(\boldsymbol{x}). \tag{13.11.15}$$

由于 $D_i u = v'(x^i - a^i)/r$ 和 $\partial r/\partial x^i = (x^i - a^i)/r$, 所以

$$\begin{aligned}\Delta u &= \sum_{1\le i\le n} D_i D_i u \\ &= \sum_{1\le i\le n}\left[v''\frac{(x^i-a^i)^2}{r^2} + v'\frac{r-(x^i-a^i)\frac{x^i-a^i}{r}}{r^2}\right] = v'' + v'\frac{n-1}{r}.\end{aligned}$$

即

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r) = 0, \tag{13.11.16}$$

从而得到解

$$v(r) = \begin{cases} c_1 + c_2\ln r, & n=2, \\ c_3 + c_4 r^{2-n}, & n\ge 3, \end{cases} \tag{13.11.17}$$

这里 $c_i, i = 1,2,3,4$, 都是常数. 为了确定常数 c_i, 引入如下的约束条件

$$\int_{\partial\mathbb{B}^n_r} v'(r)dS = 1, \quad r>1, \quad \mathbb{B}^n_r := \mathbb{B}^n(\mathbf{0}, r). \tag{13.11.18}$$

因此得到

$$v(r) = \begin{cases} c_1 + \frac{1}{2\pi}\log(r), & n=2, \\ c_3 + \frac{1}{\omega_n(2-n)}r^{2-n}, & n\ge 3. \end{cases} \tag{13.11.19}$$

对固定的 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n$ 定义函数

$$\Gamma(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\ln|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x}|, & n=2, \\ \frac{1}{\omega_n(2-n)}|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x}|^{2-n}, & n\ge 3, \end{cases} \tag{13.11.20}$$

则 $\Gamma(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})$ 当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{a}$ 时是调和的, 即,

$$\Delta_{\boldsymbol{x}}\Gamma(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{a}, \tag{13.11.21}$$

且在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ 处有奇点. 易证

$$\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{a},r)} \frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}_{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})dS_{\boldsymbol{x}} = 1 \tag{13.11.22}$$

对任何 $r>0$ 都成立.

定理13.11.17. *假设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域并假设 $u\in C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$. 则对任意 $\boldsymbol{a}\in\Omega$ 有*

$$u(\boldsymbol{a}) = \int_\Omega \Gamma(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})\Delta u(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} - \int_{\partial\Omega}\left(\Gamma(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}_{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{x})\frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}_{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})\right)dS_{\boldsymbol{x}}. \tag{13.11.23}$$

证: 对 u 和 $\Gamma := \Gamma(\boldsymbol{a},\cdot)$ 在区域 $\Omega\setminus\mathbb{B}^n(\boldsymbol{a},r)$ 上应用 Green 公式, 这里 $r\in(0,\mathrm{dist}(a,\partial\Omega))$, 得到

$$\int_{\Omega\setminus\mathbb{B}^n(\boldsymbol{a},r)}(\Gamma\Delta u - u\Delta\Gamma)\,d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}} - u\frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}}\right)dS_{\boldsymbol{x}}$$

$$-\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{a},r)}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}-u\frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}}\right)dS_{\boldsymbol{x}}.$$

因为在 $\Omega\setminus\mathbb{B}^n(\boldsymbol{a},r)$ 上 $\Delta\Gamma=0$, 故

$$\int_\Omega\Gamma\Delta u\,d\boldsymbol{x}=\int_{\partial\Omega}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}-u\frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}}\right)dS_{\boldsymbol{x}}-\lim_{r\to0}\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{a},r)}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}-u\frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}}\right)dS_{\boldsymbol{x}}.$$

对 $n=2$, 根据 (13.11.20), 得到

$$\left|\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{a},r)}\Gamma\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}dS_{\boldsymbol{x}}\right|=\left|\frac{1}{2\pi}\log r\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{a},r)}\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}dS_{\boldsymbol{x}}\right|\le|r\ln r|\sup_{\partial B^n(\boldsymbol{a},r)}|\boldsymbol{D}u|\to0$$

当 $r\to0$ 时, 和

$$\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{a},r)}u\frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}}dS_{\boldsymbol{x}}=\frac{1}{2\pi r}\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{a},r)}u\,dS_{\boldsymbol{x}}\to u(\boldsymbol{a})$$

当 $r\to0$ 时.

对 $n\ge3$, 根据 (13.11.20), 得到

$$\left|\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{a},r)}\Gamma\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}dS_{\boldsymbol{x}}\right|=\left|\frac{r^{2-n}}{(2-n)\omega_n}\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{a},r)}\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}dS_{\boldsymbol{x}}\right|\le\frac{r}{n-2}\sup_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{a},r)}|\boldsymbol{D}u|\to0$$

当 $r\to0$ 时, 从而

$$\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{a},r)}u\frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}}dS_{\boldsymbol{x}}=\frac{1}{\omega_nr^{n-1}}\int_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{a},r)}u\,dS_{\boldsymbol{x}}\to u(a)$$

当 $r\to0$ 时. □

注13.11.18. (1) 在 (13.11.23) 中令 $u\equiv1$ 得到

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}_{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})dS_{\boldsymbol{x}}=1\tag{13.11.24}$$

对任何 $\boldsymbol{a}\in\Omega$ 都成立.

(2) 如果函数 $u\in C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 在 Ω 内是调和的, 则

$$u(\boldsymbol{a})=-\int_{\partial\Omega}\left(\Gamma(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}_{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{x})\frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}_{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})\right)dS_{\boldsymbol{x}}\tag{13.11.25}$$

对任何 $\boldsymbol{a}\in\Omega$ 成立.

(3) 对两个量 A 和 B 符号

$$A\lesssim B$$

表示 $A\le CB$, 其中 C 是仅依赖于 n 的正常数; 同样符号

$$A\gtrsim B$$

表示 $CA\ge B$, 其中 C 是仅依赖于 n 的正常数. 符号

$$A\sim B$$

表示 $A\lesssim B$ 和 $A\gtrsim B$; 即 $C^{-1}B\le A\le CB$, 其中 C 是仅依赖于 n 的正常数.

注13.11.19. 假设 $u \in C(\overline{\mathbb{B}}^n(\mathbf{0},1))$ 在 $\mathbb{B}^n(\mathbf{0},1)$ 内调和. 对任何固定的常数 $0 < r < R < 1$ 选择截断函数 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{B}^n(\mathbf{0},R))$ 满足 $\varphi \equiv 1$ 在 $\mathbb{B}^n(\mathbf{0},r)$ 内成立且 $0 \le \varphi \le 1$. 对 u 和 $\varphi\Gamma := \varphi\Gamma(a,\cdot)$ 在 $\mathbb{B}^n(\mathbf{0},1) \setminus \mathbb{B}^n(\boldsymbol{a},\rho)$, 这里 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{B}^n(\mathbf{0},r)$, 应用 Green 公式得到, 要 ρ 足够小,

$$u(\boldsymbol{a}) = -\int_{r<|\boldsymbol{x}|<R} u(\boldsymbol{x})\Delta_{\boldsymbol{x}}\left(\varphi(\boldsymbol{x})\Gamma(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})\right)d\boldsymbol{x} \tag{13.11.26}$$

对任何 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{B}^n(\mathbf{0},r)$ 都成立. 由此得到

$$\sup_{\mathbb{B}^n(\mathbf{0},1/2)} |u| \lesssim ||u||_{L^p(\mathbb{B}^n(\mathbf{0},1))}\ (p>1), \quad \sup_{\mathbb{B}^n(\mathbf{0},1/2)} |\boldsymbol{D}u| \lesssim \max_{\boldsymbol{B}^n(\mathbf{0},1)} |u|. \tag{13.11.27}$$

假设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 内的有界区域. 假设 $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 是如下 Dirichlet 边界值问题

$$\Delta u = f \quad 在\ \Omega内, \quad u = \varphi \quad 在\ \partial\Omega\ 上 \tag{13.11.28}$$

的解, 这里 $f \in C(\overline{\Omega})$ 和 $\varphi \in C(\partial\Omega)$. 利用 (13.11.23) 得到

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega \Gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} + \int_{\partial\Omega}\varphi(\boldsymbol{y})\frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}_{\boldsymbol{y}}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})dS_{\boldsymbol{y}} - \int_{\partial\Omega}\Gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}_{\boldsymbol{y}}}(\boldsymbol{y})dS_{\boldsymbol{y}}.$$

对每个固定的 $\boldsymbol{x} \in \Omega$ 选择 $\Phi(\boldsymbol{x},\cdot) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 满足

$$\Delta_{\boldsymbol{y}}\Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0 \quad 对\ \boldsymbol{y} \in \Omega, \quad \Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\Gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \quad 对\ \boldsymbol{y} \in \partial\Omega. \tag{13.11.29}$$

令

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := \Gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \tag{13.11.30}$$

为**Green 函数 (Green function)**. 注意到 Green 函数 $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, 对每个固定的 $\boldsymbol{x} \in \Omega$, 是关于 $\boldsymbol{y} \in \overline{\Omega}$ 的函数. 由于 Φ 是调和的, 所以得到

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} + \int_{\partial\Omega}\varphi(\boldsymbol{y})\frac{\partial G}{\partial\mathbf{n}_{\boldsymbol{y}}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})dS_{\boldsymbol{y}}. \tag{13.11.31}$$

根据最大值原理, (13.11.29) 有唯一解.

性质13.11.20. Green 函数 $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 在 $\Omega \times \Omega$ 内是对称的, 即, $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ 对任何 $\boldsymbol{x} \ne \boldsymbol{y} \in \Omega$ 都成立

证: 任取 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2 \in \Omega$ 且 $\boldsymbol{x}_1 \ne \boldsymbol{x}_2$. 选择充分小的正数 $r > 0$ 使得 $\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_1,r) \cap \mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_2,r) = \emptyset$. 令 $G_1(\boldsymbol{y}) := G(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}), G_2(\boldsymbol{y}) := G(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})$. 断言

$$G_1(\boldsymbol{x}_2) = G_2(\boldsymbol{x}_1). \tag{13.11.32}$$

在 $\Omega \setminus \mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_1,r) \cup \mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_2,r)$ 上应用 Green 公式得到

$$\int_{\Omega\setminus\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_1,r)\cup\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x}_2,r)} \left(G_1(y)\Delta G_2(\boldsymbol{y}) - G_2(\boldsymbol{y})\Delta G_1(\boldsymbol{y})\right)d\boldsymbol{y}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\partial\Omega} \left(G_1(y)\frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{n}_y}(y) - G_2(y)\frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{n}_y}(y) \right) dS_y \\
&\quad - \int_{\partial\mathbb{B}^n(x_1,r)} \left(G_1(y)\frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{n}_y}(y) - G_2(y)\frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{n}_y}(y) \right) dS_y \\
&\quad - \int_{\partial\mathbb{B}^n(x_2,r)} \left(G_1(y)\frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{n}_y}(y) - G_2(y)\frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{n}_y}(y) \right) dS_y.
\end{aligned}
$$

因为 G_i 是调和的且在 $\partial\Omega$ 为零, 所以得到

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{r\to 0} \left[\int_{\partial\mathbb{B}^n(x_1,r)} \left(G_1(y)\frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{n}_y}(y) - G_2(y)\frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{n}_y}(y) \right) dS_y \right. \\
&\quad \left. + \int_{\partial\mathbb{B}^n(x_2,r)} \left(G_1(y)\frac{\partial G_2}{\partial \mathbf{n}_y}(y) - G_2(y)\frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{n}_y}(y) \right) dS_y \right] \\
&= \lim_{r\to 0} \left[\int_{\partial\mathbb{B}^n(x_1,r)} \left(\Gamma(x_1,y)\frac{\partial G_2}{\partial n_y}(y) - G_2(y)\frac{\partial \Gamma}{\partial n_y}(x_1,y) \right) dS_y \right. \\
&\quad \left. + \int_{\partial\mathbb{B}^n(x_2,r)} \left(G_1(y)\frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}_y}(x_2,y) - \Gamma(x_2,y)\frac{\partial G_1}{\partial \mathbf{n}_y}(y) \right) dS_y \right] \\
&= \lim_{r\to 0} \left[- \int_{\partial\mathbb{B}^n(x_1,r)} G_2(y)\frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}_y}(x_1,y)\, dS_y + \int_{\partial\mathbb{B}^n(x_2,r)} G_1(y)\frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}_y}(x_2,y)\, dS_y \right] \\
&= -G_2(x_1) + G_1(x_2). \quad \square
\end{aligned}
$$

性质13.11.21. 对任何 $x, y \in \Omega$, 只要 $x \neq y$, 都有

$$
\begin{aligned}
0 &> G(x,y) > \Gamma(x,y), \quad n \geq 3, \\
0 &> G(x,y) > \Gamma(x,y) - \frac{1}{2\pi}\ln(\mathrm{diam}(\Omega)), \quad n = 2.
\end{aligned}
$$

证: 固定 $x \in \Omega$ 并令 $G(y) := G(x,y)$. 因为 $\lim_{y\to x} G(y) = -\infty$, 可以找到 $r > 0$ 使得 $G(y) < 0$ 在 $\mathbb{B}^n(x,r)$ 内成立. 因为 G 在 $\Omega \setminus \mathbb{B}^n(x,r)$ 内是调和的, 根据最大值原理得到 $G < 0$ 在 $\Omega \setminus \mathbb{B}^n(x,r)$ 内成立. 故 $G(y) < 0$ 在 Ω 内成立.

回顾

$$
G(x,y) - \Gamma(x,y) = \Phi(x,y)
$$

这里 $\Delta_y \Phi(x,y) = 0$ 若 $y \in \Omega$, 和 $\Phi(x,y) = -\Gamma(x,y)$ 若 $y \in \partial\Omega$. 如果 $n \geq 3$,

$$
\Phi(x,y) = \frac{1}{(n-2)\omega_n}|x-y|^{2-n} > 0
$$

若 $y \in \partial\Omega$. 根据最大值原理, $\Phi(x,y) > 0$ 对任何 $y \in \Omega$ 都成立. 如果 $n = 2$, 则有

$$
\Phi(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\log|x-y| \geq -\frac{1}{2\pi}\ln(\mathrm{diam}(\Omega))
$$

若 $y \in \partial\Omega$. 同样根据最大值原理得到 $\Phi(x,y) > -\frac{1}{2\pi}\ln(\mathrm{diam}(\Omega))$ 对任何 $y \in \Omega$ 都成立. $\square$

性质13.11.22. $\mathbb{B}^n(\mathbf{0},R)$ 的Green 函数由如下所给出.

(i) 当$n\geq 3$ 时

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{1}{(2-n)\omega_n}\left(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{2-n}-\left|\frac{R}{|\boldsymbol{x}|}\boldsymbol{x}-\frac{|\boldsymbol{x}|}{R}\boldsymbol{y}\right|^{2-n}\right); \tag{13.11.33}$$

(ii) 当$n=2$ 时

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{1}{2\pi}\left(\ln|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|-\ln\left|\frac{R}{|\boldsymbol{x}|}\boldsymbol{x}-\frac{|\boldsymbol{x}|}{R}\boldsymbol{y}\right|\right). \tag{13.11.34}$$

推论13.11.23. 假设 G 是 $\mathbb{B}^n(\mathbf{0},r)$ 的Green 函数. 则

$$\frac{\partial G}{\partial n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{R^2-|\boldsymbol{x}|^2}{\omega_n R|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^n}:=K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \tag{13.11.35}$$

这里 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{B}^n(\mathbf{0},R)$ 和 $\boldsymbol{y}\in\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0},R)$.

由 (13.11.35) 定义的函数 $K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, 这里 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{B}^n(\mathbf{0},R)$ 和 $\boldsymbol{y}\in\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0},R)$, 称为 $\mathbb{B}^n(\mathbf{0},R)$ 的**Poisson 核(Poisson kernel)** 且满足

(i) $K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是光滑的, 如果 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$;

(ii) $K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})>0$ 如果 $|\boldsymbol{x}|<R$;

(iii) 如果 $|\boldsymbol{x}|<R$, 则

$$\int_{|\boldsymbol{y}|=R}K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})dS_{\boldsymbol{y}}=1.$$

定理13.11.24. (Poisson 积分公式) 对 $\varphi\in C(\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0},R))$, 定义函数 u 如下

$$u(\boldsymbol{x}):=\begin{cases}\int_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0},R)}K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{y})dS_{\boldsymbol{y}}, & |\boldsymbol{x}|<R,\\ \varphi(\boldsymbol{x}), & |\boldsymbol{x}|=R\end{cases} \tag{13.11.36}$$

则 $u\in C(\overline{\mathbb{B}}^n(\mathbf{0},R))\cap C^\infty(\mathbb{B}^n(\mathbf{0},R))$ 且

$$\Delta u=0 \quad 在\ \mathbb{B}^n(\mathbf{0},R)\ 内, \quad u=\varphi \quad 在\ \partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0},R)\ 上.$$

注13.11.25. 在 (13.11.36) 中令 $\boldsymbol{x}=0$ 得到

$$u(\mathbf{0})=\frac{1}{\omega_n R^{n-1}}\int_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0},R)}\varphi(\boldsymbol{y})dS_{\boldsymbol{y}}$$

即平均值性质.

引理13.11.26. (Harnack 不等式) 假设 u 在 $\mathbb{B}^n(x_0, R)$ 内调和且 $u \geq 0$. 则

$$\left(\frac{R}{R+r}\right)^{n-2} \frac{R-r}{R+r} u(x_0) \leq u(x) \leq \left(\frac{R}{R-r}\right)^{n-2} \frac{R+r}{R-r} u(x_0) \qquad (13.11.37)$$

这里 $r = |x - x_0| < R$.

证: 不失一般性不妨假设 $x_0 = \mathbf{0}$ 且 $u \in C(\overline{\mathbb{B}}^n(\mathbf{0}, R))$. 根据 (13.11.36) 得到

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R} \int_{\partial \mathbb{B}^n(\mathbf{0}, R)} \frac{R^2 - |x|^2}{|y - x|^n} u(y) \, dS_y.$$

因为 $R - |x| \leq |y - x| \leq R + |x|$ 对任意 $|y| = R$ 都成立, 所以得到

$$\frac{1}{\omega_n R} \frac{R - |x|}{R + |x|} \left(\frac{1}{R + |x|}\right)^{n-2} \int_{\partial \mathbb{B}^n(\mathbf{0}, R)} u(y) \, dS_y$$

$$\leq u(x) \leq \frac{1}{\omega_n R} \frac{R + |x|}{R - |x|} \left(\frac{1}{R - |x|}\right)^{n-2} \int_{\partial \mathbb{B}^n(\mathbf{0}, R)} u(y) \, dS_y.$$

根据平均值性质或**注13.11.25**, 得到所要的不等式. □

一般流形上调和函数的Harnack 估计参见李伟光、Schoen、郑绍远和丘成桐的重要论文和专著:

- Cheng, S. Y.; Yau. S. T.. *Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications*, Comm. Pure Appl. Math., **28**(1975), no. 3, 333-354.

- Li, Peter. *Geometric analysis*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **134**, Cambridge University Press, Cambridge, 2012. x+406 pp. ISBN: 978-1-107-02064-1

- Li, Peter; Yau, Shing-Tung. *On the parabolic kernel of the Schrödinger operator*, Acta. Math., **156**(1986), no. 3-4, 153-201.

- Schoen, R.; Yau, S.-T. *Lectures on differential geometry*, Lecture notes prepared by Wei Yue Ding, Kung Ching Chang [Gong Qing Zhang], Jia Qing Zhong and Yi Chao Xu, Translated from the Chinese by Ding and S. Y. Cheng, With a preface translated from the Chinese by Kaising Tso, Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, **I**, International Press, Cambridge, MA, 1994. v+235 pp. ISBN: 1-57146-012-8

- Yau, Shing Tung. *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds*, Comm. Pure Appl. Math., **28**(1975), 201-228.

推论13.11.27. 如果 $\mathbb{R}^n$ 上的调和函数 u 是有上界或下界, 则 u 必是常数.

证: 不妨假设 $u \geq 0$ 在 $\mathbb{R}^n$ 内成立. 任取 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 并在 (13.11.37) 中令 $R \to \infty$, 得到 $u(\mathbf{0}) = u(\boldsymbol{x})$ 对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 都成立. □

定理13.11.28. 假设 u 在 $\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, R) \setminus \{\mathbf{0}\}$ 内调和且满足

$$u(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} o(|\ln|x||), & n = 2, \\ o(|\boldsymbol{x}|^{2-n}), & n \geq 3 \end{cases}$$

当 $|\boldsymbol{x}| \to 0$ 时成立. 则 u 可在 $\mathbf{0}$ 处定义使得在 $\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, R)$ 内即是调和又是 C^2.

证: 不妨假设 u 在 $0 < |\boldsymbol{x}| \leq R$ 内连续. 考虑 Dirichlet 边界值问题

$$\Delta v = 0 \quad 在\ \mathbb{B}^n(\mathbf{0}, R)\ 内, \quad v = u \quad 在\ \partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, R)\ 上.$$

断言 $u = v$ 在 $\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, R) \setminus \{\mathbf{0}\}$ 内成立. 令

$$w := v - u \quad 在\ \mathbb{B}^n(\mathbf{0}, R) \setminus \{0\}\ 内, \quad M_r := \max_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, r)} |w|.$$

我们只给出 $n \geq 3$ 时的证明. 因为 $|w(\boldsymbol{x})| \leq M_r \frac{r^{n-2}}{|\boldsymbol{x}|^{n-2}}$ 在 $\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, r)$ 上成立且 $\boldsymbol{w}$ 在 $\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, R) \setminus \mathbb{B}^n(\mathbf{0}, r)$ 内是调和的, 根据最大值原理得到

$$|w(\boldsymbol{x})| \leq M_r \frac{r^{n-2}}{|\boldsymbol{x}|^{n-2}}$$

对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{B}^n(\mathbf{0}, R) \setminus \mathbb{B}^n(\mathbf{0}, r)$ 成立. 故

$$|w(\boldsymbol{x}) \leq \frac{r^{n-2}}{|\boldsymbol{x}|^{n-2}} \left(\max_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, r)} |v| + \max_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, r)} |u| \right)$$

$$\leq \frac{r^{n-2}}{|\boldsymbol{x}|^{n-2}} \max_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, R)} |u| + \frac{r^{n-2}}{|\boldsymbol{x}|^{n-2}} \max_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, r)} |u| = \frac{r^{n-2}}{|\boldsymbol{x}|^{n-2}} \max_{\partial\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, R)} |u| + \frac{o(1)}{|\boldsymbol{x}|^{n-2}}$$

对任何 $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ 都成立. 当 $r \to 0$ 时, 得到 $\boldsymbol{w} = \mathbf{0}$ 在 $\mathbb{B}^n(\mathbf{0}, R) \setminus \{\mathbf{0}\}$ 内成立. □

§13.11.3 * 内梯度估计和 Harnack 估计

这一小节我们将利用最大值原理来得到**内梯度估计 (interior gradient estimate)** 和**Harnack 不等式 (Harnack inequality)**. 令 $\mathbb{B}^n_r := \mathbb{B}^n(\mathbf{0}, r)$.

定理13.11.29. 假设 $u \in C^2(\mathbb{B}^n_1) \cap C(\overline{\mathbb{B}}^n_1)$ 在 $\mathbb{B}^n_1$ 内是**下调和的(subharmonic)**; 即, $\Delta u \geq 0$. 则

$$\sup_{\mathbb{B}^n_1} u \leq \sup_{\partial\mathbb{B}^n_1} u \tag{13.11.38}$$

证: 对任意 $\epsilon > 0$ 考虑函数 $u_\epsilon(\boldsymbol{x}) := u(\boldsymbol{x}) + \epsilon|\boldsymbol{x}|^2$ in $\mathbb{B}_1^n$. 由于

$$\Delta u_\epsilon = \Delta u + 2n\epsilon \geq 2n\epsilon > 0,$$

利用反证法易证 u_ϵ 不可能在内部取到最大值. 特别地,

$$\sup_{\mathbb{B}_1^n} u \leq \sup_{\mathbb{B}_1^n} u_\epsilon \leq \sup_{\partial\mathbb{B}_1^n} u_\epsilon \leq \sup_{\partial\mathbb{B}_1^n} u + \epsilon.$$

令 $\epsilon \to 0$ 推出 (13.11.38). □

注13.11.30. 若把 $\mathbb{B}_1^n$ 换成其它有界区域**定理13.11.29** 依旧成立.

性质13.11.31. 假设 u 在 $\mathbb{B}_1^n$ 内调和. 则

$$\sup_{\mathbb{B}_{1/2}^n} |\boldsymbol{D}u| \leq c \cdot \sup_{\partial\mathbb{B}_1^n} |u| \tag{13.11.39}$$

这里 $c = c(n)$ 是仅依赖于 n 地正常数. 特别地对任意 $\alpha \in [0,1]$ 有不等式

$$|u(x) - u(y)| \leq c|x-y|^\alpha \sup_{\partial\mathbf{B}_1} |u| \tag{13.11.40}$$

对任何 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{B}_{1/2}^n$ 都成立, 这里 $c = c(n, \alpha)$ 是正常数.

证: 因为 $\Delta u = 0$ 在 $\mathbb{B}_1^n$ 内成立, 所以

$$\begin{aligned}\Delta(|\boldsymbol{D}u|^2) = \Delta\left(\sum_{1\leq i\leq n}|D_iu|^2\right) &= \sum_{1\leq j\leq n}\left(2\sum_{1\leq i\leq n}D_iu\cdot D_{ij}u\right)\\ &= \sum_{1\leq i,j\leq n}|D_{ij}u|^2 + 2\sum_{1\leq i,j\leq n}D_iuD_{ijj}u\\ = 2\sum_{1\leq i\leq n}D_iuD_i(\Delta u) + 2\sum_{1\leq i,j\leq n}|D_{ij}u|^2 &= 2\sum_{1\leq i,j\leq n}|D_{ij}u|^2.\end{aligned}$$

故 $|\boldsymbol{D}u|^2$ 是下调和的. 对任意函数 $\varphi \in C_0^1(\mathbb{B}_1^n)$ 有

$$\Delta(\varphi|\boldsymbol{D}u|^2) = (\Delta\varphi)|\boldsymbol{D}u|^2 + 4\sum_{1\leq i,j\leq n}D_i\varphi D_juD_{ij}u + 2\varphi\sum_{1\leq i,j\leq n}(D_{ij}u)^2.$$

取 $\varphi = \eta^2$, 这里 $\eta \in C_0^1(\mathbb{B}_1^n)$ 且 $\eta|_{\mathbb{B}_{1/2}^n} \equiv 1$, 则得到[14]

$$\Delta(\eta^2|\boldsymbol{D}u|^2) = 2\eta\Delta\eta|\boldsymbol{D}u|^2 + 2|\boldsymbol{D}\eta|^2|\boldsymbol{D}u|^2 + 8\eta\sum_{1\leq i,j\leq n}D_i\eta D_juD_{ij}u$$

---

[14]Since

$$\left|8\eta\sum_{1\leq i,j\leq n}D_i\eta D_juD_{ij}u\right| \leq 2\eta^2\sum_{1\leq i,j\leq n}(D_{ij}u)^2 + 8|\boldsymbol{D}\eta|^2|\boldsymbol{D}u|^2.$$

$$+2\eta^2\sum_{1\le i,j\le n}(D_{ij}u)^2\ge(2\eta\Delta\eta-6|\boldsymbol{D}\eta|^2)|\boldsymbol{D}u|^2 \ \ge\ -C|\boldsymbol{D}u|^2,$$

其中 C 是仅依赖于 η 的正常数. 因为

$$\Delta(u^2)=2u\Delta u+2|\boldsymbol{D}u|^2=2|\boldsymbol{D}u|^2,$$

所以

$$\Delta(\eta^2|\boldsymbol{D}u|^2+\alpha u^2)\ge 0$$

这里 α 是仅依赖于 η 的常数. 根据**定理13.11.29** 得到

$$\sup_{\mathbb{B}^n_{1/2}}|Du|^2\le\alpha\sup_{\partial\mathbb{B}^n_1}|u|^2$$

从而得到 (13.11.39). 显然 (13.11.40) 可从 (13.11.39) 推出. □

引理13.11.32. (Harnack 不等式) *假设 u 在 $\mathbb{B}^n_1$ 内是非负调和的. 则*

$$\sup_{\mathbb{B}^n_{1/2}}|\boldsymbol{D}\ln u|\le C \tag{13.11.41}$$

这里 $C=C(n)$ 是仅依赖于 n 的正常数.

证: 不妨假设 $u>0$ 在 $\mathbb{B}^n_1$ 内成立, 否则考虑函数 $u+\epsilon>0$. 令 $v:=\ln u$. 则

$$\Delta v=\sum_{1\le i\le n}D_i\left(\frac{D_iu}{u}\right)=\frac{\Delta u}{u}-\frac{|\boldsymbol{D}u|^2}{u^2}=-|\boldsymbol{D}v|^2.$$

若令 $w:=|\boldsymbol{D}v|^2$, 得到

$$\begin{aligned}\Delta w&=\sum_{1\le i,j\le n}D_iD_i(D_jvD_jv)=2\sum_{1\le i,j\le n}D_i(D_jvD_{ij}v)\\&=2\sum_{1\le i,j\le n}(D_{ij}v)^2+2\sum_{1\le i,j\le n}D_jvD_j(D_{ii}v)\\&=2\sum_{1\le i,j\le n}(D_{ij}v)^2+2\sum_{1\le j\le n}D_jvD_j(\Delta v)=2\sum_{1\le i,j\le n}(D_{ij}v)^2-2\sum_{1\le i\le n}D_ivD_iw.\end{aligned}$$

因为

$$\sum_{1\le i,j\le n}(D_{ij}v)^2\ge\sum_{1\le i\le n}(D_{ii}v)^2\ge\frac{1}{n}(\Delta v)^2=\frac{|\boldsymbol{D}v|^4}{n}=\frac{w^2}{n},$$

所以

$$\Delta w+2\sum_{1\le i\le n}D_ivD_iw\ge\frac{2}{n}w^2.$$

取定非负函数 $\varphi\in C^1_0(\mathbb{B}^n_1)$ 得到

$$\Delta(\varphi w)+2\sum_{1\le i\le n}D_ivD_i(\varphi w)=2\varphi\sum_{1\le i,j\le n}(D_{ij}v)^2+4\sum_{1\le i,j\le n}D_i\varphi D_jvD_{ij}v$$

$$+2w\sum_{1\le i\le n}D_i\varphi D_iv+(\Delta\varphi)w\ge 2\varphi\sum_{1\le i,j\le n}(D_{ij}v)^2-2|\boldsymbol{D}\varphi||\boldsymbol{D}v|^3-|\Delta\varphi||\boldsymbol{D}v|^2$$

$$-4\left[\frac{\varphi}{4}\sum_{1\le i,j\le n}(D_{ij}v)^2+\frac{|\boldsymbol{D}\varphi|^2}{\varphi}|\boldsymbol{D}v|^2\right]$$

$$=\varphi\sum_{1\le i,j\le n}(D_{ij}v)^2-2|\boldsymbol{D}\varphi||\boldsymbol{D}v|^3-\left(|\Delta\varphi|+4\frac{|\boldsymbol{D}\varphi|^2}{\varphi}\right)|\boldsymbol{D}v|^2.$$

根据

$$\boldsymbol{D}\varphi=4\eta^3\boldsymbol{D}\eta,\quad \Delta\varphi=12\eta^2|\boldsymbol{D}\eta|^2+4\eta^3\Delta\eta,$$

得到

$$\Delta(\varphi w)+2\sum_{1\le i\le n}D_ivD_i(\eta^4w)\ge\frac{1}{n}\eta^4|\boldsymbol{D}v|^4-8\eta^3|\boldsymbol{D}\eta||\boldsymbol{D}v|^3$$

$$-4\eta^2(\eta\Delta\eta+19|\boldsymbol{D}\eta|^2)|\boldsymbol{D}v|^2\ge\frac{1}{n}\eta^4|\boldsymbol{D}v|^4-C\eta^3|\boldsymbol{D}v|^3-C\eta^2|\boldsymbol{D}v|^2$$

这里 C 是仅依赖于 n 和 η 的正常数. 利用 Hölder 不等式得到

$$\Delta(\varphi w)+2\sum_{1\le i\le n}D_ivD_i(\eta^4w)\ge\frac{3}{4n}\eta^4w^2-(nC^2+C)\eta^2w\ge\frac{1}{2n}\eta^4w^2-C_1$$

这里 C 也是仅依赖于 n 和 η 的正常数.

假设 η^4w 在 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{B}_1^n$ 取到最大值. 则 $\boldsymbol{D}(\eta^4w)=0$ 且 $\Delta(\eta^4w)\le 0$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处成立. 从而

$$\eta^4w^2(\boldsymbol{x}_0)\le C_2$$

对某个仅依赖于 n 和 η 的正常数 C_2 成立. 若 $w(\boldsymbol{x}_0)\ge 1$, 则 $\eta^4w(\boldsymbol{x}_0)\le C_2$; 若 $w(\boldsymbol{x}_0)\le 1$, 则 $\eta^4w(\boldsymbol{x}_0)\le\eta^4(\boldsymbol{x}_0)$. 无论哪一种情形都有

$$\eta^4w\le C_3$$

在 $\mathbb{B}_1^n$ 内成立, 这里 C_3 是仅依赖于 n 和 η 的正常数. □

对流形上的非负调和函数 $\Delta u=0$ 也有类似的估计, 即**Cheng-Yau 估计(Cheng-Yau estimate)**[15]. 我们甚至还可以考虑热方程 $\partial_t u=\Delta u$ 非负解的 Harnack 估计, 即**Li-Yau 估计(Li-Yau estimate)**[16] 和**Hamilton 估计(Hamilton estimate)**[17]. 这两个估计在Perelman 证明**Poincaré 猜想(Poincaré conjecture)**中起了至关重要的作用.

[15]Cheng, S. Y.; Yau. S. T.. *Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications*, Comm. Pure Appl. Math., **28**(1975), no. 3, 333-354.

[16]Li, Peter; Yau, Shing-Tung. *On the parabolic kernel of the Schrödinger operator*, Acta. Math., **156**(1986), no. 3-4, 153-201.

[17]Hamilton, Richard. *A matrix Harnack estimate for the heat equation*, Comm. Anal. Geom., **1**(1993), no. 1, 113-126.

推论13.11.33. 假设函数 u 在 $\mathbb{B}_1^n$ 内是非负调和的. 则

$$\frac{1}{C}u(\boldsymbol{x}_2) \le u(\boldsymbol{x}_1) \le Cu(\boldsymbol{x}_2) \tag{13.11.42}$$

对任意 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{B}_{1/2}^n$ 都成立, 这里 $C > 1$ 是仅依赖于 n 的正常数.

证: 不妨假设 $u > 0$ 在 $\mathbb{B}_1^n$ 内成立. 对任何 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{B}_{1/2}^n$ 有

$$\ln\frac{u(\boldsymbol{x}_1)}{u(\boldsymbol{x}_2)} \le |\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2| \int_0^1 |\boldsymbol{D}\ln u(t\boldsymbol{x}_2 + (1-t)\boldsymbol{x}_1)|dt \le C|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2| \le C$$

这是因为 $t\boldsymbol{x}_2 + (1-t)\boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{B}_{1/2}^n$. □

性质13.11.34. (Hopf 引理) 假设 $u \in C(\overline{\mathbb{B}}_1^n)$ 在 $\mathbb{B}_1^n$ 内是调和的. 如果 $u(\boldsymbol{x}) < u(\boldsymbol{x}_0)$ 对任何 $\boldsymbol{x} \in \overline{\mathbb{B}}_1^n$ 和某个 $\boldsymbol{x}_0 \in \partial\mathbb{B}_1^n$ 成立, 则

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\boldsymbol{x}_0) \ge C[u(\boldsymbol{x}_0) - u(\boldsymbol{0})] \tag{13.11.43}$$

这里 C 是仅依赖于 n 的正常数.

证: 定义

$$v(\boldsymbol{x}) := e^{-\alpha|\boldsymbol{x}|^2} - e^{-\alpha}.$$

当 $\alpha \ge 2n+1$ 时有

$$\Delta v(\boldsymbol{x}) = e^{-\alpha|\boldsymbol{x}|^2}(4\alpha^2|\boldsymbol{x}|^2 - 2\alpha n) > 0$$

对任何 $|\boldsymbol{x}| \ge \frac{1}{2}$ 都成立. 因此对每个固定的 α, 函数 v 在区域 $A := \mathbb{B}_1^n \setminus \mathbb{B}_{1/2}^n$ 内是下调和的. 定义

$$h_\epsilon(\boldsymbol{x}) := u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{x}_0) + \epsilon v(\boldsymbol{x})$$

这里 $\epsilon > 0$. 这仍旧是下调和函数, $\Delta h_\epsilon \ge 0$. 注意到 $h_\epsilon \le 0$ 在 $\partial\mathbb{B}_1^n$ 上成立且 $h_\epsilon(\boldsymbol{x}_0) = 0$. 由于 $u(\boldsymbol{x}) < u(\boldsymbol{x}_0)$ 对 $|\boldsymbol{x}| = \frac{1}{2}$ 成立, 我们不妨取 $\epsilon > 0$ 足够小使得 $h_\epsilon(\boldsymbol{x}) < 0$ 对 $|\boldsymbol{x}| = \frac{1}{2}$ 成立. 从**定理13.11.29** 得到 h_ϵ 在 $\boldsymbol{x}_0 \in A$ 处取到最大值. 这就意味着

$$\frac{\partial h_\epsilon}{\partial \mathbf{n}}(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}_0) \ge 0 \quad \text{或者} \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\boldsymbol{x}_0) \ge -\epsilon\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(\boldsymbol{x}_0) = 2\alpha\epsilon e^{-\alpha} > 0.$$

令

$$w(\boldsymbol{x}) := u(\boldsymbol{x}_0) - u(\boldsymbol{x}) > 0.$$

因为 w 在 $\mathbb{B}_1^n$ 内是调和的, 所以从**推论13.11.33** 得到

$$\inf_{\mathbb{B}_{1/2}^n} w \ge C(n)w(\boldsymbol{0}) \quad \text{或者} \quad \max_{\mathbb{B}_{1/2}^n} u \le u(\boldsymbol{x}_0) - C(n)[u(\boldsymbol{x}_0) - u(\boldsymbol{0})]$$

这里 $C(n)$ 是仅依赖 n 的正常数. 若取

$$\epsilon := \delta C(n)[u(\boldsymbol{x}_0) - u(\boldsymbol{0})]$$

只要 δ 足够小, 我们得到 $h_\epsilon(\boldsymbol{x})<0$ 当 $|\boldsymbol{x}|=\frac{1}{2}$ 时成立. 故

$$\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}(\boldsymbol{x}_0)=2\alpha e^{-\alpha}\delta C(n)[u(\boldsymbol{x}_0)-u(\mathbf{0})].$$

最后我们取 $C=2\alpha e^{-\alpha}\delta C(n)$. □

称函数 $u\in C^\alpha(\overline{D})$, 这里 D 是有界区域, 如果

$$||u||_{C^\alpha(\overline{D})}:=\max_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\overline{D},\,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}}\frac{|u(\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{y})|}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^\alpha}<+\infty.$$

引理13.11.35. (整体 Hölder 连续性) *假设 $u\in C(\overline{\mathbb{B}}_1^n)$ 在 $\mathbb{B}_1^n$ 内是调和的且 $u=\varphi$ 在 $\partial\mathbb{B}_1^n$ 上成立. 如果 $\varphi\in C^\alpha(\partial\mathbb{B}_1^n)$ 这里 $\alpha\in(0,1)$, 则 $u\in C^{\alpha/2}(\overline{\mathbb{B}}_1^n)$. 更进一步有*

$$||u||_{C^{\alpha/2}(\overline{\mathbb{B}}_1^n)}\leq C||\varphi||_{C^\alpha(\partial\mathbb{B}_1^n)}\tag{13.11.44}$$

这里 C 是仅依赖于 n 和 α 的正常数.

证: 根据**定理13.11.29** 可知 $\inf_{\partial\mathbb{B}_1^n}\varphi\leq u\leq\sup_{\partial\mathbb{B}_1^n}\varphi$ 在 $\mathbb{B}_1^n$ 内成立. 断言不等式

$$\sup_{x\in\mathbb{B}_1^n}\frac{|u(\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{x}_0)|}{|x\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^{\alpha/2}}\leq 2^{\alpha/2}\sup_{\partial\mathbb{B}_1^n}\frac{|\varphi(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{x}_0)|}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^\alpha}\tag{13.11.45}$$

对任何 $\boldsymbol{x}_0\in\partial\mathbb{B}_1^n$ 都成立. 令

$$K:=\sup_{\partial\mathbb{B}_1^n}\frac{|\varphi(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{x}_0)|}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^\alpha}$$

并假设 $\boldsymbol{x}_0:=(-1,0,\cdots,0)\in\partial\mathbb{B}_1^n$. 则 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2=2(1+x^1)$, $\boldsymbol{x}:=(x^1,\cdots,x^n)$. 从而得到

$$\varphi(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{x}_0)\leq K|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^\alpha=K2^{\alpha/2}(1+x^1)^{\alpha/2}=:v(\boldsymbol{x}).$$

利用

$$\Delta v(\boldsymbol{x})=K2^{\alpha/2}\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)(1+x^1)^{\frac{\alpha}{2}-2}<0=\Delta u(\boldsymbol{x}),$$

得到 $\Delta[u(\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{x}_0)-v(\boldsymbol{x})]\geq 0$ 且

$$u(\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{x}_0)-v(\boldsymbol{x})\leq\sup_{\partial\mathbb{B}_1^n}[\varphi(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{x}_0)-v(\boldsymbol{x})]\leq 0$$

这里用到了**定理13.11.29**. 因此

$$u(\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{x}_0)\leq v(\boldsymbol{x})=K2^{\alpha/2}(1+x^1)^{\alpha/2}\leq K2^{\alpha/2}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^{\alpha/2}$$

对任何 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{B}_1^n$ 都成立. 类似地可得到 $-[u(\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{x}_0)]\leq K2^{\alpha/2}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^{\alpha/2}$. 这就证明了 (13.11.45).

对任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\in\mathbb{B}_1^n$, 引入

$$d_{\boldsymbol{x}}=\operatorname{dist}(\boldsymbol{x},\partial\mathbb{B}_1^n),\quad d_{\boldsymbol{y}}=\operatorname{dist}(\boldsymbol{y},\partial\mathbb{B}_1^n).$$

假设 $d_{\boldsymbol{y}}\le d_{\boldsymbol{x}}$ 并取 $\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0\in\partial\mathbb{B}_1^n$ 满足

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|=d_{\boldsymbol{x}},\quad |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0|=d_{\boldsymbol{y}}.$$

如果 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\le\frac{d_{\boldsymbol{x}}}{2}$, 则得到 $\boldsymbol{y}\in\overline{\mathbb{B}}^n(\boldsymbol{x},d_{\boldsymbol{x}}/2)\subset\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},d_{\boldsymbol{x}})\subset\mathbb{B}_1^n$. 根据**性质13.11.31** 和 (13.11.45) 推出

$$\frac{|u(\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{y})|}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{\alpha/2}}\le C|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{\alpha/2}\sup_{\partial\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},d_{\boldsymbol{x}})}|u(\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{x}_0)|$$

$$\le C(d_{\boldsymbol{x}}/2)^{\alpha/2}d_{\boldsymbol{x}}^{\alpha/2}\cdot\sup_{\mathbb{B}_1^n}\frac{|u(\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{x}_0)|}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^{\alpha/2}}\le Cd_{\boldsymbol{x}}^{\alpha}||\varphi||_{C^\alpha(\partial\mathbb{B}_1^n)}.$$

如果 $d_{\boldsymbol{y}}\le d_{\boldsymbol{x}}\le 2|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$, 则

$$\begin{aligned}|u(\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{y})| &\le |u(\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{x}_0)|+|u(\boldsymbol{x}_0)-u(\boldsymbol{y}_0)|+|u(\boldsymbol{y}_0)-u(\boldsymbol{y})|\\ &\le (2^{\alpha/2}d_{\boldsymbol{x}}^{\alpha/2}+2^{\alpha/2}d_{\boldsymbol{y}}^{\alpha/2}+|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}_0|^{\alpha/2})||\varphi||_{C^\alpha(\partial\mathbb{B}_1^n)}\end{aligned}$$

by (13.11.45). 但是, $|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}_0|\le d_{\boldsymbol{x}}+d_{\boldsymbol{y}}+|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\le 5|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ 推出

$$|u(\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{y})|\le(2^\alpha+2^\alpha+5^{\alpha/2})|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{\alpha/2}||\varphi||_{C^\alpha(\partial\mathbf{B}_1)}.$$

即 $||u||_{C^{\alpha/2}(\mathbb{B}_1^n)}\le C(n,\alpha)||\varphi||_{C^\alpha(\partial\mathbb{B}_1^n)}$. □

§13.11.4 * 能量方法

假设 $a_{ij}\in C(\mathbb{B}^n)$ ($\mathbb{B}^n:=\mathbb{B}^n(\mathbf{0},1)$) 且不等式

$$\lambda|\boldsymbol{\xi}|^2\le a_{ij}(\boldsymbol{x})\xi^i\xi^j\le\Lambda|\boldsymbol{\xi}|^2 \tag{13.11.46}$$

对任何 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{B}^n$ 和 $\boldsymbol{\xi}=(\xi^1,\cdots,\xi^n)\in\mathbb{R}^n$ 都成立, 这里 λ,Λ 是正常数. 考察下面偏微分方程的**弱解(weak solution)** $u\in C^1(\mathbb{B}^n)$

$$\sum_{1\le i,j\le n}D_j(a_{ij}D_iu)=0. \tag{13.11.47}$$

即 u 满足等式

$$\sum_{1\le i,j\le n}\int_{\mathbb{B}^n}a_{ij}D_iuD_j\varphi=0 \tag{13.11.48}$$

对任何 $\varphi\in C_0^1(\mathbb{B}^n)$ (即 φ 在 $\mathbb{B}^n$ 上是连续的且在边界上取零)都成立. 注意到调和函数满足 (13.11.47) (这里 $a_{ij}=\delta_{ij}$).

引理13.11.36. (Cacciopolli 不等式) 假设函数 $u \in C^1(\mathbb{B}^n)$ 满足

$$\sum_{1\le i,j\le n} \int_{\mathbb{B}^n} a_{ij} D_i u D_j \varphi = 0, \quad \forall\, \varphi \in C_0^1(\mathbb{B}^n).$$

则对任意 $\eta \in C_0^1(\mathbb{B}^n)$ 有

$$\int_{\mathbb{B}^n} \eta^2 |\boldsymbol{D}u|^2 \le C \int_{\mathbb{B}^n} |\boldsymbol{D}\eta|^2 u^2 \tag{13.11.49}$$

这里 C 是仅依赖于 λ 和 Λ 的正常数.

证: 对任何 $\eta \in C_0^1(\mathbb{B}^n)$ 令 $\varphi := \eta^2 u$. 根据 (13.11.48), 得到

$$0 = \sum_{1\le i,j\le n} \int_{\mathbb{B}^n} a_{ij} D_i u (2\eta u D_j \eta + \eta^2 D_j u)$$

从而

$$\lambda \int_{\mathbb{B}^n} \eta^2 |\boldsymbol{D}u|^2 \le 2\Lambda \int_{\mathbf{B}_1} |\eta||u||\boldsymbol{D}u||\boldsymbol{D}\eta| \le \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{B}^n} \eta^2 |\boldsymbol{D}u|^2 + \frac{2\Lambda^2}{\lambda} \int_{\mathbb{B}^n} |\boldsymbol{D}\eta|^2 u^2.$$

这里 $C = 4\Lambda^2/\lambda^2$. $\square$

推论13.11.37. 假设 u 满足**引理13.11.36** 中的条件. 则对任何 $0 \le r < R \le 1$ 有

$$\int_{\mathbb{B}_r^n} |\boldsymbol{D}u|^2 \le \frac{C}{(R-r)^2} \int_{\mathbb{B}_R^n} u^2 \tag{13.11.50}$$

这里 C 是仅依赖于 λ 和 Λ 的正常数.

证: 取 $\eta \in C_0^1(\mathbb{B}^n)$ 满足 $\eta \equiv 1$ 在 $\mathbb{B}_r^n$ 内, $\eta \equiv 0$ 在 $\mathbb{B}_R^n$ 外, 且 $|\boldsymbol{D}\eta| \le \frac{1}{R-r}$. 则根据 (13.11.49) 得到

$$\int_{\mathbb{B}_r^n} |\boldsymbol{D}u|^2 \le \frac{C}{(R-r)^2} \int_{\mathbb{B}_R^n} u^2. \quad \square$$

Poincaré 不等式是说

$$\int_{\mathbb{B}_R^n} u^2 \le C(n) R^2 \int_{\mathbb{B}_R^n} |\boldsymbol{D}u|^2, \quad u \in C_0^1(\mathbb{B}_R^n).$$

等价的不等式是说

$$\int_{\mathbb{B}_R^n} (u - \underline{u})^2 \le C(n) R^2 \int_{\mathbb{B}_R^n} |\boldsymbol{D}u|^2, \quad u \in C^1(\mathbb{B}_R^n)$$

其中 $\underline{u} := \int_{\mathbb{B}_R^n} u / |\mathbb{B}_R^n|$.

推论13.11.38. 假设 u 满足**引理13.11.36** 中的条件. 则对任何 $0<R\le 1$ 有

$$\int_{\mathbb{B}^n_{R/2}} u^2 \le \theta \int_{\mathbb{B}^n_R} u^2, \quad \int_{\mathbb{B}^n_{R/2}} |\boldsymbol{D}u|^2 \le \theta \int_{\mathbb{B}^n_R} |\boldsymbol{D}u|^2 \tag{13.11.51}$$

这里 θ 是仅依赖于 n,λ,Λ 的正常数.

证: 在 (13.11.49) 中取 $\eta\in C^1_0(\mathbb{B}^n_R)$ 满足 $\eta|_{\mathbb{B}^n_{R/2}}\equiv 1$ 和 $|\boldsymbol{D}\eta|\le \frac{2}{R}$, 得到

$$\int_{\mathbb{B}^n_R} |\boldsymbol{D}(\eta u)|^2 = \int_{\mathbb{B}^n_R} (\eta^2|\boldsymbol{D}u|^2 + |\boldsymbol{D}\eta|^2u^2) \le C\int_{\mathbb{B}^n_R} |\boldsymbol{D}\eta|^2u^2 \le \frac{C}{R^2}\int_{\mathbb{B}^n_R\setminus\mathbb{B}^n_{R/2}} u^2$$

这里 C 是仅依赖于 λ,Λ 的正常数. 根据 Poincaré 不等式得到

$$\int_{\mathbb{B}^n_{R/2}} u^2 \le \int_{\mathbb{B}^n_R} (\eta u)^2 \le C(n)R^2\frac{C}{R^2}\int_{\mathbb{B}^n_R\setminus\mathbb{B}^n_{R/2}} u^2 = C_1\int_{\mathbb{B}^n_R\setminus\mathbb{B}^n_{R/2}} u^2$$

这里 C_1 是仅依赖于 n,λ,Λ 的正常数. 即

$$\int_{\mathbb{B}^n_{R/2}} u^2 \le \frac{C_1}{1+C_1}\int_{\mathbb{B}^n_{R/2}} u^2.$$

因为 $u-a$ 满足 (13.11.48), 所以

$$\int_{\mathbb{B}^n_R} \eta^2|\boldsymbol{D}u|^2 \le C\int_{\mathbb{B}^n_R} |\boldsymbol{D}\eta|^2(u-a)^2 \le \frac{C}{R^2}\int_{\mathbb{B}^n_R\setminus\mathbb{B}^n_{R/2}} (u-a)^2.$$

利用 Poincaré 不等式推出

$$\int_{\mathbb{B}^n_{R/2}} |\boldsymbol{D}u|^2 \le \frac{C}{R^2}C(n)R^2\int_{\mathbb{B}^n_R\setminus\mathbb{R}^n_{R/2}} |\boldsymbol{D}u|^2 = C_2\int_{\mathbb{B}^n_R\setminus\mathbb{B}^n_{R/2}} |\boldsymbol{D}u|^2$$

这里 C_2 是仅依赖于 n,λ,Λ 的正常数. 特别地

$$\int_{\mathbb{B}^n_{R/2}} |\boldsymbol{D}u|^2 \le \frac{C_2}{1+C_2}\int_{\mathbb{B}^n_{R/2}} |\boldsymbol{D}u|^2.$$

最后取 $\theta := \max\{\frac{C_1}{1+C_1}, \frac{C_2}{1+C_2}\}$ 得到 (13.11.51). □

注13.11.39. **推论13.11.38** 意味着 $\mathbb{R}^n$ 上具有有限 L^2- 范数, 即 u^2 是可积的, 的调和函数 u 必为零.

注13.11.40. 假设 u 满足**引理13.11.36** 中的条件. 则对任何 $0<\rho<r\le 1$, 有

$$\int_{\mathbb{B}^n_\rho} u^2 \le C\left(\frac{\rho}{r}\right)^\mu \int_{\mathbb{B}^n_r} u^2, \quad \int_{\mathbb{B}^n_\rho} |\boldsymbol{D}u|^2 \le C\left(\frac{\rho}{r}\right)^\mu \int_{\mathbb{B}^n_r} |\boldsymbol{D}u|^2 \tag{13.11.52}$$

这里 C,μ 是仅依赖于 n,λ,Λ 的正常数.

引理13.11.41. 假设 $(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ 是常数值正定矩阵并满足不等式

$$\lambda|\xi|^2 \le a_{ij}\xi^i\xi^j \le \Lambda|\xi|^2$$

对任意 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 都成立, 这里 $0<\lambda<\Lambda$ 是正常数. 假设 $u \in C^1(\mathbb{B}_1^n)$ 满足

$$\int_{\mathbf{B}_1} a_{ij}D_iuD_j\varphi = 0, \quad \varphi \in C_0^1(\mathbb{B}_1^n).$$

则对任何 $0<\rho\le r$, 有

$$\int_{\mathbb{B}_\rho^n} u^2 \le C\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int_{\mathbb{B}_r^n} u^2, \quad \int_{\mathbb{B}_\rho^n} |u-\underline{u}_\rho|^2 \le C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2}\int_{\mathbb{B}_r^n}|u-\underline{u}_r|^2 \tag{13.11.53}$$

这里 $C=C(\lambda,\Lambda)$ 是正常数且 $\underline{u}_r$ 表示 u 在 $\mathbb{B}_r^n$ 上的平均值.

证: 不妨假设 $r=1$ 和 $\rho\in(0,1/2]$. 首先断言

$$|u|^2_{L^\infty(\mathbb{B}^n_{1/2})} + |\boldsymbol{D}u|^2_{L^\infty(\mathbb{B}^n_{1/2})} \le c(\lambda,\Lambda)\int_{\mathbb{B}_1^n} u^2. \tag{13.11.54}$$

从 (13.11.54) 得到

$$\int_{\mathbb{B}_\rho^n} u^2 \le C_1\rho^n|u|^2_{L^\infty(\mathbb{B}^n_{1/2})} \le C_2\rho^n\int_{\mathbb{B}_1^n}u^2$$

和

$$\int_{\mathbb{B}_\rho^n}|u-\underline{u}_\rho|^2 \le \int_{\mathbb{B}_\rho^n} 4\rho^2|\boldsymbol{D}u|^2_{L^\infty(\mathbb{B}^n_{1/2})} \le C_3\rho^{n+2}|\boldsymbol{D}u|^2_{L^\infty(\mathbb{B}^n_{1/2})} \le C_4\rho^{n+2}\int_{\mathbb{B}_1^n}u^2.$$

因为 $u-\underline{u}_1$ 也满足 (13.11.48), 所以

$$\int_{\mathbb{B}_\rho^n}|u-\underline{u}_\rho|^2 \le C_4\rho^{n+2}\int_{\mathbb{B}_1^n}|u-\underline{u}_1|^2.$$

现在只要证明不等式 (13.11.54) 即可. 利用旋转不妨假设 $(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ 是对角矩阵 $\mathrm{diam}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$. 因此 u 满足

$$\sum_{1\le i\le n}\lambda_iD_{ii}u = 0,$$

这里 $0<\lambda\le\lambda_i\le\Lambda$, $i=1,\cdots,n$. 则存在 $r_0 := r_0(\lambda,\Lambda)\in(0,1/2)$ 使得对任何 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{B}^n_{1/2}$ 矩形体

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n : \frac{|x^i-x_0^i|}{\sqrt{\lambda_i}} < r_0,\ i=1,\cdots,n\right\}$$

包含在 $\mathbb{B}_1^n$ 内. 考虑坐标变换

$$x^i \mapsto y^i := \frac{x^i}{\sqrt{\lambda_i}}, \quad 1\le i\le n,$$

并记 $v(\boldsymbol{y}) := u(\boldsymbol{x})$. 则 $\boldsymbol{v}$ 在椭球体 $\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \lambda_i (y^i)^2 < 1\}$ 内是调和的. 在球 $\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0| < r_0\}$ 内, 内梯度估计推出

$$|v(\boldsymbol{y}_0)|^2 + |\boldsymbol{D}v(\boldsymbol{y}_0)|^2 \le C(\lambda, \Lambda) \int_{\mathbb{B}^n_{r_0}(\boldsymbol{y}_0)} v^2 \le C(\lambda, \Lambda) \int_{\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \lambda_i (y^i)^2 < 1\}} v^2.$$

即

$$|u(\boldsymbol{x}_0)|^2 + |\boldsymbol{D}u(\boldsymbol{x}_0)|^2 \le C(\lambda, \Lambda) \int_{\mathbb{B}^n_1} u^2.$$

由于 $\boldsymbol{x}_0$ 是 $\mathbb{B}^n_{1/2}$ 内的任意点, 不等式 (13.11.54) 立即得到. □

§13.12 * Navier-Stokes 方程简介

Navier-Stokes 方程是用来描述流水的运动方程.

§13.12.1 * 有界区域上的流体

§13.12.2 * 外面区域上的流体

§13.12.3 * 无界区域上的流体

§13.13 参考文献

1. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis I*, Translated from the 1988 German original by Gary Brookfield, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. xiv+426 pp. ISBN: 3-7643-7153-6

2. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis II*, Translated from the 1999 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. xii+400 pp. ISBN: 978-3-7643-7472-3; 3-7643-7472-3

3. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis III*, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. xii+468 pp. ISBN: 978-3-7643-7479-2; 3-7643-7479-2

4. Munkres, James R. *Topology*, Second edition, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000. xvi+537 pp. ISBN: 0-13-181629-2

5. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis I*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+574 pp. ISBN: 3-540-40386-8

6. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis II*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xvi+681 pp. ISBN: 3-540-40633-6

7. 布鲁斯· C. 伯恩特(Bruce C. Berndt) 主编: **拉玛努金笔记**(第1, 2, 3, 4 卷), 哈尔滨工业大学出版社, 2019.

8. 常庚哲, 史济怀 编: **数学分析教程** (上、下册), 高等教育出版社, 2003.

9. 陈天权 编著: **数学分析讲义** (第一、二、三册), 北京大学出版社, 2009.

10. 邓建平 编: **微积分I 和II**, 科学出版社, 2019.

11. Duhham, William 著(李伯民, 汪军, 张怀勇 译): **微积分的历程** – 从牛顿到勒贝格, 人民邮电出版社, 2013.

12. 吉米多维奇 著(李荣涷, 李植 译): **数学分析习题集** (根据2010年俄文版翻译), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.

13. Kline, Morris 著(张理京, 张炎热, 江泽涵等 译): **古今数学思想** (第一、二、三册), 上海科学技术出版社, 2014.

14. 李傅山, 王培合 编著: **数学分析习题课讲义** (1、2、3), 北京大学出版社, 2018.

15. 李逸 编著: **数学分析讲义**, 上海交通大学数学分析课讲义(未出版), 2016.

16. 林源渠, 方企勤 编: **数学分析解题指南**, 北京大学出版社, 2003.

17. 梅加强 编著: **数学分析**, 高等教育出版社, 2015.

18. 裴礼文 编著: **数学分析中的典型问题与方法** (第二版), 高等教育出版社, 2015.

19. Riemann, Bernhard 著(李培廉 译): **黎曼全集** (第一、二卷), 高等教育出版社, 2016.

20. 汪林 著: **数学分析中的问题和反例**, 现代数学基础 **56**, 高等教育出版社, 2015.

21. Weir, D. Maurice; Hass, R. Joel; Giordano, R. Frank. *Thomas' calculus*, Eleventh Edition, (影印版, 上、下册), 高等教育出版社, 2016.

22. 徐森林, 薛春华 编著: **数学分析**, 清华出版社, 2005.

23. 杨小远, 孙玉泉, 薛玉梅, 杨卓琴 编著: **工科数学分析教程** (上、下册), 科学出版社, 2011.

24. 张福保, 薛金美, 潮小李 主编: **数学分析讲义**, 科学出版社, 2019.

25. 张筑生 编著: **数学分析新讲** (第一、二、三册), 北京大学出版社, 1990.

26. 周民强 编著: **数学分析习题演练** (第一、二、三册), 科学出版社, 2018.

27. 朱尧辰 编著: **数学分析例选通过范例学技巧**, 哈尔滨工业大学出版社, 2013.

第十四章　多变量级数理论

Euler, Leibniz, Bernoulli 家族: “porro hoc argumentandi genus, etsi Metaphysicum magis quam Mathematicum videatur, tamen firmum est: et alioqui Canonum Verae Metaphysicae major est usus in Mathesi, in Analysis, in ipsa Geometria, quam vulgo putatur”

$$1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2},\quad 1+2+4+8+\cdots=-1.$$

§14.1　函数项级数和函数列

在第六章 我们研究了数项级数的基本性质, 和多元函数一样, 现在将数项级数扩充到多变量级数, 即函数项级数.

§14.1.1　收敛域

假设 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 是定义在 $X\subset\mathbb{R}$ 上的一列函数. 我们将其称为定义在 X 上的**函数列 (sequence of functions)**, 并把其和

$$\sum_{n\geq 1}f_n(x),\quad x\in X,$$

称为定义在 X 上的**函数项级数 (series of functions)**.

定义14.1.1. (1) 假设 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}, x\in X$, 为一函数列. 定义

$$D:=\{x\in X|\{f_n(x)\}_{n\geq 1}\text{ 收敛}\}\subset X. \tag{14.1.1}$$

我们把点 $x\in D$ 称为函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 的**收敛点 (convergent point)** 而把点集 D 称为函数列的**收敛域 (domain of convergence)**.

对每个 $x\in D$, 定义

$$f(x):=\lim_{n\to+\infty}f_n(x). \tag{14.1.2}$$

这样得到了函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 的**极限函数 (limit function)** $f(x)$. 此时我们也称函数列 $f_n(x)$ **逐点收敛 (pointwisely converges)** 到函数 $f(x)$.

(2) 假设 $\sum_{n\geq}f_n(x), x\in X$, 为一函数项级数. 定义

$$D:=\left\{x\in X|\sum_{n\geq 1}f_n(x)\text{ 收敛}\right\}\subset X. \tag{14.1.3}$$

我们把点 $x\in D$ 称为函数项级数 $\sum_{n\geq 1}f_n(x)$ 的**收敛点 (convergent point)** 而把点集 D 称为函数项级数的**收敛域 (domain of convergence)**. 如果进一步要

求, 我们可引入**绝对收敛域 (domain of absolute convergence)** D_a 和**条件收敛域 (domain of condition convergence)** D_c:

$$D_a := \left\{ x \in X | \sum_{n\geq 1} |f_n(x)| \text{ 收敛} \right\}, \quad D_c := D \setminus D_a.$$

对每个 $x \in D$, 定义

$$S(x) := \lim_{n\to+\infty} S_n(x), \quad S_n(x) := \sum_{1\leq k\leq n} f_n(x). \tag{14.1.4}$$

这样得到了函数项级数 $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ 的**和函数 (sum function)** $S(x)$. 此时我们也称函数项级数 $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ **逐点收敛 (pointwisely converges)** 到函数 $S(x)$.

例14.1.2. (1) 求下列函数列数的收敛域:

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}, \quad f_n(x) = (1-x)x^n, \quad f_n(x) = \frac{x^2+2nx}{n}.$$

解: (a) 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $\lim_{n+\infty} f_n(x) = 0$, 所以收敛域是 $\mathbb{R}$ 且极限函数为 $f \equiv 0$.

(b) 因为 $\lim_{n\to+\infty} x^n$ 收敛如果 $|x| < 1$, 所以当 $-1 < x < 1$ 时得到函数列收敛且极限函数为 $f \equiv 0$. 另一方面, $f_n(1) \equiv 0$, 因此收敛域为 $(-1,1]$ 且极限函数为 $f \equiv 0$.

(c) 因为 $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 2x$, 故收敛域为 $\mathbb{R}$ 且极限函数为 $f(x) = 2x$. □

(2) 求下列函数项级数的收敛域 (包括条件收敛域和绝对收敛域):

$$\sum_{n\geq 1} x^n, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{1-x^n}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{1+x^{2n}}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{2^n+x^n}{1+(3x)^n} \ (x \neq -1/3)$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{(x^2+1)\cdots(x^2+n)}, \quad \sum_{n\geq 1} n\left(x+\frac{1}{n}\right)^n, \quad \sum_{n\geq 1} \left(\cos\frac{\pi x}{n}\right)^{n^3}$$

$$\sum_{n\geq 1} \ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^x}\right] \ (x>0), \quad \sum_{n\geq 2} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^x \ (x>0)$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n+a^n} \ (a \geq 0), \quad \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{e^{nx}}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{n3^{2n}}{2^n} x^n(1-x)^n.$$

解: (a) 之前已证明该级数收敛当且仅当 $|x| < 1$, 且和函数为 $x/(1-x)$. 故 $D = D_a = (-1,1)$.

(b) 根据 $|\frac{x^n}{n}| \leq |x|^n$ 可知当 $|x| < 1$ 时级数收敛; 而 $\lim_{n\to+\infty} x^n/n \neq 0$ 当 $|x| > 1$ 时, 所以收敛区域包含 $(-1,1)$. 下面考虑临界点 $x = \pm 1$. 显然当 $x = -1$ 时级数收敛. 因此收敛域为 $[-1,1)$. 即 $D_a = (-1,1)$ 和 $D_c = \{-1\}$.

(c) 首先注意到公共定义域为 $X=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$. 任意 $x\in(-1,1)$ 有

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1-x^n}{1-x^{n+1}}\right||x|=|x|<1.$$

根据比式判别法此时级数绝对收敛. 但对任意 $|x|>1$ 有

$$\lim_{n\to+\infty}|f_n(x)|=\lim_{n\to+\infty}|x^n/(1-x^n)|=1\neq 0$$

故此时级数发散. 因此 $D=D_a=(-1,1)$.

(d) 根据不等式 $|x^n/(1+x^{2n})|\leq|x|^n$ 得到 $(-1,1)\subset D_c$. 根据不等式

$$\left|\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right|=\left|\frac{1}{x^n+\frac{1}{x^n}}\right|\leq\frac{1}{|x|^n},$$

可知 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\subset D_c$. 而当 $x=\pm1$ 时, 由于 $|f_n(x)|=1/2$, 所以此时级数发散. 因此 $D=D_a=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

(e) 当 $x=0$ 时, $f_n(x)=2^n$, 故此时级数发散. 当 $x\neq0$ 时,

$$f_n(x)=\frac{(2/3x)^n+1/3^n}{1+(1/3x)^n},$$

所以当 $|x|>2/3$ 时级数绝对收敛. 而当 $x=\pm2/3$ 时, $\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\neq0$. 故 $D=D_a=(-\infty,-3/2)\cup(2/3,+\infty)$.

(f) 计算得到

$$\frac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)}=\frac{x^2+n+1}{n+1}=1+\frac{x^2}{n+1}=1+\frac{x^2}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

根据 Gauss 判别法得到 $D_a=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. 但是 $f_n(\pm1)=\frac{1}{n+1}$, 所以 $D=D_a$.

(g) 当 $x=0$ 时, $f_n(x)=n/n^n$; 利用根式判别法可知此时级数绝对收敛. 当 $x\neq0$ 时

$$\left|n\left(x+\frac{1}{n}\right)^n\right|=n|x|^n\left|1+\frac{1}{nx}\right|^n\sim n|x|^ne^{1/x}.$$

根据根式判别法可知当 $0<|x|<1$ 时级数绝对收敛, 而利用收敛级数的必要条件可知当 $|x|\geq1$ 时级数发散. 故 $D=D_a=(-1,1)$.

(h) 计算得到

$$\sqrt[n]{|f_n(x)|}=\left[1-\left(1-\cos\frac{\pi x}{n}\right)\right]^{n^2}=\exp\left\{n^2\ln\left[1-\left(1-\cos\frac{\pi x}{n}\right)\right]\right\}$$

$$\sim\exp\left[-n^2\left(1-\cos\frac{\pi x}{n}\right)\right]\sim\exp\left(-n^2\cdot2\sin^2\frac{\pi x}{2n}\right)\sim e^{-\pi^2x^2/2},\quad n\to+\infty.$$

因此 $D=D_a=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

(i) 根据 Taylor 公式得到

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x} + O\left(\frac{1}{2n^{2x}}\right), \quad n \to +\infty.$$

因为级数 $\sum_{n\geq 1}(-1)^n/n^x$ 当 $x > 0$ 时条件收敛, 而级数 $\sum_{n\geq 1} 1/2n^{2x}$ 当 $2x > 1$ 时绝对收敛当 $2x \leq 1$ 时发散. 故 $D = D_a = (1/2, +\infty)$.

(j) 因为函数 $\ln t/t$, $t > 0$, 当 $t > e$ 时是单调递减, 所以根据积分判别法考虑下列反常积分

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\ln t}{t}\right)^x dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{s}{e^s}\right)^x e^s ds = \int_0^{\infty} \frac{s^x}{e^{s(x-1)}} ds$$

的敛散性. 显然只当 $x > 1$ 时反常积分收敛. 故 $D = D_a = (1, +\infty)$.

(k) 当 $0 \leq a \leq 1$ 时计算得到

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n+a^n}} = |x| \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+a^n}} = |x|,$$

所以当 $-1 < x < 1$ 时级数绝对收敛. 当 $|x| > 1$ 时 $\lim_{n\to+\infty} |f_n(x)| \neq 0$, 故此时级数发散. 当 $x = 1$ 时, 由于

$$\frac{1}{n+a^n} \geq \frac{1}{n+1},$$

此时级数也发散. 显然当 $x = -1$ 时, 级数时条件收敛. 故

$$0 \leq a \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad D_a(-1, 1), \quad D_c = \{-1\}.$$

下面假设 $a > 1$. 此时

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n+a^n} = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{x}{a}\right)^n \frac{1}{1+n/a^n}.$$

当 $|x| < a$ 时级数绝对收敛, 而当 $|x| > a$ 时级数发散. 当 $x = \pm a$ 时, $|f_n(x)| \to 1$, 故此时级数发散. 因此

$$a > 1 \quad \Longrightarrow \quad D = D_a = (-a, a).$$

(l) 当 $x > 0$ 时由于 $|\sin(nx)/e^{nx}| \leq 1/e^{nx}$, 故此时级数绝对收敛. 当 $x = 0$ 时显然绝对收敛. 当 $x < 0$ 时我们证明此时级数发散. 若 $x = -k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, 则此时 $f_n(x) = 0$; 若 $x \neq -k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, 则 $|f_n(x)| \to +\infty$ 如果 $k \notin \mathbb{Q}$, 和 $|f_n(x)| \to 0$ 如果 $k \in \mathbb{Q}$. 因此 $D = D_a = [0, +\infty)$.

(m) 计算得到

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 2\sin x = 2\sin x.$$

故当 $|\sin x| < 1/2$ 时级数绝对收敛, 而当 $|\sin x| > 1/2$ 时级数发散. 当 $|\sin x| = 1/2$ 时级数绝对收敛. 因此 $D = D_a = \{x \in \mathbb{R} | -1 \le 2\sin x \le 1\}$.

(n) 当 $x = 0$ 或 1 时级数绝对收敛. 如果 $x \ne 0, 1$, 因为

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{9}{2} \cdot x(1-x) = x(1-x),$$

所以当 $|x(1-x)| = 2/9$ 时级数绝对收敛, 而当 $|x(1-x)| > 2/9$ 时发散. 如果 $|x(1-x) = 2/9$ 则级数变为 $\sum_{n\ge1}(-1)^n n$, 显然发散. 故

$$D = D_a = \left(-\frac{\sqrt{17}-4}{6}, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{17}+3}{6}\right).$$

§14.1.2 函数列和函数项级数的基本问题与一致收敛

在**定理6.3.9** 的证明中, 我们验证了"求和与求极限可以相交换", 当然是在某些假设条件下; 在**例6.3.13** 中我们还没有验证"求和与求积分是否可以相交换"; 在**定理6.4.9** 的证明中, 我们还没有验证"求和与求导数是否可以相交换".

这三个"相交换"问题可以系统地归结如下.

(1) 假设 $\{f_n(x)\}_{n\ge1}$ 是一函数列, D 为其收敛域, 并假设极限函数为 $f(x)$. 不妨假设 D 包含闭区间 $[a, b]$.

(1.1) $f_n(x) \in C([a, b])$??? $\Longrightarrow$??? $f(x) \in C([a, b])$, 即,

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

(1.2) $f_n(x) \in R([a, b])$??? $\Longrightarrow$??? $f(x) \in R([a, b])$ 且

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx.$$

(1.3) $f_n(x) \in D([a, b])$??? $\Longrightarrow$??? $f(x) \in D([a, b])$ 且

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{d}{dx} \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

(2) 假设 $\sum_{n\ge1} f_n(x)$ 是一函数项级数, D 为其收敛域, 并假设和函数为 $S(x)$. 不妨假设 D 包含闭区间 $[a, b]$.

(2.1) $f_n(x) \in C([a, b])$??? $\Longrightarrow$??? $S(x) \in C([a, b])$, 即,

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n\ge1} f_n(x) = \sum_{n\ge1} \lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

(2.2) $f_n(x) \in R([a, b])$??? $\Longrightarrow$??? $S(x) \in R([a, b])$ 且

$$\sum_{n\ge1} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n\ge1} f_n(x)dx.$$

(2.3) $f_n(x) \in D([a,b])$??? $\Longrightarrow$??? $S(x) \in D([a,b])$ 且

$$\sum_{n\geq 1} \frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n\geq 1} f_n(x).$$

下面例子告诉我们一般情况下上述“相交换”不成立.

例14.1.3. (1) 考虑 $f_n(x) = x^n, 0 \leq x \leq 1$. 则

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

此时

$$\lim_{x\to 1}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to 1} f_n(x).$$

(2) 考虑函数 $f_n(x) = nx(1-x^2)^n, 0 \leq x \leq 1$. 则

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0, \quad x \in [0,1].$$

此时

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2}\int_0^1 (1-x^2)^n dx^2 = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx.$$

(3) 考虑 $f_n(x) = x^n, 0 \leq x \leq 1$. 则 $f_n(x) \in D([0,1])$ 但 $f(x) \notin D([0,1])$.

例14.1.4. (1) **(求和与求极限不可交换)** 考虑 $f_n(x) = x^{2(n+1)} - x^{2n}, -1 \leq x \leq 1$. 则

$$S_n(x) = \sum_{1\leq k\leq n} f_k(x) = x^{2(n+1)} - x^2$$

和

$$S(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 1, \\ 0, & x = -1, \\ -x^2, & x \in (-1,1). \end{cases}$$

此时

$$\lim_{x\to 1}\sum_{n\geq 1} f_n(x) = -1 \neq 0 = \sum_{n\geq 1}\lim_{x\to 1} f_n(x).$$

(2) **(求和与求积分不可交换)** 考虑函数

$$f_n(x) = nx(1-x^2)^n - (n-1)x(1-x^2)^{n-1}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

则

$$S_n(x) = \sum_{1\leq k\leq n} f_k(x) = nx(1-x^2)^n, \quad S(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = 0, \quad x \in [0,1].$$

此时

$$\sum_{n\geq 1}\int_0^1 f_n(x)dx=\frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1}{2}\neq 0=\int_0^1\sum_{n\geq 1}f_n(x)dx.$$

(3) **(求和与求导数不可交换)** 考虑 $f_n=x^n-x^{n-1}$, $x\in[0,1]$. 则

$$\sum_{n\geq 1}f_n(x)=0,\quad x\in[0,1]\quad\Longrightarrow\quad\left(\sum_{n\geq 1}f_n(x)\right)'=0,\quad x\in[0,1].$$

但是

$$\sum_{n\geq 1}f_n'(x)=1+\sum_{n\geq 2}\left[nx^{n-1}-(n-1)x^{n-2}\right]=\begin{cases}0, & x\in[0,1),\\ +\infty, & x=1.\end{cases}$$

Cauchy 在其专著《Cours d'analyse》(pp 131-132) 断言本小节一开始讲的三个"相交换"问题成立只要$f_n(x)$ 都连续且级数收敛. 然而上面的例子就反驳了colorredCauchy 的论断. 为使上述三个"相交换"可以实现, 下面引入一致收敛的概念. 这个概念早在1842 年就已经被Weierstrass 所知道了[1].

定义14.1.5. (1) 假设函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 和函数 $f(x)$ 都是定义在 $D\subset\mathbb{R}$ 上. 称函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 在 D 上**一致收敛(uniformly converges)** 到 $f(x)$, 如果 $\forall\,\epsilon>0\,\exists\,N=N(\epsilon)\in\mathbb{N}\,\forall\,n>N\,\forall\,x\in D$, 有

$$|f_n(x)-f(x)|<\epsilon.$$

此时记为

$$f_n(x)\rightrightarrows_D f(x),\quad n\to+\infty\quad 或\quad f_n(x)\rightrightarrows f(x).$$

(2) 假设函数项级数 $\sum_{n\geq 1}f_n(x)$ 和函数 $S(x)$ 都是定义在 $D\subset\mathbb{R}$ 上. 称函数项级数 $\sum_{n\geq 1}f_n(x)$ 在 D 上**一致收敛(uniformly converges)** 到 $S(x)$, 如果部分和函数列 $\{S_n(x)\}_{n\geq 1}$ 在 D 上一致收敛到 $S(x)$. 此时记为

$$\sum_{n\geq 1}f_n(x)\rightrightarrows_D S(x),\quad n\to+\infty\quad 或\quad \sum_{n\geq 1}f_n(x)\rightrightarrows S(x).$$

注14.1.6. (1) $f_n(x)\not\rightrightarrows f(x)\Longleftrightarrow\exists\,\epsilon_0>0\,\forall\,N\in\mathbb{N}\,\exists\,n>N\,\exists\,x_0\in D$ 满足 $|f_n(x_0)-f(x_0)|\geq\epsilon_0$.

同样, $\sum_{n\geq 1}f_n(x)\not\rightrightarrows S(x)\Longleftrightarrow\exists\,\epsilon_0>0\,\forall\,N\in\mathbb{N}\,\exists\,n>N\,\exists\,x_0\in D$ 满足

$$\left|\sum_{1\leq k\leq n}f_n(x_0)-S(x_0)\right|=|S_n(x_0)-S(x_0)|\geq\epsilon_0.$$

[1]详细历史0参见: Hardy, G. H. *Sir George Stokes and the concept of uniform convergence*, Proc. London Math. Soc., **19**(1918), 148-156.

(2) 显然函数列或函数项级数的一致收敛蕴含了逐点收敛, 但是反之则不一定成立. 比如考察函数列 $f_n(x) = (x^2 + 2nx)/n, n \geq 1, x \in \mathbb{R}$. 则其极限函数为 $f(x) = 2x$. 但是

$$|f_n(-2n) - f(-2n)| = |0 + 4n| = 4n \to +\infty.$$

(3) 假设函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 在 D 上逐点收敛到函数 $f(x)$, 且对任意 $x \in D$ 有

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n, \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0,$$

则 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$. 证明是显然的.

(4) 讲一致收敛必须要事先指明所给的区域 $D \subset \mathbb{R}$. 例如 (2) 中的例子在 $D = \mathbb{R}$ 上不是一致收敛, 但是根据 (3) 其在任意给定的有界区间上是一致收敛的.

上述注 (4) 给出了如下概念: 称函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 在 D 上是**内闭一致收敛**到 $f(x)$, 如果对任意给定的闭区间 $[a,b] \subset D$, 函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 在 $[a,b]$ 上是一致收敛到 $f(x)$.

例14.1.7. (1) 考察下列函数列在指定区间上的一致收敛性:

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad f_n(x) = x^n, \quad x \in [0,1); \quad f_n(x) = n^2xe^{-n^2x^2}, \quad x > 0.$$

解: (a) 极限函数为 $f(x) \equiv 0$, 故

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|x|}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n}.$$

因此函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 一致收敛到 $f(x) = 0$.

(b) 极限函数为 $f(x) \equiv 0, x \in [0,1)$, 故

$$|f_n(x) - f(x)| = |x|^n.$$

若取 $x_n = \frac{n-1}{n} \to 1$ 则得到 $|f_n(x_n) - f(x_n)| = (1-1/n)^n \to 1/e \neq 0$. 因此不是一致收敛的.

然而函数列是内闭一致收敛的, 这是因为对任意 $[a,b] \to [0,1)$ 必有

$$|f_n(x) - f(x)| = |x|^n \leq b^n \to 0.$$

(c) 极限函数为 $f(x) = 0, x > 0$, 故

$$|f_n(x) - f(x)| = n^2xe^{-n^2x^2}.$$

若取 $x_n = 1/\sqrt{2}n \to 0$ 则得到 $|f_n(x_n) - f(x_n)| = ne^{-1/2}/\sqrt{2} \to +\infty$. 因此不是一致收敛的.

然而函数列是内闭一致收敛的, 这是因为对任意 $[a,b] \to (0,+\infty)$ 必有

$$|f_n(x) - f(x)| = n^2 x e^{-n^2x^2} \le n^2 a e^{-n^2a^2} \to 0.$$

(2) 考察下列函数项级数在指定区间上的一致收敛性:

$$\sum_{n\ge1} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}} \quad x \ge 0, \quad \sum_{n\ge1} (-1)^n \frac{n+x^2}{n^2} \quad |x| \le a.$$

解: (a) 对任意给定$x \ge 0$, 根据**定理6.3.1** 级数是收敛的. 利用交错级数余项估计得到

$$\left|\sum_{k\ge n+1} \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k+\sqrt{x}}}\right| \le \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \to 0, \quad n \to +\infty.$$

因此函数项级数一致收敛.

(b) 对任意给定$x \ge 0$, 根据**定理6.3.1** 级数是收敛的. 利用交错级数余项估计得到

$$\left|\sum_{k\ge n+1} (-1)^k \frac{k+x^2}{k^2}\right| \le \frac{n+1+x^2}{(n+1)^2} \le \frac{n+1+a^2}{(n+1)^2} \to 0, \quad n \to \infty.$$

因此函数项级数一致收敛. □

§14.1.3 一致收敛的判别法

最简单也是最主要的判别法是

定理14.1.8. (Cauchy 判别法) (1) $f_n(x) \rightrightarrows_D f(x) \Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0\, \exists\, N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ $\forall\, n > N\, \forall\, p \in \mathbb{N}\, \forall\, x \in D$ 有

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \epsilon.$$

(2) $\sum_{n\ge1} f_n(x) \rightrightarrows_D S(x) \Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0\, \exists\, N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}\, \forall\, n > N\, \forall\, p \in \mathbb{N}$ $\forall\, x \in D$ 有

$$\left|\sum_{n+1\le k\le n+p} f_n(x)\right| < \epsilon.$$

证: (1) $\Longrightarrow$: $\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}\, \forall\, n > N\, \forall\, x \in D$ 有 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon/2$. 因此

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \le |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

$\Longleftarrow$: Fix $x \in D$. 则数列 $\{f_n(x)\}_{n\ge1}$ 收敛到某个数. 这样就得到函数 $f(x)$ 使得函数列 $\{f_n(x)\}_{n\ge1}$ 逐点收敛到 $f(x)$. 令 $p \to +\infty$ 得到 $|f_n(x) - f(x)| \le \epsilon$. 即 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$.

(2) 这是因为 $\sum_{n+1\le k\le n+p} f_k(x) = S_{n+p}(x) - S_n(x)$. □

推论14.1.9. (1) 函数项级数 $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ 在 D 上一致收敛 $\Longrightarrow \{f_n(x)\}_{n\geq 1} \rightrightarrows_D 0$.

(2) $f_n(x) \rightrightarrows_D f(x) \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty}(\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|)=0$.

(3) 函数项级数 $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ 一致收敛 $\Longleftrightarrow$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_D |S_n(x)-S(x)|\right)=0.$$

(4) 假设 $f_n(x)\in C([a,b])$ 且函数项级数 $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ 在 $D=(a,b)$ 内一致收敛. 则数项级数 $\sum_{n\geq 1} f_n(a)$ 和 $\sum_{n\geq 1} f_n(b)$ 收敛, 且函数项级数 $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

(5) $f_n(x) \rightrightarrows_D f(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}|f_n(x_n)-f(x_n)|=0$ 任意$\{x_n\}_{n\geq 1}\subset D$.

(6) $\sum_{n\geq 1} f_n(x) \rightrightarrows_D S(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}|S_n(x_n)-S(x_n)|=0$ 任意$\{x_n\}_{n\geq 1}\subset D$.

证: (1) 假设函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 在 D 上一致收敛, 则对任意$\epsilon>0$ 存在$N=N(\epsilon)\in\mathbb{N}$ 使得对任意$n>N$ 和任意$p\in\mathbb{N}$ 都有

$$\left|\sum_{n+1\leq k\leq n+p} f_k(x)\right|<\epsilon.$$

特别地取 $p=1$ 得到 $f_n(x)\rightrightarrows_D 0$.

(2) 显然.

(3) 显然.

(4) 因为函数项级数 $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ 在 (a,b) 内一致收敛, 所以对任意$\epsilon>0$ 存在$N\in\mathbb{N}$ 使得对任意$n>N$ 和任意$p\in\mathbb{N}$ 及任意$x\in(a,b)$ 都有

$$\left|\sum_{n+1\leq k\leq n+p} f_k(x)\right|<\frac{\epsilon}{2}.$$

对上述 $\epsilon>0, n>N$ 和 $p\in\mathbb{N}$, 存在$\delta=\delta(\epsilon,n,p)>0$ 只要 $a\leq x<a+\delta$ 有

$$|f_k(x)-f_k(a)|<\frac{\epsilon}{2p}, \quad n+1\leq k\leq n+p.$$

从而得到

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n+1\leq k\leq n+p} f_n(a)\right| &\leq \left|\sum_{n+1\leq k\leq n+p}[f_k(x)-f_k(a)]\right|+\left|\sum_{n+1\leq k\leq n+p} f_k(x)\right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2p}\cdot p \ = \ \epsilon.\end{aligned}$$

(5) 假设 $f_n(x)\rightrightarrows_D f(x)$, 则 $\lim_{n\to+\infty}(\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|)=0$. 故对任意 $\{x_n\}_{n\geq 1}\subset D$ 有

$$|f_n(x_n)-f(x_n)|\leq \sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|\to+\infty, \quad n\to+\infty.$$

反之, 假设 $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$. 存在$\epsilon_0 > 0$ 对任意$N \in \mathbb{N}$ 都存在$n > N$ 和$\xi \in D$ 使得 $|f_n(\xi) - f(\xi)| \geq \epsilon_0$ 成立. 因此存在严格递增数列 $\{n_k\}_{k\geq 1}$ 和存在$\xi_k \in D$ 满足 $|f_{n_k}(\xi_k) - f(\xi_k)| \geq \epsilon_0$. 这就产生了矛盾.

(6) 证明和 (5) 几乎一样. □

例14.1.10. (1) 研究下列函数列的一致收敛性:

$$f_n(x) = (1-x)x^n, \quad x \in [0,1]; \quad f_n(x) = \frac{n+x^2}{nx}, \quad x \in (0,1),$$

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx}, \quad x \in (0,1); \quad f_n(x) = x^n e^{-n^2 x}, \quad x \geq 0;$$

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$f_n(x) = \frac{nx}{n^2 + (n+2)x}, \quad x > 0; \quad f_n(x) = \sin\frac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}, \quad x \in [0, 1-\delta] \text{ 或 } [1-\delta, 1+\delta] \text{ 或 } [1+\delta, +\infty) \ \ (0 < \delta < 1);$$

$$f_n(x) = \frac{x(\ln n)^\alpha}{n^x}, \quad n \geq 2,\ x \geq 0; \quad f_n(x) = nx(1-x^2)^n, \quad x \in [0,1];$$

$$f_1 \in R([a,b]), \quad f_{n+1}(x) := \int_a^x f_n(t)\,dt,\ n \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad f_n(x) \rightrightarrows_{[a,b]} 0$$

解: (a) 极限函数为 $f(x) = 0, x \in [0,1]$. 则

$$\sup_{x\in[0,1]} (|f_n(x) - f(x)|) = \sup_{x\in[0,1]} (1-x)x^n = (1-x)x^n\Big|_{x=\frac{n}{1+n}} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

故 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 一致收敛到 $f(x) = 0$.

(b) 极限函数为 $f(x) = 1/x, x \in (0,1)$. 则

$$\sup_{x\in(0,1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(0,1)} \frac{x}{n} = \frac{1}{n} \to +\infty, \quad n \to +\infty.$$

故 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 一致收敛到 $f(x) = 1/x$.

(c) 极限函数为 $f(x) = 0$. 则

$$\sup_{x\in(0,1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(0,1)} \frac{1}{1+nx} \geq \frac{1}{1+n\cdot(1/n)} = \frac{1}{2}, \quad n \to +\infty.$$

故 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 不一致收敛到 $f(x) = 0$.

(d) 极限函数为 $f(x) = 0$. 则

$$\sup_{x\geq 0} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\geq 0} \frac{x^n}{e^{n^2 x}} = \frac{1}{n^n e^n} \to 0, \quad n \to +\infty,$$

这是因为函数 $F(x) = x^n e^{-n^2 x}$ 的导数为

$$F'(x) = nx^{n-1}e^{-n^2 x} - n^2 x^n e^{-n^2 x} = nx^{n-1}e^{-n^2 x}(1-nx)$$

从未 $F_{\max}=F(1/n)=n^{-n}e^{-n}$. 因此 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 一致收敛到 $f(x)=0$.

(e) 极限函数为 $f(x)=|x|$. 则

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-|x|\right|=\frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|}\leq\frac{1/n^2}{1/n}=\frac{1}{n}\to 0.$$

故 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 一致收敛到 $f(x)=|x|$.

(f) 极限函数为 $f(x)=0$. 若取 $x_n=n$ 得到

$$|f_n(x_n)-f(x_n)|=\frac{nx_n}{n^2+(n+2)x_n}=\frac{n^2}{2n^2+2n}\to\frac{1}{2},\quad n\to+\infty.$$

故 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 不一致收敛到 $f(x)=0$.

(g) 极限函数为 $f(x)\equiv 0, x\in\mathbb{R}$. 若取 $x_n=n\pi/2$ 得到

$$|f_n(x_n)-f(x_n)|=\left|\sin\frac{\pi}{2}\right|=1.$$

故 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 不一致收敛到 $f(x)=0$.

(h) 极限函数为

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^n}{1+x^n}=\begin{cases}0, & x\in[0,1),\\ \frac{1}{2}, & x=1,\\ 1, & x>1,\end{cases}$$

如果 $D=[0,1-\delta]$ 则

$$\sup_{[0,1-\delta]}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{[0,1-\delta]}\frac{x^n}{1+x^n}\leq(1-\delta)^n\to 0,\quad n\to+\infty.$$

此时 $\{f_n(x)\}_{n\geq 0}\rightrightarrows_{[0,1-\delta]}0$.

如果 $D=[1-\delta,1+\delta]$ 则取 $x_n=\sqrt[n]{2}\in(1,1+\delta)$, 只要 $n>\ln 2/\ln(2+\delta)$, 得到

$$|f_n(x_n)-f(x_n)|=\left|\frac{x_n^n}{1+x_n^n}-1\right|=\frac{1}{1+x_n^n}=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}.$$

此时 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}\not\rightrightarrows_{[1-\delta,1+\delta]}f(x)$.

如果 $D=[1+\delta,+\infty)$, 则得到

$$\sup_{x\in[1+\delta,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\geq 1+\delta}\frac{1}{1+x^n}\leq\frac{1}{1+(1+\delta)^n}\to 0,\quad n\to+\infty.$$

此时 $\{f_n(x)\}_{n\geq 0}\rightrightarrows_{[0,1-\delta]}1$.

(i) 极限函数为 $f(x)\equiv 0, x\geq 0$. 则

$$\sup_{x\geq 0}|f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\geq 0}\frac{x(\ln n)^\alpha}{n^x}=\frac{\frac{1}{\ln n}(\ln n)^\alpha}{n^{\frac{1}{\ln n}}} = \frac{(\ln n)^{\alpha-1}}{n^{\frac{1}{\ln n}}}=\frac{1}{e}(\ln n)^{\alpha-1}.$$

故 $\alpha<1$ 时函数列一致收敛, 而当 $\alpha\geq 1$ 时函数列不一致收敛.

(j) 极限函数为 $f(x)=0$. 则

$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in[0,1]}nx(1-x^2)^n\geq\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\to 1\neq 0,\quad n\to+\infty.$$

故 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 不一致收敛到 $f(x)=0$.

(k) 因为 f_1 在 $[a,b]$ 上可积, 则根据**定理5.3.4** 可知 $|f_1(x)|\leq M$, 对任意 $x\in[a,b]$ 都成立. 计算得到

$$\begin{aligned}|f_2(x)| &\leq \int_a^x|f_1(t)|dt \leq M(x-a),\\ |f_3(x)| &\leq \int_a^x|f_2(t)|dt \leq M\int_a^x(t-a)dt\\ &= \frac{M}{2}(t-a)^2\Big|_a^x = \frac{M}{2}(x-a)^2.\end{aligned}$$

一般地得到

$$|f_n(x)|\leq\frac{M}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}\leq\frac{M(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}\ \to\ 0,\quad n\to+\infty.$$

故函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 一致收敛到 $f(x)=0$.

(2) 研究下列函数项级数的一致收敛性:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{n}}{2^{nx}},\quad x>0;\quad \sum_{n\geq 1}e^{-nx},\quad x>0;\quad \sum_{n\geq 1}\frac{x^3}{(1+x^3)^n},\quad x>0;$$

$$\sum_{n\geq 1}a_n\ \text{收敛}\quad\Longleftrightarrow\quad\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n!}\int_0^x t^ne^{-t}dt\ \text{在}\ [0,+\infty)\ \text{上一致收敛},$$

解: (a) 因为若取 $x_n=1/n$,

$$|f_n(x_n)|=\sqrt{n}2^{-n\frac{1}{n}}=\frac{\sqrt{n}}{2}\geq\frac{1}{2},$$

所以根据**推论14.1.9** 可知 $\sum_{n\geq 1}f_n(x)\not\rightrightarrows 0$.

(b) 因为 $f_n(1/n)=1/e$, 所以通项不是一致收敛到 0. 故级数 $\sum_{n\geq 1}f_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛的.

(c) 取 $x_n=1/\sqrt[3]{n}$ 得到

$$\sum_{1\leq k\leq N}f_k(x_k)=\sum_{1\leq k\leq N}\frac{\frac{1}{n}}{(1+\frac{1}{n})^k}\quad\Longrightarrow\quad\sum_{n+1\leq k\leq 2n}f_k(x_k)\geq\frac{1}{n}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{2n}}\geq\frac{1}{e^2}.$$

所以级数 $\sum_{n\geq 1}f_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛的.

(d) 令

$$f_n(x):=\frac{a_n}{n!}\int_0^x t^ne^{-t}dt.$$

则得到

$$f_1(x)=\frac{a_1}{1!}\int_0^x te^{-t}dt \ = \ \frac{a_1}{1!}\left[-\int_0^x t de^{-t}\right] \ = \ a_1\left[-xe^{-x}+\int_0^x e^{-t}dt\right]$$
$$= \ a_1\left[-xe^{-x}+1-e^{-x}\right] \ = \ a_1\left[1-(1+x)e^{-x}\right].$$

一般地可得到

$$f_n(x)=a_n\left[1-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}\right)e^{-x}\right]=: a_nb_n(x).$$

因为 $b_n(x)$ 是一致有界, 根据 Abel 判别法, **定理14.1.12**, 级数$\sum_{n\ge1}a_n$ 收敛推出 $\sum_{n\ge1}f_n(x)=\sum_{n\ge1}a_nb_n(x)$ 一致收敛. 反之, 函数项级数 $\sum_{n\ge1}f_n(x)$ 一致收敛意味着对任意$\epsilon>0$ 存在$N\in\mathbb{N}$ 使得对任意$n>N$ 任意$p\in\mathbb{N}$ 及任意$x>0$ 有

$$\left|\sum_{n+1\le k\le n+p}u_n(x)\right|<\epsilon.$$

让 $x\to+\infty$ 得到 $f_n(x)\to a_n$ 从而

$$\left|\sum_{n+1\le k\le n+p}a_n\right|\le\epsilon \quad\Longrightarrow\quad \sum_{n\ge1}a_n\text{ 收敛.}\ \square$$

下面介绍三种实用的一致收敛判别法, Weierstrass 判别法、Abel 判别法和 Dirichlet 判别法.

定理14.1.11. (Weierstrass 判别法) *假设 $\sum_{n\ge1}f_n(x)$ 是以函数项级数, D 是其收敛域. 如果存在收敛的正项级数 $\sum_{n\ge1}M_n$ 满足*

$$|f_n(x)|\le M_n,\quad n\ge1,\quad x\in D, \tag{14.1.5}$$

则函数项级数 $\sum_{n\ge1}f_n(x)$ 在 D 上是一致收敛的.

证: 对任意$\epsilon>0$ 存在$N\in\mathbb{N}$ 使得对任意$n>N$ 和任意$p\in\mathbb{N}$ 都有

$$\left|\sum_{n+1\le k\le n+p}M_k\right|<\epsilon.$$

故得到

$$\left|\sum_{n+1\le k\le n+p}f_n(x)\right|\le\sum_{n+1\le k\le n+p}|f_n(x)|\le\sum_{n+1\le k\le n+p}M_k<\epsilon.\ \square$$

显然 (14.1.5) 中 n 可以取充分大的数, 这并不影响结论本身. 在假设条件 (14.1.5) 下, 上述证明不仅表明函数项级数 $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ 一致收敛, 而且也证明了函数项级数 $\sum_{n\geq 1} |f_n(x)|$ 也一致收敛. 因此我们可以引入函数项级数绝对收敛的概念, 为了进行比较, 我们把函数项级数 $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ 的逐点收敛和一致收敛也放在一起:

$$\begin{aligned}
\textbf{逐点收敛} &\iff \sum_{n\geq 1} f_n(x)\ \text{对每个}\ x\in D\ \text{都收敛},\\
\textbf{一致收敛} &\iff \text{部分和函数列}\ \{S_n(x)\}_{n\geq 1}\ \text{一致收敛},\\
\textbf{绝对收敛} &\iff \sum_{n\geq 1} |f_n(x)|\ \text{对每个}\ x\in D\ \text{都收敛},\\
\textbf{绝对一致收敛} &\iff \sum_{n\geq 1} |f_n(x)|\ \text{一致收敛}.
\end{aligned}$$

运用上述术语, **定理14.1.11** 的结论可加强为函数项级数 $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ 在 D 上是绝对一致收敛的.

定理14.1.12. (Abel 和 Dirichlet 一致收敛判别法) 给定函数项级数 $\sum_{n\geq 1} a_n(x)$ 和 $\sum_{n\geq 1} b_n(x)$, $x \in D$.

(1) **(Abel)** 假设函数列 $\{a_n(x)\}$ 在 D 上是**一致有界**(即存在与 n, x 均无关的正常数 M 使得 $|a_n(x)| \leq M$ 对任意 $n \geq 1$ 和任意 $x \in D$ 都成立) 和**逐点单调的**(即对每个 $x \in D$ 数列 $\{a_n(x)\}_{n\geq 1}$ 都是单调的), 而函数项级数 $\sum_{n\geq 1} b_n(x)$ 在 D 上是一致收敛的,

(2) **(Dirichlet)** 假设函数列 $\{a_n(x)\}_{n\geq 1}$ 在 D 上是一致收敛到 0 和逐点单调的, 而函数项级数 $\sum_{n\geq 1} b_n(x)$ 的部分和函数列在 D 上是一致有界的,

则函数项级数 $\sum_{n\geq 1} a_n(x)b_n(x)$ 在 D 上是一致收敛的.

证: 如果收敛域 D 是单点集, 上述定理就是**定理6.3.4**. 对一般的点集 D 证明方法也是一样的.

(1) 函数项级数 $\sum_{n\geq 1} b_n(x)$ 一致收敛推出对任意$\epsilon > 0$ 存在$N \in \mathbb{N}$ 使得对任意$n > N$ 任意$p \in \mathbb{N}$ 及任意$x \in D$ 都有

$$\left| \sum_{n+1\leq k\leq n+p} u_k(x) \right| < \epsilon.$$

根据 Abel 引理, **引理6.3.3**, 得到

$$\left| \sum_{n+1\leq k\leq n+p} a_n(x)b_n(x) \right| \leq \epsilon \left(|a_{n+1}(x)| + 2|a_{n+p}(x)| \right) \leq 3M\epsilon.$$

(2) 函数列 $\{a_n(x)\}_{n\geq 1} \rightrightarrows 0$ 意味着对任意$\epsilon > 0$ 存在$N \in \mathbb{N}$ 使得对任意$n > N$ 和任意$x \in D$ 都有 $|a_n(x)| < \epsilon$. 因为部分和 $B_n(x) = \sum_{1\leq k\leq n} b_k(x)$ 一

致有界, 所以 $|B_n(x)| \le M$ 对任意 $n \ge 1$ 和任意 $x \in D$ 都成立, 这里 M 是和 n, x 均无关的正常数. 根据 Abel 引理, **引理, 6.3.3**, 得到

$$\left|\sum_{n+1\le k\le n+p} a_k(x)b_k(x)\right| \le 2M\left(|a_{k+1}(x)| + 2|a_{n+p}(x)|\right) \le 6M\epsilon. \quad \square$$

例14.1.13. 研究如下函数项级数的一致连续性:

$$\sum_{n\ge1}\frac{\sin(nx)}{n^2}, \quad x\in\mathbb{R}; \quad \sum_{n\ge1}\frac{\cos(nx)}{n^2}, \quad x\in\mathbb{R}; \quad \sum_{n\ge1}\frac{nx}{1+n^5x^2}, \quad x\in\mathbb{R};$$

$$\sum_{n\ge1}x^{\alpha}e^{-nx}, \quad x\in\mathbb{R}; \quad \sum_{n\ge1}\frac{(-1)^n(x+n)^n}{n^{n+\alpha}}, \ \alpha>0, \quad x\in[0,1];$$

$$\frac{1}{1+x}-\sum_{n\ge2}\frac{1}{(x+n-1)(x+n)}, \quad x\in[0,1]; \quad \sum_{n\ge1}\frac{\sqrt{n}}{2^{nx}}, \quad x\in(\delta,+\infty),\ \delta>0;$$

$$\sum_{n\ge1}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right), \quad x\in[-\delta,\delta],\ \delta>0;$$

$$\sum_{n\ge1}t^n(\sin(n\theta))^k, \quad t\in(0,1),\ k\ge0,\ x\in\mathbb{R};$$

$$\sum_{n\ge1}\frac{\sin x\cdot\sin(nx)}{\sqrt{n+x}}, \quad x\in[0,1);$$

$$\sum_{n\ge1}a_n \text{ 收敛} \quad\Longrightarrow\quad \sum_{n\ge1}a_nx^n \text{ 在 } [0,1] \text{ 上一致收敛};$$

$$a_n \text{ 单调趋于 } 0 \quad\Longrightarrow\quad \sum_{n\ge1}a_n\cos(nx) \text{ 和 } \sum_{n\ge1}a_n\sin(nx) \text{ 在 } (0,2\pi) \text{ 内闭一致收敛};$$

解: (a) 因为 $|\sin(nx)/n^2| \le 1/n^2$, 所以是绝对一致收敛.

(b) 因为 $|\cos(nx)/n^2| \le 1/n^2$, 所以是绝对一致收敛.

(c) 利用平均值不等式得到

$$\left|\frac{nx}{1+n^5x^2}\right| = \left|\frac{1}{2n^{3/2}}\cdot\frac{2n^{5/2}x}{1+n^5x^2}\right| \le \frac{1}{2n^{3/2}}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

因此是绝对一致收敛.

(d) 因为函数 $x^{\alpha}e^{-nx}$ 在 $x=\alpha/n$ 处取到最大值, 所以

$$\sum_{n\ge1}f_n(x) \le \sum_{n\ge1}\frac{\alpha^{\alpha}e^{-\alpha}}{n^{\alpha}}, \quad x>0.$$

当 $\alpha>1$ 时, 函数项级数一致收敛. 当 $0<\alpha\le1$ 时,

$$\sum_{n+1\le k\le 2n}f_n(1/n) = \sum_{n+1\le k\le 2n}\frac{1}{n^{\alpha}}e^{-k/n} \ge \sum_{n+1\le k\le 2n}\frac{1}{e^2n^{\alpha}} = n^{1-\alpha}e^{-2} \ge e^{-2}.$$

故此时函数项级数在 $(0,+\infty)$ 上不是一致收敛.

(e) 对原函数项级数重新组合得到

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)^n =: \sum_{n\geq 1} b_n(x)a_n(x).$$

因为 $\sum_{n\geq 1} b_n(x)$ 一致收敛, 而函数列 $\{a_n(x)\}$ 逐点单调趋于 e^x 且一致有上界 e, 所以根据 Abel 判别法可知函数项级数 $\sum_{n\geq 1} a_n(x)b_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上是一致收敛的.

(f) 因为

$$\left|\frac{1}{(x+n-1)(x+n)}\right| < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1}-\frac{1}{n},$$

所以函数项级数是一致收敛的.

(g) 对任意 $\delta>0$ 和任意 $n\geq 1$ 有

$$|f_n(x)| = \frac{\sqrt{n}}{2^{nx}} \leq \frac{\sqrt{n}}{2^{n\delta}} =: M_n.$$

因为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{M_{n+1}}{M_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}2^{-\delta} = 2^{-\delta} < 1,$$

所以根据比式判别法可知函数项级数一致收敛.

(h) 因为

$$|f_n(x)| = \left|1-\cos\frac{x}{n}\right| = \left|2\sin^2\frac{x}{2n}\right| \leq 2\left(\frac{x}{2n}\right)^2 \leq \frac{\delta^2}{2n^2},$$

所以函数项级数一致收敛.

(i) 因为部分和 $S_n(x) = \sum_{1\leq m\leq n} t^m(\sin(m\theta))^k$ 满足

$$S_{n+p}(x) - S_n(x)| \leq \sum_{n+1\leq k\leq n+p} t^k.$$

但是级数 $\sum_{n\geq 1} t^n$ 当 $0<t<1$ 时是收敛的, 因此函数项级数一致收敛.

(j) 根据 (l) 中的恒等式得到

$$\left|\sin x\sum_{1\leq k\leq n}\sin(nx)\right| = \left|\cos\frac{x}{2}\right|\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}\right| \leq 2.$$

另一方面函数列 $\{\frac{1}{\sqrt{n+x}}\}_{n\geq 1}$ 是逐点单调的和一致收敛到 0, 故利用 Dirichlet 判别法可知原函数项级数一致收敛.

(k) 因为函数列 $\{x^n\}_{n\geq 1}$ 是逐点单调且一致有界, 根据 Abel 判别法可知原函数项级数一致收敛.

(l) 任取闭区间 $[\delta, 2\pi-\delta]$, 这里 $0<\delta<\pi$, 则得到

$$\left|\sum_{1\leq k\leq n}\cos(kx)\right| = \frac{|\sin((n+1/2)x)-\sin(x/2)|}{2|\sin(x/2)|} \leq \frac{1}{\sin(\delta/2)}$$

和

$$\left|\sum_{1\le k\le n}\sin(kx)\right| = \frac{|\cos((n+1/2)x)-\cos(x/2)|}{2|\sin(x/2)|} \le \frac{1}{\sin(\delta/2)}$$

根据 Dirichlet 判别法可知这两个函数项级数都是内闭一致收敛. □

§14.2 一致收敛级数的性质

本小节的主要目的是回答 §14.1.2 中提到的“三个相交换”的可行性.

§14.2.1 连续性

这个性质是说, 一致收敛的连续函数列 (或者, 连续函数项级数) 的极限函数 (或者, 和函数) 也是连续的.

定理14.2.1. (连续性) *假设函数列 $\{f_n(x)\}_{n\ge1}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $f(x)$, 且 $f_n(x)\in C([a,b]) \Longrightarrow f(x)\in C([a,b])$.*

证: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ 推出对任意$\epsilon>0$ 存在$N=N(\epsilon)\in\mathbb{N}$ 使得对任意$x\in[a,b]$ 有 $|f_n(x)-f(x)|\le\epsilon/3$. 固定 $x_0\in[a,b]$, 得到 $|f_n(x_0)-f(x_0)|<\epsilon/3$. 根据函数 $f_n(x)$ 的连续性可知存在$\delta=\delta(\epsilon)>0$ 使得对任意$x\in[a,b]$ 只要满足$|x-x_0|<\delta$ 有 $|f_n(x)-f_n(x_0)|<\epsilon/3$. 最后得到

$$|f(x)-f(x_0)| \le |f(x)-_n(x)| + |f_n(x)-f_n(x_0)| + |f_n(x_0)-f(x_0)| < \epsilon.$$

即 $f(x)$ 在 x_0 处连续. □

注14.2.2. (1) **定理14.2.1** 的函数项级数版本如下: *假设函数项级数 $\sum_{n\ge1}f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $S(x)$ 且 $f_n(x)\in C([a,b])$, 则 $S(x)\in C([a,b])$.*

(2) 根据**定理14.2.1** 得到: *如果 $f_n(x)\rightrightarrows_{[a,b]} f(x)$, $f_n(x)\in C([a,b])$, 则对任意$x_0\in[a,b]$ 有*

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to+\infty} f_n(x). \tag{14.2.1}$$

根据 (1) 得到: *如果 $\sum_{n\ge}f_n(x) \rightrightarrows_{[a,b]} S(x)$ 且$f_n(x)\in C([a,b])$, 则对任意$x_0\in[a,b]$ 有*

$$\sum_{n\ge1}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0}\sum_{n\ge1} f_n(x). \tag{14.2.2}$$

(3) *如果函数列 $f_n(x)\to_{[a,b]} f(x)$ 逐点收敛, $f_n(x)\in C([a,b])$, 但是 $f(x)\notin C([a,b]) \Longrightarrow f_n(x) \not\rightrightarrows_{[a,b]} f(x)$.* 对函数项级数也要类似的结论: *如果函数项级数 $\sum_{n\ge1}f_n(x)\to S(x)$ 逐点收敛, $f_n(x)\in C([a,b])$, 但是 $S(x)\notin C([a,b]) \Longrightarrow \sum_{n\ge1}f_n(x)\not\rightrightarrows S(x)$.*

(4) 显然把**定理14.2.1** 中的闭区间 $[a,b]$ 换成其收敛域 D 结论也成立.

(5) 一致收敛不是极限函数或和函数连续的必要条件: 存在$f_n(x) \in C(D)$, $f_n(x) \to_D f(x)$, $f(x) \in C(D)$, 但是 $f_n(x) \not\rightrightarrows_D f(x)$. 比如

$$f_n(x) = \frac{2n\sqrt{x}}{1+n^2x}, \quad f(x) \equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

但 $f_n(1/n^2) = 1 \nrightarrow 0$.

(6) 函数列或函数项级数每项连续也不是极限函数或和函数连续的必要条件: 存在$f_n(x) \rightrightarrows_D f(x)$, $f(x) \in C(D)$, 但是 $f_n(x) \notin C(D)$. 比如

$$f_n(x) = \frac{1}{n}D(x), \quad f(x) \equiv 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

这里 $D(x)$ 是 Dirichlet 函数.

如果连续函数列逐点收敛到连续的极限函数, 那么只要函数列是逐点单调的, 则必是一致收敛的. 这就是著名的Dini 定理[2].

定理14.2.3. (Dini 定理, 1878) (1) 假设函数列 $\{f_n(x)\}_{n\ge1}$ 在 $[a,b]$ 上逐点收敛到 $f(x)$, $f_n(x), f(x) \in C([a,b])$, 且 $\{f_n(x)\}_{n\ge1}$ 在 $[a,b]$ 上是逐点单调的 $\Longrightarrow$ $f_n(x) \rightrightarrows_{[a,b]} f(x)$.

(2) 假设函数项级数 $\sum_{n\ge1} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上逐点收敛到 $S(x)$, $f_n(x), S(x) \in C([a,b])$, $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负 $\Longrightarrow \sum_{n\ge1} f_n(x) \rightrightarrows_{[a,b]} S(x)$.

证: (1) 不妨假设 $\{f_n(x)\}_{n\ge1}$ 在 $[a,b]$ 上是逐点单调递减的. 令 $g_n(x) := |f_n(x) - f(x)—$, 则对任给 $x \in [a,b]$, $g_n(x)$ 都是单调递减趋于 0. 对任意$\epsilon > 0$ 和任意$x \in [a,b]$ 存在$n_x \in \mathbb{N}$ 满足 $0 \le g_{n_x}(x) < \epsilon$. 根据函数 $g_{n_x}(x)$ 的连续性, 存在区间 $I_x = (x-\delta_x, x+\delta_x) \subset [a,b]$ 使得 $0 \le g_{n_x}(y) < \epsilon$, 对任意$y \in I_x$ 都成立. 因为闭区间 $[a,b]$ 是紧的, 所以存在 $x_1, \cdots, x_m \in [a,b]$ 使得

$$[a,b] = \bigcup_{1\le i\le m} I_{x_i}.$$

记 $N = \max_{1\le i\le m} n_{x_i}$. 则对任意$n > N$ 和任意$x \in [a,b]$, 不妨假设 $x \in I_{x_i}$, 我们得到

$$|f_n(x) - f(x)| = g_n(x) \le g_{n_{x_i}}(x) < \epsilon.$$

故 $f_n(x) \rightrightarrows_{[a,b]} g(x)$.

(2) 记 $S_n(x) := \sum_{1\le k\le n} f_n(x)$. 则 $S_n(x) \in C([a,b])$ 且函数列 $\{S_n(x)\}_{n\ge1}$ 在 $[a,b]$ 上逐点收敛到 $S(x) \in C([a,b])$. 因为

$$S_{n+1}(x) - S_n(x) = f_{n+1}(x) \ge 0,$$

所以根据 (1) 可知 $S_n(x) \rightrightarrows_{[a,b]} S(x)$. □

[2] Ulisse Dini, 1845 年11 月14 日- 1918 年10 月28 日, 今意大利比萨城人, 意大利数学家和政治家. 他证明了Fourier 级数收敛的Dini 定理、隐函数定理在意大利被称为Dini 定理等.

例14.2.4. (1) $\sum_{n\ge 2}\frac{\sin(nx)}{\ln n}$ 和 $\sum_{n\ge 2}\frac{\cos(nx)}{\ln n}$ 在 $(0,2\pi)$ 上连续.

(2) 研究下列函数项级数的连续性:

$$\sum_{n\ge 1}\frac{x+(-1)^n n}{n^2+x^2},\quad |x|\le a;\quad \sum_{n\ge 1}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n,\quad |x|<1.$$

解: (a) 因为

$$f_n(x)=\frac{x}{n^2+x^2}+\frac{(-1)^n n}{n^2+x^2}=\frac{n^2}{n^2+x^2}\cdot\frac{x}{n^2}+\frac{n^2}{n^2+x^2}\cdot\frac{(-1)^n}{n},$$

根据 Abel 判别法可知函数项级数一致收敛从而和函数是连续的.

(b) 只要证明函数项级数在 $(-1,1)$ 内闭一致收敛. 如果 $|x|\le r<1$, 则得到

$$\left|x+\frac{1}{n}\right|^n\le\left(r+\frac{1}{n}\right)^n,$$

所以在 $[-r,r]$ 上一致收敛, 从而在 $(-1,1)$ 内闭一致收敛.

(3) 函数列 $\{x^n\}_{n\ge 1}$ 在 $(-1,1]$ 上不一致收敛. 这是因为极限函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in(-1,1),\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

不连续.

(4) 求下列极限:

$$\lim_{x\to 0+}\sum_{n\ge 1}\frac{1}{2^n n^x},\quad \lim_{x\to 1}\sum_{n\ge 1}\frac{x^n}{2^n}\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

解: (a) 因为

$$\frac{1}{2^n n^x}\le\frac{1}{2^n},\quad x\in[0,1],$$

所以函数项级数在 $[0,1]$ 上一致收敛且和函数也是收敛的. 故

$$\lim_{x\to 0+}\sum_{n\ge 1}\frac{1}{2^n n^x}=\sum_{n\ge 1}\frac{1}{2^n}=1.$$

(b) 因为

$$\left|\frac{x^n}{2^n}\sin\frac{n\pi x}{2}\right|\le\left(\frac{3}{4}\right)^n,\quad x\in[0,3/2],$$

所以函数项级数一致收敛且和函数也是收敛的. 故

$$\lim_{x\to 1}\sum_{n\ge 1}\frac{x^n}{2^n}\sin\frac{n\pi x}{2}=\sum_{n\ge 1}\frac{1}{2^n}\sin\frac{n\pi}{2}=\sum_{n\ge 1}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}}=-2\sum_{n\ge 1}\left(\frac{-1}{4}\right)^n=\frac{2}{5}.$$

§14.2.2 可积性

这个性质是说, 一致收敛的连续函数列 (或者, 连续函数项级数) 的极限函数 (或者, 和函数) 是可积的, 且求极限 (或者, 求和) 和求积分可相交换. 显然可积性已经蕴含在**定理14.2.1** 中, 这是因为闭区间上连续函数必是可积函数.

定理14.2.5. (可积性) *假设函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $f(x)$, 且 $f_n(x)\in C([a,b]) \Longrightarrow f\in R([a,b])$ 和*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx. \tag{14.2.3}$$

进一步得到函数列

$$\left\{\int_a^x f_n(t)dt\right\}_{n\geq 1}$$

在 $[a,b]$ 上一致收敛到函数

$$\int_a^x f(t)dt.$$

证: 我们只要证明 (14.2.3) 即可. 计算得到

$$\left|\int_a^b [f_n(x)-f(x)]dx\right|\leq \int_a^b |f_n(x)-f(x)|dx\leq (b-a)\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|.$$

一致连续性推出 (14.2.3). 把上限 b 换成 x 就得到第二个结论. □

注14.2.6. (1) **定理14.2.5** 的函数项级数版本如下: *假设函数项级数 $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $S(x)$, 且 $f_n(x)\in C([a,b]) \Longrightarrow S(x)\in R([a,b])$ 和*

$$\sum_{n\geq 1}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b \sum_{n\geq 1} f_n(x)dx. \tag{14.2.4}$$

进一步得到函数项级数

$$\sum_{n\geq 1}\int_a^x f_n(t)dt$$

在 $[a,b]$ 上一致收敛到函数

$$\int_a^x \sum_{n\geq 1} f_n(t)dt=\int_a^x S(t)dt.$$

(2) 从**定理14.2.5** 的证明过程中可以得到: *假设函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $f(x)$, 且 $f_n(x)\in R([a,b]) \Longrightarrow f\in R([a,b])$ 和 (14.2.3) 成立.*

(3) 同样可把 (1) 中的条件减弱为每项可积: *假设函数项级数 $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $S(x)$, 且 $f_n(x)\in C([a,b]) \Longrightarrow S(x)\in R([a,b])$ 和 (14.2.4) 成立.*

定理14.2.7. (1) 假设函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $f(x)$, 且 $f_n(x) \in R([a,b]) \Longrightarrow f \in R([a,b])$ 和 (14.2.3) 成立.

(2) 假设函数项级数 $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $S(x)$, 且 $f_n(x) \in C([a,b]) \Longrightarrow S(x) \in R([a,b])$ 和 (14.2.4) 成立.

证: 只给出 (1) 的证明. 根据一致收敛性, 对任意$\epsilon > 0$ 存在$N \in \mathbb{N}$ 使得对任意$x \in [a,b]$ 都有 $|f_N(x) - f(x)| < \epsilon$. 因为 $f_N(x) \in R([a,b])$, 所以存在$\delta > 0$ 对$[a,b]$ 的任意分割

$$T : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b,$$

只要 $||T|| < \delta$ 就有

$$\sum_{1\leq i\leq m} \omega_i(f_N, T)\Delta x_i < \epsilon, \quad \omega_i(f_N, T) := \sup_{[x_{i-1},x_i]} f_N - \inf_{[x_{i-1},x_i]} f_N.$$

故

$$\sum_{1\leq i\leq m} \left(\sup_{[x_{i-1},x_i]} |f_N(x') - f_N(x'')| \right) \Delta x_i < \epsilon.$$

从而 $\forall\, x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]$ 有

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x'')| &\leq |f(x') - f_N(x')| + |f_N(x') - f_N(x'')| + |f(x'') - f_N(x'')| \\ &< 2\epsilon + |f_N(x') - f_N(x'')| \end{aligned}$$

和

$$\sum_{1\leq i\leq m} \omega_i(f, T)\Delta x_i \leq \epsilon + 2\epsilon(b-a) = [1 + 2(b-a)]\epsilon.$$

这表明 $f(x) \in R([a,b])$. 令 $g_n(x) := f_n(x) - f(x)$, 得到

$$g_n(x) \rightrightarrows_{[a,b]} 0, \quad g_n(x) \in R([a,b]), \quad \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,b]} |g_n(x)| = 0.$$

从而利用积分不等式得到

$$\left| \int_a^b g_n(x)dx \right| \leq \int_a^b |g_n(x)|dx \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |g_n(x)| \to 0, \quad n \to +\infty.$$

因此

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b g_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \left[\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right] \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx. \quad \square \end{aligned}$$

例14.2.8. (1) 证明

$$\arctan x=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1},\quad |x|<1. \tag{14.2.5}$$

证: 因为

$$\arctan x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x\sum_{n\geq 0}(-1)^n t^{2n}dt=\int_0^x\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}t^{2n-2}dt,$$

所以只要证明函数项级数 $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}x^{2n-2}$ 在 $(-1,1)$ 内闭一致收敛, 即证明在 $[-1+\delta,1-\delta]$ 上一致收敛, $0<\delta<1$. 但是

$$\left|(-1)^{n-1}x^{2n-2}\right|=|x|^{2n-2}\leq(1-\delta)^{2n-2},$$

故利用比较判别法得到一致收敛性. □

(2) 证明

$$\ln(1+x)=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,\quad |x|<1. \tag{14.2.6}$$

证: 因为

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t}=\int_0^x\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}t^{n-1}dt,$$

所以只要证明函数项级数 $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}x^{n-1}$ 在 $(-1,1)$ 内闭一致收敛, 即证明在 $[-1+\delta,1-\delta]$ 上一致收敛, $0<\delta<1$, 显然这是对的.

公式 (14.2.6) 的一个直接推论 (这里要利用 Abel 第三引理, **定理14.3.7**) 是

$$\ln 2=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots.$$

§14.2.3 可导性

这个性质是说, 若把一致收敛性搬到函数列或函数项级数的每项上, 则极限 (或者, 求和) 和求导数可相交换. 具体陈述如下

定理14.2.9. 假设函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 在 $[a,b]$ 上逐点收敛到 $f(x)$, $f_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 且 $f(x)\in C^1([a,b])\Longrightarrow f_n(x)\in C^1([a,b])$ 且

$$\lim_{n\to+\infty}f_n'(x)=\frac{d}{dx}\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=f'(x). \tag{14.2.7}$$

证: 令 $f_n'(x)\rightrightarrows_{[a,b]}g(x)$. 根据**定理14.2.1** 和**定理14.2.5** 知 $g(x)\in C([a,b])$ 且

$$\int_a^x g(t)dt=\int_a^x\lim_{n\to+\infty}f_n'(t)dt=\lim_{n\to+\infty}\int_a^x f_n'(t)dt=f(x)-f(a).$$

因此 $f'(x)$ 存在且 $f'(x)=g(x)\in C([a,b])$. □

注14.2.10. (1) **定理14.2.9** 的函数项级数版本如下: 假设函数项级数 $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上逐点收敛到 $S(x)$, $f_n'(x)\in C^1([a,b]$, $\sum_{n\geq 1} f_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛 $\Longrightarrow S(x)\in C^1([a,b])$ 且

$$\sum_{n\geq 1} f_n'(x) = \frac{d}{dx}\sum_{n\geq 1} f_n(x)) = S'(x). \tag{14.2.8}$$

(2) **定理14.2.9** 中的假设条件推出函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $f(x)$, 这可从**定理14.2.5** 得到.

同理, 在 (1) 中的假设条件下, 得到函数项级数 $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $S(x)$.

例14.2.11. (1) 证明函数 $S(x)=\sum_{n\geq 1}\sin(nx)/n^3$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续可微.

证: 因为函数 $f_n(x)=\sin(nx)/n^3\in C^1(\mathbb{R})$ 且 $f_n'(x)=\cos(nx)/n^2\leq 1/n^2$, 所以根据**定理14.2.9** 可知函数 $S(x)\in C^1(\mathbb{R})$ 且

$$S'(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

(2) 证明

$$\sum_{n\geq 1} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2},\quad |x|<1. \tag{14.2.9}$$

证: 因为

$$\sum_{n\geq 1} nx^n = x\sum_{n\geq 1}(x^n)',$$

故只要证明 $\sum_{n\geq 1} x^n$ 满足**定理14.2.9** 中的条件. 显然函数项级数 $\sum_{n\geq 1} x^n$ 在 $(-1,1)$ 上逐点收敛到 $S(x)=(1-x)^{-1}$, $f_n'(x)=nx^{n-1}\in C^1((-1,1))$, 且 $\sum_{n\geq 1} f_n'(x)$ 在 $(-1,1)$ 内闭一致收敛 (当 $|x|\leq r<1$ 时, $f_{n+1}'(x)/f_n'(x)=\frac{n+1}{n}|x|\leq\frac{n+1}{n}r\to r<1$).

作为本节结束, 我们来研究其它一些例题.

例14.2.12. 研究如下函数列或函数项级数的一致收敛性:

(1) $\sum_{n\geq 1}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $x\in\mathbb{R}$.

解: 和函数为

$$S(x)=x^2\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1-\frac{1}{1+x^2}}=1,\quad x\neq 0,$$

从而

$$S(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

和函数不连续, 所以函数项级数不是一致收敛的. □

(2) $\sum_{n\geq 1} ne^{-nx}$, $x\in(0,+\infty)$ 和 $x\in[\delta,+\infty)$ $(\delta>0)$.

解: 因为 $u_n(1/n)=n/e\to+\infty$, 所以函数项级数在 $(0,+\infty)$ 上不是一致收敛的. 当 $x\ge\delta$ 时,

$$\sum_{n\ge1}ne^{-nx}\le\sum_{n\ge1}\frac{n}{e^{n\delta}}\le\sum_{n\ge1}\frac{n}{\frac{1}{3!}(n\delta)^3}=\frac{6}{\delta^3}\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^2}.$$

故此时函数项级数一致收敛且和函数 $S(x)\le\pi^2/\delta^3$. $\square$

(3) $f_n(x)=(1+\frac{x}{n})^n$, $x\in[0,a]$ ($a>0$) 和 $x\in[0,+\infty)$.

解: 计算得到

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x.$$

由于 $\{f_n(x)\}_{n\ge1}$ 逐点单调递增, 根据**定理14.2.3** 可知函数列在 $[0,a]$ 上一致收敛到 e^x. 然而,

$$|f_n(n)-f(n)|=|2^n-e^n|\to+\infty$$

告诉我们函数列在 $(0,+\infty)$ 不是一致收敛的. $\square$

(4) $f(x)\in C([0,1])$, $f(1)=0$, $g_n(x):=x^nf(x)\Longrightarrow$ 函数列 $g_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上是一致收敛的.

证: 计算得到

$$g(x)=\lim_{n\to+\infty}g_n(x)=\lim_{n\to+\infty}x^nf(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1),\\ f(1)=0, & x=1.\end{cases}$$

故 $g(x)\equiv1$, $x\in[0,1]$. 因为 $\{g_n(x)\}_{n\ge1}$ 逐点单调递减, 所以根据**定理14.2.3** 可知函数列在 $[0,a]$ 上一致收敛到 0. $\square$

(5) $f(x)\in C^\infty(\mathbb{R})$ 且 $f^{(n)}(x)\rightrightarrows_{\mathbb{R}}\varphi(x)\Longrightarrow\varphi(x)=Ce^x$.

证: 因为 $(f^{(n)}(x)')_{n\ge1}\rightrightarrows\varphi(x)$, 所以

$$\varphi'(x)=\lim_{n\to+\infty}f^{(n+1)}(x)=\varphi(x)\quad\Longrightarrow\quad\big(e^{-x}\varphi(x)\big)'=0.$$

即 $e^{-x}\varphi(x)=C$. $\square$

(6) Riemann ζ 函数 $\zeta(x)=\sum_{n\ge1}1/n^x$ 在 $(1,+\infty)$ 内是光滑的.

证: 我们已证 $\zeta(x)$ 当 $x>1$ 时收敛. 对任意$[a,b]\subset(1,+\infty)$ 有

$$\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^x}\le\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^a},\quad a>1,$$

所以 $\sum_{n\ge1}1/n^x$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛且 $\zeta(x)\in C([a,b])$. 根据 $[a,b]$ 的任意性可知 $\zeta(x)\in C((1,+\infty))$. 对上述 $x\in[a,b]\subset(1,+\infty)$ 有

$$\sum_{n\ge1}\left(\frac{1}{n^x}\right)'=\sum_{n\ge1}\frac{-\ln n}{n^x},\quad\frac{\ln n}{n^x}\le\frac{\ln n}{n^a}\le\frac{1}{n^{a-\epsilon}},\quad n\text{ 充分大, 存在 }\epsilon>0.$$

因此函数项级数 $\sum_{n\ge1}(1/n^x)'$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛且 $\zeta'(x)\in C([a,b])$, 从而 $\zeta(x)\in C'((1,+\infty))$. 持续这个步骤得到 $\zeta(x)\in C^\infty((1,+\infty))$ 且

$$\zeta^{(k)}(x)=(-1)^k\sum_{n\ge1}\frac{(\ln n)^k}{n^x}.\ \square$$

例14.2.13. (1) 计算定积分

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} S(x)dx, \quad S(x) := \sum_{n\geq 1} ne^{-nx}.$$

解: 记 $f_n(x) = ne^{-nx}, x \in [\ln 2, \ln 3]$. 则 $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ 在 $[\ln 2, \ln 3]$ 上一致收敛从而得到

$$\begin{aligned}\int_{\ln 2}^{\ln 3} S(x)dx &= \sum_{n\geq 1}\int_{\ln 2}^{\ln 3} ne^{-nx}dx \\ &= \sum_{n\geq 1}\left(-e^{-nx}\right)\Big|_{\ln 2}^{\ln 3} = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right) = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \quad \square\end{aligned}$$

(2) 证明函数项级数

$$\sum_{n\geq 1}\left[nxe^{-nx^2} - (n-1)xe^{-(n-1)x^2}\right]$$

满足

$$\int_a^b \sum_{n\geq 1} f_n(x)dx \neq \sum_{n\geq 1}\int_a^b f_n(x)dx.$$

证: 和函数为 $S(x) \equiv 0, x \in \mathbb{R}$, 从而得到

$$\int_0^1 S(x)dx = 0.$$

但是另一方面,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left[nxe^{-nx^2} - (n-1)xe^{-(n-1)x^2}\right]dx &= \left[-\frac{1}{2}e^{-nx^2} + \frac{1}{2}e^{-(n-1)x^2}\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2}e^{-n} + \frac{1}{2}e^{-(n-1)}\end{aligned}$$

和

$$\sum_{n\geq 1}\int_0^1 f_n(x)dx = \sum_{n\geq 1} -\frac{1}{2}\left(e^{-n} - e^{-(n-1)}\right) = \frac{1}{2} \neq 0. \quad \square$$

§14.2.4 常微分方程基本定理

函数项级数的一个直接应用是来证明常微分方程解的存在性. Cauchy 是首位考虑微分方程解的存在性问题的数学家, 并给出了**定理14.2.14** 的两个证明. 他在1820 年到1830 年期间, 对F, F_y 都是连续时给出了第一个证明(综述在《Exercices d'analyse》(1840) 里), 想法本质上已存在Euler 1768 年的著作中; Lipschitz[3] 在1876 年把Cauchy 的条件减弱为现在**定理14.2.14** 中的条件. Cauchy 的第二个证明是假设F 此时是实解析的, 从而得到解也是实解析的.

---

[3] Rudolf Otto Sigismund Lipschitz, 1832 年5 月14 日- 1903 年10 月7 日, 今俄罗斯加里宁格勒州加里宁格勒(原普鲁士柯尼斯堡)人, 德国数学家. 1853 年获Humboldt University of Berlin 博士学位, 博士导师是Gustav Dirichlet. Lipschitz 的数学研究涉及数论、贝塞尔函数论、傅

第三个关于微分方程解的存在性的证明是Picard[4] 在1890 年给出的, 即逐次逼近法, 虽然这个方法首先是由Liouville 在1838 年对二阶方程提出来的. 我们给出的证明是基于Picard 的工作.

定理14.2.14. (Cauchy-Lipschitz-Picard 定理) *假设 $x_0 \in \mathbb{R}$, $F(t,x)$ 在 $(0,x_0) \in \mathbb{R}^2$ 附近连续, 且*

$$|F(t,x) - F(t,x')| \le L|x - x'|, \quad \exists\, L > 0.$$

则存在唯一的函数 $x(t)$ 在 $t = 0$ 附近满足

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad x(0) = x_0. \tag{14.2.10}$$

证: 微分方程 (14.2.10) 等价于积分方程

$$x(t) = x_0 + \int_0^t F(s, x(s))ds.$$

定义

$$x_0(t) := x_0, \quad x_1(t) := x_0 + \int_0^t F(s, x_0)ds$$

和

$$x_k(t) := x_0 + \int_0^t F(s, x_{k-1}(s))ds, \quad k \ge 1.$$

则得到

$$\begin{aligned}|x_k(t) - x_{k-1}(t)| &\le \int_0^t |F(s, x_{k-1}(s)) - F(s, x_{k-2}(s))|ds \\ &\le L\int_0^t |x_{k-1}(s) - x_{k-2}(s)|ds.\end{aligned}$$

对 $k = 1, 2, 3$ 分别得到

$$|x_1(t) - x_0| \le \int_0^t |F(s, x_0)|ds \le Mt,$$

里叶级数论、常微分方程、分析力学、位势理论及黎曼微分几何, 其中在微分方程和微分几何方面尤为突出. 1873 年他对柯西提出的微分方程初值问题解的存在惟一性定理作出改进, 提出著名的"Lipschitz 条件". Lipschitz 被认为是Riemann 事业的继承者之一. Riemann 于1854 年系统地阐述了高维流形微分几何的主要内容, 并于1868 年发表了研究n 维流形的度量结构的文章. 1869 年起Lipschitz 对Riemann 的思想作出进一步阐述和推广, 其中对n 维Riemannian 流形的子流形性质以及对微分不变量的研究取得了开创性的成果. 他还是最早使用共变微分研究微分不变量的人, 这个概念后来被Ricci 有效地用于张量分析.

[4] Charles Émile Picard, 1856 年7 月24 日- 1941 年11 月11 日, 今法国巴黎人, 法国数学家. 他是法国十九世纪末二十世纪初最杰出的数学家之一, 1877 年École Normale Supérieure 毕业, 1924 年称为法兰西学院院士. 博士导师是Gaston Darboux, 有名的博士生有Sergei Bernstein、Jacques Hadamard、Gaston Julia、Paul Painlevé、André Weil 等. Picard 的主要贡献在于解析函数、微分方程以及代数几何学等方面. 1879 年, 他提出皮卡小定理, 次年证明皮卡大定理. 这两个定理为复变函数论指引了新的方向. 1883 年 – 1888 年, Picard 将Poincaré 自守函数的方法推广到二元复变函数, 进而研究代数曲面, 建立"Picard 群". 他还推广了逐步逼近法.

$$\begin{aligned}|x_2(t)-x_1(t)| &\le L\int_0^t |x_1(s)-x_0(s)|ds \le L\int_0^t Msds = LM\frac{t^2}{2},\\ |x_3(t)-x_2(t)| &\le L\int_0^t |x_2(s)-x_1(s)|ds \le L\cdot LM\cdot\frac{1}{2}\int_0^t s^2ds = \frac{ML^2}{3!}t^3.\end{aligned}$$

这里 M 是二元函数 $F(t,x)$ 在 $(0,x_0)$ 附近的最大值. 一般地可证

$$|x_k(t)-x_{k-1}(t)| \le \frac{ML^{k-1}}{k!}t^k, \quad k\ge 1.$$

考虑函数项级数

$$\sum_{k\ge 0} u_k(t), \quad u_0(t):=x_0, \quad u_k(t):=x_k(t)-x_{k-1}(t), \quad k\ge 1.$$

对任意 n, 任意 $p\in\mathbb{N}$, 和任意充分小的 t 有

$$\left|\sum_{n+1\le k\le n+p} u_k(t)\right| \le \sum_{n+1\le k\le n+p} |u_k(t)| \le \sum_{n+1\le k\le n+p} \frac{M}{L}\frac{(Lt)^k}{k!} \le \frac{M}{L}\cdot\frac{(Lt)^{n+1}}{1-Lt},$$

所以当 $t\le 1/2L$ 时,

$$\left|\sum_{n+1\le k\le n+p} u_k(t)\right| \le \frac{M}{L}\cdot\frac{1}{2^n}\to 0, \quad n\to+\infty.$$

故函数项级数 $\sum_{n\ge1}u_n(t)$ 在 0 附近是一致收敛的, 从而函数列 $\{x_n(t)\}_{n\ge1}$ 在 0 附近是一致收敛的, 和函数列 $\{F(t,x_n(t))\}_{n\ge1}$ 也在 0 附近是一致收敛的 (利用函数 $F(t,x)$ 关于 x 满足 Lipschitz 条件). 若把极限函数记为 $x(t)$ 则得到

$$|x_n(t)-x_0| \le \sum_{1\le k\le n} |x_k(t)-x_{k-1}(t)| \le \sum_{1\le k\le n} \frac{M}{L}\frac{(Lt)^k}{k!} \le \frac{M}{L}e^{Lt} \le \frac{M}{L}e, \quad t\le\frac{1}{2},$$

和

$$x(t) = \lim_{n\to+\infty} x_n(t) = x_0 + \int_0^t \lim_{n\to+\infty} F(s,x_{n-1}(s))ds = x_0+\int_0^t F(s,x(s))ds. \quad \square$$

§14.3 幂级数

回顾 Taylor 公式 (4.7.2), (4.7.4), 或 (4.7.8), 在适当的条件下函数 $f(x)$ 可分解成

$$f(x) = \sum_{0\le k\le n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x)$$

其中 $r_n(x)$ 是余项. 一个很自然的问题是: 当 $n\to+\infty$, 是否成立 $f(x)=\sum_{n\ge0} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n/n!$? 之前的**定理4.7.13** 已经给出了部分答案.

本节我们来系统地研究级数展开问题, 并来回答**注4.7.12** (3) 中提到的几个初等函数的级数展开.

首先给出**幂级数(power series)**的定义:

$$\sum_{n\ge 0} a_n(x-x_0)^n \quad 或 \quad \sum_{n\ge 0} a_n x^n.$$

§14.3.1 幂级数收敛域

我们已经知道函数项级数 $\sum_{n\ge 0}(-1)^n x^n$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛到 $(1+x)^{-1}$. 若令 $a_n := (-1)^n$ 则得到

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1} = 1.$$

下面证明函数项级数 $\sum_{n\ge 0}(-1)^n x^n$ 在 $(-1,1)$ 内绝对收敛. 事实上, 对任意$x \in (-1,1)$ 有

$$\sum_{n\ge 0}|(-1)^n x^n| = \sum_{n\ge 0}|x|^n = \frac{1}{1-|x|} < +\infty.$$

但是这个函数项级数在端点处 $x=\pm 1$ 是发散的.

定理14.3.1. (Cauchy, 1821; Hadamard, 1888) *给定幂级数 $\sum_{n\ge 0} a_n x^n$, 并令*

$$\rho := \overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}. \tag{14.3.1}$$

则

(1) $\rho > 0 \Longrightarrow$ 幂级数在 $(-\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho})$ 内绝对收敛, 而在 $(-\infty, -\frac{1}{\rho}) \cup (\frac{1}{\rho}, +\infty)$ 内发散. 幂级数在端点 $x = \pm 1/\rho$ 处的敛散性无法判断.

(2) $\rho = 0 \Longrightarrow$ 幂级数在 $\mathbb{R}$ 上绝对收敛.

(3) $\rho = +\infty \Longrightarrow$ 幂级数只在 $x = 0$ 处绝对收敛.

证: 利用根式判别法可知

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \rho|x| \begin{cases} <1, & |x| < \frac{1}{\rho}, \\ >1, & |x| > \frac{1}{\rho}. \end{cases}$$

故完成证明. □

注14.3.2. (1) 作平移得到: *幂级数 $\sum_{n\ge 0} a_n(x-x_0)^n$ 在 $|x-x_0| < 1/\rho$ 内绝对收敛, 而在 $|x-x_0| > 1/\rho$ 上发散. 在端点 $|x-x_0| = 1/\rho$ 处的敛散性无法判断, 必须具体问题具体分析.*

(2) 称 $r := 1/\rho$ 为幂级数的**收敛半径(radius of convergence)**, 把相应的区间 $(-r, r)$ 称为**收敛区间(interval of convergence)**. *要注意记号, 如果 $\rho = 0$*

则收敛半径为 $r=+\infty$ 和收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$; 当 $\rho=+\infty$ 时, 收敛半径为 $r=0$ 和收敛区间此时仅为一点 $\{0\}$.

(3) 因为 $\lim_{n\to+\infty}|a_{n+1}/a_n|=a$ 存在可推出 $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=a$. 故此时收敛半径为 $r=1/a$.

(4) **定理14.3.1** 对一般级数不一定成立. 比如考察级数

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(nx)}{n}.$$

根据**例14.1.13** 知道, 上述级数在 $(0,2\pi)$ 内条件收敛. 利用周期性, 易知上述级数在 $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ 上条件收敛, 且在 $2\pi\mathbb{Z}$ 处发散. 而根据 (14.3.1) 得到 $\rho=\overline{\lim}_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|1/n|}=1$; 如果利用**定理14.3.1** 则在 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ 内发散, 矛盾!

(5) 在研究幂级数的收敛域时, 除了利用 (14.3.1) 求出收敛区间外, 不要忘记检查幂级数在收敛半径端点处的敛散性.

例14.3.3. 求下列幂级数的收敛域:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(x-1)^n}{n},\quad \sum_{n\geq 1}\frac{(x-1)^n}{n^2},\quad \sum_{n\geq 1}n(x-1)^n,\quad \sum_{n\geq 1}\frac{2^n+(-1)^n}{n(n+2)}x^n,$$

$$\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n,\quad \sum_{n\geq 1}\frac{(2n)!}{(n!)^2}(x-1)^{2n-1},\quad \sum_{n\geq 1}\frac{(x-1)^n}{2^n n},$$

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},\quad \sum_{n\geq 1}\frac{\ln(1+n)}{n}x^{n-1},\quad \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^p}\ (p>0),$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n x^n,\quad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n,\quad \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n+\sqrt{n}}x^n,$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{(n+2)3^n},\quad \sum_{n\geq 1}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x-1)^n,\quad \sum_{n\geq 1}n2^{2n}x^n(1-x)^n,$$

$$\sum_{n\geq 1}\sin\frac{1}{3n}\left(\frac{3+x}{3-2x}\right)^n,\quad \sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^{-nx},$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1^n+2^n+\cdots+2020^n}{n^2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n,\quad \sum_{n\geq 1}\left[\frac{1}{n^2}+(-1)^n+\sin n\right]x^n,$$

$$\sum_{n\geq 1}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{4n}\right]x^n,\quad \sum_{n\geq 1}\left(\frac{a^n}{n^2}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n\ (a,b>0),$$

$$\sum_{n\geq 0}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2},\quad \sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!},\quad \sum_{n\geq 0}n^{n^2}x^{n^3},$$

$$\sum_{n\geq 0}\frac{x^{n^2}}{2^n},\quad \sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n|x|^n}.$$

解: (1) $\rho=\overline{\lim}_{n\to+\infty}1/\sqrt[n]{n}=1$, 故收敛区间为 $|x-1|<1$ 即 $0<x<2$. 下面检查端点处的敛散性. 如果 $x=0$, 则级数变为 $\sum_{n\geq1}(-1)^n/n$ 收敛, 当 $x=2$, 则级数变为 $\sum_{n\geq1}1/n$ 发散. 因此收敛域为 $[0,2)$.

(2) 和 (1) 一样, 收敛区间为 $(0,2)$. 如果 $x=0$, 则级数变为 $\sum_{n\geq1}(-1)^n/n^2$ 收敛, 当 $x=2$, 则级数变为 $\sum_{n\geq1}1/n^2$ 收敛. 因此收敛域为 $[0,2]$.

(3) 和 (1) 一样, 收敛区间为 $(0,2)$. 如果 $x=0$, 则级数变为 $\sum_{n\geq1}(-1)^n n$ 发散, 当 $x=2$, 则级数变为 $\sum_{n\geq1}n$ 发散. 因此收敛域为 $(0,2)$.

(4) 收敛半径为

$$\rho=\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{\frac{2^n+(-1)^n}{n(n+2)}}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2^n+(-1)^n}=2,$$

所以收敛区间为 $(-1/2,1/2)$. 当 $x=\pm1/2$ 时

$$\left|\frac{2^n+(-1)^n}{n(n+2)}\left(\pm\frac{1}{2}\right)^n\right|\leq\frac{2^n+1}{2^n}\frac{1}{n(n+2)}\leq\frac{2}{n(n+2)}\leq\frac{2}{n^2},$$

故此时也收敛. 因此收敛域为 $[-1/2,1/2]$.

(5) 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}=1,$$

所以收敛区间为 $(-1,1)$. 当 $x=\pm1$ 时因为 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\to+\infty$, 故此时级数发散. 因此收敛域为 $(-1,1)$.

(6) 将级数写成

$$\sum_{n\geq1}\frac{(2n)!}{(n!)^2}[(x-1)^2]^{n-1}.$$

因为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+2)!/((n+1)!)^2}{(2n)!/(n!)^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2(2n+1)}{n+1}=4,$$

所以收敛区间为 $|(x-1)^2|\leq1/4$, 即为 $(1/2,3/2)$. 当 $x=1/2$ 或 $x=3/2$ 时级数变成

$$\pm2\sum_{n\geq1}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2},\quad a_n:=\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2};$$

此时

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{2n+2}{2n+1}=1+\frac{1}{2n+1}=1+\frac{1/2}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

根据 Gauss 判别法可知级数发散. 最后得到收敛域为 $(1/2,3/2)$.

(7) 因为

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n n}}=\frac{1}{2},$$

所以收敛区间为 $|x-1|<2$ 即 $-1<x<3$. 当 $x=-1$ 时级数 $\sum_{n\geq1}(-1)^n/n$ 收敛, 而当 $x=3$ 时级数 $\sum_{n\geq1}1/n$ 发散, 所以收敛域为 $[-1,3)$.

(8) 因为

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}\right|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2n-1}}=1,$$

所以收敛区间为 $-1,1)$. 当 $x=\pm1$ 时级数 $\pm\sum_{n\geq1}(-1)^{n+1}/(2n-1)$ 都是收敛, 因此收敛域为 $[-1,1]$.

(9) 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\ln(2+n)}{n+1}}{\frac{\ln(1+n)}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}\frac{\ln(2+n)}{\ln(1+n)}=1,$$

所以收敛区间为 $(-1,1)$. 当 $x=-1$ 时, 级数变成

$$\sum_{n\geq1}(-1)^{n-1}\frac{\ln(1+n}{n}.$$

由于函数 $f(x):=\frac{\ln(1+x)}{x}$ 满足

$$f'(x)=\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}\leq0,$$

根据 Leibniz 判别法可知 $\sum_{n\geq1}(-1)^{n-1}\frac{\ln(1+n)}{n}$ 收敛.

当 $x=1$ 时, 级数变成

$$\sum_{n\geq1}\frac{\ln(1+n)}{n}=:\sum_{n\geq1}f(n),\quad f(n)\text{ 非负且单调递减}.$$

因为

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}dx\geq\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{1+x}dx=\frac{1}{2}\ln^2(1+x)\Big|_1^{+\infty}=+\infty,$$

所以利用积分判别法可知级数发散. 因此收敛域为 $[-1,1)$.

(10) 因为

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}\right|}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^p=‘,$$

所以收敛区间为 $(-1,1)$. 当 $x=-1$ 时级数变成

$$-\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^p},$$

故仅当 $p>1$ 时收敛. 当 $x=1$ 时级数变成

$$\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p},$$

故对任意 $p>0$ 都收敛. 最后得到收敛域为 $[-1,1]$ 若 $p>1$, 和 $(-1,1]$ 若 $0<p\le 1$.

(11) 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}\Big/\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1,$$

所以收敛区间为 $(-1,1)$. 当 $x=1$ 时级数变成

$$\sum_{n\ge 1}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^{n};$$

利用公式 $n!\sim\sqrt{2\pi n}(n/e)^n$ 得到

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi n}},$$

故此时级数发散. 当 $x=-1$ 时级数变成

$$\sum_{n\ge 1}(-1)^n\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^{n},\quad a_n:=\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}.$$

因为 $a_{n+1}/a_n=(1+1/n)^n/e<1$ 且 $a_n\to 0$, 所以根据 Leibniz 判别法此时级数收敛. 最后得到收敛域为 $[-1,1)$.

(12) 因为

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{(2n-1)2^n}\right|}=\frac{1}{2},$$

所以收敛区间为 $|(x-2)/2|<2$, 即 $0<x<4$. 当 $x=0$ 时级数变成 $\sum_{n\ge 1}(-1)^n/(2n+1)$, 故收敛. 当 $x=4$ 时级数变成 $\sum_{n\ge 1}1/(2n-1)$, 故发散. 最后得到收敛域为 $[0,4)$.

(13) 因为

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n+\sqrt{n}}\right|}=1,$$

所以收敛区间为 $(-1,1)$. 当 $x=-1$ 时级数变成 $\sum_{n\ge 1}-1/(n+\sqrt{n})$, 故发散. 当 $x=1$ 时级数变成 $\sum_{n\ge 1}(-1)^{n-1}/(n+\sqrt{n})$, 故收敛. 最后得到收敛域为 $(-1,1]$.

(14) 因为

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n(n+2)}}=\frac{1}{3},$$

所以收敛区间为 $(-3,3)$. 当 $x=-3$ 时级数变成 $\sum_{n\ge 1}(-1)^n/(n+2)$, 故收敛. 当 $x=3$ 时级数变成 $\sum_{n\ge 1}1/(n+2)$, 故发散. 最后得到收敛域为 $[-3,3)$.

(15) 因为

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{\frac{3^n+(-2)^n}{n}}=3,$$

所以收敛区间为 $|x-1|<1/3$, 即 $2/3<x<4/3$. 当 $x=2/3$ 时级数变成

$$\sum_{n\geq 1}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\frac{(-1)^n}{3^n}=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}\left[1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right],$$

故收敛. 当 $x=4/3$ 时级数变成

$$\sum_{n\geq 1}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\frac{1}{3^n}=\sum_{n\geq 1}\left[\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n(3/2)^n}\right],$$

故发散. 最后得到收敛域为 $[2/3,4/3)$.

(16) 因为

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{n2^{2n}}=4,$$

所以收敛区间为 $|x(1-x)|<1/4$, 即

$$\frac{1}{2}<x<\frac{1+\sqrt{2}}{2},\quad \frac{1-\sqrt{2}}{2}<x<\frac{1}{2}.$$

当 $x=1/2$ 时级数变成 $\sum_{n\geq 1}n$, 故发散. 当 $x=(1\pm\sqrt{2})/2$ 时级数变成 $\sum_{n\geq 1}(-1)^n n2^n$, 故发散. 最后得到收敛域为

$$\frac{1}{2}<x<\frac{1+\sqrt{2}}{2},\quad \frac{1-\sqrt{2}}{2}<x<\frac{1}{2}.$$

(17) 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{3(n+1)}}{\sin\frac{1}{3n}}=1,$$

所以收敛区间为 $-1<(3+x)/(3-2x)<1$, 即 $x<0$ 或 $x>6$. 当 $x=0$ 时级数变成 $\sum_{n\geq 1}\sin\frac{1}{3n}\sim\sum_{n\geq 1}\frac{1}{3n}$, 故发散. 当 $x=6$ 时级数变成 $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\sin\frac{1}{3n}$, 故收敛. 最后得到收敛域为 $(-\infty,0)\cup[6,+\infty)$.

(18) 因为

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^{-nx}}=\frac{1}{e^{1+x}},$$

所以当 $x>-1$ 时级数收敛, 而当 $x<-1$ 时级数发散. 当 $x=-1$ 时级数变成

$$\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^n=\sum_{n\geq 1}\left[\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}\right]^n.$$

利用**例**6.2.9 (3) 中的渐近展开得到

$$\left[\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}\right]^n=\left[\frac{e}{e^{1-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})}}\right]^n=e^{\frac{1}{2}+o(1)},$$

故此时发散. 最后得到收敛域为 $(-1,+\infty)$.

(19) 因为, 利用**例2.2.4** (1),

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1^n+\cdots+2020^n}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1^n+\cdots+50^n}=\max\{1,\cdots,2020\}=2020,$$

所以收敛区间为 $|(1-x)/(1+x)|<1/2020$, 即 $2019/2021<x<2021/2019$. 当 $x=2019/2021$ 或 $x=2021/2019$ 时级数变成

$$\sum_{n\geq1}(\pm1)^n\frac{1^n+\cdots+2020^n}{2020^n n^2}.$$

由于

$$\frac{1^n+\cdots+2020^n}{2020^n n^2}=\sum_{1\leq k\leq n}\frac{(k/2020)^n}{n^2}\leq\frac{2020}{n^2},$$

可知此时级数收敛. 最后得到收敛域为 $[2019/2021,2021/2019]$.

(20) 因为

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}+(-1)^n+\sin n}=1,$$

所以收敛区间为 $(-1,1)$. 当 $x=\pm1$ 时级数变成

$$\sum_{n\geq1}\left[\frac{1}{n^2}+(-1)^n+\sin b\right](-1)^n,$$

故发散. 最后得到收敛域为 $(-1,1)$.

(21) 因为

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{4n}+\frac{(-1)^n}{n}}=\frac{4}{4}=1,$$

所以收敛区间为 $(-1,1)$. 当 $x=-1$ 时级数变成

$$\sum_{n\geq1}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{4^n}\right](-1)^n=\sum_{n\geq1}\left[\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{4^n}\right],$$

故发散. 当 $x=1$ 时级数变成

$$\sum_{n\geq1}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{4^n}\right],$$

故收敛. 最后得到收敛域为 $(-1,1]$.

(22) 因为

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=\max\{a,b\},$$

所以收敛区间为 $-\min\{\frac{1}{a},\frac{1}{b}\}<x<\min\{\frac{1}{a},\frac{1}{b}\}$. 显然当 $x=\pm\min\{\frac{1}{a},\frac{1}{b}\}$ 时级数收敛. 最后得到收敛域为 $[-\min\{1/a,1/b\},\min\{1/a,1/b\}]$.

(23) 因为

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{2n-1}{2^n}}=\frac{1}{2},$$

所以收敛区间为 $|x^2|<2$, 即 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$. 当 $x=\pm 2$ 时级数为 $\sum_{n\geq 0}(n-\frac{1}{2})$, 故发散. 最后得到收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

(24) 级数可写成

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n-1)(2n-1)!}\left(x^{2-1/n}\right)^n=\sum_{k\geq 0}a_kx^k,$$

其中

$$a_k:=\begin{cases}\frac{1}{(2n-1)(2n-1)!}, & k=2n-1,\\ 0, & k\neq 2n-1.\end{cases}$$

因为

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[k]{|a_k|}=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{k!}}=0,$$

所以收敛区间为 $\mathbb{R}$.

(25) 级数可写成

$$\sum_{n\geq 0}n^{n^2}x^{n^3}=\sum_{k\geq 0}a_kx^k,$$

这里

$$a_k=\begin{cases}n^{n^2}, & k=n^3,\\ 0, & k\neq n^3.\end{cases}$$

因为

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[k]{|a_k|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n^3}n^{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1,$$

所以收敛区间为 $(-1,1)$. 当 $x=\pm 1$ 时级数变成 $\sum_{n\geq 0}(\pm 1)^{n^3}n^{n^2}$, 故发散. 最后得到了收敛域为 $(-1,1)$.

(26) 级数可写成

$$\sum_{n\geq 0}\frac{x^{n^2}}{2^n}=\sum_{k\geq 0}a_kx^k,$$

其中

$$a_k=\begin{cases}\frac{1}{2^n}, & k=n^2,\\ 0, & k\neq n^2.\end{cases}$$

因为

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}}\sqrt[k]{|a_k|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n^2]{\frac{1}{2^n}}=1,$$

所以收敛区间为 $(-1,1)$. 当 $x=\pm 1$ 时级数变成 $\sum_{n\geq 0}(\pm 1)^n/2^n$, 故收敛. 最后得到收敛域为 $[-1,1]$.

(27) 因为 $x=0$, 级数无定义. 当 $x>0$ 时级数为 $\sum_{n\geq 1}1/n$, 故发散. 当 $x<0$ 时级数为 $\sum_{n\geq 1}(-1)^n/n$, 故收敛. 最后得到收敛域为 $(-\infty,0)$.

§14.3.2 幂级数基本性质

由于幂级数是特殊的函数项级数, 我们自然要问什么时候幂级数具有连续性、可积性和可导性. 我们将证明上述三个性质在幂级数的收敛区间内成立.

定理14.3.4. (Abel 第一定理) (1) 如果幂级数 $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ 在 $x_1 \neq 0$ 处收敛, 则其在 $(-|x_1|, |x_1|)$ 内绝对收敛.

(2) 如果幂级数 $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ 在 x_1 处发散, 则其在 $(-\infty, -|x_1|) \cup (|x_1|, +\infty)$ 内发散.

证: (1) 因为级数 $\sum_{n\geq 0} a_n x_1^n$ 收敛, 所以 $\lim_{n\to+\infty} a_n x_1^n = 0$. 从而得到数列 $\{a_n x_1^n\}_{n\geq 0}$ 有界, 即存在正数 $M > 0$ 满足 $|a_n x^n| \leq M$. 对任意 $|x| < |x_1|$ 有

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \leq M\left|\frac{x}{x_1}\right|^n.$$

由于 $\sum_{n\geq 0} M(|x|/|x_1|)^n$ 收敛, 故幂级数 $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ 绝对收敛.

(2) 如果幂级数 $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ 在 x_0 处收敛, 这里 $|x_0| > |x_1|$, 则根据 (1) 幂级数 $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ 在 $(-|x_0|, |x_0|)$ 内绝对收敛. 特别地, $\sum_{n\geq 0} a_n x_1^n$ 收敛, 矛盾. □

定理14.3.5. (Abel 第二定理) 幂级数 $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ 在其收敛区内闭一致收敛. 如果幂级数 $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ 进一步在 $x = r$ (或者, 在 $x = -r$) 处收敛, 则其在任意闭区间 $[a, r] \subset (-r, r]$ (或者, 任意闭区间 $[-r, b] \subset [-r, r)$) 从而在 $(-r, r]$ (或者, $[-r, r)$) 内闭一致收敛.

证: 任取闭区间 $[a, b] \subset (-r, r)$, 并令 $x_1 := \max\{|a|, |b|\}$. 则得到

$$|a_n x^n| \leq |a_n x_1^n|, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in [a, b].$$

因为 $\sum_{n\geq 0} a_n |x_1|^n$ 收敛, 所以幂级数 $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛.

(2) 现在假设 $\sum_{n\geq 0} a_n r^n$ 收敛, 则对任意 $x \in [0, r]$ 有

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} a_n r^n \left(\frac{x}{r}\right)^n.$$

因为 $(x/r)^n$ 逐点单调递减且一致有上界 1, 根据 Abel 判别法知幂级数在 $[0, r]$ 上一致收敛. 特别地, 当 $a \geq 0$ 时幂级数在 $[a, r]$ 上一致收敛. 当 $-r < a < 0$ 时, 根据 (1) 得到幂级数 $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ 在 $[a, 0]$ 上一致收敛. 因此幂级数在 $[a, r]$ 上一致收敛. □

性质14.3.6. 幂级数

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n, \quad \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1},$$

都有一样的收敛区间, 但是它们可能会有不同的收敛域.

证: 因为 $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$, 所以三个幂级数收敛半径都一样. 考虑幂级数

$$\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n^2}.$$

该幂级数的收敛域为 $[-1,1]$, 而幂级数 $\sum_{n\geq 1}(x^n/n^2)'$ 的收敛域为 $[-1,1)$, 再次求导后的幂级数 $\sum_{n\geq 1}(x^n/n^2)''$ 的收敛域为 $(-1,1)$. □

定理14.3.7. (Abel 第三定理) 如果幂级数 $\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ 的收敛半径为 r, 则其和函数在 $(-r,r)$ 内连续. 如果幂级数 $\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ 在 $x=r$ (或者, $x=-r$) 处收敛, 则其和函数在 $x=r$ (或者, $x=-r$) 左 (或者, 右) 连续.

证: 根据**定理14.3.5** 和**注14.2.2** (1), 可知幂级数在 $(-r,r)$ 内闭连续从而在 $(-r,r)$ 内连续. 单侧收敛推出单侧连续也是利用**定理14.3.5**. □

定理14.3.8. (幂级数的可积性和可导性) 假设幂级数 $\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ 的收敛半径为 $r\neq 0$, 且记

$$f(x):=\sum_{n\geq 0}a_nx^n,\quad x\in(-r,r).$$

则

(1) **(逐项积分)** 对任意 $-r<a<b<r$ 有

$$\int_a^b\sum_{n\geq 0}a_nx^ndx=\sum_{n\geq 0}\int_a^b a_nx^ndx,\tag{14.3.2}$$

特别地得到

$$\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}=\int_0^x\sum_{n\geq 0}a_nt^ndt,\quad |x|<r.\tag{14.3.3}$$

根据**性质14.3.6** 可知逐项积分后得到的幂级数 $\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{n+1}x^n$ 和原幂级数 $\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ 具有相同的收敛半径.

(2) **(逐项求导)** 对任意 $x\in(-r,r)$ 有

$$f'(x)=\sum_{n\geq 0}(a_nx^n)'=\sum_{n\geq 1}na_nx^{n-1},\tag{14.3.4}$$

特别地得到

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n\geq k}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_nx^{n-k},\quad f^{(k)}(0)=k!a_k.\tag{14.3.5}$$

根据**性质14.3.6** 可知逐项求导后得到的幂级数 $\sum_{n\geq 0}na_nx^{n-1}$ 和原幂级数 $\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ 具有相同的收敛半径.

证: (1) 根据**定理14.3.5** 幂级数在收敛区间内闭一致收敛, 故利用**注14.2.6** (1) 推出 (14.3.2).

(2) 根据**定理14.3.5** 和**性质14.3.6** 可知幂级数在其收敛区间内可任意次求导, 从而利用**注14.2.10** (1) 推出 (14.3.4) 和 (14.3.5). □

注14.3.9. (1) 对幂级数来说, 逐项积分后收敛域一般会变大, 而逐项求导后收敛域一般会变小. 比如考察**性质14.3.6** 证明过程中的例子.

(2) **定理14.3.8** 可用来求一些函数的幂级数展开或恒等式.

例14.3.10. (1) 证明

$$\sum_{n\ge0}(n+1)x^n=\frac{1}{(1-x)^2},\quad |x|<1;\quad \sum_{n\ge1}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^3},\quad |x|<1;$$

$$\sum_{n\ge2}\frac{(n-1)n(n+1)}{6}x^{n-2}=\frac{1}{(1-x)^4},\quad |x|<1;$$

$$\sum_{n\ge1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\quad |x|<1;\quad \sum_{n\ge1}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\arctan x,\quad |x|<1;$$

$$\sum_{n\ge2}\frac{2n+1}{n!}2^b=5e^2,\quad \sum_{n\ge0}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

证: (a) 因为幂级数

$$\sum_{n\ge0}x^n=\frac{1}{1-x}$$

的收敛区间为 $(-1,1)$, 所以在收敛区间内逐项求导得到

$$\sum_{n\ge0}(n+1)x^n=\left(\sum_{n\ge0}x^{n+1}\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

(b) 根据 (a) 得到

$$\sum_{n\ge1}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\sum_{n\ge1}(n+1)x^n\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)'=\frac{1}{(1-x)^3}.$$

(c) 对 (b) 继续求导得到

$$\begin{aligned}\sum_{n\ge2}\frac{(n-1)n(n+1)}{6}x^{n-2} &= \left(\frac{1}{6}\sum_{n\ge1}n(n+1)x^{n-1}\right)'\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(1-x)^3}\right)'=\frac{1}{(1-x)^4}.\end{aligned}$$

(d) 幂级数 $\sum_{n\ge1}x^{2n-1}/(2n-1)$ 的收敛半径为 $r=1$. 任意 $x\in(-1,1)$ 得到

$$\sum_{n\ge1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\sum_{n\ge1}\int_0^x t^{2n-2}dt=\int_0^x\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

(e) 幂级数的收敛半径为 $r=1$, 故对任意 $x\in(-1,1)$ 得到

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\int_0^x t^{2n-2}dt=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\arctan x.$$

(f) 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(2n+3)/(n+1)!}{(2n+1)/n!}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\frac{2n+3}{2n+1}=0,$$

所以幂级数 $\sum_{n\geq 1}(2n+1)x^{2n}/n!$ 的收敛区间为 $\mathbb{R}$. 令

$$f(x):=\sum_{n\geq 1}\frac{2n+1}{n!}x^{2n},\quad x\in\mathbb{R}.$$

逐步积分得到

$$\int_0^x f(t)dt=\sum_{n\geq 1}\frac{2n+1}{n!}\int_0^x t^{2n}dt=\sum_{n\geq 1}\frac{x^{2n+1}}{n!}=x\sum_{n\geq 1}\frac{(x^2)^n}{n!}=x\left(e^{x^2}-1\right).$$

两边求导可得

$$f(x)=(2x^2+1)e^{x^2}-1,\quad\Longrightarrow\quad S(2)=5e^2-1\quad\Longrightarrow\quad\sum_{n\geq 0}\frac{2n+1}{n!}2^n=5e^2.$$

(g) 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{((n+1)!)^2}{(2n+3)!}\Big/\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)}=\frac{1}{4},$$

所以幂级数 $\sum_{n\geq 0}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ 的收敛区间为 $(-4,4)$. 令

$$f(x):=\sum_{n\geq 0}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^{2n},\quad |x|<4.$$

逐步求导得到

$$f'(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^{2n}\quad\Longrightarrow\quad\left(2-\frac{x^2}{2}\right)f'(x)=2+\frac{x}{2}f(x).$$

即得到

$$f'(x)-\frac{x}{4-x^2}f(x)=\frac{4}{4-x^2}\quad\Longrightarrow\quad f(x)=\frac{4}{\sqrt{4-x^2}}\left(\arcsin\frac{x}{2}+C\right).$$

根据 $f(0)=0$, 得到 $C=0$ 从而 $f(x)=\frac{4}{\sqrt{4-x^2}}\arcsin\frac{x}{2}$. 故 $f(1)=2\pi/3\sqrt{3}$. □

(2) **Bessel 函数**

$$B_0(x):=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

满足

$$xB_0''(x)+B_0'(x)+xB_0(x)=0.$$

证: 因为幂级数的收敛半径为 $+\infty$, 所以逐项求导得到

$$B_0'(x)=\sum_{n\ge1}(-1)^n\frac{2n}{(n!)^2 2^{2n}}x^{2n-1},\quad B_0''(x)=\sum_{n\ge1}(-1)^n\frac{2n(2n-1)}{(n!)^2 2^{2n}}x^{2n-2}.$$

此时易得到所要满足的常微分方程. □

(3) 证明函数

$$f(x):=\sum_{n\ge1}\frac{x^n}{n^2\ln(1+n)}$$

满足 $f\in C([-1,1])$, $x=-1$ 处可导, 在 $x=1$ 处不可导且 $\lim_{x\to1-}f'(x)=+\infty$.

证: 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)^2\ln(2+n)}\Big/\frac{1}{n^2\ln(1+n)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\ln(1+n)}{(n+1)^2\ln(2+n)}=1,$$

所以幂级数收敛区间为 $(-1,1)$. 当 $x=\pm1$ 时级数

$$\sum_{n\ge1}\frac{(\pm1)^n}{n^2\ln(1+n)}\quad 满足\quad \left|\frac{(\pm1)^n}{n^2\ln(1+n)}\right|\le\frac{1}{n^2\ln 2},$$

故收敛域为 $[-1,1]$ 从而幂级数 $\sum_{n\ge1}x^n/n^2\ln(1+n)$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛. 因此 $f(x)\in C([-1,1])$ 和

$$f'(x)=\sum_{n\ge1}\frac{x^{n-1}}{n\ln(1+n)},\quad |x|<1.$$

但是 $\sum_{n\ge1}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln(1+n)}$ 根据 Leibniz 判别法知是收敛的. 利用**定理14.3.7** 得到

$$f'(-1)=\lim_{x\to-1+}f'(x)=\lim_{x\to-1+}\sum_{n\ge1}\frac{x^{n-1}}{n\ln(1+n)}=\sum_{n\ge1}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln(1+n)}.$$

但是级数 $\sum_{n\ge1}1/n\ln(1+n)$ 是发散的, 这是因为反常积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t\ln(1+t)}\le\int_1^{+\infty}\frac{dt}{(1+t)\ln(1+t)}=\ln\ln(1+t)\Big|_1^{+\infty}=+\infty.$$

故 $f'(1)$ 不存在. □

(4) 如果 $a_1=a_2=1$ 且 $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$, 则

$$\sum_{n\ge1}a_nx^{n-1}=\frac{1}{1-x-x^2},\quad |x|<\frac{1}{2}.$$

证: 易知 $a_n > 0$ 且 a_n 递增. 若 $|x| < 1/2$, 则

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n}|x| < \frac{2a_n}{a_n} \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

故幂级数 $\sum_{n\geq 1} a_n x^{n-1}$ 在区间 $(-1/2, 1/2)$ 内收敛. 若令 $f(x) := \sum_{n\geq 1} a_n x^{n-1}$ 则得到

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x + \sum_{n\geq 3} a_n x^{n-1} = 1 + x + \sum_{n\geq 3}(a_{n-1} + a_{n-2})x^{n-1} \\ &= 1 + x + x\sum_{n\geq 3} a_{n-1}x^{n-2} + x^2 \sum_{n\geq 3} a_{n-2}x^{n-3} \\ &= 1 + x\left(1 + \sum_{n\geq 2} a_n x^{n-1}\right) + x^2 \sum_{n\geq 1} a_n x^{n-1} = 1 + xf(x) + x^2 f(x) \end{aligned}$$

所以, 利用**推论14.3.11**,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1 - x - x^2} = \frac{-1}{x^2 + x - 1} = \frac{-1}{(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2})(x + \frac{1-\sqrt{5}}{2})} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{5}}\left[\frac{2}{1-\sqrt{5}}\sum_{n\geq 0}\left(-\frac{2x}{1-\sqrt{5}}\right)^n - \frac{2}{1+\sqrt{5}}\sum_{n\geq 0}\left(-\frac{2x}{1+\sqrt{5}}\right)^n\right] \\ &= \frac{-1}{\sqrt{5}}\left[\frac{2}{1-\sqrt{5}}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}x\right)^n - \frac{2}{1+\sqrt{5}}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{-2}{1+\sqrt{5}}x\right)^n\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n\geq 1}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]x^{n-1} \end{aligned}$$

和

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \quad n \geq 1. \quad \square$$

(5) 如果 $a_n \geq 0$, 级数 $\sum_{n\geq 0} a_n$ 发散, 且

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_1 + \cdots + a_n} = 0,$$

则 $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

证: 因为 $\sum_{n\geq 0} a_n$ 发散, 故根据**定理14.3.4** 幂级数 $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ 在 $|x| > 1$ 内发散, 故 $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \geq 1$. 令 $A_n := \sum_{1\leq k\leq n} a_k$. 根据

$$\frac{a_n}{A_n} = \frac{A_n - A_{n-1}}{A_n} = 1 - \frac{A_{n-1}}{A_n} \to 0,$$

因此 $A_{n-1}/A_n \to 1$ 且 $A_n \to +\infty$. 所以 $\sqrt[n]{A_n} \to 1$. 从

$$\sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{A_n} \to 1 \implies \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{a_n} \leq 1. \quad \square$$

(6) 若幂级数 $f(x)=\sum_{n\ge0}a_nx^n$ 的收敛区间为 $(-r,r)$, 级数 $\sum_{n\ge0}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$ 收敛, 则

$$\int_0^r f(x)dx:=\lim_{x\to r-}\int_0^x f(t)dt=\sum_{n\ge0}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}.$$

特别地

$$\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^2}=\int_0^1\frac{1}{x}\ln\frac{1}{1-x}dx.$$

证: 根据**定理14.3.7** 和**定理14.3.8** 得到

$$\begin{aligned}\int_0^r f(t)dt &= \lim_{x\to r-}\left(\sum_{n\ge0}\int_0^x a_nt^ndt\right)\\ = \lim_{x\to r-}\left(\sum_{n\ge0}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\right) &= \sum_{n\ge0}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}.\quad\square\end{aligned}$$

(7) 证明

$$\sum_{n\ge1}\frac{(-1)^n\ln n}{n}=\gamma\ln2-\frac{\ln^2 2}{2}$$

这里 γ 是 Euler 常数.

证: 计算得到

$$\begin{aligned}\sum_{1\le n\le 2N}\frac{(-1)^n\ln n}{n} &= \sum_{1\le n=2k\le 2N}\frac{\ln n}{n}-\sum_{1\le n=2k-1\le 2N}\frac{\ln n}{n}\\ &= \sum_{1\le n\le N}\frac{\ln2+\ln k}{2k}-\sum_{1\le k\le N}\frac{\ln(2k-1)}{2k-1}\\ &= \frac{\ln2}{2}\sum_{1\le k\le N}\frac{1}{k}+\frac{1}{2}\sum_{1\le k\le N}\frac{\ln k}{k}-\sum_{1\le k\le N}\frac{\ln(2k-1)}{2k-1}\end{aligned}$$

两边乘以 2 化简得到

$$\begin{aligned}\sum_{1\le n\le 2N}\frac{(-1)^n\ln n}{n} &= \ln2\sum_{1\le k\le N}\frac{1}{k}+\sum_{1\le k\le N}\frac{\ln k}{k}\\ &\quad -2\sum_{1\le k\le}\frac{\ln(2k-1)}{2k-1}-\sum_{1\le n\le 2N}\frac{(-1)^n\ln n}{n}\\ &= \ln2\sum_{1\le k\le N}\frac{1}{k}+\sum_{1\le k\le N}\frac{\ln k}{k}-\sum_{1\le k\le N}\frac{\ln(2k-1)}{2k-1}-\sum_{1\le k\le N}\frac{\ln(2k)}{2k}\\ &= \ln2\sum_{1\le k\le N}\frac{1}{k}-\sum_{N+1\le k\le N}\frac{\ln k}{k}.\end{aligned}$$

下面主要来估计第二项的求和. 考虑函数 $f(x):=\ln x/x$ 并计算得到

$$f'(x)=\frac{1/x\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}\le0,\quad \text{如果 } x\ge e.$$

假设 $N \geq e$ 得到

$$\frac{\ln(k+1)}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x} dx \leq \frac{\ln k}{k}, \quad k \geq N.$$

两边对 k 求和得到

$$\sum_{N \leq k \leq 2N-1} \frac{\ln(k+1)}{k+1} \leq \int_N^{2N} \frac{\ln x}{x} dx \leq \sum_{N \leq k \leq 2N-1} \frac{\ln k}{k}.$$

即得

$$\int_N^{2N} \frac{\ln x}{x} dx + \frac{\ln(2N)}{2N} - \frac{\ln N}{N} \leq \sum_{N+1 \leq k \leq 2N} \frac{\ln k}{k} \leq \int_N^{2N} \frac{\ln x}{x} dx$$

或者

$$\frac{\ln 2 - \ln N}{2N} \leq \sum_{N+1 \leq k \leq 2N} \frac{\ln k}{k} - \frac{\ln^2 2}{2} - \ln 2 \ln N \leq 0, \quad N \geq e.$$

用 o 符号来表示就是

$$\sum_{N+1 \leq k \leq 2N} \frac{\ln k}{k} = \frac{\ln^2 2}{2} + \ln 2 \ln N + o(1), \quad N \to +\infty.$$

因此

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq n \leq 2N} \frac{(-1)^n \ln n}{n} &= \ln 2 \left(\sum_{1 \leq k \leq N} \frac{1}{k} - \ln N \right) - \frac{\ln^2 2}{2} + o(1) \\ &= \gamma \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2} + o(1). \end{aligned}$$

(8)* 对任意 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $\delta \in \mathbb{R}$ 定义

$$||f||_{H_\delta^m} := \sum_{|\boldsymbol{\beta}| \leq m} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\boldsymbol{x}|^2\right)^{\delta + |\boldsymbol{\beta}|} \left| \boldsymbol{D}^{\boldsymbol{\beta}} f(\boldsymbol{x}) \right|^2 d\boldsymbol{x} \right]^{1/2}.$$

如果级数

$$\sum_{n \geq 2} \sqrt{\frac{n}{n-1}} ||f||_{H^0_{2-1/n}}$$

存在, 证明积分

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(\boldsymbol{x})| d\boldsymbol{x} < +\infty.$$

证: 对任何 $\delta \in (-1, 0)$ 得到

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |f| &= \int_{\mathbb{R}^2} |f| \frac{(1+|\boldsymbol{x}|^2)^{\frac{\delta}{2}+1}}{(1+|\boldsymbol{x}|^2)^{\frac{\delta}{2}+1}} \leq \left[\int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\boldsymbol{x}}{(1+|\boldsymbol{x}|^2)^{\delta+2}} \right]^{1/2} ||f||_{H^0_{\delta+2}} \\ &\leq \left(\int_0^1 r dr + \int_1^{+\infty} \frac{r dr}{r^{2\delta+4}} \right)^{1/2} ||f||_{H^0_{\delta+2}} \leq \left(\frac{1}{2} + \int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^{2\delta+3}} \right)^{1/2} ||f||_{H^0_{\delta+2}} \end{aligned}$$

$$\leq \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2(1+\delta)}\right]^{1/2}||f||_{H^0_{\delta+2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+\delta}}||f||_{H^0_{\delta+2}}.$$

现在取 $\delta=-1/n$ 并结合假设条件得到所给的积分是有限的. □

推论14.3.11. (1) **(幂级数乘法)** 假设 $\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ 和 $\sum_{n\geq 0}b_nx^n$ 收敛半径分别为 r_a 和 r_b, 则

$$\sum_{n\geq 0}a_nx^n\cdot\sum_{n\geq 0}b_nx^n=\sum_{n\geq 0}c_nx^n, \quad |x|<r:=\min\{r_a,r_b\}, \tag{14.3.6}$$

这里 $c_n:=\sum_{i+j=n}a_ib_j$.

(2) **(幂级数除法)** 假设幂级数 $\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ 的收敛区间为 $(-r,r)$, 其中 $r>0$ 且 $a_0\neq 0$, 则存在 $r'>0$ 和幂级数 $\sum_{n\geq 0}b_nx^n$ 使得其在 $(-r',r')$ 内收敛其满足

$$\sum_{n\geq 0}a_nx^n\cdot\sum_{n\geq 0}b_nx^n\equiv 1, \quad x\in(-r',r').$$

证: (1) 利用**定理14.3.1**.

(2) 不妨假设 $a_0=1$. 递推定义

$$b_0:=1, \quad b_n:=-\sum_{0\leq k\leq n-1}a_{n-k}b_k \ (n\geq 1).$$

则得到

$$c_n:=\sum_{i+j=n}a_ib_j=1, \quad n\geq 0.$$

下证幂级数 $\sum_{n\geq 0}b_nx^n$ 有正的收敛半径. 因为幂级数 $\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ 在 $(-r,r)$ 内收敛, 所以级数 $\sum_{n\geq 0}a_n(r/2)^n$ 收敛. 故存在正数 $M>0$ 满足

$$\left|a_n\left(\frac{r}{2}\right)^n\right|\leq M, \quad \forall\, n\geq 0.$$

则得到

$$\left|b_n\left(\frac{r}{2}\right)^n\right|\leq\sum_{0\leq k\leq n-1}\left|a_{n-k}\left(\frac{r}{2}\right)^{n-k}\right|\left|b_k\left(\frac{r}{2}\right)^k\right|\leq M\sum_{0\leq k\leq n-1}\left|b_k\left(\frac{r}{2}\right)^k\right|;$$

前面几项不等式为

$$\left|b_1\left(\frac{r}{2}\right)\right|\leq M, \quad \left|b_2\left(\frac{r}{2}\right)^2\right|\leq M\left[b_0+\left|b_1\left(\frac{r}{2}\right)\right|\right]\leq M(1+M)\leq(1+M)^2.$$

利用归纳法可得

$$\left|b_n\left(\frac{r}{2}\right)^n\right|\leq(1+M)^n, \quad n\geq 0.$$

因此我们可以取 $r_0:=r/2(1+M)\in(0,r/2)$. 最后令 $r':=\min\{r,r/2(1+M)\}$ 并利用 (1). □

§14.3.3 Taylor 级数再探和初等函数的幂级数展开

假设幂级数 $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ 收敛区间为 (x_0-r, x_0+r), 则**定理14.3.8** 告诉我们和函数 $f(x) := \sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ 在区间 (x_0-r, x_0+r) 内是光滑的且

$$f^{(k)}(x_0) = k!a_k, \quad k \geq 0.$$

故此时

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

这样我们就得到了之前定义的**Taylor 级数** (4.7.30).

一般地, 光滑函数 $f(x)$ 和其 Taylor 级数的关系用如下记号表示:

$$f(x) \sim \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = P_\infty(x; x_0, f). \tag{14.3.7}$$

当 $x_0 = 0$ 得到了**Maclaurin 级数(Maclaurin series)**.

注14.3.12. (1) 给定光滑函数 $f(x) \in C^\infty((x_0-r, x_0+r))$, 则其 Taylor 级数 $\sum_{n\geq 0} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n/n!$ 不一定收敛. 比如考察函数项级数

$$f(x) := \sum_{n\geq 0} \frac{\sin(2^n x)}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) := \frac{\sin(2^n x)}{n!}.$$

由于 $|u_n(x)| \leq 1/n!$, 函数项级数 $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛. 又因为

$$|u_n'(x)| = \left|\frac{2^n\cos(2^n x)}{n!}\right| \leq \frac{2^n}{n!},$$

故函数项级数 $\sum_{n\geq 0} u_n'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上也是一致收敛的. 因此得到

$$f'(x) = \sum_{n\geq 0} u_n'(x).$$

类似地可证明

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n\geq 0} u_n^{(k)}(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{2^{kn}\sin(2^n x + \frac{k\pi}{2})}{n!}$$

从而

$$f(x) \sim \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} e^{2^k} \sin\frac{k\pi}{2} x^k.$$

但是

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}} \sqrt[k]{\left|\frac{1}{k!}\sin\frac{k\pi}{2}\right| e^{2^k}} \geq \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\frac{e^{2^k}}{k^k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} e^{2^k/k} = +\infty.$$

因此收敛区间仅是一点 $x = 0$, 即函数项级数 $\sum_{k\geq 0} \sin\frac{k\pi}{2} e^{2^k} x^k/k!$ 仅在 $x = 0$ 处收敛.

(2) Taylor 级数收敛 $\not\Rightarrow f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$. 反例见**注4.7.12** (2).

如何保证光滑函数的 Taylor 级数就是该函数本身? 已经有**定理4.7.13**. 除此之外, 我们再来介绍两个有效的判别法.

定理14.3.13. (1) $f \in C^{\infty}((x_0 - r, x_0 + r))$ 且积分型余项

$$r_n(x) := \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \longrightarrow 0, \quad n \to +\infty,$$

则

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad |x - x_0| < r. \tag{14.3.8}$$

(2) $f \in C^{\infty}((x_0 - r, x_0 + r))$ 且存在正数 > 0 满足 $|f^{(n)}(x)| \leq M^n$ 对任意 $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, 则 (14.3.8) 成立.

(3) **(Bernstein)** $f \in C^{\infty}([a,b])$ 且 $f^{(n)}(x) \geq 0$, 则对任意 $x, x_0 \in (a,b)$ 只要 $|x - x_0| < b - x_0$ 就有 (14.3.8) 成立.

证: (1) 根据**定理5.4.21** 得到

$$f(x) = \sum_{1\leq k\leq n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x).$$

如果 $\lim_{n\to+\infty} r_n(x) = 0$, 得到 (14.3.8).

(2) 参见**定理4.7.13**.

(3) 令 $M = f(b) - f(a)$. 利用 $f', f'' \geq 0$ 对任意 $x \in (a,b)$ 得到

$$M \geq f(b) - f(x) = (b-x)f'(\xi_x) \geq (b-a)f'(x), \quad \xi_x \text{ 是介于 } b \text{ 和 } x \text{ 之间}.$$

利用 Taylor 公式展开到二阶得到, η_x 是介于 b 和 x 之间,

$$M \geq f(b) - f(x) = f'(x)(b-x) + \frac{f''(\eta_x)}{2}(b-x)^2 \geq \frac{f''(x)}{2}(b-x)^2.$$

一般地就得到

$$0 \leq f^{(n)}(x) \leq \frac{n!M}{(b-x)^n}, \quad x \in (a,b), \quad n \geq 1.$$

如果 $x > x_0$ 则根据**定理5.4.21** 得到

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq \quad r_n(x) \quad = \quad \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \quad \leq \quad (n+1)M\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{(b-t)^{n+1}}dt \\ &\leq \quad \frac{(n+1)M}{b-x}\int_{x_0}^{x}\left(\frac{x-t}{b-t}\right)^n dt \quad \leq \quad \frac{(n+1)M}{b-x}\left(\frac{x-x_0}{b-x_0}\right)^n (x-x_0) \quad \to \quad 0. \end{aligned}$$

如果 $x < x_0$ 且 $x_0 - x < b - x_0$ 则根据**定理5.4.21** 得到

$$|r_n(x)| \quad = \quad \frac{1}{n!}\left|\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt\right| \quad \leq \quad \frac{1}{n!}\int_{x}^{x_0} f^{(n+1)}(t)(t-x)^n dt$$

$$\leq \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n!}\int_x^{x_0}(t-x)^n dt \leq \frac{1}{n!}\cdot\frac{(n+1)!M}{(b-x_0)^{n+1}}\cdot\frac{(x_0-x)^{n+1}}{n+1}$$

$$\leq M\left(\frac{x_0-x}{b-x_0}\right)^{n+1} \to 0.$$

根据 (1) 得到所求的结论. □

例14.3.14. (1) 初等函数的 Taylor 级数展开, 参见**注4.7.12** (3):

$$e^x = \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}, \quad x\in\mathbb{R},$$

$$\sin x = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \quad \cos x = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}, \quad x\in\mathbb{R},$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n, \quad -1<x\leq 1,$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n\geq 0}\binom{n}{\alpha}x^n, \quad \alpha\in\mathbb{R}, \quad -1<x<1,$$

$$\arcsin x = x+\sum_{n\geq 1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}, \quad |x|<1,$$

$$\arctan x = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}, \quad |x|\leq 1.$$

证: (a) 因为 $f(x)=e^x$ 满足 $f^{(n)}(x)=e^x\geq 0$.

(b) 因为 $f(x)=\sin x$ 满足 $f^{(n)}(x)=\sin(x+n\pi/2)\in[-1,1]$.

(c) 类似于 (b).

(d) 因为 $f(x)=\ln(1+x)$ 满足 $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}/(1+x)^n$. 对任意 $r\in(0,1)$ 和任意 $x\in(-r,r)$ 得到 $1+x\in(1-r,1+r)$. 从而 $|f^{(n)}(x)|\leq 1/(1-r)^n$.

(e) 根据 Taylor 公式得到

$$(1+x)^\alpha = \sum_{0\leq k\leq n}\binom{k}{\alpha}x^k + r_n(x),$$

这里

$$\begin{aligned} r_n(x) &:= \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\theta x)(1-\theta)^n x^{n+1} \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^{n+1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n(1+\theta x)^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

当 $x>-1$ 时

$$1+\theta x\geq 1-\theta>0 \implies 0\leq\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\leq 1.$$

因此 $\lim_{n\to+\infty} r_n(x)=0$.

(f) 计算可知

$$\begin{aligned}
\arcsin x &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x (1-t^2)^{-1/2}dt \\
&= \int_0^x \left[\sum_{n\ge 0} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-t^2)^n\right]dt \\
&= \int_0^x \left[\sum_{n\ge 0}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}\right]dt \quad (\text{幂级数收敛区间为 } (-1,1)) \\
&= \sum_{n\ge 0}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_0^x t^{2n}dt = \sum_{n\ge 0}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}
\end{aligned}$$

其中约定 $(-1)!!=0!!\equiv 1$.

(g) 计算得到

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x (1+t^2)^{-1}dt = \int_0^x\left[\sum_{n\ge 0}\frac{(-1)^n n!}{n!}t^{2n}\right]dt$$

$$= \int_0^x\left[\sum_{n\ge 0}(-1)^n t^{2n}\right]dt = \sum_{n\ge 0}(-1)^n\left(\int_0^x t^{2n}dt\right) = \sum_{n\ge 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}. \quad \square$$

(2) (**例4.7.15** (1))考虑函数

$$f(x)=\frac{x}{e^x-1}=\frac{x}{x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots}=1+\cdots.$$

因为幂级数 $\sum_{n\ge 1}x^n/n!$ 的收敛区间为 $\mathbb{R}$, 所以根据**推论14.3.11** (2) 得到

$$f(x)=\sum_{n\ge 0}a_nx^n \implies x = x\cdot\sum_{n\ge 0}\frac{x^n}{(n+1)!}\cdot\sum_{n\ge 0}a_nx^n.$$

根据 Taylor 展开的唯一性得到

$$1=\sum_{n\ge 0}\left[\sum_{i+j=n}\frac{a_j}{(i+1)!}\right]x^n = a_0+\sum_{n\ge 1}\left[\sum_{i+j=n}\frac{a_j}{(i+1)!}\right]x^n$$

从而得到

$$a_0=1, \quad 0=\sum_{i+j=n}\frac{a_j}{(i+1)!} \quad (n\ge 1).$$

前面几项为

$$a_0=1, \quad a_1=-\frac{1}{2}, \quad a_2=\frac{1}{12}, \quad a_3=0, \quad \cdots.$$

一般地可证明

$$a_{2k+1}=0, \quad k\ge 1.$$

实际上,

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = f(x) = \frac{x}{e^x-1}, \quad f(-x) = \frac{-x}{e^{-x}-1} = \frac{x}{e^x-1}e^x = f(x)e^x.$$

故得到

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n x^n = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \cdot \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}\left[\sum_{i+j=n}\frac{a_i}{j!}\right]x^n$$

所以有

$$a_n = (-1)^n \sum_{i+j=n}\frac{a_i}{j!} = (-1)^n \sum_{0\leq i\leq n}\frac{a_i}{(n-i)!}, \quad n\geq 0.$$

最后推出

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (-1)^{n+1}\sum_{0\leq i\leq n+1}\frac{a_i}{(n+1-i)!} = (-1)^{n+1}\left[\sum_{0\leq i\leq n}\frac{a_i}{(n+1-i)!}+a_{n+1}\right] \\ &= (-1)^{n+1}a_{n+1} \end{aligned}$$

因此导致 $a_{n+1}=0$ 如果 n 时偶数. 这样我们可以把 $x/(e^x-1)$ 写成

$$\begin{aligned} \frac{x}{e^x-1} &= \sum_{n\geq 0} a_n x^n = 1+\sum_{n\geq 1} a_n x^n = 1+\sum_{n\geq 1} a_{2n}x^{2n}+\sum_{n\geq 0} a_{2n+1}x^{2n+1} \\ &= 1-\frac{1}{2}x+\sum_{n\geq} a_{2n}x^{2n} = 1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2 - = \frac{1}{720}x^4+\cdots. \end{aligned}$$

和 (4.7.32) 比较得到

$$a_n = \frac{b_n}{n!}, \quad a_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}B_n}{(2n)!}, \quad n\geq 1. \ \square \tag{14.3.9}$$

(3) 求幂级数

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n, \quad a_n := \int_0^n e^{Ct^\alpha n^{-\beta}}dt, \quad C>0, \ \alpha>\beta\geq 0$$

的收敛区间.

解: 观察到

$$a_n \leq e^{Cn^{\alpha-\beta}}\int_0^n dt = ne^{Cn^{\alpha-\beta}}$$

和

$$a_n \geq \int_{n-1}^n e^{Ct^\alpha n^{-\beta}}dt \geq e^{C(n-1)^\alpha n^{-\beta}}\int_{n-1}^n dt = e^{C(n-1)^\alpha n^{-\beta}}.$$

两边求 n 次根得到

$$e^{C(\frac{n-1}{n})^\alpha n^{\alpha-\beta-1}} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq e^{Cn^{\alpha-\beta-1}}\sqrt[n]{n}, \quad n\geq 2,$$

从而推出

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{a_n}=\begin{cases}1, & \alpha-\beta-1<0,\\ e^C, & \alpha-\beta-1=0,\\ +\infty, & \alpha-\beta-1>0.\end{cases}$$

故当 $\alpha-\beta<1$ 时收敛区间为 $(-1,1)$, 当 $\alpha-\beta=1$ 时收敛区间为 $(-e^{-C},e^{-C})$, 而当 $\alpha-\beta>1$ 时收敛区间仅为单点集 $\{0\}$. □

(4) 求函数

$$e^{e^x}=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$$

Taylor 级数的前 4 项, a_0,a_1,a_2,a_3. 一般地可证明

$$\frac{e/C^n}{(\ln n)^n}\leq a_n\leq\frac{e^n}{(\ln n)^n},\quad n\geq 2,\ \exists\, C\geq e.$$

解: 令 $f(x):=e^{e^x}$. 则得到

$$f(0)=e,\quad f'(x)=e^{e^x}e^x,\quad f'(0)=e,$$

$$f''(x)=e^{e^x}(e^x)^2+e^{e^x}e^x=e^{e^x}\left(e^{2x}+e^x\right),\quad f''(0)=2e,$$

$$f'''(x)=e^{e^x}\left(e^{3x}+e^{2x}+2e^{2x}+e^x\right)=e^{e^x}\left(e^{3x}+3e^{2x}+e^x\right),\quad f'''(0)=5e.$$

故 $a_0=e, a_1=e, a_3=5e/6$. 若记 $y=^x$ 则

$$e^y=\sum_{n\geq 0}a_n(\ln y)^n\implies a_n(\ln n)^n\leq^n\implies a_n\leq\frac{e^n}{(\ln n)^n}.\ \square$$

(5) 求幂级数

$$\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n,\quad \sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^{-1}x^n$$

的收敛域.

解: 令

$$a_n:=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\sim\gamma+\ln n.$$

则得到

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{\gamma\to+\infty}\frac{\gamma+\ln(n+1)+o(1)}{\gamma+\ln n+o(1)}=1\implies \text{收敛区间为 }(-1,1).$$

但是 $a_n\to+\infty$, 第一个幂级数的收敛域为 $(-1,1)$.

对第二个幂级数令

$$b_n:=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^{-1}=\frac{1}{a_n}\implies \text{收敛区间为 }(-1,1).$$

当 $x=-1$ 时级数变成 $\sum_{n\geq 1}(-1)^n/a_n$, 利用 Leibniz 判别法可知此时是收敛的. 当 $x=1$ 时技术变成 $\sum_{n\geq 1}1/a_n$. 根据积分不等式推出

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\int_1^n\frac{dx}{x}<1+\ln n<2\ln n,\quad n>e.$$

因此

$$\sum_{n\geq 3}\frac{1}{a_n}>\frac{1}{2}\sum_{n\geq 3}\frac{1}{\ln n},$$

故此时级数发散. 第二个幂级数的收敛域为 $[-1,1)$. □

(6) 假设 $a_0=1, a_1=-7, a_2=-1, a_3=-43$, 且满足递推

$$a_{n+2}+c_1a_{n+1}+c_2a_n=0,\quad n\geq 0,$$

这里 c_1,c_2 是常数. 求 a_n 通项和幂级数 $\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ 的收敛区间.

解: 令

$$f(x):=\sum_{n\geq 0}a_nx^n.$$

则推出

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{n\geq 0}(a_{n+2}+c_1a_{n+1}+c_2a_n)x^{n+2}\\ &= [f(x)-a_0-a_1x]+c_1x[f(x)-a_0]+c_2x^2f(x)\\ &= (c_2x^2+c_1x+1)f(x)-(a_0c_1+a_1)x-a_0.\end{aligned}$$

即

$$f(x)=\frac{a_0+(a_1+c_1a_0)x}{c_2x^2+c_1x+1},\quad c_2x^2+c_1x+1\neq 0.$$

已知条件告诉我们

$$-43-c_1-7c_2=0=-1-7c_1+c_2$$

推出

$$c_1=-1,\ c_2=-6,\ f(x)=\frac{1-8x}{1-x-6x^2}.$$

进一步得到

$$f(x)=\frac{2}{1+2x}-\frac{1}{1-3x}=\sum_{n\geq 0}\left[(-1)^n2^{n+1}-3^n\right]x^n,$$

因为共同的收敛区间为 $(-1/3,1/3)$. □

(7) 定义Laguerre 多项式为

$$L_n(x):=\frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^ne^{-x}\right),\quad n\geq 0.$$

证明

$$L_n(x)=\sum_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k}\frac{(-x)^k}{k!},\quad \int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}L_n(x)dx=\frac{(\alpha-1)^n}{\alpha^{n+1}}.$$

证: 事实上

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\sum_{0\le k\le n}\binom{n}{k}(x^n)^{(k)}(e^{-x})^{(n-k)}$$

$$= \frac{e^x}{n!}\sum_{0\le k\le n}\binom{n}{k}n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}(-1)^{n-k}e^{-x}$$

$$= \sum_{0\le k\le n}\binom{n}{k}\frac{(-x)^{n-k}}{(n-k)!}.$$

特别地得到

$$\frac{1}{\alpha} = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\lim_{n\to+\infty} L_n(x)\,dx, \quad 0<\alpha<1. \ \square$$

(8) 假设 $a_0, a_1 > 0$ 且

$$a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1}, \quad n \ge 1.$$

求幂级数 $\sum_{n\ge0} a_n x^n$, $|x| > 1$.

解: 易知 $a_n > 0$ 且单调递增. 注意到

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{a_n}{n^2} = \frac{a_n}{(n+1)^2} + \frac{2a_{n-1}}{(n+1)^3} - \frac{a_n}{n^2}$$

$$\le \frac{a_n}{(n+1)^2} + \frac{2a_n}{(n+1)^3} - \frac{a_n}{n^2} = -\frac{3n+1}{n^2(n+1)^3}a_n \le 0.$$

故 $\{a_n/n^2\}_{n\ge1}$ 单调递减从而极限 $\lim_{n\to+\infty} a_n/n^2$ 存在. 令

$$f(x) := \sum_{n\ge0} a_n x^n = \sum_{n\ge0} \frac{a_n}{n^2}\cdot n^2 x^2;$$

因为幂级数 $\sum_{n\ge0} n^2 x^n$ 收敛域为 $(-1,1)$, 所以幂级数 $\sum_{n\ge0} a_n x^n$ 的收敛域至少为 $(-1,1)$. 求导得到

$$f'(x) = \sum_{n\ge1} n a_n x^{n-1} = a_1 + \sum_{n\ge1}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$= a_1 + \sum_{n\ge1}(na_n + a_n + 2a_{n-1})x^n = a_1 + xf'(x) + f(x) - a_0 + 2xf(x).$$

从而得到常微分方程

$$(1-x)f'(x) - (1+2x)f(x) = a_1 - a_0, \quad f(0) = a_0.$$

这个方程的相应的齐次方程为

$$(1-x)y' - (1+2x)y = 0 \implies y = c(1-x)^{-3}e^{-2x}.$$

故令

$$f(x) = c(x)(1-x)^{-3}e^{-2x}$$

得到

$$c(x) = \frac{a_1 - a_0}{4}\left(2x^2 - 6x + 5\right)e^{2x} + \lambda$$

和

$$f(x) = \frac{g(x)}{(1-x)^3}, \quad g(x) := \frac{a_1 - a_0}{4}\left(2x^2 - 6x + 5\right) + \lambda e^{-2x}.$$

根据 $f(0) = a_0$ 推出 $\lambda = (9a_0 - 5a_1)/4$. $\square$

(9) 因为

$$x\coth x = x\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = x\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = x\left(1 + \frac{2}{e^{2x}-1}\right) = x + \frac{2x}{e^{2x}-1},$$

所以根据 (4.7.32) 或 (14.3.9) 得到

$$x\coth x = 1 + \sum_{n\ge1}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n}B_n}{(2n)!}x^{2n}. \tag{14.3.10}$$

另一方面类似 (6.4.4) 或 (6.4.28) 可以证明

$$\sinh x = x\prod_{n\ge1}\left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right), \quad \cosh x = \prod_{n\ge1}\left[1 + \frac{x^2}{(\frac{2n-1}{2}\pi)^2}\right]. \tag{14.3.11}$$

求导得到

$$\coth x = \frac{1}{x} + \sum_{n\ge1}\frac{2x}{x^2 + n^2\pi^2}, \quad \frac{1}{\sinh x} = \frac{1}{x} + \sum_{n\ge1}(-1)^n\frac{2x}{x^2+n^2\pi^2}. \tag{14.3.12}$$

根据 (6.4.4) 或 (6.4.28) 得到

$$\ln|\sin x| = \ln|x| + \sum_{n\ge1}\ln\left|1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right|, \quad x \ne \pi\mathbb{Z}$$

和 (因为 $1/\sin x = (\cot(x/2) + \tan(x/2))/2$)

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n\ge1}\frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}, \quad \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n\ge1}(-1)^n\frac{2x}{x^2+n^2\pi^2}. \tag{14.3.13}$$

利用 Riemann zeta 函数从 (14.3.12) 和 (14.3.13) 推出

$$\pi x\cdot\coth \pi x = 1 + 2\sum_{n\ge1}(-1)^{n-1}\zeta(2n)x^{2n}, \quad \pi x\cdot\cot x = 1 - 2\sum_{n\ge1}\zeta(2n)x^{2n}, \tag{14.3.14}$$

这里 $|x| < 1$. 比较 (14.3.10) 和 (14.3.14) 得到

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}B_n}{2(2n)!}, \quad n \ge 1. \tag{14.3.15}$$

特别地我们有

$$\pi x\cdot\coth\pi x=1+\sum_{n\geq1}(-1)^{n-1}\frac{(2\pi)^{2n}B_n}{(2n)!}x^{2n},\ \pi x\cdot\cot\pi x=1-\sum_{n\geq1}\frac{(2\pi)^{2n}B_n}{(2n)!}x^{2n}. \tag{14.3.16}$$

利用恒等式 $\tan x=\cot x-2\cot(2x)$ 得到

$$\tan x=\sum_{n\geq1}\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!}x^{2n-1}=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\cdots,\quad |x|<\frac{\pi}{2}.\ \square \tag{14.3.17}$$

(10) 令单位圆的内接正 n 边形周长为 $2a_n$, 则有

$$\pi=\lim_{n\to+\infty}a_n=\pi.$$

比如

$$a_4=2\sqrt{2},\quad a_6=3,\quad a_{12}=3.10582854,\quad a_{24}=3.13262861.$$

定义

$$b_n:=\frac{4a_{2n}-a_n}{3},\quad c_n:=\frac{16b_{2n}-b_n}{15}.$$

证明数列 $\{c_n\}_{n\geq3}$ 比数列 $\{a_n\}_{n\geq3}$ 更快地收敛到 π.

证: 因为 $a_n=n\sin(\pi/n)$, 所以根据

$$\sin x=\sum_{k\geq1}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1},\quad x\in\mathbb{R},$$

得到

$$\begin{aligned}a_n&=n\sum_{k\geq1}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2k-1}=\pi\sum_{k\geq1}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2(k-1)}\\&=\pi\left[1+\sum_{k\geq2}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2(k-1)}\right]=\pi\left[1-\frac{\pi^2}{6}\frac{1}{n^2}+\cdots\right].\end{aligned}$$

即 $a_n-\pi\sim-\pi^3/6n^2$. 同样计算得到

$$4a_{2n}=\pi\left[4+\sum_{k\geq2}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\frac{1}{4^{-2}}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2(k-1)}\right]$$

$$b_n=\frac{4a_{2n}-a_n}{3}=\pi\left[1+\frac{1}{3}\sum_{k\geq3}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\left(\frac{1}{4^{k-2}}-1\right)\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2(k-1)}\right].$$

故 $b_n-\pi\sim-\pi^5/480n^4$. 从而得到

$$c_n=\pi\left[1+\sum_{k\geq4}\frac{1}{45}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\left(\frac{1}{4^{k-2}}-1\right)\left(\frac{1}{4^{k-3}}-1\right)\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2(k-1)}\right]$$

和 $c_n - \pi \sim -\pi^7/322560n^6$. 因此数列 $\{c_n\}_{n\geq 3}$ 比数列 $\{a_n\}_{n\geq 3}$ 收敛地快. □

(11) 对 $n\times n$ 阶实对称矩阵 A 定义

$$e^A := \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}A^k.$$

证明

$$\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}.$$

证: 存在 $n\times n$ 非奇异矩阵 P 满足

$$P^{-1}AP = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),$$

这里 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是矩阵 A 的特征根. 从而得到

$$e^{P^{-1}AP} = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}(P^{-1}AP)^k = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}P^{-1}A^kP = P^{-1}\left(\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}A^k\right)P = P^{-1}e^AP$$

和

$$\det\left(e^{P^{-1}AP}\right) = \det(e^A),\quad e^{\mathrm{tr}(P^{-1}AP)} = e^{\mathrm{tr}A}.$$

故只需要对 $A=\Lambda$ 证明即可. 此时

$$e^\Lambda = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\mathrm{diag}(\lambda_1^k,\cdots,\lambda_n^k) = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1},\cdots,e^{\lambda_n})$$

和

$$\det(e^\Lambda) = \prod_{1\leq i\leq n}\det(e^{\lambda_i}) = e^{\sum_{1\leq i\leq k}\lambda_i} = e^{\mathrm{tr}(\Lambda)}.\ \square$$

实际上**例14.3.14** (1) 中 e^x 的级数展开当 x 是复数时也成立 (细节之后章节给出), 即

$$e^z = \sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!},\quad z\in\mathbb{C}.$$

特别地取 $z=\sqrt{-1}x$ 得到

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x = \sum_{n\geq 0}\frac{(\sqrt{-1}x)^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n\sqrt{-1}x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

分离实部和虚部得到

$$\cos x = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},\quad \sin x = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},\quad x\in\mathbb{R}.$$

这个和**例14.3.14** (1) 中是一摸一样的.

§14.3.4 * Fibonacci 数列

在**例14.3.10** (4) 中我们得到了 Fibonacci 数列的通项公式. 本小节我们来系统地研究下 Fibonacci 数列, 主要参考文献是吴振奎的专著《斐波那契数列欣赏》.

Fibonacci 数列或者生兔问题是意大利数学家Leonardo Fibonacci[5] 于 1202 年在他的专著《珠算原理》(Liber Abaci) 中提出的:

> *兔子出生以后两个月就能生兔子, 如果每次恰好生一对 (雌雄) 兔子且每月生一次. 假如养了初生的一对小兔, 则一年后共可由多少对兔子 (如果生下来的小兔都不死的话)?*

如果 F_n 表示第 n 个月时的兔子数, 则得到

- $F_1 = 1$: 第一个月只有 1 对兔子;
- $F_2 = 1$: 第一个月的这对兔子还没有成熟故不能生小兔子, 从而第二个月仍旧只有 1 对兔子;
- $F_3 = 2$: 在第三个月, 第一个月的这对兔子生了 1 对兔子, 加上它本身就得到 2 对兔子;
- $F_4 = 3$: 在第四个月, 第一个月的这对兔子又生了 1 对兔子, 但是上个月生的 1 对兔子由于未成熟所以不能生小兔子, 从而共有 3 对兔子;
- $F_5 = 5$: 在第五个月, 第一个月的这对兔子和第三个月的这对兔子都生了 1 对兔子, 再加上第四个月的 1 对兔子, 现在共有 5 对兔子;
- $F_n =?$: $\cdots$

1634 年Girard 发现了 Fibonacci 数列满足递推关系

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad n \geq 2. \tag{14.3.18}$$

上述关系可解释为第 $n+1$ 个月时的兔子对数等于第 $n+1$ 个月时刚出生的新兔子对数加上第 n 个月时的兔子对数; 而第 $n+1$ 个月刚出生的新兔子对数恰好是第 $(n+1)-2 = n-1$ 个月时的兔子对数.

1680 年Cassini 发现了如下恒等式

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n. \tag{14.3.19}$$

利用数学归纳法得到

$$F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = (F_{n+1} + F_n)F_n - F_{n+1}^2 = F_{n+1}(F_n - F_{n+1})F_n^2$$

[5] 1170-1240, 生于意大利的比萨, Fibonacci 是 Filius Bonacci 的缩写, 是“波那契之子”的意思. 他是第一个研究印度和阿拉伯数学的欧洲人.

$$= -(F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2) = (-1)^{n+1}.$$

恒等式 (14.3.19) 可表示为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} \tag{14.3.20}$$

作为直接推论得到 F_n 和 F_{n+1} 是互素的

$$(F_n, F_{n+1}) = 1.$$

18 世纪初, de Moivre 在他的专著《Miscellanea Analytica》中给出了 F_n 的通项公式:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]. \tag{14.3.21}$$

第一个严格证明是Binet 所给出的. 利用数学归纳法易证 (14.3.21), 或者利用幂级数 (参见**例14.3.10** (4)).

练习14.3.15. 证明如下恒等式

$$F_{n-k}F_{m+k} - F_nF_m = (-1)^n F_{m-n-k}F_k,$$

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}, \quad F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}, \quad F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3 = F_{3n},$$

$$F_1^2 + F_{2n+1}^2 + F_{2n+3}^2 = 3F_1F_{2n+1}F_{2n+3}.$$

练习14.3.16. 证明如下恒等式 (DiDomenico, 1991)

$$F_nF_{n+4} - F_{n+1}F_{n+3} = 2(-1)^{n-1},$$

$$F_nF_{n+4} + F_{n+1}F_{n+3} = 2F_{n+2}^2,$$

$$(F_nF_{n+4})^2 - (F_{n+1}F_{n+3})^2 = (-1)^{n-1}(2F_{n+2})^2,$$

$$F_nF_{n+5} + 2F_{n+1}F_{n+4} = 3F_{n+2}F_{n+3},$$

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_{n+3}F_{n+1} = (-1)^{n-1}3, \quad n \geq 2,$$

$$F_{n+1}^2 - F_{n+4}F_{n-2} = (-1)^n 4, \quad n \geq 3,$$

$$F_{n+4}F_{n-2} - F_{n+3}F_{n-} = (-)^n 5, \quad n \neq 1.$$

Fibonacci 数列有限和满足一些有趣的恒等式:

$$\sum_{1\leq k\leq n} F_k = F_{n+2} - 1, \quad \sum_{1\leq k\leq n} F_{2k-1} = F_{2n}, \quad \sum_{1\leq k\leq n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1. \tag{14.3.22}$$

练习14.3.17. 证明 (14.3.22) 和

$$\sum_{1\le k\le n}(-1)^{k+1}F_k=(-1)^{n+1}F_{n-1}+1,\quad \sum_{1\le k\le n}F_{3k}=\frac{1}{2}(F_{3n+2}-1),$$

$$\sum_{1\le k\le n}F_k^2=F_nF_{n+1},\quad \sum_{1\le k\le n}F_k^3=\frac{1}{10}[F_{3n+2}+(-1)^{n+1}6F_{n-1}+5],$$

$$\sum_{1\le k\le n}(n-k+1)F_k=F_{n+4}-n-3,$$

$$\sum_{1\le k\le 2n-1}F_kF_{k+1}=F_{2n}^2,\quad \sum_{1\le k\le 2n}F_kF_{k+1}=F_{2n+1}^2-1,\quad \not{u}_{1\le k\le n}\binom{n}{k}F_{m+k}=F_{m+2n}$$

下面来研究 Fibonacci 数列的无穷和问题. 引入记号

$$\alpha:=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad \beta:=\frac{1-\sqrt{5}}{2}=-\frac{1}{\alpha}.$$

性质14.3.18. (1) 如果 $a,b,k\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ 且满足 $a>b$ 和 $\alpha^a<10^k$, 则

$$\sum_{n\ge 0}\frac{F_{an+b}}{10^{k(n+1)}}=\frac{10^kF_b-(-1)^aF_{b-a}}{10^{2k}-10^k(\alpha^a+\beta^a)+(-1)^a}. \tag{14.3.23}$$

(2) 级数

$$\sum_{n\ge 1}\frac{(-1)^n}{F_nF_{n+1}F_{n+2}}=\sum_{n\ge 1}\frac{1}{F_n}-\sum_{n\ge 1}\frac{1}{F_{n+1}}-\sum_{n\ge 1}\frac{1}{F_{n+2}} \tag{14.3.24}$$

收敛.

证: (1) 根据 (14.3.21) 得到

$$\begin{aligned}\sum_{n\ge 0}\frac{F_{an+b}}{10^{k(n+1)}} &= \sum_{n\ge 0}\frac{1}{10^{k(n+1)}}\frac{\alpha^{an+b}-\beta^{an+b}}{\alpha-\beta}\\ &= \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\frac{\alpha^b}{10^k}\sum_{k\ge 0}\left(\frac{\alpha^a}{10^k}\right)^n-\frac{\beta^b}{10^k}\sum_{k\ge 0}\left(\frac{\beta^a}{10^k}\right)^n\right].\end{aligned}$$

因为 $|\beta|<1$ 所以 $|\beta^a/10^k|<1$. 根据假设条件得到 $|\alpha^a/10^k|<1$. 因此

$$\sum_{n\ge 0}\frac{F_{an+b}}{10^{k(n+1)}}=\frac{1}{\alpha-\beta}\left[\frac{\alpha^b}{10^k}\frac{1}{1-\alpha^a/10^k}-\frac{\beta^b}{10^k}\frac{1}{1-\beta^a/10^k}\right]$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha^b}{10^k-\alpha^a}-\frac{\beta^b}{10^k-\beta^a}\right)=\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\frac{10^k(\alpha^b-\beta^b)-\alpha^b\beta^a+\alpha^a\beta^b}{10^{2k}-10^k(\alpha^a+\beta^a)+(-1)^a}$$

$$=\frac{10^kF_b-(-1)^aF_{b-a}}{10^{2k}-10^k(\alpha^a+\beta^a)+(-1)^a}=\frac{10^kF_b+(-1)^bF_{a-b}}{10^{2k}-10^k(\alpha^a+\beta^a)+(-1)^a}.$$

(2) 利用 (14.3.19) 得到

$$\frac{1}{F_n}-\frac{1}{F_{n+1}}-\frac{1}{F_{n+2}}=\frac{F_{n+1}F_{n+2}-F_nF_{n+2}-F_nF_{n+1}}{F_nF_{n+1}F_{n+2}}$$

$$=\frac{F_{n+1}F_{n+2}-F_nF_{n+1}-F_{n+1}^2+(-1)^k}{F_nF_{n+1}F_{n+2}}=\frac{F_{n+1}(F_{n+2}-F_n)-F_{n+1}^2+(-1)^n}{F_nF_{n+1}F_{n+2}}$$

$$=\frac{(-1)^n}{F_nF_{n+1}F_{n+2}}.\quad\square$$

当 $(a,b,k)=(1,0,1)$ 得到

$$\sum_{k\geq 1}\frac{F_k}{10^{k+2}}=\frac{F_1}{10^2-10(\alpha+\beta)-1}=\frac{1}{89}=\frac{1}{F_{11}}\quad \text{(Stancliff, 1953)};$$

当 $(a,b,k)=(2,0,1)$ 得到

$$\sum_{k\geq 0}\frac{F_{2k}}{10^{k+1}}=\frac{F_2}{10^2-10(\alpha^2+\beta^2)+1}=\frac{1}{71};$$

当 $(a,b,k)=(1,0,2)$ 得到

$$\sum_{k\geq 0}\frac{F_n}{10^{2n+2}}=\frac{F_1}{10^4-10^2(\alpha+\beta)-1}=\frac{1}{9899}.$$

练习14.3.19. 证明如下关于 Fibonacci 数列的不等式:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}<F_n<\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1},$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-\frac{1}{n}}\leq F_n\leq\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+\frac{1}{n}},$$

$$F_{n+1}\leq\sum_{1\leq k\leq n}F_k\leq F_{n+2},\quad F_mF_n<F_{m+n},\quad F_n^m<F_{mn},$$

$$\sum_{1\leq k\leq n}\frac{F_k}{2^n}<2,\quad 1+\frac{1}{\sqrt[n]{F_n}}\leq\sqrt[n]{F_{n+1}}.$$

§14.4 * Tauberian 理论简介

本节来回答本章一开始提到的两个级数的“和”,

$$1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2},\quad 1+2+4+8+\cdots=-1.$$

本节部分内容取自如下两本名著:

- Hardy, G. H. *Divergent series*. Oxford, at the Clarendon Press, 1949. xvi+396 pp.
- Korevaar, Jacob. *Tauberian theory. A century of developments*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **329**, Springer-Verlag, Berlin, 2004, xvi+483 pp. ISBN; 3-540-21058-X

§14.4.1 * 发散级数

最早系统地研究无穷级数的数学家Newton 和Leibniz 曾尝试着使用发散级数, 他们发现发散级数非常有用而且总是可以 (不严格地) 导出非常重要的结论, 而这些重要的结论可以独立的用其它方法来证明.

首先回顾下通常收敛级数求和满足如下性质 (这里级数的通项可以是复数):

(S1) 如果 $\sum_{n\geq 0} a_n = S$, 则对任意 $k \in \mathbb{C}$ 都有 $\sum_{n\geq 0} ka_n = kS$;

(S2) 如果 $\sum_{n\geq 0} a_n = S$ 和 $\sum_{n\geq 0} b_n = T$, 则 $\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n) = S + T$;

(S3) 如果 $S = \sum_{n\geq 0} a_n$ 则 $\sum_{n\geq 1} a_n = S - a_0$, 且反之亦对.

上述三条性质我们抽象出来做成所谓的"**公理**".

一个发散级数的某些计算. 我们知道幂级数

$$\sum_{n\geq 0} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}, \tag{14.4.1}$$

的收敛域是 $(-1,1)$. 但是如果从 (14.4.1) 的右边函数 $(1-x)^{-1}$ 出发, 只要 $x \neq 1$ 时该函数均有意义. 这样一个很自然的问题是若 $|x| > 1$ 时, (14.4.1) 的左边级数能否"定义". 当然这种定义不是通常意义下级数的定义 (此时通常意义下的级数是发散的), 即通常意义下的求和. 假设可以在"某种意义"下定义 (14.4.1) 中左边的级数并把它的"和"记为 S. 那么形式上就有

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = 1 + x(1 + x + x^2 + \cdots) = 1 + xS.$$

注意在这里我们已经假设在"某种意义"下的求和满足上述公理. 此时得到在"某种意义"下求出来的和就等于 $(1-x)^{-1}, x \neq 1$.

(1) 假设 (14.4.1) 在"某种意义"对任何 $x \neq 1$ 都成立. 把 $x = e^{\sqrt{-1}\theta}, 0 < \theta < 2\pi$, 带入 (14.4.1),

$$1 + e^{\sqrt{-1}\theta} + e^{2\sqrt{-1}\theta} + \cdots = \frac{1}{1-e^{\sqrt{-1}\theta}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-1}}{2}\cot\frac{\theta}{2}, \tag{14.4.2}$$

从而得到

$$\sum_{n\geq 1} \cos n\theta = -\frac{1}{2}, \quad 0 < \theta < 2\pi, \tag{14.4.3}$$

$$\sum_{n\geq 1} \sin n\theta = \frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}, \quad 0 < \theta < 2\pi. \tag{14.4.4}$$

作变换 $\theta \to \theta + \pi$ 得到

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}(-1)^n\cos n\theta &= -\frac{1}{2}, \quad -\pi<\theta<\pi, &(14.4.5)\\ \sum_{n\geq 1}(-1)^n\sin n\theta &= -\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}, \quad -\pi<\theta<\pi. &(14.4.6)\end{aligned}$$

在 (14.4.5) 中令 $\theta=0$ 得到

$$1-1+1-\cdots=\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}=\frac{1}{2}. \qquad (14.4.7)$$

如果“某种意义”下的求和满足公理 $(S1)$ – $(S3)$, 则立即得到

$$S=1-1+1-1+\cdots=1-(1-1+1-1+\cdots)=1-S \implies S=\frac{1}{2}.$$

(2) 对 (14.4.5) 和 (14.4.6) 关于 θ 求多次导数得到 $(-\pi<\theta<\pi)$

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}n^{2k}\cos n\theta &= 0, \quad k\geq 1, &(14.4.8)\\ \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}n^{2k+1}\sin n\theta &= 0, \quad k\geq 0, &(14.4.9)\\ \sum_{n\geq 1}(-1)^k+n-1n^{2k}\sin n\theta &= \left(\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}\right)^{(2k)}, \ k\geq 0, &(14.4.10)\\ \sum_{n\geq 1}(-1)^{k+n-1}n^{2k+1}\cos n\theta &= \left(\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}\right)^{(2k+1)}, \ k\geq 0. &(14.4.11)\end{aligned}$$

在 (14.4.8) 和 (14.4.11) 中令 $\theta=0$ 和在 (14.4.9) 中令 $\theta=\pi/2$ 分别得到

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}n^{2k} &= 0, \ k\geq 1, &(14.4.12)\\ \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}n^{2k+1} &= (-1)^k\frac{2^{2k+2}-1}{2k+2}B_{k+1}, \ k\geq 0, &(14.4.13)\\ \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}(2n-1)^{2k+1} &= 0, \quad k\geq 0, &(14.4.14)\end{aligned}$$

在这里用到了 $\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}$ 的 Taylor 级数 (14.3.17)

$$\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}=\sum_{k\geq 0}\frac{2^{2k+2}-1}{(2k+2)!}B_{k+1}\theta^{2k+1},$$

类似地, 从级数

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}e^{\sqrt{-1}(2n-1)\theta}=\frac{e^{\sqrt{-1}\theta}}{1+e^{2\sqrt{-1}\theta}}=\frac{1}{2}\sec\theta, \qquad (14.4.15)$$

并利用 (4.7.33), 这里 E_k 是 Euler 常数,

$$\sec\theta = \frac{2e^x}{e^{2x}+1} = 1 + \sum_{k\geq 1}\frac{E_k}{(2k)!}x^{2k},$$

得到 (14.4.14) 和

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}(2n-1)^{2k} = \frac{(-1)^k}{2}E_k, \quad k \geq 1. \tag{14.4.16}$$

在 (14.4.13) 中令 $k=0$ 得到

$$1-2+3-4+\cdots = \frac{1}{4}. \tag{14.4.17}$$

如果“某种意义”下的求和满足公理 $(S1)$ – $(S3)$, 则立即得到

$$S = 1-2+3-4-\cdots = 1+(-2+3-4+\cdots) = 1-(2-3+4-\cdots)$$
$$= 1-(1-1+1-\cdots)-(1-2+3-\cdots) = 1-\frac{1}{2}-S \implies S =$$

(3) 对 (14.4.5) 积分得到

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{\sin n\theta}{n} = \frac{\theta}{2}, \quad |\theta| < \pi. \tag{14.4.18}$$

根据 Abel 判别法可知, 上述级数在通常意义下是收敛的. 对 (14.4.18) 再次积分得到 (显然级数对任意 θ 都成立, 因为绝对一致收敛)

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{1-\cos n\theta}{n^2} = \frac{\theta^2}{4}, \quad |\theta| \leq \pi. \tag{14.4.19}$$

特别地取 $\theta=\pi$ 得到

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \tag{14.4.20}$$

由于

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n-1)^2} = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} - \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n)^2} = \frac{3}{4}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2},$$

我们得到

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \tag{14.4.21}$$

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \tag{14.4.22}$$

从而 (14.4.19) 变成

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{\cos n\theta}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\theta^2}{4}, \quad |\theta| \leq \pi. \tag{14.4.23}$$

(4) 利用 (14.4.7) 和 (14.4.12), 我们可以从形式上推导出 (14.4.19):

$$\sum_{n\geq1}(-1)^{n-1}\frac{1-\cos n\theta}{n^2} = \sum_{n\geq1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\sum_{k\geq0}(-1)^k\frac{(n\theta)^{2k+2}}{(2k+2)!}$$

$$= \sum_{k\geq0}\frac{(-1)^k\theta^{2k+2}}{(2k+2)!}\sum_{n\geq1}(-1)^{n-1}n^{2k} = \frac{\theta^2}{2}(1-1+1-\cdots) = \frac{\theta^2}{4}.$$

上述“形式推导”可以推广如下. 假设幂级数

$$f(\theta)=\sum_{n\geq0}a_n\theta^{2n}$$

对任意 θ 都收敛, 即它的收敛区间为 $\mathbb{R}$. 则形式上推导出

$$\sum_{n\geq1}(-1)^{n-1}\frac{f(n\theta)}{n^2} = \sum_{n\geq1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\sum_{k\geq0}a_k(n\theta)^{2k}$$

$$= \sum_{k\geq0}a_k\theta^{2k}\sum_{n\geq1}(-1)^{n-1}n^{2k-2} = a_0\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}+a_1\theta^2\sum_{n\geq1}(-1)^{n-1} \tag{14.4.24}$$

$$= \frac{\pi^2}{12}a_0+\frac{\theta^2}{2}a_1.$$

然而上述公式一般来说是不对的, 比如取 $f(\theta)=e^{-\theta^2}$, 此时

$$\sum_{n\geq1}(-1)^{n-1}\frac{e^{-n^2\theta^2}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}-\frac{\theta^2}{2},$$

对任意 θ 不一定成立. 但是对相当一大类函数公式 (14.4.24) 是对的, 比如对 **Bessel函数**[6](参见注**14.3.9** (2))

$$J_0(\theta):=\sum_{n\geq0}\frac{(-1)^n}{[(2n)!!]^2}\theta^{2n}=1-\frac{\theta^2}{2^2}+\frac{\theta^4}{2^2\cdot4^2}-\cdots,$$

就有

$$\sum_{n\geq1}(-1)^{n-1}\frac{J_0(n\theta)}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}-\frac{\theta^2}{8},\quad |\theta|<\pi. \tag{14.4.25}$$

(5) 根据 (14.4.4) 得到

$$\sum_{n\geq1}\cos n\theta\cdot\sin n\phi=\frac{1}{4}\left[\cot\frac{\phi+\theta}{2}+\cot\frac{\phi-\theta}{2}\right]=\frac{1}{2}\frac{\sin\phi}{\cos\theta-\cos\phi}$$

[6] k 阶Bessel 函数定义为

$$J_k(x)=\sum_{n\geq0}\frac{(-1)^n}{n!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k},\quad k\geq0.$$

和

$$\frac{\cos m\theta - \cos m\phi}{\cos\theta - \cos\phi} = 2\sum_{n\geq 1}\frac{\sin n\phi}{\sin\phi}\cos n\theta(\cos m\theta - \cos m\phi), \quad m \geq 1.$$

两边积分得到

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos m\theta - \cos m\phi}{\cos\theta - \cos\phi}d\theta = \pi\frac{\sin m\phi}{\sin\phi}. \tag{14.4.26}$$

当然公式 (14.4.26) 可以用其它方法独立得到.

(6) 从 (14.4.4) 和 (14.4.6) 推出

$$\sum_{n\geq 1}\sin[(2n-1)\theta] = \frac{1}{2}\csc\theta, \quad \sum_{n\geq 1}\sin[(2n)\theta] = \frac{1}{2}\cot\theta.$$

由于

$$\int_0^{\pi/2}\theta\sin[(2n-1)\theta]\,d\theta = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}, \quad \int_0^{\pi/2}\theta\sin(2n\theta)\,d\theta = \frac{(-1)^{n-1}}{4n}\pi,$$

所以得到

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\theta}{\sin\theta}d\theta = 2\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}, \tag{14.4.27}$$

$$\int_0^{\pi/2}\theta\cot\theta\,d\theta = \frac{\ln 2}{2}\pi. \tag{14.4.28}$$

当然这两个公式可由其它方法独立得到.

目前为止, 上述公式中只有 (14.4.18) – (14.4.23), (14.4.25) – (14.4.28) 是正确的. 其它公式我们希望在“某种意义”下是正确的.

§14.4.2 * 级数求和的一般定义

本小节我们给出级数求和的一般定义. 给定数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$, 若在意义 P 下可定义求和 $\sum_{n\geq 0}a_n = S$, 则称级数 $\sum_{n\geq 0}a_n$ 是P- **求和的 (P-summable)** 或S 是 $\sum_{n\geq 0}a_n$ 的P- **和 (P-sum)**, 并记作

$$\sum_{n\geq 0}a_n =_{\mathbf{P}} S.$$

同时也称 S 是部分和 S_n 的P- **极限 (P-limit)** 并记作

$$\lim_{n\to+\infty}S_n =_{\mathbf{P}} S.$$

如果“意义 P ”就是“通常意义”则上述定义回归到级数收敛的原始定义上来. 下面我们给出其它意义下的级数和.

(1) Cesàro $(\mathbf{C},1)$- 和. 如果 $S_n := \sum_{0\le k\le n} a_k$ 且

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{0\le k\le n} S_k = S, \tag{14.4.29}$$

则称S **是 $\sum_{n\ge1} a_n$ 的 $(\mathbf{C},1)$- 和**并记作

$$\sum_{n\ge0} a_n =_{\mathbf{C}} S.$$

D. Bernoulli 在 1771 年使用 $(\mathbf{C},1)$- 和来研究某类特殊的级数, 之后Leibniz 在 1713 年用该求和方法来研究发散级数 $1-1+1-1+\cdots$. 当然D. Bernoulli 和Leibniz 都没有给出 $(\mathbf{C},1)$- 和的定义 (或许他们早就知道定义了). Frobenius 在 1880 年和Hölder 在 1882 年也隐约地使用 $(\mathbf{C},1)$- 和, 直到 1890 年, Cesàro 在他发表的关于级数乘法的论文中第一次给出 $(\mathbf{C},1)$- 和的确切定义.

(2) Abel A- 和. 假设幂级数 $\sum_{n\ge0} a_n x^n$ 在 $|x|<1$ 内收敛并假设和函数 $f(x)$ 满足

$$\lim_{x\to1-} f(x) = S, \tag{14.4.30}$$

则称S **是 $\sum_{n\ge1} a_n$ 的 A- 和**并记作

$$\sum_{n\ge0} a_n =_{\mathbf{A}} S.$$

A- 和也成为 **P**- 和, 这是因为Poisson 在研究 Fourier 级数求和时使用过. 当然这个求和方法可追溯到Euler 和Leibniz. 这个方法之所以被称为 **A**- 和主要是因为该方法依赖于 Abel 关于幂级数的连续性的定理, 即**定理14.3.7**.

(3) Euler $(\mathbf{E},1)$- 和. 假设幂级数 $\sum_{n\ge0} a_n x^n$ 对充分小的 x 收敛, 并记

$$x = \frac{y}{1-y}, \quad y = \frac{x}{1+x}. \tag{14.4.31}$$

当 x 和 y 充分小时得到展开

$$\begin{aligned} xf(x) &= \sum_{n\ge0} a_n x^{n+1} = \sum_{n\ge0} a_n\left(\frac{y}{1-y}\right)^{n+1} = \sum_{n\ge0} a_n \sum_{k\ge0}\binom{n+k}{k} y^{n+k+1} \\ &= \sum_{n\ge0} a_n \sum_{k\ge n}\binom{k}{k-n} y^{k+1} = \sum_{k\ge0} y^{k+1}\sum_{0\le n\le k}\binom{k}{k-n} a_n \\ &= \sum_{k\ge0} y^{k+1}\sum_{0\le n\le k}\binom{k}{n} a_n = \sum_{k\ge0} b_k y^{k+1}, \end{aligned}$$

其中

$$b_0 = a_0, \quad b_k = \sum_{0\le n\le k}\binom{k}{n} a_n. \tag{14.4.32}$$

因为当 $y=1/2$ 时 $x=1$, 所以称S 是 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 的 $(\mathbf{E},1)$- 和并记作

$$\sum_{n\geq 0} a_n =_{\mathbf{E}} S$$

如果

$$\sum_{k\geq 0} \frac{b_k}{2^{k+1}} = S \tag{14.4.33}$$

成立.

$(\mathbf{E},1)$- 和方法来自 “Euler 变换”, 这个变换可以把收敛速度较慢的级数转换成收敛速度很快的级数.

(4) Borel B- 和. 假设幂级数 $\sum_{n\geq 0} S_n x^n/n!$ 对任意 x 都收敛且函数

$$F(x) := e^{-x} \sum_{n\geq 0} \frac{S_n}{n!} x^n \to S, \quad x\to +\infty, \tag{14.4.34}$$

则称S 是 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 的 **B**- 和并记作

$$\sum_{n\geq 0} a_n =_{\mathbf{B}} S.$$

这个求和方法是Borel 在 1899 年给出的.

(5) Hutton $(\mathbf{H},1)$**- 和.** 令 $S_n^{(0)} := S_n \ (n\geq 0)$, $S_{-1}^{(k)} = S_{-2}^{(k)} := 0 \ (k\geq 0)$, 和递推定义

$$S_n^{(k)} := \frac{1}{2} S_{n-1}^{(k-1)} + \frac{1}{2} S_n^{(k-1)}, \quad n\geq 0.$$

计算易得

$$S_n^{(1)} = \frac{1}{2} S_{n-1} + \frac{1}{2} S_n, \quad S_n^{(2)} = \frac{1}{2} S_{n-2} + \frac{1}{4} S_{n-1} + \frac{1}{4} S_n, \quad n\geq 0.$$

如果

$$\lim_{n\to+\infty} S_n^{(k)} = S, \tag{14.4.35}$$

则称S 是 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 的 $(\mathbf{H},k)$- 和并记作

$$\sum_{n\geq 0} a_n =_{\mathbf{H},k} S.$$

这个求和方法是Hutton 在 1812 年给出的.

可以证明 $(\mathbf{C},1)$- 和, **A**- 和, 以及 $(\mathbf{E},1)$- 和都满足公理 $(S1)-(S3)$. 具体细节可参考本节一开始提到的Hardy 的名著.

例14.4.1. (1) 考虑, 通常意义下的, 发散级数

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n = 1-1+1-1+\cdots.$$

则部分和为

$$S_n = \begin{cases} 1, & n\text{ 偶数}, \\ 0, & n\text{ 奇数}. \end{cases}$$

因此 (14.4.29) 的极限为 $\frac{1}{2}$. 同理可证, 因为 $\sum_{n\geq 0}(-x)^n = (1+x)^{-1}$, (14.4.30) 可给出 $\frac{1}{2}$. 从 (14.4.32) 得到 $b_0 = 1$ 和 $b_k = 0$ $(k \geq 1)$, 故 (14.4.33) 也给出 $\frac{1}{2}$. 但是 (14.4.34) 给出了 $F(x) = e^{-x}e^{-x} = e^{-2x} \to 0$, $x \to +\infty$. 而 (14.4.35) 同样又给出了 $S_n^{(1)} = \frac{1}{2}$, $n \geq 0$.

	$(\mathbf{C},1)$	$\mathbf{A}$	$(\mathbf{E},1)$	$\mathbf{B}$	$(\mathbf{H},1)$	$(\mathbf{H},2)$
$\sum_{n\geq 0}(-1)^n$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\nexists$

(2) 考虑, 通常意义下的, 发散级数

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n(n+1) = 1-2+3-4+\cdots.$$

类似地可计算得到

	$(\mathbf{C},1)$	$\mathbf{A}$	$(\mathbf{E},1)$	$\mathbf{B}$	$(\mathbf{H},1)$	$(\mathbf{H},2)$
$\sum_{n\geq 0}(-1)^n(n+1)$	$\nexists$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\nexists$	$\frac{1}{4}$

(3) 考虑, 通常意义下的, 发散级数

$$\sum_{n\geq 0}(n+1) = 1+1+1+1+\cdots.$$

类似地可计算得到

	$(\mathbf{C},1)$	$\mathbf{A}$	$(\mathbf{E},1)$	$\mathbf{B}$	$(\mathbf{H},1)$	$(\mathbf{H},2)$
$\sum_{n\geq 0}(n+1)$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$

练习14.4.2. 完成**例14.4.1** 中剩下例子的计算.

§14.4.3 * 求和的正则性问题

给出上述几个关于 P- 求和的例子后, 一个很自然的问题就是: 如果级数 $\sum_{n\geq 1} a_n$ 本身就是收敛的话, 那对这个级数的 P- 求和就是通常意义下的求和. 这就是所谓的**求和的正则性问题 (regularity of summation)**, 如果某个 P- 求和是正则的, 则这个求和方法就是把对收敛级数求和推广到发散级数求和. 在上节我们已经看到对发散级数做些运算往往会得到意想不到的结果, 当然为了使运算过程合理化, 我们需要对发散级数的求和进行新的定义.

可以证明上述提到的四种求和方法都是正则的, 具体细节可参考本节一开始提到的两本名著.

§14.4.4 * Tauberian 理论

求和的正则性告诉我们, 收敛级数的 P- 求和就是普通意义下的求和. 反之, 就是著名的**Tauberian 问题** (1897), 即, 可 P- 求和的级数什么时候可在普通意义下收敛?. 用数学语言可表示为

$$\sum_{n\geq 0} a_n \text{ 是 } P\text{- 可求和的} \quad ??? \Longrightarrow ??? \quad \sum_{n\geq 0} a_n \text{ 是收敛的.} \tag{14.4.36}$$

为了回答上述问题, Tauber 引入了**Tauberian 条件**, 即关于通项 a_n 的条件, 简记为 $\mathbf{T}\{a_n\}$. Tauber 给出的定理可简单概括为

定理14.4.3. (Tauber, 1897) 级数的 Tauberian 定理可表述为

$$\sum_{n\geq 0} a_n \text{ 是 } P\text{- 可求和的且满足条件 } T\{a_n\} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n\geq 0} a_n \text{ 是收敛的.} \tag{14.4.37}$$

当然对不同的 P- 求和, 条件 $T\{a_n\}$ 是不相同的.

定理14.4.4. (Cesàro 求和的 Tauber 型定理; Hardy, 1910; Laudau, 1910) 考虑**Hardy 条件**

$$|na_n| \leq C,$$

或者**Laudau 条件**

$$na_n \geq -C.$$

则有

$$\sum_{n\geq 0} a_n \text{ 是 } (\mathbf{C},1)\text{- 可求和的且满足条件 } T\{a_n\} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n\geq 0} a_n \text{ 是收敛的.}$$

Hardy 在 1910 年提出了如下猜想: **定理14.4.4** 中的 Hardy 条件是否也适用于 Abel 求和? Littlewood 在 1911 年证实了 Hardy 的猜想.

定理14.4.5. (Abel 求和的 Tauber 型定理; Tauber, 1897; Hardy-Littlewood, 1911; Hardy-Littlewood, 1914) 考虑**Tauber 条件**

$$na_n \to 0,$$

或者**Hardy 条件**

$$|na_n| \leq C,$$

或者**Hardy-Littlewood-Laudau 条件**

$$na_n \geq -C.$$

则有

$$\sum_{n\geq 0} a_n \text{ 是 } \mathbf{A}\text{- 可求和的且满足条件 } T\{a_n\} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n\geq 0} a_n \text{ 是收敛的.}$$

除此之外, Hardy 和Littlewood 还给出了这样的结论: 如果 $\sum_{n\geq 0} a_n$ 是可 Abel 求和的且部分和满足 $S_n \geq -C$, 则 $\sum_{n\geq 0} a_n$ 是可 Cesàro 可求和的.

定理14.4.6. (Borel 求和的 Tauber 型定理; Hardy-Littlewood, 1916; Schmidt, 1925) 考虑**Hardy-Littlewood** 条件

$$|\sqrt{n}a_n| \leq C,$$

或者**Schmidt** 条件

$$\sqrt{n}a_n \geq -C.$$

则有

$$\sum_{n\geq 0} a_n \text{ 是 } \mathbf{B}\text{- 可求和的且满足条件 } T\{a_n\} \implies \sum_{n\geq 0} a_n \text{ 是收敛的.}$$

在 Hardy-Littlewood 条件下, Hardy 和Littlewood 在 1943 年给出了上述定理的另一个证明.

§14.4.5 * Sine 积分函数

本节主要参考《拉玛努金遗失笔记(第 4 卷)》和《Classical Fourier analysis (third edition)》中的部分内容. 其应用会在 §16.2.8 中给出.

对 $x \geq 0$ 定义**sine 积分函数**为

$$\mathbf{Si}(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt. \tag{14.4.38}$$

利用分部积分得到

$$\mathbf{Si}(x) = \int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt - \frac{\cos x}{x} + \cos 1 - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt$$

从而得到

$$\lim_{x\to+\infty} \mathbf{Si}(x) = \int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt + \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

故极限 $\lim_{x\to+\infty} \mathbf{Si}(x)$ 存在. 但是确切的值我们将在**例15.2.14** 中求得, 即

$$\lim_{x\to+\infty} \mathbf{Si}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

利用**例14.3.14** (1) 中 $\sin x$ 的级数展开得到

$$\mathbf{Si}(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}, \quad x \geq 0. \tag{14.4.39}$$

性质14.4.7. 对任意 $x > 0$ 有

$$\left|\frac{\pi}{2} - \mathbf{Si}(x)\right| \leq \frac{2}{x}. \tag{14.4.40}$$

因此函数列 $\{\mathbf{Si}(nx)\}_{n\geq 1}$ 在任意区间 $[\delta, +\infty)$ 上时一致收敛到 $\pi/2$, 这里 $\delta > 0$.

证: 利用分部积分得到

$$\begin{aligned}\left|\frac{\pi}{2} - \mathbf{Si}(x)\right| &= \left|\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt\right| = \left|\int_x^{+\infty} \frac{-1}{t} d\cos t\right| \\ &= \left|\frac{\cos x}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt\right| \leq \frac{1}{x} + \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{2}{x}. \quad \square\end{aligned}$$

根据

$$\mathbf{Si}'(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad \mathbf{Si}''(x) = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2},$$

我们得到

$$\mathbf{Si}'(n\pi) = 0, \quad \mathbf{Si}''(x)(n\pi) = \frac{(-1)^n}{n\pi}, \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

因此函数 $\mathbf{Si}(x)$ 在 $\pi, 3\pi, 5\pi, \cdots$ 处有极大值而在 $2\pi, 4\pi, 6\pi, \cdots$ 处有极小值. 进一步, 函数 $\mathbf{Si}(x)$ 在区间 $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ 上单调递增而在区间 $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$ 上单调递减. 计算得到

$$\begin{aligned}\mathbf{Si}((2k+1)\pi) - \mathbf{Si}((2k-1)\pi) &= \int_0^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt - \int_0^{(2k-1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt \\ = \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt &= \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt + \int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} \frac{\sin t}{t} dt \\ = \int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} \sin t \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+\pi}\right) dt &= \int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} \frac{\pi \sin t}{t(t+\pi)} dt < 0.\end{aligned}$$

故得到

$$\mathbf{Si}(\pi) > \mathbf{Si}(3\pi) > \mathbf{Si}(5\pi) > \cdots > \frac{\pi}{2}. \tag{14.4.41}$$

同样可以证明

$$\mathbf{Si}(2\pi) < \mathbf{Si}(4\pi) < \mathbf{Si}(6\pi) < \cdots < \frac{\pi}{2}. \tag{14.4.42}$$

最后得到

$$\max_{[0,+\infty)} \mathbf{Si}(x) = \mathbf{Si}(\pi), \quad \min_{[0,+\infty)} \mathbf{Si}(x) = 0, \quad \min_{[\pi,+\infty)} \mathbf{Si}(x) = \mathbf{Si}(2\pi). \tag{14.4.43}$$

Ramanujan 给出了 $\mathbf{Si}(x)$ 在极值点处的具体值. 引入函数

$$\mathbf{si}(x) := -\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt, \quad \mathbf{ci}(x) := -\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt. \tag{14.4.44}$$

因此得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt = \mathbf{ci}(x)\sin x - \mathbf{si}(x)\cos x, \quad x > 0.$$

因为

$$\mathbf{si}'(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad \mathbf{ci}'(x) = \frac{\cos x}{x}$$

所以

$$\begin{aligned}
\left[\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt\right]'' &= \left[\frac{\sin x \cos x}{x} + \mathbf{ci}(x)\cos x - \frac{\sin x \cos x}{x} + \mathbf{si}(x)\sin x\right]' \\
&= [\mathbf{ci}(x)\cos x + \mathbf{si}(x)\sin x]' \\
&= \frac{\cos^2 x}{x} - \mathbf{ci}(x)\sin x + \frac{\sin^2 x}{x} + \mathbf{si}(x)\cos x \\
&= \frac{1}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt.
\end{aligned}$$

根据**定理15.2.11** (3), 求导和求积分可积交换 (一致收敛性非常容易验证), 有

$$\begin{aligned}
\left[\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt\right]'' \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt &= \left[\int_0^{+\infty} \frac{-te^{-xt}}{1+t^2} dt\right]' + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt} + e^{-xt}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = 1.
\end{aligned}$$

从而得到

$$y := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt - \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt \quad \text{满足常微分方程} \quad y'' + y = 0.$$

通解为 $y = c_1 \sin(c_2 + x)$, 这里 c_1, c_2 是两个常数. 令 $x \to +\infty$ 时得到 $c_1 = 0$ 从而有 $y \equiv 0$.

引理14.4.8. 当 $x > 0$ 时有

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt = \mathbf{ci}(x)\sin x - \mathbf{si}(x)\cos x, \tag{14.4.45}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t^2} dt = -\mathbf{ci}(x)\cos x - \mathbf{si}(x)\sin x, \tag{14.4.46}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} \ln(1+t^2) dt = \mathbf{ci}^2(x) + \mathbf{si}^2(x). \tag{14.4.47}$$

练习14.4.9. 验证恒等式 (14.4.46) 和 (14.4.47).

性质14.4.10. (Ramanujan) 对每个 $x \geq 0$ 若定义 $r > 0$ 和 $\theta \in (0, \pi/2)$ 如下

$$r\cos\theta := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt, \quad r\sin\theta := \int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t^2}dt, \tag{14.4.48}$$

则

$$r^2 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}\ln(1+t^2)dt, \quad \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2} - r\cos(x-\theta). \tag{14.4.49}$$

因此

$$\mathbf{Si}((2n+1)\pi) = \frac{\pi}{2} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(2n+1)\pi t}}{1+t^2}dt, \tag{14.4.50}$$

$$\mathbf{Si}(2n\pi) = \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2n\pi t}}{1+t^2}dt. \tag{14.4.51}$$

证: 根据定义和**引理14.4.8** 得到

$$\begin{aligned} r^2 &= r^2\cos\theta^2 + r^2\sin^2\theta \\ &= [\mathbf{ci}(x)\sin x - \mathbf{si}(x)\cos x]^2 + [-\mathbf{ci}(x)\cos x - \mathbf{si}(x)\sin x]^2 \\ &= \mathbf{ci}^2(x) + \mathbf{si}^2(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}\ln(1+t^2)dt. \end{aligned}$$

类似地得到

$$\begin{aligned} r\cos(x-\theta) &= r\cos x\cos\theta + r\sin x\sin\theta \\ &= \cos x[\mathbf{ci}(x)\sin x - \mathbf{si}(x)\cos x] + \sin x[-\mathbf{ci}(x)\cos x - \mathbf{si}(x)\sin x] = -\mathbf{si}(x). \end{aligned}$$

作为推论得到

$$\mathbf{Si}((2n+1)\pi) = \frac{\pi}{2} - r\cos((2n+1)\pi - \theta) = \frac{\pi}{2} + r\cos\theta$$

这里 r 和 θ 是 $x = (2n+1)\pi$ 所对应的值. 从而可知

$$\mathbf{Si}((2n+1)\pi) = \frac{\pi}{2} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(2n+1)\pi t}}{1+t^2}dt. \quad \square$$

§14.5 参考文献

1. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis I*, Translated from the 1988 German original by Gary Brookfield, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. xiv+426 pp. ISBN: 3-7643-7153-6

2. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis II*, Translated from the 1999 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. xii+400 pp. ISBN: 978-3-7643-7472-3; 3-7643-7472-3

3. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis III*, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. xii+468 pp. ISBN: 978-3-7643-7479-2; 3-7643-7479-2

4. Grafakos, Loukas. *Classical Fourier analysis*, Third edition, Graduate Texts in Mathematics, **249**, Springer, New York, 2014. xviii+638 pp. ISBN: 978-1-4939-1193-6; 978-1-4939-1194-3

5. Hardy, G. H. *Divergent series*, Oxford, at the Clarendon Press, 1949. xvi+396 pp.

6. Korevaar, Jacob. *Tauberian theory. A century of developments*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **329**, Springer-Verlag, Berlin, 2004, xvi+483 pp. ISBN; 3-540-21058-X

7. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis I*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+574 pp. ISBN: 3-540-40386-8

8. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis II*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xvi+681 pp. ISBN: 3-540-40633-6

9. 布鲁斯· C. 伯恩特(Bruce C. Berndt) 主编: **拉玛努金笔记**(第1, 2, 3, 4 卷), 哈尔滨工业大学出版社, 2019.

10. 布鲁斯· C. 伯恩特(Bruce C. Berndt), 乔治· E. 安德鲁斯 (George E. Andrews) 主编: **拉玛努金遗失笔记**(第 1, 2, 3, 4 卷), 哈尔滨工业大学出版社, 2019.

11. 常庚哲, 史济怀 编: **数学分析教程** (上、下册), 高等教育出版社, 2003.

12. 陈天权 编著: **数学分析讲义** (第一、二、三册), 北京大学出版社, 2009.

13. 邓建平 编: **微积分I 和II**, 科学出版社, 2019.

14. Duhham, William 著(李伯民, 汪军, 张怀勇 译): **微积分的历程** – 从牛顿到勒贝格, 人民邮电出版社, 2013.

15. 吉米多维奇 著(李荣湅, 李植 译): **数学分析习题集** (根据2010年俄文版翻译), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.

16. Kline, Morris 著(张理京, 张炎热, 江泽涵等 译): **古今数学思想** (第一、二、三册), 上海科学技术出版社, 2014.

17. 李傅山, 王培合 编著: **数学分析习题课讲义** (1、2、3), 北京大学出版社, 2018.

18. 李逸 编著: **数学分析讲义**, 上海交通大学数学分析课讲义(未出版), 2016.

19. 林源渠, 方企勤 编: **数学分析解题指南**, 北京大学出版社, 2003.

20. 梅加强 编著: **数学分析**, 高等教育出版社, 2015.

21. 裴礼文 编著: **数学分析中的典型问题与方法** (第二版), 高等教育出版社, 2015.

22. Riemann, Bernhard 著(李培廉 译): **黎曼全集** (第一、二卷), 高等教育出版社, 2016.

23. 汪林 著: **数学分析中的问题和反例**, 现代数学基础 **56**, 高等教育出版社, 2015.

24. Weir, D. Maurice; Hass, R. Joel; Giordano, R. Frank. *Thomas' calculus*, Eleventh Edition, (影印版, 上、下册), 高等教育出版社, 2016.

25. 吴振奎 编著: **斐波那契而数列欣赏**, 第 2 版, 哈尔滨工业大学出版社, 2018.

26. 徐森林, 薛春华 编著: **数学分析**, 清华出版社, 2005.

27. 杨小远, 孙玉泉, 薛玉梅, 杨卓琴 编著: **工科数学分析教程** (上、下册), 科学出版社, 2011.

28. 张福保, 薛金美, 潮小李 主编: **数学分析讲义**, 科学出版社, 2019.

29. 张筑生 编著: **数学分析新讲** (第一、二、三册), 北京大学出版社, 1990.

30. 周民强 编著: **数学分析习题演练** (第一、二、三册), 科学出版社, 2018.

31. 朱尧辰 编著: **数学分析例选通过范例学技巧**, 哈尔滨工业大学出版社, 2013.

第十五章　含参变量积分

Ramanujan 不等式,

$$\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{e}\right)^x\left(8x^3+4x^2+x+\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{6}} \quad < \quad \Gamma(x+1)$$

$$< \quad \sqrt{\pi}\left(\frac{x}{e}\right)^x\left(8x^3+4x^2+x+\frac{1}{30}\right)^{\frac{1}{6}}, \quad x \geq 0.$$

稍微精确的不等式以征求问题解的形式由Ramanujan 于1916 年发表在印度数学会期刊上, 而上述精确的不等式则出现在Ramanujan 遗失的笔记中（见本章的参考文献）. 完整的证明则分别由Karatsuba 在2001 年给出 $(x \geq 1)$ 和Alzer 在2003 年给出 $(0 \leq x \leq 1)$.

在第三节我们将给出Ramanujan 不等式.

§15.1　含参变量定积分

给定多元函数 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in X \times Y \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, 其中 X, Y 都是区域. 如果对任意给定的 $\boldsymbol{y} \in Y$, 函数 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 在 Y 上可积或广义可积, 则得到定积分或反常积分

$$I(\boldsymbol{y}) := \int_X f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{y} \in Y, \tag{15.1.1}$$

并称为**含参变量积分(integral depending on parameters)**.

例15.1.1. 考虑反常积分

$$I := \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

在**例**5.5.18 (1) 已经证明上述反常积分是条件收敛的. 在**例14.3.14** (1) 我们得到了 $\sin x/x$ 的幂级数展开

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \sum_{n\geq 0}\frac{(-x^2)^n}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

为了求出 I 的值, 我们观察到 $\sin x/x$ 当 $x \to 0+$ 时趋于 1, 而当 $x \to +\infty$ 时趋于 0. 但是当 $x \to +\infty$ 时 $\sin x/x$ 的收敛到 0 的速度不够快, 为此我们乘以因子 $e^{-\alpha x}$ 而考虑含参变量积分

$$I(\alpha) := \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x} dx, \quad \alpha \geq 0.$$

当 $\alpha > 0$ 时作形式上的求导（即暂且不考虑求积分和求导是否可以交换）

$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty}\left(-e^{-\alpha x}\sin x\right)dx = \left.\frac{e^{-\alpha x}(\alpha\sin x+\cos x)}{1+\alpha^2}\right|_0^{+\infty} = \frac{-1}{1+\alpha^2}.$$

从而得到 (这里假设函数 $I(\alpha)\in C^([0,+\infty))$)

$$I(\alpha)=-\tan^{-1}\alpha+I(0),\quad \alpha>0.$$

因为

$$|I(\alpha)|\le\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha}\to 0,\quad \alpha\to+\infty.$$

最后得到 $I(0)=\pi/2$.

上述推导有两个问题没有解决, 即

$$\frac{d}{d\alpha}\int_0^{+\infty}???=???\int_0^{+\infty}\frac{d}{d\alpha},\quad \lim_{\alpha\to+\infty}\int_0^{+\infty}???=???\int_0^{+\infty}\lim_{\alpha\to 0+}.$$

本节和下节就来回答这些问题.

§15.1.1 含参变量定积分的定义

假设二元函数 $f(x,y)$ 定义在闭矩形 $D:=[a,b]\times[c,d]$ 上, 且对任意 $y\in[c,d]$, 函数 $f(\cdot,x)\in R([a,b])$. 定义函数

$$I(y):=\int_a^b f(x,y)dx,\quad c\le x\le d. \tag{15.1.2}$$

如果

$$a\le\varphi(y),\psi(y)\le b,\quad \forall\, y\in[c,d],$$

则定义函数

$$J(y):=\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)}f(x,y)dx,\quad c\le y\le d. \tag{15.1.3}$$

§15.1.2 含参变量定积分的基本性质

和函数项级数一样, 含参变量定积分也具有求积分和求极限、求积分、求导数相交换的性质.

定理15.1.2. (基本性质) (1) **(连续性定理)** $f\in C(D)\Longrightarrow I(y)\in C([c,d])$. 作为推论得到

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b\lim_{y\to y_0}f(x,y)dx. \tag{15.1.4}$$

(2) **(积分顺序可交换定理)** $f\in C(D)\Longrightarrow$

$$\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx. \tag{15.1.5}$$

(3) **(积分号下求导定理)** $f,f_y\in C(D)\Longrightarrow I(y)\in D([a,b])$ 且

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b f_y(x,y)dx. \tag{15.1.6}$$

(4) $f \in C(D)$, $\varphi, \psi \in C([c,d]) \Longrightarrow J(y) \in C([c,d])$.

(5) $f, f_y \in C(D)$, $\varphi, \psi \in D([c,d]) \Longrightarrow J(y) \in D([c,d])$ 且

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx &= \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f_y(x,y)dx \\ &+ \psi'(y)f(\psi(y),y) - \varphi'(y)f(\varphi(y),y).\end{aligned} \tag{15.1.7}$$

证: (1) 因为 $f(x,y) \in C(D)$, 所以 $f(x,y)$ 在 D 上是一致连续的. 对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 对任意 $(x, y+\Delta y), (x,y) \in D$ 只要 $|\Delta y| < \delta$ 就有

$$|f(x,y+\Delta y) - f(x,y)| < \epsilon.$$

给定 $y_0 \in [c,d]$. 对任意 $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ 得到

$$|I(y) - I(y_0)| \le \int_a^b |f(x,y) - f(x,y_0)|dx < (b-a)\epsilon.$$

故 I 在 y_0 处连续.

(2) 根据**定理13.2.1** 得到.

(3) 给定 $y_0 \in [c,d]$. 我们得到

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx = I'(y) = \lim_{\Delta y \to 0}\frac{I(y+\Delta y) - I(y)}{\Delta y}$$

和

$$\begin{aligned}&\frac{I(y+\Delta y) - I(y)}{\Delta y} - \int_a^b f_y(x,y)dx \\ &= \int_a^b \left[\frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} - f_y(x,y)\right]dx \\ &= \int_a^b \left[f_y(x, y+\theta\Delta y) - f_y(x,y)\right]dx, \quad \exists\, \theta = \theta(y,\Delta y) \in [0,1].\end{aligned}$$

因为 f_y 在 $[a,b]$ 上时是连续的, 所以其在 $[a,b]$ 上必一致连续的. 因此对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 只要 $|y_1 - y_2| < \delta$ 就有

$$|f_x(x,y_1) - f(x,y_2)| < \epsilon.$$

因为 $|(y+\theta\Delta y) - y| = |\theta\Delta y| \le |\Delta y|$, 所以只有 $|\Delta y| < \delta$ 就得到

$$\left|\frac{I(y+\Delta y) - I(y)}{\Delta y} - \int_a^b f_y(x,y)dx\right| < (b-a)\epsilon.$$

即得到 (15.1.6).

(4) 在 (15.1.3) 中作替换 $x = \varphi(y) + [\psi(y) - \varphi(y)]t$ 得到

$$J(y) = \int_0^1 f(\varphi(y) + (\psi(y) - \varphi(y))t, y)[\psi(y) - \varphi(y)]dt.$$

根据 (1) 得到 $J(y) \in C([c,d])$.

(5) 令 $u := \varphi(y), v := \psi(y)$. 考虑积分

$$J(y) = \int_u^v f(x,y)dx =: \Phi(y,u,v).$$

则 $\Phi_v = f(v,y), \Phi_u = -f(u,y)$, 和

$$\Phi_y = \int_u^v f_y(x,y)dx.$$

因此

$$\begin{aligned} J'(y) &= \frac{\partial}{\partial y}\Phi(y,u,v) = \Phi_y + \Phi_u u' + \Phi_v v' \\ &= \int_u^v f_y(x,y)dx + f(v,y)\psi'(y) - f(u,y)\varphi'(y). \end{aligned}$$

这就得到了 (15.1.7). □

推论15.1.3. (Hadamard 引理) 如果 $f \in C^1(I)$, 这里 $I \subset \mathbb{R}$ 是包含 $x_0 \in \mathbb{R}$ 的开区间, 则

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0) \tag{15.1.8}$$

在 x_0 附近成立, 其中函数 φ 是连续的且满足 $\varphi(x_0) = f'(x_0)$.

证: 根据微积分基本定理得到

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \left[\int_0^1 f'(x_0+th)dt\right]h$$

这里 h 充分小来保证 $x_0 + h \in I$. 如果定义函数

$$\varphi(x) := \int_0^1 f'(x_0 + t(x - x_0))dt$$

则**定理15.1.2** (1) 告诉我们 φ 是连续的且满足 $\varphi(x_0) = f'(x_0)$. □

注15.1.4. (1) **定理15.1.2** (3) 不能直接推广到反常积分, 比如考察函数

$$F(a) := \int_0^\infty e^{-ax}dx, \quad a > 0.$$

计算得到 $F(a) = 1/a$ 和 $F'(a) = -1/a^2$. 但是

$$\int_0^\infty \frac{d}{dx}e^{-ax}dx = \int_0^\infty -ae^{-ax}dx = -1.$$

此时求积分和求导数不能交换的原因是上述含参变量积分不是一致收敛的, 具体定义以及相关内容在下一小节给出.

(2) 同样可证, 如果 $f \in C(D)$ 且 $f_x \in C(D)$ 则

$$\frac{d}{dx}\int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d f_x(x,y)dy. \tag{15.1.9}$$

(3) 我们可以把**定理15.1.2** 做如下的推广. 若 $f(x,y) \in C(D)$, 这里 $D = [a,b] \times [c,d]$, $h(y) \in R([c,d])$, 令

$$F(x) := \int_c^d f(x,y)h(y)\,dy.$$

则

- $f(x,y) \in C(D)$ 和 $h(y) \in R([c,d]) \Longrightarrow F(x) \in C([a,b])$ 且
$$\lim_{x\to x_0}\int_c^d f(x,y)h(y)\,dy = \int_c^d \lim_{x\to x_0} f(x,y)h(y)\,dy.$$
- $f(x,y) \in C(D)$ 和 $h(y) \in R([c,d]) \Longrightarrow$ 有
$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)h(y)\,dy\right]dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)h(y)\,dx\right]dy.$$
- $f(x,y), f_y(x,y) \in C(D)$ 和 $h(y) \in R([a,b]) \Longrightarrow$ 有
$$\frac{d}{dx}\int_c^d f(x,y)h(y)\,dy = \int_c^d f_x(x,y)h(y)\,dy.$$

例15.1.5. 求下列极限、导数或积分:

$$\lim_{t\to 0}\int_0^2 x^2\cos(tx)\,dx,\quad \lim_{\alpha\to 0}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2\cos\alpha x},\quad \int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx\ (0<a<b),$$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin x}\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}dx\ (0<a<1),\quad \int_0^{\pi}\ln(1+\theta\cos x)\,dx\ (|\theta|<1),$$

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)dx\ (|a|<1),\quad \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\ln(1+xy)}{y}dy,$$

$$\int_0^1\left[\int_\pi^{2\pi}\frac{y\sin(xy)}{y-\sin y}dy\right]dx,\quad \int_0^1\frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}}dx,\quad \int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx,$$

$$\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx\ (a,b>0),$$

解: (1) 函数 $f(x,t) = x^2\cos(tx)$ 在 $[0,2]\times[-1,1]$ 上连续, 从而得到

$$\lim_{t\to 0}\int_0^2 x^2\cos(tx)\,dx = \int_0^2 x^2dx = \frac{8}{3}.$$

(2) 函数 $f(x,\alpha) = (1+x^2\cos(\alpha x))^{-1}$ 在 $[0,1]\times[-1,1]$ 上连续, 从而得到

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2\cos\alpha x} = \int_0^1\frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

(3) 利用积分

$$\frac{x^b-x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y\,dy$$

得到

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 \left[\int_a^b x^y dy\right] dx = \int_a^b \left[\int_0^1 x^y dx\right] dy = \int_a^b \frac{dy}{1+y} = \ln\frac{1+b}{1+a},$$

因为二元函数 $f(x,y) = x^y$ 在 $[0,1] \times [a,b]$ 上连续.

(4) 根据

$$\frac{1}{2\sin x} \ln\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x} = \int_0^a \frac{dy}{1-y^2\sin^2 x}$$

得到

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x} \ln\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x} dx &= 2\int_0^{\pi/2} \left[\int_0^a \frac{dy}{1-y^2\sin^2 x}\right] dx \\ = 2\int_0^a \left[\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1-y^2\sin^2 x}\right] dy &= 2\int_0^a \left[\frac{1}{2-y^2}\int_0^\pi \frac{dx}{1+\frac{y^2}{2-y^2}\cos x}\right] dy.\end{aligned}$$

利用一般公式

$$\int \frac{dx}{1+\epsilon\cos x} = \frac{2}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \tan\frac{x}{2}\right) + C, \quad |\epsilon| < 1,$$

计算得到

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x} \ln\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x} dx = \int_0^a \frac{\pi}{\sqrt{1-y^2}} dy = \pi \arcsin a.$$

(5) 任给 $a \in (0,1)$, 则二元函数 $f(x,\theta) := \ln(1+\theta\cos x)$ 在 $[0,\pi] \times [-a,a]$ 上连续并且 $f_\theta(x,\theta) = \cos x/(1+\theta\cos x)$ 也是连续的. 从而首先对 $\theta \neq 0$ 得到

$$I'(\theta) := \frac{d}{d\theta}\int_0^\pi \ln(1+\theta\cos x) dx = \int_0^\pi \frac{\cos x}{1+\theta\cos x} dx = \frac{\pi}{\theta} - \frac{\pi}{\theta}\int_0^\pi \frac{dx}{1+\theta\cos x}$$

$$= \frac{\pi}{\theta} - \frac{1}{\theta\sqrt{1-\theta^2}} = \frac{-\pi\theta}{(1+\sqrt{1-\theta^2})\sqrt{1-\theta^2}}.$$

上述显然当 $\theta = 0$ 时也成立. 两边积分得到

$$I(\theta) = \pi \ln(1+\sqrt{1-\theta^2}) + C.$$

由于 $I()) = 0$ 故 $C = -\pi\ln 2$ 和

$$I(\theta) = \pi \ln\frac{1+\sqrt{1-\theta^2}}{2}.$$

(6) 积分内求导并做变换 $t = \tan(x/2)$ 得到

$$I'(a) := \frac{d}{da}\int_0^\pi \ln(1-2a\cos x + a^2) dx = \int_0^\pi \frac{2a - 2\cos x}{1-2a\cos x + a^2} dx$$

$$= \frac{2}{a}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} + 2\left(a-\frac{1}{a}\right)\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1-a)^2+(1+a)^2t^2} = 0.$$

(7) 由于

$$f(x,y) = \frac{\ln(1+xy)}{y}, \quad f_x(x,y) = \frac{1}{1+xy},$$

所以得到

$$I'(x) = \int_0^x f_x(x,y)dy + f(x,x) = \int_0^x \frac{dy}{1+yx} + \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \frac{2}{x}\ln(1+x^2).$$

(8) 积分交换得到

$$\int_0^1 \left[\int_\pi^{2\pi} \frac{y\sin(xy)}{y-\sin y}dy\right]dx = \int_\pi^{2\pi}\left[\int_0^1 \frac{y\sin(xy)}{y-\sin y}\right]dx = \int_\pi^{2\pi}\frac{1-\cos y}{y-\sin y}dy = \ln 2.$$

(9) 利用

$$\frac{\arctan x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2},$$

得到

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^1\left[\int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}\right]\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \int_0^1\left[\int_0^1 \frac{1}{1+x^2y^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\right]dy = \int_0^1\left[\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{1+y^2\cos^2 t}\right]dy$$

$$= \int_0^1\left[\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+y^2+u^2}\right]dy = \frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2}),$$

这里作了变换 $x=\cos t$ 和 $u=\tan t$.

(10) 引入含参变量积分

$$I(a) := \int_0^1 \frac{\ln(1+ax)}{1+x^2}dx, \quad -\frac{1}{2}\le \alpha \le \frac{1}{2}.$$

积分内求导得到

$$I'(a) = \int_0^1 \frac{x}{(1+ax)(1+x^2)}dx = \frac{1}{1+a^2}\int_0^1\left(\frac{-a}{1+ax}+\frac{a+x}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{1+a^2}\left[-\ln(1+ax)\Big|_0^1 + \int_0^1\frac{a+x}{1+x^2}dx\right] = \frac{1}{1+a^2}\left[-\ln(1+a)+\int_0^1\frac{a+x}{1+x^2}dx\right]$$

$$= \frac{1}{1+a^2}\left[-\ln(1+a) + a\arctan x\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1\right]$$

$$= \frac{1}{1+a^2}\left[-\ln(1+a)+a\left(\frac{\pi}{4}-0\right)+\frac{1}{2}\ln 2\right] = \frac{\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}a-\ln(1+a)}{1+a^2}.$$

因此推出

$$I(1)-I(0) = \frac{\ln 2}{2}\int_0^1\frac{da}{1+a^2} + \frac{\pi}{4}\int_0^1\frac{ada}{1+a^2} - \int_0^1\frac{\ln(1+a)}{1+a^2}da$$

从而

$$I(1)=\frac{\ln 2}{2}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\ln 2-I(1)\quad\Longrightarrow\quad I(1)=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

(11) 交换积分顺序得到

$$\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\left[\int_a^b x^y dy\right]dx$$

$$=\int_a^b\left[\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx\right]dy=\int_a^b\left[\int_0^{+\infty}e^{-(1+y)t}\sin t\,dt\right]dy$$

$$=\int_a^b\frac{dy}{1+(1+y)^2}=\arctan(1+b)-\arctan(1+a),$$

这里作了变换 $x=e^{-t}$.

例15.1.6. (Bessel 方程) 函数

$$u(x):=\int_0^\pi\cos(n\varphi-x\sin\varphi)d\varphi \tag{15.1.10}$$

满足二阶常微分方程

$$x^2u''(x)+xu'(x)+(x^2-n^2)u(x)=0. \tag{15.1.11}$$

回顾 §5.6.6 中的椭圆积分.

例15.1.7. (椭圆积分) 第二类完备椭圆积分定义为

$$E(k):=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta=\int_0^1\frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx,\quad 0\le k\le 1.$$

利用**例14.3.14** (1) 得到

$$\sqrt{1-k^2x^2}=\sum_{n\ge 0}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{k^{2n}}{1-2n}x^{2n}$$

从而利用**定理14.3.8** (1) 和 (5.4.30) 可得到

$$E(k)=\sum_{n\ge 0}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{k^{2n}}{1-2n}\int_0^1\frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\sum_{n\ge 0}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{k^{2n}}{1-2n}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}\theta\,d\theta=\sum_{n\ge 0}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{k^{2n}}{1-2n}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}.$$

即得到

$$E(k)=\frac{\pi}{2}\sum_{n\ge 0}\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]^2\frac{k^{2n}}{1-2n}. \tag{15.1.12}$$

第一类完备椭圆积分定义为

$$K(k):=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\quad 0\le k\le 1.$$

同理可证

$$K(k)=\frac{\pi}{2}\sum_{n\geq 0}\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]^2 k^{2n}. \tag{15.1.13}$$

第三类完备椭圆积分定义为

$$\Pi(n,k):=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}(1-n\sin^2\theta)},\quad 0\leq k\leq 1.$$

练习15.1.8. (1) 证明 (15.1.13).

(2) 验证如下等式

$$\begin{aligned}
E'(k) &= \frac{R(k)-K(k)}{k},\\
K'(k) &= \frac{E(k)}{k(1-k^2)}-\frac{K(k)}{k},\\
\Pi_n(n,k) &= \frac{E(k)+\frac{k^2-n}{n}K(k)+\frac{n^2-k^2}{n}\Pi(n,k)}{2(k^2-n)(n-1)},\\
\Pi_k(n,k) &= \frac{k}{n-k^2}\left[\frac{E(k)}{k^2-1}+\Pi(n,k)\right].
\end{aligned}$$

§15.2 含参变量广义积分

假设二元函数 $f(x,y)$ 定义在区域 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 上 (当然可以把闭区间换成任意的区间 $Y\subset\mathbb{R}$), 并考虑**含参变量的广义积分**

$$I(y):=\int_a^{+\infty}f(x,y)dx. \tag{15.2.1}$$

称 $y_0\in[c,d]$ 为 $I(y)$ 的**收敛点(point of convergence)** 如果广义积分

$$\int_a^{+\infty}f(x,y_0)dx$$

收敛. 所有的收敛点就构成了**收敛域(domain of convergence)**.

例15.2.1. (1) 在**注15.1.4** (1) 我们已经知道对含参变量广义积分, 求积分和求导数不一定可以交换.

(2) 对含参变量广义积分来说, 求积分和求极限不一定可以交换. 考虑积分

$$I(y):=\int_0^{+\infty}xye^{-yx^2}dx,\quad y\geq 0.$$

则

$$I(0)=\int^{+\infty}\left[\lim_{y\to 0+}xye^{-yx^2}\right]dx=0$$

但是

$$\lim_{y\to 0+}I(y)=\lim_{y\to 0+}\left[\frac{1}{2}e^{-yx^2}\Big|_0^{+\infty}\right]=\frac{1}{2}.$$

(3) 对含参变量广义积分来说, 积分顺序不一定可以交换. 考虑二元函数

$$f(x,y) := (2y-2xy^3)e^{-xy^2}, \quad (x,y)\in[0,+\infty)\times[0,1].$$

从而得到

$$\int_0^1\left[\int_0^{+\infty}(2y-2xy^3)e^{-xy^2}dx\right]dy=\int_0^1 0dy=0$$

和

$$\int_0^{+\infty}\left[\int_0^1(2y-2xy^3)e^{-xy^2}dy\right]dx=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=1.$$

当然除了上面提到的含参变量广义积分 (无穷积分), 我们还可以定义**含参变量瑕积分**. 假设二元函数 $f(x,y)$ 定义在 $[a,b)\times[c,d]$ (其中 $[c,d]\subset\mathbb{R}$), 且对任意 $y\in Y$, 瑕积分

$$I(y):=\int_a^b f(x,y)dx \tag{15.2.2}$$

都存在.

§15.2.1 含参变量广义积分的一致收敛

下面给出 (15.2.1) 和 (15.2.2) 的一致收敛的定义.

定义15.2.2. (1) 假设二元函数 $f(x,y)$ 定义在 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 上且对任意 $y\in[c,d]$ 无穷积分 (15.2.1) 都收敛. 称含参变量广义积分 (15.2.1) 关于 $y\in[c,d]$ 是**一致收敛的**如果对任意 $\epsilon>0$ 存在常数 $A_0\geq a$ 使得当 $A>A_0$ 时有

$$\max_{c\leq y\leq d}\left|\int_A^{+\infty}f(x,y)dx\right|\leq\epsilon. \tag{15.2.3}$$

(2) 假设二元函数 $f(x,y)$ 定义在 $[a,b)\times[c,d]$ 上且对任意 $y\in[c,d]$ 瑕积分 (15.2.2) 都收敛. 称含参变量广义积分 (15.2.2) 关于 $y\in[c,d]$ 是**一致收敛的**如果对任意 $\epsilon>0$ 存在常数 $\delta\in(0,b-a)$ 使得当 $0<\eta<\delta$ 时有

$$\max_{c\leq y\leq d}\left|\int_{b-\eta}^b f(x,y)dx\right|\leq\epsilon. \tag{15.2.4}$$

注15.2.3. (1) 同理我们可以给出

$$\int_{-\infty}^a f(x,y)dx \quad \text{和} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

一致收敛的定义.

(2) 含参变量广义积分 (15.2.1) 在 $[c,d]$ 上不是一致收敛的 $\Longleftrightarrow \exists\,\epsilon_0>0$ $\forall\,A\geq a\,\exists\,A_0>A\,\exists\,y_0\in[c,d]$ 有

$$\left|\int_{A_0}^{+\infty}f(x,y_0)dx\right|\geq\epsilon_0.$$

例15.2.4. (1) 证明含参变量广义积分

$$I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy} dx$$

在 $[c, +\infty)$ 上一致收敛 ($c > 0$), 但在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛.

证: 对任意 $A > c$ 有

$$0 \le \int_A^{+\infty} e^{-xy} dy \le \frac{1}{x} e^{-xA} \le \frac{1}{c} e^{-cA} \to 0, \quad A \to +\infty.$$

因此, 对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $A_0 > -\frac{1}{\delta} \ln(\delta\epsilon)$ 使得当 $A > A_0$ 和任意 $x \ge c$ 有

$$\left| \int_A^{+\infty} e^{-xY} dy \right| \le \frac{1}{c} e^{-cA} < \epsilon.$$

但是在 $(0, +\infty)$ 上不是一致收敛的. 取 $\epsilon_0 = 1/e$, $A_k = k$, $x_k = 1/k \in (0, +\infty)$, 则得到

$$\left| \int_k^{+\infty} e^{-y/k} dy \right| = k \int_k^{+\infty} e^{-y/k} d(y/k) = k \left(-e^{-y/k} \Big|_k^{+\infty} \right) = \frac{k}{e} \ge \epsilon_0.$$

(2) 证明含参变量广义积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + y^2}$$

在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

证: 因为

$$\int_A^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + y^2} \le \int_A^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{A} < \epsilon$$

如果 $A > 1/\epsilon$.

(3) 证明含参变量广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y} dy$$

在 $[c, +\infty)$ 上一致收敛 ($c > 0$), 但在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛.

证: 对任意 $A > 0$ 有

$$\int_A^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y} dy = \int_{Ax}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du.$$

因为反常积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du \quad \text{收敛},$$

所以对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $A_0 > 0$ 对任意 $A > A_0$ 和任意 $x \ge c$ 得到

$$\left| \int_A^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y} dy \right| < \epsilon.$$

另一方面, 对任意 $\epsilon_0 > 0$ 和任意 $M > 0$ 存在 $x > 0$ 满足

$$\left|\int_{Mx}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du - \int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du\right| < \epsilon_0.$$

从而得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du - \epsilon_0 < \int_{Mx}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du \le \int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du + \epsilon_0.$$

选择

$$\epsilon_0 := \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du,$$

对任意 $M > 0$ 存在 $x > 0$ 满足

$$\left|\int_M^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{y}dy\right| = \left|\int_{Mx}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du\right| \ge \epsilon_0.$$

(4) 证明含参变量广义积分

$$\Phi(x) = \int_0^{+\infty} x^\alpha y^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+x)y}dy, \quad \alpha, \beta > 0$$

在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛的.

证: 计算得到

$$\int_A^\infty (xy)^\alpha e^{-xy} y^{\beta+1}e^{-y}dy \le M_\alpha \int_A^\infty y^{\beta+1}e^{-y}dy$$

这里 $M_\alpha = \max_{t\ge 0} t^\alpha/e^t = \alpha^\alpha/e^\alpha$. 因为

$$\int_0^\infty y^{\beta+1}e^{-y}dy = \Gamma(\beta+2),$$

所以

$$\int_A^\infty y^{\beta+1}e^{-y}dy < \epsilon, \quad A \gg 1.$$

§15.2.2 含参变量广义积分的一致收敛的判别法

本小节给出一致收敛的几个常用判别法, 主要是针对含参变量广义积分 (15.2.1).

定理15.2.5. (Cauchy 判别法) 含参变量广义积分 (15.2.1) 在 $[c, d]$ 上一致收敛 $\Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, A_0 \ge a$ 使得对任意 $A_1, A_2 > A_0$ 有

$$\max_{c\le y\le d}\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)\,dx\right| < \epsilon.$$

证: 假设含参变量广义积分 (15.2.1) 在 $[c, d]$ 上一致收敛, 则利用不等式

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)\,dx\right| \le \left|\int_{A_1}^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| + \left|\int_{A_2}^{+\infty} f(x,y)\,dx\right|$$

推出所需要的不等式.

反之, 给定 $y \in [c,d]$. 任意 $\epsilon > 0$ 存在 $A_0 \geq a$ 只要 $A_1, A_2 > A_0$ 就有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)\,dx\right| < \epsilon.$$

根据反常积分的 Cauchy 判别法, **注5.5.4** (1), 可知

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

对任给 $y \in [c,d]$ 都收敛. 令 $A_2 \to +\infty$ 得到

$$\max_{c\leq y\leq d}\left|\int_{A_1}^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| \leq \epsilon, \quad A_1 > A_0.$$

从而含参变量积分 (15.2.1) 在 $[c,d]$ 上一致收敛. □

作为直接推论得到, 如果存在 $\epsilon_0 > 0$, $A_n, A_n' \to +\infty$, 和 $y_n \in [c,d]$, 使得

$$\left|\int_{A_n}^{A_n'} f(x,y_n)\,dx\right| \geq \epsilon_0,$$

则含参变量积分 (15.2.1) 在 $[c,d]$ 上非一致收敛.

根据定义可知, 绝对一致收敛必是一致收敛, 即若含参变量积分

$$\int_a^{+\infty} |f(x,y)|dx$$

在 $[c,d]$ 上一致收敛, 则含参变量广义积分 (15.2.1) 在 $[c,d]$ 上一致收敛.

定理15.2.6. (Weierstrass 判别法) 假设二元函数 $f(x,y)$ 满足条件

$$|f(x,y)| \leq g(x), \quad x \geq a, \quad y \in [c,d]$$

且无穷积分

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

收敛, 则含参变量广义积分 (15.2.1) 在 $[c,d]$ 上一致收敛.

证: 显然. □

定理15.2.7. (Abel 和 Dirichlet 判别法) 假设二元函数 $f(x,y), g(x,y)$ 都定义在 $[a,+\infty) \times [c,d]$ 上. 如果

(1) **(Abel)** 含参变量广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

在 $[c,d]$ 上一致收敛, 且 $g(x,y)$ 逐点单调 (对任意 $y \in [c,d]$, 函数 $g(x,y)$ 关于 x 是单调的) 和一致有界 (即存在正数 $M > 0$ 使得 $|g(x,y)| \leq M$ 对任意 $(x,y) \in [a,+\infty) \times [c,d]$ 都成立), 或者

(2) **(Dirichlet)** 含参变量积分列

$$\left\{\int_a^A f(x,y)\,dy\right\}_{A\geq a}$$

一致有界 (即存在正数 $M>0$ 使得

$$\left|\int_a^A f(x,y)\,dy\right| \leq M, \quad \forall\, y\in[c,d],\ \forall\, A>a$$

成立), 且 $g(x,y)$ 逐点单调和一致趋于 0 (即对任意 $\epsilon>0$ 存在 $A_0>a$ 使得对任意 $x\geq A_0$ 都有 $\max_{c\leq y\leq d}|g(x,y)|\leq\epsilon$),

则含参变量广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\,dx$$

在 $[c,d]$ 上一致收敛.

证:在这里我们只给出 (2) 的证明. 根据积分中值定理, **定理5.4.9**, 对任意 $A_2>A_1>a$ 存在 $\xi\in(A_1,A_2)$ 满足

$$\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)g(x,y)\,dx = g(A_1,y)\int_{A_1}^{\xi} f(x,y)\,dx + g(A_2,y)\int_{\xi}^{A_2} f(x,y)\,dx.$$

因为 $g(x,y)$ 一致趋于 0, 对任意 $\epsilon>0$ 我们可以找到 $A_0>a$ 使得 $|g(x,y)|<\epsilon/4M$ 对任意 $x>A_0$ 和任意 $y\in[c,d]$ 都成立. 因此只要 $A_2>A_1>A_0$ 就有

$$\begin{aligned}\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)g(x,y)\,dx\right| &\leq \frac{\epsilon}{4M}\left|\int_a^{\xi} f(x,y)\,dx - \int_a^{A_1} f(x,y)\,dx\right| \\ +\frac{\epsilon}{4M}\left|\int_a^{A_2} f(x,y)\,dx - \int_a^{\xi} f(x,y)\,dx\right| &\leq \frac{\epsilon}{4M}(2M+2M) = \epsilon.\end{aligned}$$

从而根据**定理15.2.5** 得到一致收敛性. □

对含参变量的瑕积分, 同样有 Cauchy 判别法、Weierstrass 判别法、Abel-Dirichlet 判别法. 当然我们也可以把含参变量的瑕积分通过变量替换写成含参变量的无穷积分, 这样就可以使用上述的判别法.

定理15.2.8. **(Dini)** 假设函数 $f(x,y)\in C([a,+\infty)\times[c,d])$ 且 $f(x,y)\geq 0$. 如果含参变量广义积分 (15.2.1) 在 $[c,d]$ 上连续, 则其在 $[c,d]$ 上一致收敛.

证: 否则的话, 存在 $\epsilon_0>0$ 使得对任意 $n>a$ 我们总可以找到 $y_n\in[c,d]$ 满足

$$\int_n^{\infty} f(x,y_n)\,dx \geq \epsilon_0.$$

闭区间 $[c,d]$ 的紧性可以使我们不妨假设 $y_n\to y_0\in[c,d]$, 当 $n\to\infty$. 因为反常积分

$$\int_a^{\infty} f(x,y_0)\,dx$$

是收敛的, 所以可以找到 $A > a$ 使得

$$\int_A^{\infty} f(x, y_0)\, dx < \frac{\epsilon_0}{2}$$

成立. 当 $n > A$, 得到

$$\int_A^{\infty} f(x, y_n)\, dx \geq \int_n^{\infty} f(x, y_n)\, dx \geq \epsilon_0.$$

连续性表明

$$\int_A^{\infty} f(x, y)\, dx = \int_a^{\infty} f(x, y)\, dx - \int_a^{A} f(x, y)\, dx$$

也是连续的从而推出

$$\epsilon_0 \leq \lim_{n\to\infty} \int_A^{\infty} f(x, y_n)\, dx = \int_A^{\infty} f(x, y_0)\, dx < \frac{\epsilon_0}{2}$$

产生矛盾! □

例15.2.9. (1) 证明含参变量广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{1+x^2} dx$$

在 $(0, +\infty)$ 上一致收敛.

证: 因为 $|\cos(xy)/(1+x^2)| \leq 1/(1+x^2)$ 且

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2},$$

所以在 $(0, +\infty)$ 上一致收敛. □

(2) 证明含参变量广义积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \sin x\, dx$$

在 $[a, +\infty)$ $(a > 0)$ 上一致收敛, 但在 $(0, +\infty)$ 上不是一致收敛.

证: 因为当 $t \geq a$ 时得到

$$\left| e^{-tx^2} \sin x \right| \leq e^{-ax^2} \quad \text{且} \quad \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

所以在 $[a, +\infty)$ 上一致收敛. 但是在 $(0, +\infty)$ 却不是一致收敛, 这是因为取

$$A_n := 2n\pi + \frac{\pi}{4}, \quad A_n' = 2n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad t_n = \frac{1}{(A_n')^2},$$

我们得到

$$\int_{A_n}^{A_n'} e^{-t_n x^2} \sin x\, dx \geq e^{-1} \sin A_n (A_n' - A_n) = \frac{\pi\sqrt{2}}{8e} > 0. \quad \square$$

(3) 证明含参变量广义积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx$$

在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

证: 因为

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

收敛, 根据Abel 判别法只要证明 e^{-xy} 是逐点单调和一致有界. 但是这两件事是显然的. □

(4) 讨论含参变量广义积分

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}dx$$

关于 p 在 $(0,2)$ 上的一致收敛性.

解: 做变量替换 $t=1/x$ 得到

$$I:=\int_0^1\frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}dx=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{2-p}}dt.$$

根据反常积分的Dirichlet 判别法可知当 $0<p<1$ 时 I 绝对收敛,

而当 $1\le p<2$ 时 I 条件收敛. 根据含参变量广义积分的Dirichlet 判别法可知 I 是在任意 $(0,p_0]$ 上都是一致收敛, 这里 $p_0\in(0,2)$. 但是 I 在 $(0,2)$ 不是一致收敛的, 这是因为若取

$$A_n=2n\pi,\quad A_n'=(2n+1)\pi,\quad p_n=2-\frac{1}{n},$$

则得到

$$\left|\int_{A_n}^{A_n'}\frac{\sin t}{t^{2-p_n}}dt\right|\ge\frac{1}{[(2n+1)\pi]^{2-p_n}}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin t\,dt=\frac{2}{[(2n+1)\pi]^{1/n}}\to 2.\quad\square$$

(5) 讨论含参变量广义积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{x^p}dx,\quad 0<p<2,$$

关于 y 在 $[0,+\infty)$ 上的一致收敛性.

解: 首先将上述积分拆成两部分

$$I:=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x,y)}{x^p}dx=\int_0^1\frac{\sin(xy)}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{x^p}dx=:I_1+I_2.$$

对 I_1, 因为

$$\left|\frac{\sin(xy)}{x^p}\right|\le\frac{1}{x^p},\quad\left|\frac{\sin(xy)}{x^p}\right|\le\frac{xy}{x^p},$$

所以当 $0<p<1$ 时 I_1 在 $[0,+\infty)$ 上是一致收敛的; 而当 $1\le p<2$ 时 I_1 在 $[0,+\infty)$ 内闭一致收敛, 但在 $[0,+\infty)$ 上不是一致收敛的. 这是因为

$$\int_{\pi/4n}^{\pi/2n}\frac{\sin(nx)}{x^p}dx\ge\left(\frac{2n}{\pi}\right)^p\frac{\sqrt{2}}{2n}\ge\frac{\sqrt{2}}{\pi},\quad\forall\, n\ge 1.$$

对 I_2, 当 $p>1$ 时 I_2 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛. 当 $0<p\le 1$ 时, 函数 $1/x^p$ 关于 x 是单调递减且趋于 0. 因为

$$\left|\int_1^A\sin(xy)\,dx\right|=\left|\frac{\cos y-\cos(Ay)}{y}\right|\le\frac{2}{y},$$

根据Dirichlet 判别法可知此时 I_2 在任意 $[a,+\infty)$ 上是一致收敛的, $a>0$. 然而, I_2 在 $[0,+\infty)$ 不是一致收敛的, 这是因为

$$\begin{aligned}\left|\int_{n\pi}^{3n\pi/2}\frac{\sin(x/n)}{x^p}dx\right| &> \frac{1}{(3n\pi/2)^p}\left|\int_{n\pi}^{3n\pi/2}\sin(x/n)dx\right|\\ &= \frac{n^{1-p}}{(3\pi/2)^p}\ge(2/3\pi)^p.\end{aligned}$$

综上所述, 当 $0<p<2$ 时含参变量积分在 $[0,+\infty)$ 上内闭一致收敛但在 $[0,+\infty)$ 上不是一致收敛. □

(6) 研究含参变量广义积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-(x+1)y}\sin y\,dy,\quad x\ge 0,$$

的一致收敛性.

解: 因为 $|e^{-(x+1)y}\sin y|\le e^{-(x+1)y}\le e^{-y}$, 所以一致收敛. □

(7) 研究含参变量广义积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin(xy)}{a^2+x^2}dx,\quad a>0,\quad y\ge y_0>0,$$

的一致收敛性.

解: 把原来积分写成

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{a^2+x^2}\sin(xy)\,dx.$$

因为

$$\left|\int_0^A\sin(xy)\,dx\right|=\frac{|1-\cos(Ay)|}{y}\le\frac{2}{y_0},\quad \frac{x}{a^2+x^2}\text{ 逐点单调且一致收敛到 }0,$$

根据Dirichlet 判别法这个含参变量积分在 $[y_0,+\infty)$ 上一致收敛. □

(8) 研究含参变量广义积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x^2)}{1+x^y}dx,\quad y\ge 0,$$

的一致收敛性.

解: 把原来积分写成

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{1+x^y}dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^y}\sin(x^2)dx.$$

因为

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt \text{ 收敛且 } \frac{1}{1+x^y} \text{ 逐点单调且一致有界},$$

所以根据 Abel 判别法这个含参变量广义积分在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛. □

(9) 研究含参变量广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{x^p}dx, \quad -1 < p < 1,$$

的一致收敛性.

解: 做分解

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{x^p}dx = \int_0^{1} \frac{\cos(x^2)}{x^p}dx + \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{x^p}dx =: I_1 + I_2.$$

在 I_2 中做变换 $t = x^2$ 得到

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{(p+1)/2}}dt;$$

从而可知 I_2 在任意 $[p_0,1)$ 上一致收敛, 这里 $p_0 \in (-1,1)$. 同理在 I_1 中做变换 $t = x^2$ 得到

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{1} \frac{\cos t}{t^{(p+1)/2}}dt;$$

从而可知 I_1 在任意 $(-1,p_1]$ 上一致收敛, 这里 $p_1 \in (-1,1)$. 综上所述, 这个含参变量广义积分在 $(-1,1)$ 内闭一致收敛. □

(10) 研究含参变量广义积分

$$\int_0^{+\infty} x^y e^{-x}dx, \quad a \le y \le b,$$

的一致收敛性.

解: 只要研究含参变量广义积分

$$\int_1^{+\infty} x^y e^{-x}dx, \quad a \le y \le b.$$

此时下列不等式

$$0 < x^y e^{-x} \le x^b e^{-x}$$

告诉我们

$$\int_1^{+\infty} x^b e^{-x}dx \le \int_1^{+\infty} \frac{x^b}{x^n/n!}dx = n!\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{n-b}} < +\infty,$$

这里取任意自然数 n 满足条件 $n-b\geq 2$ 即可. 因此这个含参变量广义积分在 $[a,b]$ 上一致收敛. □

(11) 研究含参变量广义积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{y}{(x+y)^2}dx,\quad y\geq 0,$$

的一致收敛性.

解: 对任意 $A>0$ 取 $y=A>0$ 得到

$$\left|\int_A^{+\infty}\frac{y}{(x+y)^2}dx\right|=\frac{y}{A+y}=\frac{1}{2}.$$

因此含参变量广义积分在 $[0,+\infty)$ 上不是一致收敛. □

§15.2.3 含参变量广义积分的基本性质

假设含参变量广义积分

$$\int_a^{\infty}f(x,y)dx$$

关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛. 令

$$I(y):=\int_a^{\infty}f(x,y)dx,\quad y\in[c,d].$$

任取严格递增数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ 满足 $a_0=a$ 和 $a_n\to\infty$, 并令

$$u_n(y):=\int_{a_{n-1}}^{a_n}f(x,y)dx,\quad n\geq 1. \tag{15.2.5}$$

则得到

$$F(y)=\sum_{n\in\mathbf{N}}u_n(y). \tag{15.2.6}$$

作为推论得到

定理15.2.10. 含参变量广义积分 (15.2.1) 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛 $\Longleftrightarrow$ 对任意满足 $a_0=a$ 和 $\lim_{n\to+\infty}a_n=+\infty$ 的严格递增数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$, 函数项级数 $\sum_{n\geq 0}u_n(y)$ 在 $[c,d]$ 上一致收敛, 这里 $u_n(y)$ 是由 (15.2.3) 所定义.

下面我们来证明含参变量广义积分满足连续性、可积性和可微性.

定理15.2.11. (1) **(连续性)** 若 $f(x,y)\in C([a,+\infty)\times[c,d])$ 且含参变量广义积分 (15.2.1) 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛, 则

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^{\infty}f(x,y)dx=\int_a^{\infty}\lim_{y\to y_0}f(x,y)dx \tag{15.2.7}$$

对任意 $y_0\in[c,d]$ 都成立.

(2) **(可积性)** 若 $f(x,y)\in C([a,+\infty)\times[c,d])$ 且含参变量广义积分 (15.2.1) 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛, 则

$$\int_c^d dy\int_a^\infty f(x,y)dx=\int_a^\infty dx\int_c^d f(x,y)dy. \tag{15.2.8}$$

(3) **(可微性)** 若 $f(x,y),f_y(x,y)\in C([a,+\infty)\times[c,d])$, 含参变量广义积分 (15.2.1) 对任意 $y\in[c,d]$ 都收敛, 且含参变量广义积分

$$\int_a^\infty f_y(x,y)dx$$

关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛, 则 (15.2.1) 在 $[c,d]$ 上可导且

$$\frac{d}{dy}\int_a^\infty f(x,y)dx=\int_a^\infty f_y(x,y)dx. \tag{15.2.9}$$

证: (1) 一致收敛推出函数项级数 $\sum_{n\geq1}u_n(y)$ 关于 $y\in[c,d]$ 是一致收敛的. 由于

$$u_n(y)=\int_{a_{n-1}}^{a_n}f(x,y)dx$$

是连续的, 所以函数项级数 $\sum_{n\geq1}u_n(y)=I(y)$ 是连续的. 则含参变量广义积分的连续性可由 (14.2.2) 得到.

当然我们可以直接证明. 根据计算可得

$$\begin{aligned}|I(y+\Delta y)-I(y)| &= \left|\int_a^{+\infty}[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]dx\right|\\
&\leq \int_A^{+\infty}|f(x,y+\Delta y)-f(x,y)|dx+\left|\int_a^A[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]dx\right|\end{aligned}$$

$$\leq \left|\int_a^A[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]dx\right|+\left|\int_A^{+\infty}f(x,y+\Delta y)dx\right|+\left|\int_A^{+\infty}f(x,y)dx\right|.$$

一致收敛性告诉我们对任意 $\epsilon>0$ 存在 $A_0>a$ 对任意 $A>A_0$ 和任意 $y,y+\Delta y\in[c,d]$ 有

$$\left|\int_A^{+\infty}f(x,y+\Delta y)dx\right|<\epsilon,\quad \left|\int_A^{+\infty}f(x,y)dy\right|<\epsilon.$$

因为 $f(x,y)\in C([a,+\infty)\times[c,d])$, 所以

$$\int_a^A f(x,y)dx\in C([c,d]),$$

从而存在 $\delta>0$ 对任意 $|\Delta y|<\delta$ 和对任意 $y\in[c,d]$ 有

$$\left|\int_a^A[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]dx\right|<\epsilon.$$

故 $|I(y+\Delta y)-I(y)|\leq\epsilon+\epsilon+\epsilon=3\epsilon$.

(2) 这是因为

$$\int_c^d \sum_{n\geq 1} u_n(y)dy = \sum_{n\geq 1}\int_c^d u_n(y)dy = \sum_{n\geq 1}\int_{a_{n-1}}^{a_n} dx\int_c^d f(x,y)dy$$

$$= \int_a^\infty dx\int_c^d f(x,y)dy.$$

(3) 定义

$$G(y) := \int_a^\infty f_y(x,y)dx.$$

根据 (1) 函数 $G(y)$ 是连续的. 利用 (1) 得到

$$\int_c^y G(z)dz = \int_c^y dz\int_a^\infty f_z(x,z)dx = \int_a^\infty dx\int_c^y f_z(x,z)dx = I(y) - I(c).$$

故 $G(y) = I'(y)$. □

注15.2.12. (1) **定理15.2.11** (1) 的逆定理不一定正确. 比如考察函数 $f(x,a) := e^{-ax}\sin x \in C([0,+\infty)\times(0,1/2])$, 显然

$$\int_0^{+\infty} f(x,a)dx = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin x dx = \frac{1}{1+a^2} \in C((0,1/2]).$$

但是含参变量广义积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin x dx$$

关于 a 在 $(0,1/2]$ 上不是一致收敛的, 这是因为

$$\left|\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} e^{-[(2n+1)\pi]^{-1}x}\sin x dx\right| = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} e^{\frac{-x}{(2n+1)\pi}}\sin x dx$$

$$\geq \frac{1}{e}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin x dx = \frac{2}{e}.$$

(2) 如果二元函数 $f(x,y)\in C([a,+\infty)\times[c,d])$ 且非负的 (或者非正的), 则结合**定理15.2.8** 和**定理15.2.11** (1), 可知 (15.2.1) 连续当且仅当参变量广义积分一致收敛.

我们可以把**定理** 15.2.11 (2) 中的定义域改成 $[a,+\infty)\times[c,+\infty)$, 但此时则必须增加额外条件来保证 (15.2.8) 成立.

定理15.2.13. 若 $f(x,y)\in C([a,+\infty)\times[c,+\infty))$, 含参变量广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

关于 y 在 $[c,C]\subset[c,+\infty)$ 上一致收敛, 含参变量广义积分

$$\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$$

关于 x 在 $[a,A]\subset[a,+\infty)$ 上一致收敛, 且

$$\int_a^{+\infty}dx\int_c^{+\infty}|f(x,y)|dy \quad 和 \quad \int_c^{+\infty}dy\int_a^{+\infty}|f(x,y)|dx$$

中至少有一个存在, 则

$$\int_a^{+\infty}dx\int_c^{+\infty}f(x,y)dy=\int_c^{+\infty}dy\int_a^{+\infty}f(x,y)dx. \tag{15.2.10}$$

证: 不妨假设

$$\int_a^{+\infty}dx\int_c^{+\infty}|f(x,y)|dy$$

存在. 如果 (15.2.10) 成立, 即

$$\begin{aligned}\int_c^{+\infty}dy\int_a^{+\infty}f(x,y)dx &= \lim_{C\to+\infty}\int_c^{C}dy\int_a^{+\infty}f(x,y)dx\\ = \lim_{C\to+\infty}\int_a^{+\infty}dx\int_c^{C}f(x,y)dy &= \int_a^{\infty}dx\int_c^{+\infty}f(x,y)dy\end{aligned}$$

这里用到了含参变量广义积分

$$\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$$

关于 y 在 $[c,C]\subset[c,+\infty)$ 上一致收敛, 和**定理15.2.11** (2). 因此只需要证明

$$\lim_{C\to+\infty}\int_a^{+\infty}dx\int_C^{+\infty}f(x,y)dy=0.$$

但是注意到上面推导是基于积分

$$\int_a^{+\infty}dx\int_c^{+\infty}f(x,y)dy$$

收敛的, 所以首先来说明该积分的收敛性. 根据**定理15.2.11** (1) 可知含参变量广义积分

$$\int_c^{+\infty}f(x,y)dy$$

在任意闭区间 $[A_1,A_2]\subset[a,+\infty)$ 上是连续的, 从而在整个区间 $[a,+\infty)$ 上是连续的. 因为

$$\left|\int_c^{+\infty}f(x,y)dy\right|\le\int_c^{+\infty}|f(x,y)|dy,$$

所以根据比较判别法可知

$$\int_a^{+\infty}dx\int_c^{+\infty}f(x,y)dy$$

绝对收敛从而必是收敛.

因为

$$\int_a^{+\infty}dx\int_c^{+\infty}|f(x,y)|dy$$

存在, 所以可做分解

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} dx \int_C^{+\infty} f(x,y)dy &= \int_a^{A} dx \int_C^{+\infty} f(x,y)dy + \int_A^{+\infty} dx \int_C^{+\infty} f(x,y)dy \\ &=: I_1 + I_2,\end{aligned}$$

且对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $A_0 \geq a$ 对任意 $A > A_0$ 都有

$$|I_2| \leq \int_A^{+\infty} dx \int_C^{+\infty} |f(x,y)|dy \leq \int_A^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} |f(x,y)|dy < \epsilon.$$

对上述 $A > A_0$, 由于

$$\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$$

关于 x 在 $[a,A]$ 上一致收敛, 我们可以找到 $C_0 \geq c$ 使得对任意 $C > C_0$ 都有

$$\left|\int_C^{+\infty} f(x,y)dy\right| < \frac{\epsilon}{A-a}, \quad \forall\, x \in [a,A].$$

从而最后得到

$$\left|\int_a^{+\infty} dx \int_C^{+\infty} f(x,y)dy\right| \leq \epsilon + \int_a^A \frac{\epsilon}{A-a}dx < 2\epsilon$$

只要 $C > C_0$. □

例15.2.14. (1) 确定函数

$$I(y) := \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^y}dx$$

的连续范围.

解: 做分解

$$I(y) = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^y}dx + \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^y}dx =: I_1 + I_2.$$

考虑极限

$$\lim_{x\to+\infty} x^p \frac{\ln(1+x)}{x^y} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{y-p}} = 0, \quad y-p > 0.$$

根据反常积分收敛判别法, 当 $p > 1$ 且 $y - p > 0$ 时 I_1 收敛, 从而当 $y > 1$ 时 I_1 收敛. 另一方面, 当 $y \leq 1$ 时, 取 $p = y$ 则推出 I_1 发散. 同理考虑极限

$$\lim_{x\to0+} x^p \frac{\ln(1+x)}{x^y} = \lim_{x\to0+} \frac{x^{p+1}}{x^y}\text{存在}, \quad p+1-y \geq 0.$$

此时仅当 $y < 2$ 时 I_1 收敛. 综上可得, $I(y)$ 的定义域是开区间 $(1,2)$.

要证 $I(y)$ 在 $(1,2)$ 内连续, 只要证明 $I(y)$ 在 $(1,2)$ 内闭连续即可, 即对任意闭区间 $[a,b] \subset (1,2)$ 证明 $I(y) \in C([a,b])$. 对 I_1 根据

$$0 < \frac{\ln(1+x)}{x^y} \leq \frac{\ln(1+x)}{x^a}, \quad \text{任意 } x \geq 1,$$

可知 I_1 在 $[a,b]$ 上一致收敛. 同理可证 I_2 也在 $[a,b]$ 上一致收敛. 因此 $I(y)$ 在 $[a,b]$ 上连续. □

(2) 求Dirichlet **积分**

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

的值.

证: 形式上的推导见**例15.1.1**. 但是我们要验证下面两件事:

$$I(\alpha)\in C([0,+\infty)),\quad \int_0^{+\infty}\left(e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\right)'_\alpha dx \text{ 在 } (0,+\infty) \text{ 内闭一致收敛.}$$

根据**例15.2.9** (3) 可知 $I(\alpha)\in C([0,+\infty))$. 因为

$$\left(e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\right)'_\alpha = -e^{-\alpha x}\sin x,$$

所以根据 Weierstrass 判别法得到

$$\int_0^{+\infty}\left(e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\right)'_\alpha dx$$

在任意区间 $[\alpha_0,+\infty)$ 上一致收敛从而在 $(0,+\infty)$ 内闭一致收敛.

类似可证

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(\alpha). \quad \square \tag{15.2.11}$$

(3) 求反常积分

$$I:=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$$

的值.

解: 利用分部积分得到

$$\begin{aligned} I &= 2x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\bigg|_0^{+\infty} - 2\int_0^{+\infty}2x\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}dx \\ &= -2\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx+2I \quad\Longrightarrow\quad I=\pi. \quad \square \end{aligned}$$

(4) 求反常积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\cos(\lambda x)dx$$

的值.

解: 根据

$$\sin x\cos(\lambda x)=\frac{\sin[(1-\lambda)x]+\sin[(1+\lambda)x]}{2},$$

得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\cos(\lambda x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin[(1-\lambda)x]}{x}dx+\int_0^{+\infty}\frac{\sin[(1+\lambda)x]}{x}dx.$$

从 (15.2.11) 得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\cos(\lambda x)dx=\frac{\pi}{2}[\operatorname{sgn}(1-\lambda)+\operatorname{sgn}(1+\lambda)]=\begin{cases}0, & |\lambda|>1,\\ \pi/2, & |\lambda|=1,\\ \pi, & |\lambda|<1.\end{cases}\quad\square$$

(5) 求**Euler-Poisson 积分**

$$I:=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$$

的值.

解: 利用二重积分法求解课参见**例5.5.5** (2) 或**例13.3.5** (1). 现在考虑利用含参变量广义积分法来求解. 定义函数

$$\varphi(x):=\int_0^1\frac{e^{-x^2(1+u^2)}}{1+u^2}dy,\quad f(x):=\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2.$$

计算得到

$$\varphi'(x)=\int_0^1\frac{e^{-x^2(1+u^2)}[-2x(1+u^2)]}{1+u^2}du=-2\int_0^1 xe^{-x^2(1+u^2)}du$$

和

$$f'(x)=2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt=2\int_0^x e^{-(t^2+x^2)}dt=2\int_0^1 xe^{-x^2(1+u^2)}du.$$

因此 $\varphi'(x)+f'(x)=0$ 和 $f(x)+\varphi(x)=C$, 其中 C 是常数. 由于

$$C=f(0)+\varphi(0)=\varphi(0)=\int_0^1\frac{dy}{1+u^2}=\frac{\pi}{4},$$

我们得到

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-\varphi(x).$$

令 $x\to+\infty$ 得到

$$I^2=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{\pi}{4}-\lim_{x\to+\infty}\varphi(x).$$

因为含参变量积分

$$\int_0^1\frac{e^{-x^2(1+u^2)}}{1+u^2}du$$

一致收敛, 所以

$$I^2=\frac{\pi}{4}-\int_0^1\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x^2(1+u^2)}}{1+u^2}du=\frac{\pi}{4}\quad I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\ \square$$

(6) 考察函数

$$F(x):=e^{x^2/2}\int_x^{+\infty}e^{-t^2/2}dt,\quad x\geq 0.$$

求极限 $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ 并证明函数 $F(x)$ 单调递减.

解: 计算可得

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt}{e^{-x^2/2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-e^{-x^2/2}}{-xe^{-x^2/2}} = 0$$

和

$$\begin{aligned} F'(x) &= xe^{x^2/2}\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt - e^{x^2/2}e^{-x^2/2} \\ &= \int_x^{+\infty} xe^{\frac{x^2-t^2}{2}}dt - 1 \le \int_x^{+\infty} te^{\frac{x^2-t^2}{2}}dt - 1 \\ &= -e^{\frac{x^2-t^2}{2}}\Big|_{t=x}^{+\infty} - 1 = 0. \ \square \end{aligned}$$

(7) 假设函数 $f(x) \in C([-\infty, +\infty))$, $f > 0$, 且对任意 $t \in \mathbb{R}$ 都有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(x)\,dx \le 1.$$

证明

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \frac{b-a}{2} + 1, \quad \forall\, a < b.$$

证: 根据假设条件得到

$$\int_a^b dt \int_a^b e^{-|t-x|} f(x)\,dx \le \int_a^b dt = b - a.$$

交换积分顺序得到

$$b - a \ge \int_a^b f(x) \left[\int_a^b e^{-|t-x|}dt\right] dx = \int_a^b f(x) \left(2 - e^{a-x} - e^{x-b}\right) dx.$$

故

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2}\left[\int_a^b e^{a-x} f(x)\,dx + \int_a^b e^{x-b} f(x)\,dx\right];$$

但是

$$\int_a^b e^{a-x} f(x)\,dx = \int_a^b e^{-|a-x|} f(x)\,dx \le 1$$

和

$$\int_a^b e^{x-b} f(x)\,dx = \int_a^b e^{-|b-x|} f(x)\,dx \le 1,$$

我们得到

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \frac{b-a}{2} + 1. \ \square$$

(8) 证明对任意 $b \in (0,1)$, 含参变量广义积分

$$I(\alpha) := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{|\sin x|^\alpha} dx$$

关于 α 在 $[0,b]$ 上一致收敛.

证: 把积分改写成级数形式

$$I(\alpha) = \sum_{n\geq 0}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{e^{-\alpha}}{|\sin x|^{\alpha}}dx = \sum_{n\geq 0}e^{-n\pi}\int_0^{\pi}\frac{e^{-t}}{\sin^{\alpha} t}dt$$

$$= \frac{1}{1-e^{\pi}}\int_0^{\pi}\frac{e^{-t}}{\sin^{\alpha} t}dt = \frac{1}{1-e^{-\pi}}\left[\int_0^{\pi/2}\frac{e^{-t}}{\sin^{\alpha} t}dt+\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{e^{-t}}{\sin^{\alpha} t}dt\right].$$

当 $0\leq t\leq \pi/2$ 时有不等式 $\sin t\geq 2t/\pi$ 从而得到

$$\int_0^{\pi/2}\frac{e^{-t}}{\sin^{\alpha} t}dt \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha}\int_0^{\pi/2}t^{-\alpha}e^{-t}dt.$$

由于

$$t^{-\alpha}\leq \begin{cases} t^{-b}, & 0<t<1, \\ 1, & t\geq 1, \end{cases}$$

因此含参变量积分

$$\int_0^{\pi/2}\frac{e^{-t}}{\sin^{\alpha} t}dt$$

关于 α 在 $[0,b]$ 上一致收敛. 同理可证含参变量积分

$$\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{e^{-t}}{\sin^{\alpha} t}dt$$

关于 α 在 $[0,b]$ 上也是一致收敛. □

(9) 证明**Fresnel 积分**

$$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx = \int_0^{+\infty}\cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

证: 做变量替换 $t=x^2$ 得到

$$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}du\right)dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}du\int_0^{+\infty}\left(e^{-tu^2}\sin t\right)dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}\sin t\,dt\right]du = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^4} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

这里利用了**定理15.2.13**. □

(10) 求下面积分的值:

$$A := \int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}dx, \quad B_n := \int_0^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{e^{2\pi x}-1}dx\ (n\geq 1)$$

和

$$C := \int_0^{+\infty}\frac{\sin(mx)}{e^{2\pi x}-1}dx\ (m>0).$$

解: 因为

$$\frac{\ln x}{1-x^2}=\sum_{n\geq 0}x^{2n}\ln x,\quad 0<x<1,$$

所以

$$A=\sum_{n\geq 0}\int_0^1 x^{2n}\ln x\,dx=\sum_{n\geq 0}\int_0^1\frac{\ln x}{1n+1}d(x^{2n+1})=\sum_{n\geq 0}-\int_0^1\frac{x^{2n}}{2n+1}dx$$

$$=-\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2}=-\left[\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{4}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\right]=-\left(\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{24}\right)=-\frac{\pi^2}{8}.$$

因为

$$\frac{x^{2n-1}}{e^{2\pi x}-1}=\sum_{k\geq 1}x^{2n-1}e^{-2k\pi x},$$

所以

$$B=\sum_{k\geq 1}\int_0^{+\infty}x^{2n-1}e^{-2k\pi x}dx=\sum_{k\geq 1}\frac{(2n-1)!}{(2k\pi)^{2n}}=\frac{(2n-1)!}{(2\pi)^{2n}}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^{2n}}.$$

利用 (14.3.15) 得到 $B=B_n/4n$.

因为

$$\frac{\sin(mx)}{e^{2\pi x}-1}=\sum_{k\geq 1}e^{-2k\pi x}\sin(mx),$$

所以

$$C=\sum_{k\geq 1}\int_0^{+\infty}e^{-2k\pi x}\sin(mx)\,dx=\sum_{k\geq 1}\frac{m}{(2k\pi)^2+m^2}=\frac{1}{4}\coth\frac{m}{2}-\frac{1}{2m}$$

$$=\frac{1}{4}\frac{e^m+1}{e^m-1}-\frac{1}{2m}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^m-1}-\frac{1}{m}+\frac{1}{2}\right)$$

这里利用了 (14.3.12). □

§15.3 * 二探 Euler 积分

本节部分内容取自参考文献中的谭琳的专著. Gamma 函数 $\Gamma(s)$ 定义为

$$\Gamma(s):=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx,\quad s>0.$$

在 §5.5.4 我们已经证明了 $\Gamma(s)$ 在 $s>0$ 时有定义. 因为

$$\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\ln x\,dx$$

在 $(0,+\infty)$ 内闭一致收敛, 因此 $\Gamma'(s)\in C((0,+\infty)$. 同理可证

$$\Gamma(s)\in C^\infty((0,+\infty)),\quad \Gamma^{(n)}(s)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}(\ln x)^s dx.\tag{15.3.1}$$

因为 γ 是 Euler 常数

$$\gamma := \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{1\le k\le n}\frac{1}{k}-\ln n\right)$$

所以得到

$$\Gamma'(1) = -\int_0^1 \frac{1-e^{-u}-e^{-\frac{1}{u}}}{u}dy = -\gamma. \tag{15.3.2}$$

事实上根据 (15.3.1) 有

$$\Gamma'(1) = \int_0^\infty e^{-t}\ln t\,dt = \lim_{n\to\infty}\left(\int_{1/n}^1 e^{-t}\ln t\,dt + \int_1^n e^{-t}\ln t\,dt\right).$$

由分部积分计算得到

$$\int_{1/n}^1 e^{-t}\ln t\,dt = -\int_{1/n}^1 \ln t\,de^{-t} = -e^{-1/n}\ln n + \int_{1/n}^1 \frac{e^{-t}}{t}dt$$

和

$$\int_1^n e^{-t}\ln t\,dt = -e^{-n}\ln n + \int_1^n \frac{e^{-t}}{t}dt = -e^{-n}\ln n + \int_{1/n}^1 \frac{e^{-1/u}}{u}du,$$

因此

$$\begin{aligned}\Gamma'(1) &= \lim_{n\to\infty}\left[-\left(e^{-n}+e^{-1/n}\right)\ln n + \int_{1/n}^1 \frac{e^{-u}+e^{-1/u}}{u}du\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[-\left(e^{-n}+e^{-1/n}\right)\ln n - \int_{1/n}^1 \frac{1-e^{-u}-e^{-1/u}}{u}du + \ln n\right]\\ &= -\int_0^1 \frac{1-e^{-u}-e^{-1/u}}{u}du + \lim_{n\to\infty}\left(1-e^{-1/u}\right)\ln n - \lim_{n\to\infty}e^{-n}\ln n\\ &= -\int_0^1 \frac{1-e^{-u}-e^{-1/u}}{u}du\end{aligned}$$

and

$$-\Gamma'(1) = \int_0^1 \frac{1-e^{-u}-e^{-1/u}}{u}du = \int_0^1 \frac{1-e^{-u}}{u}du - \int_1^\infty \frac{e^{-u}}{u}du.$$

利用求极限和求积分可以相交换 (可行性请自证)

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{e^{-u}}{u}du &= \int_1^\infty \frac{1}{u}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{u}{n}\right)^n du,\\ \int_0^1 \frac{1-e^{-u}}{u}du &= \int_0^1 \frac{1}{u}\lim_{n\to\infty}\left[1-\left(1-\frac{u}{n}\right)^n\right] du,\end{aligned}$$

我们得到

$$-\Gamma'(1) = \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^1 \frac{1-(1-\frac{u}{n})^n}{u}du - \int_1^n \frac{(1-\frac{u}{n})^n}{u}du\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^n \frac{1-(1-\frac{u}{n})^n}{u}du - \int_1^n \frac{du}{u}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^n \frac{1-y^n}{1-y}dy - \ln n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{1\le k\le n}\frac{1}{k} - \ln n\right) = \gamma.$$

定理15.3.1. Gamma 函数具有下列性质:

(1) $\Gamma(1+s) = s\Gamma(s)$, 任意 $s > 0$.

(2) $\Gamma(s)$ 可以延拓到 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_{\le 0}$.

(3) $\lim_{s\to -n}(s+n)\Gamma(s) = (-1)^n/n!$.

证: (1) 在 §5.5.4 已给出. 为了证明 (2) 我们首先考虑区间 $-1 < s < 0$. 此时 $1+s > 0$ 且 $\Gamma(1+s)$ 有定义. 因此

$$\frac{\Gamma(1+s)}{s} = \int_0^\infty e^{-t}\frac{t^s}{s}dt.$$

对任意 $\delta, \Delta > 0$, 计算得到

$$\begin{aligned}\int_\delta^\Delta e^{-t}\frac{t^s}{s}dt &= -e^{-t}\frac{t^s}{s}\Big|_\delta^\Delta + \int_\delta^\Delta e^{-t}t^{s-1}dt \\ &= \int_\delta^\Delta \left(e^{-t}-1\right)t^{s-1}dt + \left(1-e^{-t}\right)\frac{t^s}{s}\Big|_\delta^\Delta .\end{aligned}$$

令 $\delta\to 0$ 和 $\Delta\to\infty$, 我们得到当 $s\in(-1,0)$ 时的 Γ 函数定义

$$\Gamma(s) := \frac{\Gamma(s+1)}{s} = \int_0^\infty \left(e^{-t}-1\right)t^{s-1}ds, \quad s\in(-1,0).$$

类似地, 当 $s\in(-n,-n+1)$, 我们得到

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty \left[e^{-t} + \sum_{0\le k\le n-1}(-1)^{k+1}\frac{t^k}{k!}\right]t^{s-1}dt, \quad t\in(-n,-n+1).$$

这样我们就把 Γ 函数延拓到 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_{\le 0}$ 上且仍旧满足 (1).

对 (3), 利用 (1) 推出

$$\begin{aligned}\lim_{s\to -n}(s+n)\Gamma(s) &= \lim_{s\to -n}\frac{\Gamma(s+n+1)}{s(s+1)\cdots(s+n-1)} \\ &= \frac{\Gamma(1)}{(-n)(-n+1)\cdots(-n+n-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}.\end{aligned}$$

即 $\Gamma(s)\approx\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{s+n}$, 当 $s\to -n$. □

根据**定理15.3.1** 我们观察到 $\Gamma(s)\Gamma(1-s)$ 的所有极点是整数集 $\mathbb{Z}$. 根据 (6.4.4) 得到

$$\sin(\pi s) = \pi s \prod_{n\in\mathbf{N}} \left(1-\frac{s^2}{n^2}\right)$$

的所有零点也是整数集. 从而可知函数

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)\sin(\pi s)$$

既没有零点也没有极点.

我们可以把 $\Gamma(z)$ 函数的定义推广到 $z\in\mathbf{C}$:

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt, \quad z\in\mathbf{C}. \tag{15.3.3}$$

同样可得, $\Gamma(z)$ 当 $\mathrm{Re}(z)>0$ 时也有定义且**定理15.3.1** 仍旧成立. 函数

$$f(z) := \Gamma(z)\Gamma(1-z)\sin(\pi z)$$

满足条件

$$\begin{aligned} \lim_{z\to 0} f(z) &= \lim_{z\to 0}\frac{\sin(\pi z)}{z} = \pi, \\ f(\sqrt{-1}y) &= \sqrt{-1}y|\Gamma(\sqrt{-1}y)|^2\sinh(\pi y) \\ &= -\sqrt{-1}y\frac{2\pi}{y(e^{\pi y}-e^{-\pi y})}\frac{e^{-\pi y}-e^{\pi y}}{2\sqrt{-1}} = \pi, \end{aligned}$$

利用之后章节中的复变函数知识可以证明 $f(z)\equiv\pi$ 对任意 $z\in\mathbf{C}$ 都成立.

定理15.3.2. 对任意 $z\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{Z}$ 有

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \tag{15.3.4}$$

证: 当 $z\in\mathbb{R}$ 时的证明可参见 §6.4.4. □

考虑**Euler 乘积**

$$E := \prod_{1\le k\le n-1}\Gamma\left(\frac{k}{n}\right), \quad n\ge 2. \tag{15.3.5}$$

下面来证明

$$E = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}, \tag{15.3.6}$$

这个结果归功于Euler. 根据 (15.3.4) 得到

$$E^2 = \prod_{1\le k\le n-1}\left[\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-k}{n}\right)\right] = \prod_{1\le k\le n-1}\frac{\pi}{\sin\frac{k\pi}{n}}.$$

注意到

$$\sum_{0\le k\le n-1} x^k = \frac{x^n-1}{x-1} = \prod_{1\le k\le n-1}\left(x - e^{\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{n}}\right).$$

令 $x\to 1$ 得到

$$n = \prod_{1\le k\le n-1}\left(1-e^{\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{n}}\right) = \prod_{1\le k\le n-1} -e^{\frac{k\pi\sqrt{-1}}{n}}\left(e^{\frac{k\pi\sqrt{-1}}{n}} - e^{-\frac{k\pi\sqrt{-1}}{n}}\right)$$

$$= \prod_{1\le k\le n-1}\left(-2\sqrt{-1}e^{\frac{k\pi\sqrt{-1}}{n}}\sin\frac{k\pi}{n}\right) = (-2\sqrt{-1})^{n-1}e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{1\le k\le n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$$

$$= 2^{n-1}\left(-\sqrt{-1}e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}}\right)^{n-1}\prod_{1\le k\le n-1}\sin\frac{k\pi}{n} = 2^{n-1}\prod_{1\le k\le n-1}\sin\frac{k\pi}{n}.$$

即恒等式 (15.3.6).

§**15.3.1** * Ramanujan 不等式

本小节来证明本章一开始所陈述的**Ramanujan 不等式**[1]:

$$\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{e}\right)^x\left(8x^3+4x^2+x+\frac{1}{100}\right)^{1/6} < \Gamma(x+1)$$

$$< \sqrt{\pi}\left(\frac{x}{e}\right)^x\left(8x^3+4x^2+x+\frac{1}{30}\right)^{1/6}, \quad x\ge 0. \tag{15.3.7}$$

Ramanujan 本人提出了一个非常有趣的公式

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{\pi}\left(\frac{x}{e}\right)^x\left(8x^3+4x^2+x+\frac{\theta_x}{30}\right)^{1/6}, \tag{15.3.8}$$

部分 θ_x 的值如下

$$\theta_0 = \frac{30}{\pi^3} = 0.9675, \quad \theta_1 = 0.3359, \quad \theta_\infty = 1.$$

进一步有如上不等式 (15.3.7). 早在 1916 年Ramanujan 在印度数学会杂志提了如下问题: 证明

$$e^x x^{-x}\pi^{-1/2}\Gamma(x+1) = (8x^3+4x^2+x+E_x)^{1/6},$$

其中对任何 $x\ge 0$ 都有 $E_x\in[1/100, 1/30]$. 依照Ponnusamy 和Vuorinen (1997) 定义函数

$$h(x) := [g(x)]^6 - (8x^3+4x^2+x), \quad g(x) := \left(\frac{e}{x}\right)^x\frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{\pi}}, \tag{15.3.9}$$

并证明了只要说明函数 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增且满足 $1/100\le h(x)\le 1/30$, 则当 $x\ge 1$ 时 (15.3.7) 成立.

[1]本证明取自参考文献中《拉玛努金遗失笔记》第四卷.

定理15.3.3. *函数 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上严格递增且*

$$h(1)=\frac{e^6}{\pi^3}-13,\quad h(+\infty)=\frac{1}{30}.$$

Alzer (2003) 证明了 (15.3.7) 对 $0<x<1$ 也成立. 和**定理15.3.3** 相反的是, 函数 $h(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内不是单调的. 可以证明函数 $h(x)$ 在 $[0,a]$ 上递增, 在 $[a,b]$ 上递减, 而在 $[b,1]$ 上递增, 其中

$$a\approx 0.007714449,\quad b\approx 0.671503766,\quad h(a)\approx 0.033250349.$$

Mortici 在 2011 年证明了

$$\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{e}\right)^x\left(8x^3+4x^2+x+\frac{1}{30}-\frac{11}{240x}\right)^{1/6}\ <\ \Gamma(x+1)$$

$$<\ \sqrt{\pi}\left(\frac{x}{e}\right)^x\left(8x^3+4x^2+x+\frac{1}{30}-\frac{10}{240x}\right)^{1/6},\quad x\geq 8. \tag{15.3.10}$$

Hirschhorn 在 2012 年把 (15.3.10) 改进到

$$\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{e}\right)^x\left(8x^3+4x^2+x+\frac{1}{30}-\frac{11}{240x}+\frac{5}{240n^2}\right)^{1/6}\ <\ \Gamma(x+1)$$

$$<\ \sqrt{\pi}\left(\frac{x}{e}\right)^x\left(8x^3+4x^2+x+\frac{1}{30}-\frac{11}{240x}+\frac{9}{240n^2}\right)^{1/6},\quad x\geq 8. \tag{15.3.11}$$

显然**定理15.3.3** 可直接从如下引理推出.

引理15.3.4. *(1) 对任意 $x\geq x_0:=2.4$, 函数 $h(x)$ 满足不等式*

$$\frac{1}{100}<h(x)<\frac{1}{30}$$

且 $\lim_{x\to+\infty}h(x)=1/30$.

(2) 对任意 $x\geq x_1:=4.21$, 函数 $h(x)$ 严格递增.

(3) 对任意 $1<x\leq\max\{x_0,x_1\}=4.21$, 函数 $h(x)$ 严格递增.

对 (15.3.9) 取对数得到

$$\ln g(x)=x-x\ln x+\ln x-\ln\sqrt{\pi}+\ln\Gamma(x). \tag{15.3.12}$$

在 §15.4 我们将证明

$$\ln\Gamma(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\ln x-x+\ln\sqrt{2\pi}+J(x), \tag{15.3.13}$$

这里

$$J(x):=\int_0^{+\infty}\frac{\sigma(u)}{(x+u)^2}du,\quad \sigma(u):=\int_0^u\rho(t)dt,\quad \rho(t):=\frac{1}{2}-\{t\} \tag{15.3.14}$$

其中 $\{t\} := t - \lfloor t \rfloor$ 表示 t 的小数部分. 把 (15.3.14) 带入 (15.3.12) 得到

$$\ln g(x) = \ln \sqrt{2x} + J(x), \quad g(x) = \sqrt{2x} e^{J(x)}, \tag{15.3.15}$$

从而

$$h(x) = 8x^3 e^{6J(x)} - (8x^3 + 4x^2 + x). \tag{15.3.16}$$

在 §15.4 我们将证明 $J(x)$ 的**Stirling 级数展开**:

$$J(x) = \sum_{1 \le k \le n-1} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)x^{2k-1}} + R_n(x), \tag{15.3.17}$$

这里

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} \theta_n \frac{B_{2n}}{2n(2n-1)x^{2n+1}}, \quad \theta_n \in (0,1). \tag{15.3.18}$$

若取 $n = 3$ 得到

$$J(x) = \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + R_3(x), \quad 0 < R_3(x) < \frac{1}{1260x^5}. \tag{15.3.19}$$

证明引理15.3.4. (1) 利用 (15.3.19) 我们可以把 $e^{6J(x)}$ 写成

$$e^{6J(x)} = e^{1/2x} e^{-\alpha(x)},$$

这里

$$\alpha(x) := \frac{1}{60x^3} - R(x), \quad 0 < R(x) < \frac{1}{210x^5}.$$

因此

$$0 < \frac{1}{84x^5} < \alpha(x) < \frac{1}{60x^3} \le \frac{1}{60}, \quad x \ge 1.$$

对 $\alpha > 0$ 得到如下不等式

$$1 - \alpha \le e^{-\alpha} \le 1 - \alpha + \frac{\alpha^2}{2}, \quad \alpha > 0.$$

故得到

$$1 - \frac{1}{60x^3} + R(x) \le e^{-\alpha(x)} \le 1 - \frac{1}{60x^3} + R(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{60x^3} - R(x)\right)^2$$

从而

$$e^{1/2x}\left(1 - \frac{1}{60x^3}\right) \le e^{6J(x)} \le e^{1/2x}\left(1 - \frac{1}{60x^3} + \frac{1}{210x^5} + \frac{9}{39200x^6}\right).$$

根据 $e^{1/2x}$ 的 Taylor 级数展开就得到

$$e^{6J(x)} \ge \left(1 - \frac{1}{60x^3}\right)\left[1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2!(2x)^2} + \frac{1}{3!(2x)^3} + \frac{1}{4!(2x)^4} + \frac{1}{5!(2x)^5}\right]$$

和

$$e^{6J(x)} \le \left(1-\frac{1}{60x^3}+\frac{1}{210x^5}+\frac{9}{39200x^6}\right)\left(1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2!(2x)^2}+\cdots\right).$$

断言 1: 对任意 $x \ge 2.4$ 有

$$h(x) > 0.0114 > h(1). \tag{15.3.20}$$

因为

$$\begin{aligned} h(x) &= 8x^3e^{6J(x)}-(8x^3+4x^2+x) \\ \ge & \left(8x^3+4x^2+x+\frac{1}{6}+\frac{1}{48x}+\frac{1}{480x^2}\right)\left(1-\frac{1}{60x^3}\right)-(8x^3+4x^2+x) \\ &\ge \frac{1}{30}-\frac{11}{240x}-\frac{7}{480x^2}-\frac{1}{360x^3}-\frac{1}{2880x^4}-\frac{1}{28800x^5}. \end{aligned}$$

从中得到 (15.3.20).

断言 2: 对任意 $x \ge 1.04$ 有

$$h(x) \le \frac{1}{30}, \tag{15.3.21}$$

且 $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 1/30$. 令

$$\begin{aligned} S(x) &:= 1-\frac{1}{60x^3}+\frac{1}{210x^5}, \\ T(x) &:= 1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{8x^2}+\frac{1}{48x^3}+\frac{1}{384x^4}+\frac{1}{3840x^5}, \\ \delta(x) &:= \frac{9}{39200x^6}T(x)+\left(S(x)+\frac{9}{39200x^6}\right)\left[\frac{1}{6!(2x)^6}+\frac{1}{7!(2x)^7}+\cdots\right]. \end{aligned}$$

从而得到

$$e^{6J(x)} \le S(x)T(x)+\delta(x). \tag{15.3.22}$$

观察到, 当 $x \ge 1$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{6!(2x)^6}+\frac{1}{7!(2x)^7}+\cdots &\le \frac{1}{6!(2x)^6}\left[1+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{(2x)^2}+\cdots\right)\right] \\ &\le \frac{1}{6!(2x)^6}\frac{3}{2} = \frac{1}{30720x^6} \end{aligned}$$

和

$$S(x) \le 1, \quad T(x) \le \frac{33}{20}, \quad c \ge 1.$$

这些不等式给出

$$0 \le \delta(x) \le \frac{297}{784000x^6}+\left(1+\frac{9}{39200x^6}\right)\frac{1}{30720x^6} \le \frac{21}{50000x^6}.$$

从而

$$h(x) \le 8x^3S(x)T(x)-(8x^3+4x^2+x)+\delta_1(x),$$

这里

$$0 \le \delta_1(x) := 8x^3\delta(x) \le \frac{21}{6250x^3}.$$

最后得到

$$8x^3S(x)T(x) - (8x^3+4x^2+x) = \left(8x^3+4x^2+x+\frac{1}{6}+\frac{1}{48x}+\frac{1}{480x^2}\right)$$

$$\cdot\left(1-\frac{1}{60x^3}+\frac{1}{210x^5}\right) - (8x^3+4x^2+x) = \frac{1}{30}-\frac{11}{240x}+\frac{79}{3360x^2}+\delta_2(x),$$

这里

$$0 \le \delta_2(x) \le \frac{41}{2520x^3}+\frac{89}{20160x^4}+\frac{17}{22400x^5}+\frac{1}{10080x^6}+\frac{1}{100800x^7} \le \frac{1}{46x^3}.$$

整理可得

$$\begin{aligned} h(x) &\le \frac{1}{30}-\frac{11}{240x}+\frac{79}{3360x^2}+\frac{21}{6250x^3}+\frac{1}{46x^3} \\ &\le \frac{1}{30}-\frac{11}{240x}+\frac{79}{3360x^2}+\frac{251}{10000x^3} \le \frac{1}{30}, \quad x \ge 1.04. \end{aligned}$$

根据两个断言中的证明得到 $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 1/30$.

(2) 对 (15.3.9) 求导得到

$$h'(x) = 6g'(x)[g(x)]^5 - (24x^2+8x+1), \quad g'(x) = g(x)\left[\frac{1}{x}+\psi(x)-\ln x\right]$$

这里

$$\psi(x) := \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \ln x - \frac{1}{2x} + J'(x)$$

和

$$J'(x) = -2\int_0^{+\infty} \frac{\sigma(u)}{(x+u)^3}du.$$

因此得到

$$g'(x) = g(x)\left[\frac{1}{2x}+J'(x)\right]$$

和

$$h'(x) = 48x^3e^{6J(x)}\left[\frac{1}{2x}+J'(x)\right] - (24x^2+8x+1).$$

所以为了证明 $h'(x) > 0$ 只要证明

$$\frac{1}{2x}+J'(x) > \left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{6x^2}+\frac{1}{48x^3}\right)e^{-06J(x)}.$$

根据 (15.3.19) 推出

$$-6J(x) = -\frac{1}{2x}+\frac{1}{60x^3}-\frac{\eta_1(x)}{210x^5}, \quad 0 \le \eta_1(x) \le 1.$$

这样就只要去证明如下不等式

$$e^{-1/60x^3}\left[\frac{1}{2x}+J'(x)\right]>\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{6x^2}+\frac{1}{48x^3}\right)e^{-1/2x}.$$

根据不等式

$$1-\beta\le e^{-\beta}<1-\beta+\frac{\beta^2}{2!}-\frac{\beta^3}{3!}+\frac{\beta^4}{4!}$$

我们只需证明

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{60x^3}\right)\left[\frac{1}{2x}+J'(x)\right] &> \left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{6x^2}+\frac{1}{48x^3}\right)\\ &\cdot\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{8x^2}-\frac{1}{48x^3}+\frac{1}{384x^4}\right).\end{aligned}$$

对 (15.3.17) 求导得到

$$J'(x)=-\frac{1}{12x^2}+\frac{1}{120x^4}-\frac{1}{252x^6}+\frac{\eta_2(x)}{120x^8},\quad 0\le\eta_2(x)\le 1.$$

所以只要证明

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{1}{60x^3}\right)\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{12x^2}+\frac{1}{120x^4}-\frac{1}{252x^6}\right)\\ >&\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{6x^2}+\frac{1}{48x^3}\right)\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{8x^2}-\frac{1}{48x^3}+\frac{1}{384x^4}\right)\end{aligned}$$

或者

$$\frac{11}{11520}>\frac{1}{252x}+\frac{89}{460800x^2}-\frac{1}{15120x^4}.$$

最后这个不等式当 $x\ge 4.21$ 时成立.

(3) 当 $1<x\le 4.21$ 时, 要证明 $h'(x)>0$ 我们需要 $h''(x)$ 和 $J''(x)$ 的渐进分析. 具体细节可参考Karatsuba 的论文[2]. □

§15.3.2 * Gamma 函数和Riemann ζ- 函数

Riemann ζ- 函数 定义为

$$\zeta(z):=\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^z},\quad \mathrm{Re}(z)>1. \tag{15.3.23}$$

实际上, 我们可以把 $\zeta(z)$ 延拓到整个复平面而成为亚纯函数且仅有唯一的奇异点 $z=1$. 原因如下: 对任意 $\mathrm{Re}(z)>1$, 我们有

$$\zeta(z)=\sum_{n\ge1}z\int_n^\infty\frac{dt}{t^{z+1}}=z\int_0^\infty\left(\sum_{n\le t}1\right)\frac{dt}{t^{n+1}}$$

[2]Karatsuba. *On the asymptotic representation of the Euler gamma function by Ramanujan*, J. Comp. Appl. Math., **135**(2001), 225-240.

$$= z\int_1^\infty \frac{\lfloor t\rfloor}{t^{n+1}}dt = \frac{z}{z-1} - z\int_1^\infty \frac{\langle t\rangle}{t^{n+1}}dt. \tag{15.3.24}$$

这样我们可以把 Riemann zeta 函数全纯延拓到 $\mathrm{Re}(z) > 0$, 但是除了 $z = 1$. 为了把它全纯延拓到整个复平面, 我们需要**Riemann 方程**.

因为

$$\Gamma(z)n^{-z} = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-nt}dt, \quad \mathrm{Re}(z) > 0, \tag{15.3.25}$$

所以

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}dt, \quad \mathrm{Re}(z) > 0. \tag{15.3.26}$$

若引入函数

$$\xi(z) := \pi^{-z/2}\Gamma(z/2)\zeta(z), \tag{15.3.27}$$

则得到如下著名的 Riemann 方程

$$\xi(z) = \xi(1-z), \quad z \neq 0, 1. \tag{15.3.28}$$

特别地

$$\xi(z) = \left[2^z\pi^{z-1}\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)\Gamma(1-z)\right]\zeta(1-z). \tag{15.3.29}$$

这意味着 $\zeta(z)$ 可以全纯延拓到 $\mathrm{Re}(z) \leq 0$. 事实上我们可以证明

$$\xi(z) = \int_0^\infty \vartheta_1(t)t^{z/2-1}dt, \quad \mathrm{Re}(z) > 1, \tag{15.3.30}$$

这里 $\vartheta_1(t) := (\vartheta(t) - 1)/2$ 和

$$\vartheta(t) := \sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{-\pi n^2 t} \tag{15.3.31}$$

是**Jacobi theta 函数** (根据下章 Fourier 分析, 我们将证明 $\vartheta(1/r) = \sqrt{t}\vartheta(t)$ 对任意 $t > 0$ 都成立). 在 (15.3.29) 中令 $z \to 2n+1$, 这里 $n \in \mathbb{N}$, 得到 $\zeta(-2n) = 0$. 因此 $-2\mathbb{N}$ 是 $\zeta(z)$ 的 (平凡) 零点. 注意到 $\zeta(0) = -1/2$ 和 $\zeta'(0) = -\frac{1}{2}\ln 2\pi$.

猜想15.3.5. (Riemann, 1859) *$\zeta(z)$ 的任意非平凡零点都落在直线 $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$ 上.*

根据 (14.3.15) 我们得到 $\zeta(2n) \in \mathbb{Q}\pi^{2n}$, 即

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^n B_n}{2(2n)!}, \quad n \geq 1. \tag{15.3.32}$$

猜想15.3.6. *$\zeta(2n+1)$ 是否是无理数?*

目前为止上述猜想至少对 $\zeta(3)$ 是正确的.

§15.3.3 * Gamma 函数和Hausdorff 维数

给定 $\epsilon > 0$ 和 $\rho \geq 0$. 对任何集合 $D \subset \mathbb{R}^n$ 定义

$$\mathcal{H}_{p,\epsilon}(D) := \left\{ w_p\left(\{S_i\}_{i\in I}\right) : D = \bigcup_{i\in I} S_i,\ \mathrm{diam}(S_i) < \epsilon \text{ 对任意 } i \in I \right\}. \tag{15.3.33}$$

这里 $\{S_i\}_{i\in I}$ 是 D 的开覆盖, $\mathrm{diam}(S_i) := \sup_{x,y\in S_i} |x - y|$ 是 S_i 的直径, 且 $w_p(\{S_i\}_{i\in I})$ 定义为

$$w_p\left(\{S_i\}_{i\in I}\right) := \sum_{i\in I} C_p \left(\frac{1}{2}\mathrm{diam}(S_i)\right)^p, \quad C_p := \mathrm{Vol}(\mathbb{B}^p) = \frac{\pi^{p/2}}{\Gamma(2 + p/2)} \tag{15.3.34}$$

($\mathbb{B}^p \subset \mathbb{R}^p$ 是 $\mathbb{R}^p$ 中的单位开球使得当 p 是正整数时是通常意义下的单位开球). 若 $p \in \mathbb{N}$ 得到

$$|\mathbb{B}^p| \equiv \mathrm{Vol}(\mathbb{B}^p) = \int_{|x|\leq 1,\ x\in\mathbb{R}^p} dx = \frac{\pi^{p/2}}{\Gamma\left(1 + \frac{p}{2}\right)}.$$

当 $\epsilon \to 0+$ 时, $\mathcal{H}_{p,\epsilon}(D)$ 时递增的. 因此可定义

$$\mathcal{H}_p(D) := \sup_{\epsilon>0} \mathcal{H}_{p,\epsilon}(D), \tag{15.3.35}$$

称为p- 维 **Hausdorff 测度 (p-dimensional Hausdorff measure)**.

我们先讨论测度的一般定义. 假设 X 是任意集合. X 的子集 $\mathfrak{A}$ 称为**σ- 代数 (σ-algebra)** 如果满足下面条件:

(1) $\emptyset, X \in \mathfrak{A}$.

(2) 如果 $A, B \in \mathfrak{A}$, 则 $A \setminus B \in \mathfrak{A}$.

(3) 如果 $\{A_i\}_{i\in I}$ 是 $\mathfrak{A}$ 中的有限或者可数子集族, 则它们的并 $\cup_{i\in I} A_i$ 也属于 $\mathfrak{A}$.

定义15.3.7. σ- 代数 $\mathfrak{A}$ 上的**测度 (measure)** 是指函数 $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} = [0, +\infty]$ 且满足

(1) $\mu(\emptyset) = 0$, 和

(2) **(σ- 可加性)** 若 $\{A_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ 是 $\mathfrak{A}$ 中的有限或可数子集族且 A_i 互不相交, 则

$$\mu\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) = \sum_{i\in\geq 1} \mu(A_i).$$

注意到 $\sum_{i\geq 1} \mu(A_i)$ 是有限和或无限级数.

性质15.3.8. 假设 μ 是 σ- 代数 $\mathfrak{A}$ 上的测度.

(a) 令 $\{A_i\}_{i\geq 1}$ 是满足条件 $A_i \subset A_{i+1}$ 的可测集序列. 则数列 $\{\mu(A_i)\}_{i\geq 1}$ 是单调非减的且满足

$$\lim_{i\to+\infty}\mu(A_i)=\mu(\cup_{i\geq 1}A_i). \tag{15.3.36}$$

(b) 令 $\{A_i\}_{i\geq 1}$ 是满足条件 $A_i \supset A_{i+1}$ 和 $\mu(A_1)<+\infty$ 的可测集序列. 则数列 $\{\mu(A_i)\}_{i\geq 1}$ 是单调非增的且满足

$$\lim_{i\to+\infty}\mu(A_i)=\mu(\cap_{i\geq 1}A_i). \tag{15.3.37}$$

证: (a) 因为 $A_{i+1}=A_i\bigsqcup(A_{i+1}\setminus A_i)$, 所以

$$\mu(A_{i+1})=\mu(A_i)+\mu(A_{i+1}\setminus A_i)\geq\mu(A_i)$$

且数列 $\{\mu(A_i)\}_{i\geq 1}$ 是单调非减的. 令 $A:=\cup_{i\geq 1}A_i$ 并记 $B_i:=A_i\setminus A_{i-1}$ 其中 $A_0=\emptyset$. 得到

$$A_i=\bigsqcup_{1\leq k\leq i}B_k,\quad A=\bigcup_{i\geq 1}A_i=\bigsqcup_{k\geq 1}B_k,\quad \mu(A)=\sum_{k\geq 1}\mu(B_k)=\lim_{k\to+\infty}\sum_{1\leq i\leq k}\mu(B_i).$$

这样就得到 (15.3.36).

(b) 由于 $A_i\supset A_{i+1}$, 我们有 $\mu(A_i)\geq\mu(A_{i+1})$ 且数列 $\{\mu(A_i)\}_{i\geq 1}$ 是单调非增的. 令 $B_i:=A_i\setminus A_{i+1}$ 得到

$$\mu(A_i)=\mu(A_{i+1})+\mu(B_i),\quad \mu(A_1)-\mu(A_{i+1})=\sum_{1\leq k\leq i}\mu(B_k)=\mu(A_1\setminus A_{i+1}).$$

若记 $C_i:=A_1\setminus A_i$ 则数列 $\{C_i\}_{i\geq 1}$ 是单调非减的从而根据 (a) 得到

$$\mu\left(A_1\setminus\bigcap_{i\geq 1}A_i\right)=\mu\left(\bigcup_{i\geq 1}C_i\right)=\lim_{i\to+\infty}\mu(C_i)=\lim_{i\to+\infty}\mu(A_1\setminus A_i).$$

故

$$\lim_{i\to+\infty}[\mu(A_1)-\mu(A_i)]=\mu(A_1)-\mu\left(\bigcap_{i\geq 1}A_i\right).$$

因为 $\mu(A_1)<+\infty$, 所以上述等式推出 (15.3.37). □

性质15.3.8 (b) 中的假设条件 $\mu(A_1)<+\infty$ 是必须的. 比如考虑集合列 $A_i=(i,+\infty)$ 和通常的长度测度 μ, 则得到 $\mu(A_i)=+\infty$ 但是 $\cap_{i\in\mathbf{N}}A_i=\emptyset$.

如果 $\mathfrak{S}$ 是集合 X 的任意子集族, 则存在唯一的最小 σ- 代数包含 $\mathfrak{S}$; 这个最小的 σ- 代数称为**由 $\mathfrak{S}$ 所生成的 σ- 代数 (σ-algebra generated by $\mathfrak{S}$)**. 事实上, 考虑集合

$$\sigma(\mathfrak{S}):=\bigcap\{\mathfrak{A}:\mathfrak{A}\text{ 是 }\sigma\text{- 代数且 }\mathfrak{A}\supset\mathfrak{S}\}. \tag{15.3.38}$$

因为 X 本身就是 σ- 代数, 所以这样的集合 $\mathfrak{A}$ 总是存在的. 对任何包含 $\mathfrak{S}$ 的 σ- 代数 $\mathfrak{A}$ 我们必有 $\emptyset, X \in \mathfrak{A}$ 从而得到 $\emptyset, X \in \sigma(\mathfrak{S})$. 若 $\{A_i\}_{i\in I}$ 是 $\sigma(\mathfrak{S})$ 中的有限个或可数个元素构成的序列, 则 $A_i \in \mathfrak{A}$ 对每个 $i \in I$ 都成立, 从而 $\cup_{i\in I} A_i \in \mathfrak{A}$ 和 $\cup_{i\in I} A_i \in \sigma(\mathfrak{S})$. 最小性可从定义推出.

(1) 如果 X 是拓扑空间, 则有其拓扑所生成的 (即由该拓扑中的开集所生成的) σ- 代数称为 X 上的**Borel σ- 代数 (Borel σ-algebra)**. Borel σ- 代数中的元素称为**Borel 集 (Borel set)**.

(2) 定义在 Borel σ- 代数上的测度称为 X 上的**Borel 测度 (Borel measure)**.

定理15.3.9. (Lebesgue) *$\mathbb{R}^m$ 上存在唯一的 Borel 测度 $\mathcal{L}_m$ 满足如下性质: 平移变换下保持不变且 $\mathcal{L}_m([0,1]^m) = 1$.*

上述测度 $\mathcal{L}_n$ 称为**Lebesgue 测度 (Lebesgue measure)**. 唯一性表明在单位立方体上取有限值的 $\mathbb{R}^m$ 上的平移不变的 Borel 测度是 $\mathcal{L}_m$ 的常数倍.

(1) Lebesgue 测度关于 $\mathbb{R}^m$ 上的等距映射是不变的.

(2) 如果 $\mathbf{L} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ 是线性映射, 则

$$\mathcal{L}_m(\mathbf{L}(A)) = |\det \mathbf{L}| \mathcal{L}_m(A), \tag{15.3.39}$$

对每个可测集 $A \subset \mathbb{R}^m$ 都成立.

假设 (X, d) 是测度空间且 p 是非负实数. 类似于 (15.3.35) 我们可以定义关于 X 的 p- 维 Hausdorff 测度 $\mathcal{H}_p(X)$. 因为当 $\epsilon \to 0+$ 时 $\mathcal{H}_{p,\epsilon}(X)$ 有极限 (可能是无穷的), $\mathcal{H}_p(X)$ 对任何度量空间 (X, d) 都是有定义的. 但是可能是非负实数或者是 $+\infty$.

定理15.3.10. *假设 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 是度量空间, 且 A 和 B 是 X 的子集. 则*

(1) 如果 $A \subset B$ 则 $\mathcal{H}_p(A) \le \mathcal{H}_p(B)$.

(2) $\mathcal{H}_p(\cup_{i\in I} A_i) \le \sum_{i\in I} \mu_d(A_i)$ 对任意有限的或可数的子集族 $\{A_i\}_{i\in I} \subset X$ 都成立.

(3) 如果 $\operatorname{dist}(A, B) > 0$, 则 $\mathcal{H}_p(A \cup B) = \mathcal{H}_p(A) + \mathcal{H}_p(B)$.

(4) 如果 $f : X \to Y$ 是 Lipschitz 映射且 Lipschitz 常数为 C, 则 $\mathcal{H}_p(f(X)) \le C^p \mathcal{H}_p(X)$.

*(5) 如果 $f : X \to Y$ 是**C- 相似的**, 即, $d_Y(f(x_1), f(x_2)) = C d_X(x_1, x_2)$ 对任何 $x_1, x_2 \in X$ 都成立, 则 $\mathcal{H}_p(f(X)) = C^p \mathcal{H}_p(X)$.*

在《实变函数》课程中或在之后的章节中,我们将利用**Carathéodory 判别法**来证明满足**定理15.3.10** 中五条性质且定义在 X 的 Borel σ- 代数上的非负函数必是测度.

定理15.3.11. 对任何度量空间 (X,d) 和任何 $p\geq 0$, $\mathcal{H}_p$ 是 X 的 Borel σ- 代数上的测度.

例15.3.12. 集合的 0- 维 Hausdorff 测度就是它的势. 换句话说, $\mathcal{H}_0(X)$ 是 X 中元素个数如果 X 是有限的, 和 $\mathcal{H}_0(X)=+\infty$ 如果 X 是无限的.

对 $\mathbb{R}^m$ 中的单位立方体 $[0,1]^m$ 有 $\mathcal{H}_m([0,1]^m)=1$. 更进一步得到

定理15.3.13. 对每个 $m\in\mathbb{N}$, 在 $\mathbb{R}^m$ 上成立 $\mathcal{L}_m=\mathcal{H}_m$.

定理15.3.14. (Vitali 覆盖定理) 假设 X 是 $\mathbb{R}^m$ 中的有界集. 定义集族 $\mathfrak{B}$ 为 $\mathbb{R}^m$ 中满足如下性质的闭球集: 对任意 $x\in X$ 和任意 $\epsilon>0$ 存在闭球 $\mathbf{B}\in\mathfrak{B}$ 满足 $x\in\mathbf{B}$ 和 $\mathrm{diam}(\mathbf{B})<\epsilon$. 则 $\mathfrak{B}$ 包含有限的或可数的子集族 $\{\mathbf{B}_i\}_{i\in I}$ 满足

$$\mathbf{B}_i\cap\mathbf{B}_j=\emptyset \quad 若\ i\neq j \quad 且 \quad \mathcal{H}_m(X\setminus\cup_{i\in I}\mathbf{B}_i)=0.$$

证: 不失一般性我们不妨假设每个球 $\mathbf{B}\in\mathfrak{B}$ 包含 X 中的至少一个点且把半径大于 1 的球都排除在外. 此时所有这样的闭球都包含在 X 的某个有界的 2- 领域内.

我们利用归纳法来构造闭球序列 $\{\mathbf{B}_i\}_{i\geq 1}$. 如果 $\mathbf{B}_1,\cdots,\mathbf{B}_n$ 已经构造, 我们选择下一个闭球 $\mathbf{B}_{n+1}$ 如下. 记

$$\mathfrak{B}_n:=\left\{\mathbf{B}\in\mathfrak{B}|\mathbf{B}\ 和\ \mathbf{B}_1,\cdots,\mathbf{B}_n\ 都不相交\right\}.$$

若 $\mathfrak{B}_n=\emptyset$, 则 $\mathbf{B}_1\cup\cdots\cup\mathbf{B}_n$ 覆盖整个集合 X. 若 $\mathfrak{B}_n\neq\emptyset$, 选择 $\mathbf{B}_{n+1}\in\mathfrak{B}_n$ 满足

$$\mathrm{diam}(\mathbf{B}_{n+1})>\frac{1}{2}\sup_{\mathbf{B}\in\mathfrak{B}_n}\mathrm{diam}(\mathbf{B}). \tag{15.3.40}$$

根据构造诸球 $\mathbf{B}_i$ 互不相交. 我们现在来证明除了差一个 m- 维 Hausdorff 0 测集外, 这些闭球覆盖 X. 因为闭球都是互不相交的且都包含在某个具有有限体积的集合内, 所以得到

$$\sum_{i\geq 1}\mathcal{H}_m(\mathbf{B}_i)<+\infty.$$

固定 $\epsilon>0$. 存在 $n\in\mathbb{N}$ 满足 $\sum_{i\geq n+1}\mathcal{H}_m(\mathbf{B}_i)<\epsilon$. 令 $x\in X\setminus\cup_{i\geq 1}\mathbf{B}_i$, 并令 $\mathbf{B}$ 是任何包含 x 且和 $\mathbf{B}_1,\cdots,\mathbf{B}_n$ 都不相交的球. 注意到 $\mathbf{B}$ 必和 $\cup_{i\geq 1}\mathbf{B}_i$ 相交, 这是因为否则的话对任何 n 有 $\mathbf{B}\in\mathfrak{B}_n$. 根据 (15.3.40), 得到

$$\mathcal{H}_m(\mathbf{B})=\mathcal{L}_m(\mathbf{B})=C(m)\left(\frac{\mathrm{diam}(\mathbf{B})}{2}\right)^m\leq C(m)\left(\mathrm{diam}(\mathbf{B}_n)\right)^m=2^m\mathcal{H}_m(\mathbf{B}_n).$$

令 $n \to +\infty$ 得到 $\mathcal{H}_m(\mathbf{B}) = 0$, 矛盾! 令 $k > n$ 是最小的指标使得 $\mathbf{B} \cap \mathbf{B}_k \neq \emptyset$ 成立. 则 $\mathbf{B} \in \mathfrak{B}_{k-1}$ 从而根据 (15.3.40) 得到

$$\mathrm{diam}(\mathbf{B}_k) > \frac{1}{2}\mathrm{diam}(\mathbf{B}).$$

若记 (x, r) 和 (x_k, r_k) 分别为 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{B}_k$ 的中心和半径, 则 $r \leq 2r_k$ 和

$$|x - x_k| \leq |x - x_0| + |x_0 - x_k| \leq r + (r_k + r) \leq 2r + r_k \leq 5r_k.$$

因此 $x \in 5\mathbf{B}_k$. 我们已经证明了每个 $x \in X \setminus \cup_{i\geq 1}\mathbf{B}_i$ 属于球 $5\mathbf{B}_k$, 这里 $k > n$. 即 $X \setminus \cup_{i\geq 1}\mathbf{B}_i \subset \cup_{i\geq n+1} 5\mathbf{B}_i$ 从而

$$\mathcal{H}_m\left(X \setminus \cup_{i\geq 1}\mathbf{B}_i\right) \leq \sum_{i\geq n+1} \mathcal{H}_m(5\mathbf{B}_i) = 5^m \sum_{i\geq n+1} \mathcal{H}_m(\mathbf{B}_i) < 5^m \epsilon.$$

根据 ϵ 的任意性可知 $\mathcal{H}_m(X \setminus \cup_{i\geq 1}\mathbf{B}_i) = 0$. □

定理15.3.15. *对任何度量空间 (X, d) 存在非负实数 $p_0 \in [0, +\infty]$ 使得当 $p > p_0$ 时 $\mathcal{H}_p(X) = 0$ 和当 $p < p_0$ 时 $\mathcal{H}_p(X) = +\infty$.*

证: 令 $p_0 := \inf\{p \geq 0 : \mathcal{H}_p(X) < +\infty\}$. 显然对任何 $p < p_0$ 有 $\mathcal{H}_p(X) = +\infty$. 如果 $p > p_0$, 则存在 $p' \in [p_0, p)$ 满足 $\mathcal{H}_{p'}(X) = M < +\infty$. 因此对任意 $\epsilon > 0$ 存在 X 的开覆盖 $\{S_i\}_{i\in I}$ 满足

$$\mathrm{diam}(S_i) < \epsilon, \quad \sum_{i\in I} C(p')[\mathrm{diam}(S_i)]^{p'} < 2M.$$

故得到

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I} C(p)\,[\mathrm{diam}(S_i)]^{p} &= \sum_{i\in I} C(p)\,[\mathrm{diam}(S_i)]^{p-p'}\,[\mathrm{diam}(S_i)]^{p'} \\
&\leq \epsilon^{p-p'}\frac{C(p)}{C(p')}\sum_{i\in I} C(p')\,[\mathrm{diam}(S_i)]^{p'} \leq 2\frac{C(p)}{C(p')}\epsilon^{p-p'}M.
\end{aligned}$$

即得到 $\mathcal{H}_{p,\epsilon}(X) \leq 2\epsilon^{p-p'}C(p)M/C(p')$. 最后令 $\epsilon \to 0+$ 得到 $\mathcal{H}_p(X) = 0$. □

定理15.3.15 中的数 p_0 称为 X 的**Hausdorff 维数 (Hausdorff dimension)** 并记为 $\dim_{\mathcal{H}}(X)$. 注意到当 $p = \dim_{\mathcal{H}}(X)$ 时, 测度 $\mathcal{H}_p(X)$ 只有三种可能性, 即, 零, 正数 (可能不是整数) 或无穷.

例15.3.16. 回顾下§2.3.6 中定义的 Cantor 集 C

$$\begin{aligned}
C &= \bigcap_{m\geq 1}\ \bigcap_{0\leq k\leq 3^{m-1}-1}\left(\left[0, \frac{3k+1}{3^m}\right] \cup \left[\frac{3k+2}{3^m}, 1\right]\right) \\
&= [0,1] \setminus \bigcup_{m\geq 1}\ \bigcup_{0\leq k\leq 3^{m-1}-1}\left(\frac{3k+1}{3^m}, \frac{3k+2}{3^m}\right).
\end{aligned}$$

若记 C_n 是第 n 步的剩余部分, 则得到 $\mathcal{H}_p(C_n) = C(p)2^n/3^{np}$ 和

$$\mathcal{H}_p(C) = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{H}_p(C_n) = \lim_{n\to+\infty} C(p)2^n \left(\frac{1}{3^n}\right)^p = \begin{cases} +\infty, & p < \log_3 2, \\ C(p), & p = \log_3 2, \\ 0, & p > \log_3 2. \end{cases}$$

从而得到 $\dim_{\mathcal{H}}(C) = \log_3 2 = \ln 2/\ln 3$, 但是 Cantor 集的通常维数是 0.

性质15.3.17. 假设 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 是度量空间.

(1) 如果 $Y \subset X$, 则 $\dim_{\mathcal{H}}(Y) \le \dim_{\mathcal{H}}(X)$.

(2) 如果 X 被有限或可数子集族 $\{X_i\}_{i\in I}$ 所覆盖, 则

$$\dim_{\mathcal{H}}(X) = \sup_{i\in I} \dim_{\mathcal{H}}(X_i).$$

(3) 如果 $f: X \to Y$ 是 Lipschitz 映射, 则 $\dim_{\mathcal{H}}(f(X)) \le \dim_{\mathcal{H}}(X)$. 特别地, 双 -Lipschitz 等价的度量空间必有相同的 Hausdorff 维数.

(4) $\dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^m) = \dim_{\mathcal{H}}([0,1]^m) = m$.

假设 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 是度量空间且映射 $f: X \to Y$ 满足条件

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \le C d_X(x_1, x_2)^\alpha, \quad x_1, x_2 \in X, \tag{15.3.41}$$

这里 C, α 都是正常数. 则

$$\mathcal{H}_p(f(X)) \le C^p \mathcal{H}_{p\alpha}(X), \ \dim_{\mathcal{H}}(f(X)) \le \frac{1}{\alpha} \dim_{\mathcal{H}}(X).$$

§15.4 * 三探 Γ, Ψ, Φ 函数和Mellin 变换

本节绝大部分内容取自谭琳的专著, 参见参考文献中书名. 在这里我们仅是依照我们的需要从专著中进行择取, 更重要的是把专著中的部分习题写入本节中. 除此之外, 我们也补充了部分关于 L 函数的内容.

令 G 是 Abel 群且令 $\mathcal{F}(G)$ 是定义在 G 上的所有复值函数构成的集合. 对任何 $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(G)$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$ 定义

$$(f_1 + f_2)(g) := f_1(g) + f_2(g), \quad (cf)(g) := c \cdot f(g), \quad g \in G.$$

则 $\mathcal{F}(G)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的向量空间.

练习15.4.1. 证明 $\mathcal{F}(G)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的向量空间. 当 G 是有限时, $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}(G) = |G|$.

称 $\chi \in \mathcal{F}(G)$ 是 G 的**特征 (character)** 如果满足下列条件

(i) 对任何 $g \in G$ 有 $|\chi(g)| = 1$, 且

(ii) 对任何 $g_1, g_2 \in G$ 有 $\chi(g_1 g_2) = \chi(g_1)\chi(g_2)$.

G 的所有特征构成的集合记为 $\widehat{G}$. 注意到对任意 $\chi \in \widehat{G}$ 有 $\chi(e) = 1$, 这里 e 是 G 的单位元.

练习15.4.2. 令 $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. 则 $\mathbb{T}$ 是乘法群且 $\hat{G} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(G, \mathbf{T})$.

对任何 $\chi, \varphi \in \widehat{G}$ 定义 $\chi\varphi \in \widehat{G}$ 为

$$(\chi\varphi)(g) := \chi(g)\varphi(g), \quad g \in G.$$

则 $\widehat{G}$ 是 Abel 群. $\widehat{G}$ 中的单位元是 ι, 即

$$\iota(g) := 1.$$

$\chi \in \widehat{G}$ 的逆元由下面给出

$$\chi^{-1}(g) := \overline{\chi(g)} = \frac{1}{\chi(g)}, \quad g \in G.$$

首先假设 G 是有限 Abel 群. 则 $\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{F}(G) = |G|$. 对任意 $\chi \in \widehat{G}$ 且 $\chi \neq \iota$, 我们可以找到 $g_0 \in G$ 使得 $\chi(g_0) \neq 1$ 且 $g_0 \neq e$. 计算得到

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = \sum_{g \in G} \chi(g_0 g) = \sum_{g \in G} \chi(g_0)\chi(g) = \chi(g_0) \sum_{g \in G} \chi(g).$$

因此

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = 0.$$

作为推论对任意 $\chi, \varphi \in \widehat{G}$, 只要 $\chi \neq \varphi$ 就得到

$$\sum_{g \in G} (\chi\varphi^{-1})(g) = \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\varphi(g)} = 0.$$

另一方面有

$$\sum_{g \in G} (\chi\chi^{-1})(g) = \sum_{h \in G} \iota(g) = \sum_{g \in G} 1 = |G|.$$

则得到

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\chi\chi^{-1})(g) = 1.$$

上述计算促使我们在 $\mathcal{F}(G)$ 上定义**内积 (inner product)** 如下

$$\langle f_1, f_2 \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g)\overline{f_2(g)}, \quad f_1, f_2 \in \mathcal{F}(G). \tag{15.4.1}$$

从而得到

$$\langle \chi, \varphi \rangle = \delta_{\chi\varphi}, \quad \chi, \varphi \in \widehat{G}. \tag{15.4.2}$$

定理15.4.3. (a) 若 $G=\mathbb{Z}_n=\{[0],[1],\cdots,[n-1]\}$ 和 $\xi=e^{2\pi\sqrt{-1}/n}$, 则

$$\widehat{G}=\{\chi_0,\chi_1,\cdots,\chi_{n-1}\},$$

这里 $\chi_1([j])=\xi^j\ (0\le j\le n-1)$ 和 $\chi_k=\chi_1^k\ (0\le k\le n-1)$.

(b) 若 G_1 和 G_2 都是有限 Abel 群, 则 $\widehat{G_1\times G_2}=\widehat{G_1}\times\widehat{G_2}$.

(c) 对任何有限 Abel 群 G 有 $|\widehat{G}|=|G|$.

练习15.4.4. 证明**定理15.4.3**.

定理15.4.5. 假设 G 是有限 Abel 群.

(a) $\widehat{G}$ 是 $\mathcal{F}(G)$ 的正交基.

(b) 对任何 $f\in\mathcal{F}(G)$ 有

$$f=\sum_{\chi\in G}c(\chi)\chi,\quad c(\chi):=\langle f,\chi\rangle. \tag{15.4.3}$$

证: (a) 利用 (15.4.2) 和**定理15.4.3**.

(b) 根据 (a) 得到

$$f=\sum_{\chi\in\widehat{G}}c\chi$$

对某个 $c\in\mathbb{C}$ 成立. 从而推出

$$c=\langle f,\chi\rangle=\sum_{\varphi\in\widehat{G}}\langle c(\varphi)\varphi,\chi\rangle=\sum_{\varphi\in\widehat{G}}c(\varphi)\delta_{\varphi\chi}=c(\chi).\quad\square$$

我们接下来考虑群 $G=\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$. 群 G 也是拓扑空间, 即运算 $(z,w)\mapsto zw$ 和 $z\mapsto z^{-1}$ 都是连续的. 因此 G 是拓扑群 (事实上是 Lie 群). 在此我们考虑 $\mathbf{T}$ 的所有**连续特征 (continuous character)**, 即, 集合 $\widehat{\mathbf{T}}$. 注意到原先的特征相对于有限群上的离散拓扑也是连续的.

对任意 $a\in\mathbb{R}$ 定义

$$\mu_a(x):=ax,\quad x\in\mathbb{R}. \tag{15.4.4}$$

注意到 μ_a 是连续同态[3].

(A) 选择连续同态 $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 并记 $a:=\psi(1)\in\mathbb{R}$. 则 $\psi=\mu_a$. 事实上, 对任何 $m\in\mathbb{Z}$, 我们有 $\psi(m)=ma$. 若 $\psi(1/n)=:b$, 则

$$a=\psi(1)=\psi\left(n\cdot\frac{1}{n}\right)=n\psi\left(\frac{1}{n}\right)=nb;$$

即, $b=\frac{1}{n}a$. 作为推论, $\psi(x)=ax$ 对任何 $x\in\mathbb{Q}$ 都成立. 因为 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 内稠密且 ψ 是连续的, 所以 $\psi(x)=ax$ 对任意 $x\in\mathbb{R}$ 都成立.

[3]映射 $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 称为**同态 (homomorphism)**, 如果其是 $\mathbb{R}$ 上的群同态.

(B) 定义指数映射为

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T}, \quad x \longmapsto e^{2\pi\sqrt{-1}t}. \tag{15.4.5}$$

显然 exp 是连续同态, 局部同构, 和 $\ker(\exp) = \mathbb{Z}$. 也就是说 $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ 是覆盖映射. 利用拓扑学结果可以证明对任意连续映射 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ 存在唯一的连续映射 $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足 $\varphi = \exp \circ \tilde{\varphi}$.

(C) $\widehat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$. 这里 $\widehat{\mathbb{R}}$ 表示 $\mathbb{R}$ 上所有连续特征构成的集合. 对任意 $a \in \mathbb{R}$ 定义 $\varphi_a \in \widehat{\mathbb{R}}$ 为 $\varphi_a(x) := e^{2\pi\sqrt{-1}ax}$, $x \in \mathbf{R}$. 反之, 如果 $\varphi \in \widehat{\mathbb{R}}$ 则 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ 是连续的和同态的. 根据 (B), 存在唯一的连续同态 $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足 $\varphi = \exp \circ \tilde{\varphi}$. 现在定义 $a := \tilde{\varphi}(1) \in \mathbb{R}$.

给定连续同态映射 $\chi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ 定义

$$\varphi_\chi := \chi \circ \exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T}. \tag{15.4.6}$$

则 φ_χ 也是连续同态的且 $\varphi_\chi(0) = \varphi_\chi(1) = \chi(1) = 1$. 根据以上讨论我们得到连续同态映射 $\tilde{\varphi}_\chi = \mu_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 且满足

$$\exp \circ \tilde{\varphi}_\chi = \varphi_\chi = \chi \circ \exp . \tag{15.4.7}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_\chi} & \mathbb{R} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \exp} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \exp} \\ \mathbb{T} & \xrightarrow{\chi} & \mathbb{T} \end{array}$$

特别地对 $\chi = 1$ 得到

$$\exp(a) = \chi(\exp(1)) = \chi(1) = 1 \Longrightarrow a = n \in \mathbb{Z}$$

并称 $a = n$ 是 χ 的**度 (degree)** 且记为 $\deg(\chi)$. 因此, (15.4.7) 变成

$$\chi(z) = z^n, \quad n := \deg(\chi), \quad z \in \mathbb{T}. \tag{15.4.8}$$

反之, 对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 定义

$$\chi_n := z^n, \quad z \in \mathbb{T}. \tag{15.4.9}$$

注意到 $\chi_n \in \widehat{\mathbb{T}}$ 和 $\chi_n\chi_m = \chi_{n+m}$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

定理15.4.6. *我们有 $\widehat{\mathbb{T}} = (\chi_n)_{n\in\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}$.*

对任意 $f \in \mathcal{F}(\mathbb{T})$ (等价地说, f 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的复值函数且周期为 2π) 和 $\chi \in \widehat{\mathbb{T}}$ 定义

$$c(\chi) := \langle f, \chi \rangle = \frac{1}{|\mathbb{T}|} \int_{\mathbb{T}} f(x)\overline{\chi(x)}dx. \tag{15.4.10}$$

因此形式上有

$$f = \sum_{\chi \in \widehat{\mathbb{T}}} c(\chi)\chi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c(\chi_n)\chi_n. \tag{15.4.11}$$

记

$$c_n := c(\chi_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}nx}dx \tag{15.4.12}$$

则 (15.4.11) 等于

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi\sqrt{-1}nx}. \tag{15.4.13}$$

这是下章即将讨论的关于圆上的 Fourier 分析 (参见 第十六章).

对 $\mathbb{R}$, 我们在 (15.4.11) 中把 $\sum_{\chi \in \widehat{\mathbf{T}}}$ 代替为 $\int_{\mathbf{R}}$ 从而得到

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\varphi_a)\varphi_a da, \quad c(\varphi_a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\varphi_a(t)}dt. \tag{15.4.14}$$

由于 $\varphi_a(t) = e^{2\pi\sqrt{-1}at}$ 故

$$\hat{f}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}ax}dx, \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(a)e^{2\pi\sqrt{-1}ax}da. \tag{15.4.15}$$

这是 $\mathbb{R}$ 上的经典 Fourier 分析. 令 $L^1(\mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}$ 上 (Riemann 或 Lebesgue) 可积函数构成的集合.

(i) 如果 $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$, 则 (15.4.15) 中的第一个积分有定义. 如果 $\int_{-\infty}^{\infty}$ 是 Cauchy 主值积分 $\lim_{\Delta \to \infty} \int_{-\Delta}^{\Delta}$ 则 (15.4.15) 中的第二个恒等式成立.

(ii) **(平移不变性)** 如果 $G = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{T}$ 则

$$\int_G f(x)dx = \int_G f(gx)dx, \quad g \in G.$$

特别的对 $G = \mathbb{R}$ 得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+a)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx;$$

如果 $G = \mathbf{T}$ 得到

$$\int_0^{2\pi} f(e^{2\pi\sqrt{-1}(\theta+\alpha)})d\theta = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(e^{2\pi\sqrt{-1}\theta})d\theta.$$

(iii) 如果 $f \in L^1(\mathbf{R})$ 则由 (15.4.15) 给出的函数 $\hat{f}$ 是有界的和连续的. 对每个 $h \in \mathbf{R}$ 定义

$$\mathbf{L}_h : L^1(\mathbf{R}) \longrightarrow L^1(\mathbf{R}), \quad f \longmapsto \mathbf{L}_h(f)(x) := f(x+h).$$

从而得到

$$\widehat{\mathbf{L}_h(f)} = \varphi_h \hat{f}$$

这里 $\varphi_h(x) = e^{2\pi\sqrt{-1}hx}$.

§15.4.1 * $\mathbb{R}^+$ 上的调和函数

集合 $\mathbb{R}^+$ 在乘法下构成一个拓扑群. 映射

$$\epsilon : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad x \longmapsto e^x, \tag{15.4.16}$$

是**拓扑同构 (topological isomorphism)** (即, ϵ 不仅是群同构而且也是拓扑同胚). ϵ 的逆映射 λ 为

$$\lambda : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \longmapsto \ln y. \tag{15.4.17}$$

更进一步我们有如下两个映射

$$\hat{\epsilon} : \widehat{\mathbb{R}^+} \longrightarrow \widehat{\mathbb{R}}, \quad \varphi \longmapsto \varphi \circ \epsilon, \tag{15.4.18}$$

和

$$\hat{\lambda} : \widehat{\mathbb{R}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{R}^+}, \quad \psi \longmapsto \psi \circ \lambda. \tag{15.4.19}$$

因为 $\widehat{\mathbb{R}} = \langle \varphi_a \rangle_{a \in \mathbb{R}}$, 所以

$$\varphi_a^+(x) := \hat{\lambda}(\varphi_a)(x) = \varphi_a(\ln x) = e^{2\pi\sqrt{-1}a\ln x} = x^{2\pi\sqrt{-1}a}, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{15.4.20}$$

定理15.4.7. *$\widehat{\mathbb{R}^+} = \langle \varphi_a^+ \rangle_{a \in \mathbb{R}}$. 作为拓扑群, $\widehat{\mathbb{R}^+}$ 和 $\mathbb{R}$ 是同构的.*

在群 $\mathbb{R}^+$ 存在不变测度 dx/x 满足

$$\int_{ra}^{rb} \frac{dx}{x} = \ln\frac{rb}{ra} = \ln\frac{b}{a} = \int_a^b \frac{dx}{x}, \quad a, b > 0.$$

定义

$$\tilde{f}(a) = c(\varphi_a^+) = \int_{\mathbb{R}^+} f(x)\overline{\varphi_a^+(x)}\frac{dx}{x} = \langle f, \varphi_a^+ \rangle_{L^2(\mathbb{R}^+, dx/x)}; \tag{15.4.21}$$

则得到

$$f(x) = \int_{\widehat{\mathbb{R}^+}} c(\varphi_a^+)\varphi_a^+ = \int_{\mathbb{R}} c(\varphi_a^+)\varphi_a^+ \, da = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(a) x^{2\pi\sqrt{-1}a} da. \tag{15.4.22}$$

公式 (15.4.21) 和 15.4.22) 是 $\mathbb{R}^+$ 上的 Fourier 分析. 引入

$$\tau := -2\pi a, \quad \hat{f}(\tau) := \tilde{f}\left(-\frac{\tau}{2\pi}\right) = \tilde{f}(a). \tag{15.4.23}$$

则 (15.4.22) 和 (15.4.22) 变为

$$\hat{f}(\tau)=\int_0^{\infty}f(x)x^{\sqrt{-1}\tau}\frac{dx}{x},\quad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\tau)x^{-\sqrt{-1}\tau}d\tau. \tag{15.4.24}$$

定理15.4.8. (a) 如果 $f\in L^1(\mathbb{R}^+,dx/x)\cap C^1((0,+\infty))$, 则 (15.4.24) 中的第一个积分是有定义的. 更进一步如果 $\int_{-\infty}^{\infty}$ 表示 Cauchy 主值积分 $\lim_{\Delta\to\infty}\int_{-\Delta}^{\Delta}$ 则 (15.4.24) 中的第二个恒等式成立.

(b) 如果 $F\in L^1((-\infty,\infty))\cap C^1((-\infty,\infty))$, 则积分

$$f(x):=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\tau)x^{-\sqrt{-1}\tau}d\tau$$

是有定义的. 进一步有

$$F(\tau)=\lim_{\Delta\to\infty}\int_{\frac{1}{\Delta}}^{\Delta}f(x)x^{\sqrt{-1}\tau}\frac{dx}{x}.$$

给定 $f\in C^1(\mathbb{R}^+)$ 和 $\sigma>0$, 定义

$$f_\sigma(x):=x^\sigma f(x). \tag{15.4.25}$$

注意到 $f_\sigma\in C^1(\mathbb{R}^+)$. 若进一步假设 $f_\sigma\in L^1(\mathbb{R}^+,dx/x)$, 此时根据**定理15.4.8** (a) 定义

$$\widehat{f_\sigma}(\tau)=\int_0^{\infty}f(x)x^{\sigma+\sqrt{-1}\tau}\frac{dx}{x}. \tag{15.4.26}$$

定理15.4.9. (Mellin 变换) 如果 $f\in C^1(\mathbb{R}^+)$ 和 $f_\sigma\in L^1(\mathbb{R}^+,dx/x)$ 其中 $\sigma\in(a,b)\subset\mathbb{R}^+$, 则

$$F(z):=\int_0^{\infty}f(x)x^z\frac{dx}{x} \tag{15.4.27}$$

关于 z(其中 $a<\mathrm{Re}(z)<b$) 是全纯的, 且

$$f(x)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty}F(z)x^{-z}dz \tag{15.4.28}$$

该积分和 $\sigma\in(a,b)$ 的选择无关.

证: 显然 $F(z):=\widehat{f_\sigma}(\tau)$ 关于 $z:=\sigma+\sqrt{-1}\tau$, 其中 $a<\sigma<b$, 是全纯的. 根据**定理15.4.8** (b) 我们有

$$x^\sigma f(x)=f_\sigma(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f_\sigma}(\tau)x^{-\sqrt{-1}\tau}d\tau$$

则

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f_\sigma}(\tau)x^{-\sigma-\sqrt{-1}\tau}d\tau=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty}F(z)x^{-z}dz.$$

根据 Cauchy 定理最后的积分和 σ 无关. □

称 $(f(x),F(z))$ 为**Mellin 对 (Mellin pair)** 并通常把 $F(z)$ 记作 $\mathcal{M}(f)(z)$. 若 $f(x)=e^{-x}$, 则 $f_\sigma\in L^1(\mathbb{R}^+,dx/x)$ 对任何 $\sigma\in\mathbb{R}^+$ 都成立. 则 $F(z)=\Gamma(z)$.

定理15.4.10. (a) $(e^{-x}, \Gamma(z))$ 是 Mellin 对.

(b) 我们有

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x} x^z \frac{dx}{x}, \quad e^{-x} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty} \Gamma(z) x^{-z} dz \tag{15.4.29}$$

对任何 $\mathrm{Re}(z) > 0$ 都成立.

练习15.4.11. $e^{-x} - 1 + \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ 和 $\Gamma(z)$ $(-n < \mathrm{Re}(z) < -(n-1))$ 是 Mellin 对.

练习15.4.12. 令 $(f(x), F(z))$ 是 Mellin 对. 证明对任何 $a, b > 0$ 和 $c, \ell \in \mathbb{C}$ 如下都是 Mellin 对:

(a) $f(x^a)$ 和 $\frac{1}{a} F(\frac{z}{a})$,

(b) $\frac{1}{x^\ell} f(\frac{1}{x})$ 和 $F(\ell - z)$,

(c) $f(bx)$ 和 $\frac{F(z)}{b^z}$,

(d) $x^c f(x)$ 和 $F(z+c)$,

(e) $f(bx^a)$ 和 $F(\frac{z}{a})/ab^{z/a}$.

练习15.4.13. 假设 $(f(x), F(z))$ 是 Mellin 对. 对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 证明 $f(x)(\ln x)^n$ 和 $F^{(n)}(z)$ 是 Mellin 对.

若 $(f(x), F(z)$ 和 $(g(x), G(z))$ 都是 Mellin 对, 则

$$\begin{aligned} F(z)G(z) &= \int_0^\infty f(t) t^z \frac{dt}{t} \cdot \int_0^\infty g(y) y^z \frac{dy}{y} = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(t) g(y) (ty)^z \frac{dt}{t} \right] \frac{dy}{y} \\ &= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(t) g\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t} \right] x^z \frac{dx}{x} = \int_0^\infty (f * g)(x) x^z \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

这里 $f * g$ 表示 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $L^1(\mathbb{R}^+, d/x)$ 上的**卷积 (convolution)**:

$$(f * g)(x) := \int_0^\infty f(t) g\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t}. \tag{15.4.30}$$

定理15.4.14. 对任意 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^+, dx/x)$, 有 $\mathcal{M}(f * g) = \mathcal{M}(f)\mathcal{M}(g)$.

练习15.4.15. (a) 如果 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^+, dx/x)$, 则 $f * g \in L^1(\mathbb{R}^+, dx/x)$.

(b) 如果 $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^+, dx/x)$, 则 $(f * g) * h = f * (g * h)$.

(c) 如果 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^+, dx/x)$, 则 $f * g = g * f$.

(d) 如果 $f_1, f_2, g \in L^1(\mathbb{R}^+, dx/x)$ 和 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, 则

$$(c_1 f_1 + c_2 f_2) * g = c_1 (f_1 * g) + c_2 (f_2 * g)$$

.

上述练习表明 $(L^1(\mathbb{R}^+, dx/x), *)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的交换代数. 另一方面 $\mathbb{C}$ 上的所有亚纯函数构成的集合 $\mathscr{M}$ 也是 $\mathbb{R}$ 上的交换代数.

定理15.4.16. (a) $\mathcal{M}: L^1(\mathbb{R}^+, dx/x) \to \mathscr{M}$ 是代数同态.

(b) 如果 $f_1, \cdots, f_n \in L^1(\mathbb{R}^+, dx/x)$, 则

$$\prod_{1\le i\le n} \mathcal{M}(f_i) = \mathcal{M}\Big(*_{1\le i\le n} f_i\Big), \tag{15.4.31}$$

这里

$$\Big(*_{1\le i\le n} f_i\Big)(x) = \underbrace{\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty}_{n-1} f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_{n-1}(x_{n-1}) f_n\left(\frac{x}{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}\right) \frac{dx_{n-1}}{x_{n-1}} \cdots \frac{dx_2}{x_2} \frac{dx_1}{x_1}.$$

易证

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \Gamma(z)\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-z} dt = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} y^{z-1} dy \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-z} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{-t(y+1)} dt\right] y^{z-1} dy = \int_0^\infty \frac{1}{1+y} y^{z-1} dy.$$

因此 $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$ 和 $\frac{1}{1+x}$ 是 Mellin 对. 下面练习给出另一个证明.

练习15.4.17. 证明

(a) $\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$ 和 $\Gamma(1-z)$ 是 Mellin 对.

(b) $e^{-x} * (\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}) = \frac{1}{1+x}$.

(c) $e^{-nx^{1/n}}$ 和 $\Gamma(nz)/n^{nz-1}$ 是 Mellin 对.

定理15.4.18. **(Gauss)** 对任意 $n \ge 1$ 有

$$\prod_{0\le k\le n-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\Gamma(nz)}{n^{nz-1}}. \tag{15.4.32}$$

证: 对每个 k, $\Gamma(z+\frac{k}{n})$ 和 $x^{k/n}e^{-x}$ 是 Mellin 对. 根据 (15.4.31), 我们得到 $\prod_{0\le k\le n}\Gamma(z+\frac{k}{n})$ 和

$$f(x) = \underbrace{\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty}_{n-1} e^{-\frac{x}{x_1x_2\cdots x_{n-1}}} x_{n-1}^{\frac{1}{n}} e^{-x_{n-1}} \cdots x_2^{\frac{n-2}{n}} e^{-x_2} x_1^{\frac{n-1}{n}} e^{-x_1} \frac{dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1}}{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}$$

$$= \underbrace{\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty}_{n-1} e^{-(x_1 \cdots + x_{n-1} + \frac{x}{x_1 \cdots x_{n-1}})} \frac{dx_1 \cdots dx_{n-1}}{x_1^{\frac{1}{n}} \cdots x_{n-1}^{\frac{n-1}{n}}}$$

是 Mellin 对. 利用 (15.3.10) 得到

$$\begin{aligned}\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}} &= \prod_{1\le k\le n-1}\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\\ &= \int_0^\infty e^{-x_1}x_1^{\frac{n-1}{n}}\frac{dx_1}{x_1}\int_0^\infty e^{-x_2}x_2^{\frac{n-2}{n}}\frac{dx_2}{x_2}\cdots\int_0^\infty e^{-x_n}x_{n-1}^{\frac{1}{n}}\frac{dx_{n-1}}{x_{n-1}}\\ &= \underbrace{\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty}_{n-1} e^{-(x_1+\cdots+x_{n-1})}\frac{dx_1\cdots dx_{n-1}}{x_1^{\frac{1}{n}}\cdots x_{n-1}^{\frac{n-1}{n}}}.\end{aligned}$$

考虑函数

$$f(x)-\frac{(2\pi)^{n-1}}{\sqrt{n}}e^{-n\sqrt[n]{x}}. \tag{15.4.33}$$

利用下面练习可推出

$$f(x)=\frac{(2\pi)^{n-1}}{\sqrt{n}}e^{-n\sqrt[n]{x}}.$$

另一方面利用**练习15.4.17** (c), 得到 $(e^{-n\sqrt[n]{x}},\Gamma(nz)/n^{nz-1})$ 是 Mellin 对. □

练习15.4.19. 证明函数 (15.4.33) 恒等于 0. (**提示:** 考虑它的导数).

定理15.3.1 和**定理15.3.2** 证明了 $\Gamma(s)$ 的值由其在区间 $(0,1/2]$ 上的值所决定的. 我们现在来证明 $\Gamma(s)$ 的值由其在区间 $(0,1/3]$ 上的值所决定的. 根据**定理15.3.2** 得到

$$\Gamma\left(\frac{1+x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)=\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{2})}.$$

根据 (5.5.24) 得到

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+x}{2}\right)=\sqrt{\pi}2^{1-x}\Gamma(x).$$

因此

$$\Gamma(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{1-x}\cos\frac{\pi x}{2}}\cdot\frac{\Gamma(\frac{x}{2})}{\Gamma(\frac{1-x}{2})}. \tag{15.4.34}$$

当 $x\in(\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$ 时有 $\frac{x}{2},\frac{1-x}{2}\in(0,\frac{1}{3}]$. 则对任意 $x\in(\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$, $\Gamma(x)$ 有 (15.4.34) 所给出.

练习15.4.20. 证明 $\Gamma(x)$ 的值由其在区间 $(0,1/4]$ 上的值所决定:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{3}-2x\right) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{1}{3}+2x}\cos(\frac{\pi}{6}-\pi x)}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{6}-x)}{\Gamma(\frac{1}{3}+x)},\\ \Gamma\left(\frac{2}{3}+x\right)\Gamma\left(\frac{7}{6}+x\right) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{1}{3}+2x}}\Gamma\left(\frac{4}{3}+2x\right),\\ \Gamma(3x) &= \frac{3^{3x-\frac{1}{2}}2^{-\frac{5}{3}-2x}}{\sqrt{\pi}\cos(\frac{\pi}{6}-\pi x)}\frac{\Gamma(\frac{2}{3}+x)\Gamma(x)\Gamma(\frac{1}{6}-x)}{\Gamma(\frac{1}{3}-2x)}.\end{aligned}$$

因此

$$\Gamma(x)=\begin{cases}\dfrac{2^{-\frac{5+2x}{3}}3^{x-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}{\sin\frac{\pi+\pi x}{3}\sin\frac{\pi-\pi x}{3}}\cdot\dfrac{\Gamma(\frac{x}{3})\Gamma(\frac{1-2x}{6})}{\Gamma(\frac{1-x}{3})\Gamma(\frac{1-2x}{3})}, & x\in\left(\frac{1}{4},\frac{3}{8}\right),\\ \dfrac{4^{-x}\sqrt{\pi}}{\sin(\pi x)}\cdot\dfrac{\Gamma(\frac{1-2x}{2})}{\Gamma(1-2x)}, & x\in\left[\frac{3}{8},\frac{1}{2}\right).\end{cases}$$

练习15.4.21. 利用**定理15.4.18** 证明

$$\sin x=2^{n-1}\prod_{0\le k\le n-1}\sin\frac{x+k\pi}{n}.$$

(**提出:** 取 $z=x/n$).

定理15.4.22. *如果 $f,g\in L^1(\mathbb{R}^+,dx/x)$, 则 $\mathcal{M}(fg)=\mathcal{M}(f)*\mathcal{M}(g)$.*

证: 令 $F=\mathcal{M}(f)$ 和 $G=\mathcal{M}(g)$. 因为

$$f(x)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty}F(w)x^{-w}dw,$$

我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(fg)(z) &= \int_0^\infty f(x)g(x)x^z\frac{dx}{x}\\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_0^\infty\left[\int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty}F(w)x^{-w}dw\right]g(x)x^z\frac{dx}{x}\\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty}F(w)\left[\int_0^\infty g(x)x^{z-w}\frac{dx}{x}\right]dw\\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty}F(w)G(z-w)dw.\end{aligned}$$

最后一步是 $(F*G)(z)$ 的定义. □

在**练习15.4.17** (c) 中令 $y=nx$ 得到 $(e^{-nx},\Gamma(z)/n^z)$ 对每个 $n\ge 1$ 都是 Mellin 对. 回顾 Riemann zeta 函数

$$\zeta(z):=\sum_{n\ge 1}\frac{1}{n^z}.$$

定理15.4.23. *(1) 如果 $\mathrm{Re}(z)>1$, 则 $(\frac{1}{e^x-1},\Gamma(z)\zeta(z))$ 是 Mellin 对.*

(2) 如果 $\mathrm{Re}(z)\in(0,1)$, 则 $(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x},\Gamma(z)\zeta(z))$ 是 Mellin 对.

(3) 如果 $\sigma>1$, 则

$$\frac{1}{e^x-1}=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty}\Gamma(z)\zeta(z)x^{-z}dz.$$

证: 这可以从函数项级数 $\frac{1}{u-1}=\sum_{n\ge 1}u^{-n}$ 推出. □

练习15.4.24. 完成**定理15.4.23** 的证明.

如果函数 f 有如下的 (Fourier 级数) 展开

$$f(x)=\sum_{n\geq 1}a_ne^{-nx},$$

使得对任何 $\sigma\in(a,\infty)$ 都有 $f_\sigma(x)=x^\sigma f(x)\in L^1(\mathbb{R}^+,dx/x)$, 则此时

$$\mathcal{M}(f_\sigma)(\tau)=\Gamma(\sigma+\sqrt{-1}\tau)\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^{\sigma+\sqrt{-1}\tau}},\quad \sigma>a.$$

请同学们自证.

定理15.4.25. 如果对任何 $\sigma\in(a,\infty)\subset\mathbb{R}^+$ 都有 $x^\sigma\sum_{n\geq 1}a_ne^{-nx}\in L^1(\mathbb{R}^+,\frac{dx}{x})$, 则 $\sum_{n\geq 1}a_ne^{-nx}$ 和 $\Gamma(z)\sum_{n\in\geq 1}\frac{a_n}{n^z}$, $\mathrm{Re}(z)>a$, 是 Mellin 对.

级数

$$D(z,\{a_n\}_{n\geq 1}):=\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^z} \tag{15.4.35}$$

称为数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 的**Dirichlet 级数 (Dirichlet series)**. Dirichlet 级数也可以用算术函数来重新描述. 称 $\mathbb{N}$ 上的复值函数 f 为**算术函数 (arithmetic function)**, 此时若定义 $a_n:=f(n)$ 则 (15.4.35) 可改写成

$$D_f(z):=\sum_{n\geq 1}\frac{f(n)}{n^z}.$$

这也称为函数 f 的**生成函数 (generating series)**.

进一步算术函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ 称为**加性函数 (additive function)** 如果

$$f(mn)=f(m)+f(n),\quad (m,n)=1.$$

函数 f 称为**完全加性函数 (completely additive function)** 如果这个性质对任何 $m,n\in\mathbb{N}$ 都成立. 同样地, f 称为**乘性函数 (multiplicative function)** 如果

$$f(mn)=f(m)f(n),\quad (m,n)=1.$$

函数 f 称为**完全乘性函数 (completely multiplicative function)**如果这个性质对任何 $m,n\in\mathbb{N}$ 都成立. 比如 $f(n)=\ln n$ 是完全加性函数而 $f(n)=n^{-z}$ 是完全乘性函数.

如果 f 是乘性函数, 则只要下面的级数和乘积都是绝对收敛就有

$$D_f(z)=\prod_{p\in\mathbb{P}}\left[\sum_{n\geq 0}\frac{f(p^n)}{p^{nz}}\right]=\prod_{p\in\mathbb{P}}\left[1+f(p)p^{-s}+f(p^2)p^{-2s}+\cdots\right]$$

这里 $\mathbb{P}$ 表示所有素数构成的集合. 取特殊情形 $f(n)\equiv 1$ 得到**Euler 乘积 (Euler product)**

$$\zeta(z)=D_1(z)=\prod_{p\in\mathbb{P}}(1-p^{-z})^{-1},\quad \mathrm{Re}(z)>1.$$

$\zeta(z)$ 的倒数也具有 Dirichlet 级数展开,

$$\frac{1}{\zeta(z)}=\prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1-\frac{1}{p^z}\right)=\sum_{n\geq 1}\frac{\mu(n)}{n^z}$$

这里

$$\mu(n):=\begin{cases}(-1)^r, & m=p_1\cdots p_r \text{ 且 } p_1,\cdots,p_r \text{ 互不相同},\\ 0, & \text{其余情形}.\end{cases}$$

是Möbius 在 1832 年引入的, 现在称为**Möbius 函数 (Möbius function)**. 从 $\zeta(z)\cdot\zeta^{-1}(z)=1$ 得到

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\delta_{m1}.$$

作为推论得到**Möbius 反演公式 (Möbius inversion)**:

$$g(n)=\sum_{d|n}f(d)\quad\Longleftrightarrow\quad f(n)=\sum_{d|n}\mu(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

上述形式是Dedekind 在 1857 年给出的. 可以证明 Möbius 函数是乘性函数, 一般地可以证明如果 f,g 都是乘性函数则 fg 和 $f*g$ 也都是乘性函数.

若令 $\tau(n)$ 是自然数 n 的正因子个数, 则得到

$$\zeta^2(z)=\sum_{n\geq 1}\frac{\tau(n)}{n^z}.$$

一般地定义 $\tau_k(n)$ 为 n 分解成 k 个自然数的不同乘积数, 所以

$$\zeta^k(n)=\sum_{n\geq}\frac{\tau_k(n)}{n^z},\quad \tau(n)=\tau_2(n).$$

可以证明

$$\tau_k(n)=\binom{a_1+k-1}{k-1}\cdots\binom{a_r+k-1}{k-1},\quad n=p_1^{a_1}\cdots p_r^{q_r}.$$

对任意 $\nu\in\mathbb{C}$ 定义 $\sigma_\nu(n)$ 如下

$$\zeta(z)\zeta(z-\nu)=\sum_{n\geq 1}\frac{\sigma_\nu(n)}{n^z}$$

从而得到

$$\sigma_\nu(n)=\sum_{d|n}d^\nu.$$

这样就得到了**Ramanujan 公式 (Ramanujan formula)**

$$\zeta(z)\zeta(z-\alpha)\zeta(z-\beta)\zeta(z-\alpha-\beta)\zeta^{-1}(2z-\alpha-\beta)=\sum_{n\geq 1}\frac{\sigma_\alpha(n)\sigma_\beta(n)}{n^z}.$$

特别地

$$\zeta^4(z)\zeta^{-1}(2z)=\sum_{n\geq 1}\frac{\tau(n)^2}{n^z}.$$

上面的**Ramanuja 级数 (Ramanuja series)** 是所谓的**Rankin-Selberg 卷积 L-函数 (Rankin-Selberg convolution L-function)** 的特殊情形.

假设 Dirichlet 级数 $D_f(z)$ 和 $D_g(z)$ 绝对收敛, 则乘积 $D_f(z)D_g(s)$ 也是 Dirichlet 级数且可以表示成

$$D_f(z)D_g(z)=\sum_{n\geq 1}\frac{h(n)}{n^z},\quad h(n):=\sum_{d|n}f(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

这里算术函数 h 称为 f 和 g 的**Dirichlet 卷积 (Dirichlet convolution)** 并记作 $h=f*g$.

利用分部积分法计算得到

$$\Gamma(z)\zeta(z)=\int_0^\infty\frac{x^z}{e^x-1}\frac{dx}{x}=\int_0^\infty\frac{x\cdot x^{z-2}dx}{e^x-1}=-\frac{1}{z-1}\int_0^\infty\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)x^z\frac{dx}{x};$$

一般的对 $k=0,1,2,\cdots$ 有

$$\Gamma(z)\zeta(z)=\frac{(-1)^{k+1}}{(z-1)z(z+1)\cdots(z+k-1)}\int_0^\infty x^{z+k-1}\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)dx.$$

等价地, 对每个 $k=0,1,2,\cdots$, 得到

$$\zeta(z)=\frac{(-1)^{k+1}}{(z-1)\Gamma(z+k)}\int_0^\infty x^{z+k}\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)\frac{dx}{x}. \tag{15.4.36}$$

当 $\mathrm{Re}(z)>-k$ 时, 反常积分

$$\int_0^\infty x^{z+k}\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)\frac{dx}{x}$$

收敛, 所以 (15.4.36) 的右边关于 z 是全纯的, 当然只要满足 $\mathrm{Re}(z)>-k$ 和 $z\neq 1$ (因为 $\Gamma(z+k)$ 是全纯的和恒不为 0). 因此我们可以把 Riemann zeta 函数全纯延拓到整个复平面除了 $z=1$.

定理15.4.26. *(a) $\zeta(z)$ 在 $\mathbf{C}\setminus\{z=1\}$ 上是全纯的.*

(b) $\lim_{z\to 1}(z-1)\zeta(z)=1$.

(c) 如果 $\mathrm{Re}(z)>-k$, 则 $\zeta(z)$ 由 (15.4.36) 所给出.

(d) $(z-1)\zeta(z)$ 是全纯函数.

(e) $\zeta(0)=\frac{1}{2}$.

证: 计算得到

$$(z-1)\zeta(z) = -\frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^\infty \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)x^z\frac{dx}{x}.$$

令 $z\to 1$ 得到

$$\lim_{z\to 1}(z-1)\zeta(z) = -\frac{1}{\Gamma(1)}\int_0^\infty \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)dx = -\frac{x}{e^x-1}\Big|_0^\infty = 1.$$

因此 $z=1$ 是 $\zeta(z)$ 的简单极点.

最后来计算 $\zeta(0)$ 的值. 在 (15.4.36) 中令 $k=1$ 和 $z=0$ 就得到

$$\begin{aligned}\zeta(0) &= -\int_0^\infty \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)dx = -\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)\Big|_0^\infty \\ &= \frac{(x-1)e^x+1}{(e^x-1)^2}\Big|_0^\infty = -\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)e^x+1}{(e^x-1)^2} \\ &= -\lim_{x\to\infty}\frac{e^x=(x-1)e^x}{2(e^x-1)e^x} = -\lim_{x\to 0}\frac{x}{2(e^x-1)} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

故 $\zeta(0)=-1/2$. □

练习15.4.27. 对每个正数 $a>0$, 定义**Hurwitz zeta 函数** 为

$$\zeta(z,a) := \sum_{n\ge 0}\frac{1}{(n+a)^z}.$$

证明 $\zeta(z,a)$ 关于 z 收敛只要 $\mathrm{Re}(z)>1$, 和关于 z 是一致收敛只要 $\mathrm{Re}(z)>1+\delta$ $(\delta>0)$. 进一步 $(\frac{e^{-ax}}{1-e^{-x}},\Gamma(z)\zeta(z,a))$ 是 Mellin 对.

定义函数 I,J 如下

$$I := \int_0^\infty e^{-t}\cos(ut)dt,\quad J := \int_0^\infty e^{-t}\sin(ut)dt. \tag{15.4.37}$$

注意到

$$I+\sqrt{-1}J = \int_0^\infty e^{-t+\sqrt{-1}ut}dt.$$

计算

$$\begin{aligned} I &= -\int_0^\infty \cos(ut)de^{-t} = -\left[0-1+u\int_0^\infty e^{-t}\sin(ut)dt\right] = 1-uJ, \\ I &= \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{u}d\sin(ut) = \int_0^\infty \frac{\sin(ut)}{u}e^{-t}dt = \frac{1}{u}J.\end{aligned}$$

因此

$$I = \frac{1}{1+u^2},\quad J = \frac{u}{1+u^2}. \tag{15.4.38}$$

记

$$\hat{c}(z) := \mathcal{M}(\cos x),\quad \hat{s}(z) := \mathcal{M}(\sin x) \tag{15.4.39}$$

分别是 $\cos x$ 和 $\sin x$ 的 Mellin 变换.

练习15.4.28. (Euler) 证明

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{u^{-z}\hat{c}(z)}{1+u^2}du &= \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt = \Gamma(z),\\
\int_0^\infty \frac{x^{-z}}{1+x^2}dx &= \frac{\pi}{2}\sec\frac{\pi z}{2},\\
\hat{c}(z) &= \Gamma(z)\cos\frac{\pi z}{2}, \quad \mathrm{Re}(z)>0,\\
\hat{s}(z) &= \Gamma(z)\sin\frac{\pi z}{2}, \quad \mathrm{Re}(z)>-1.
\end{aligned}
$$

利用**练习15.4.12** (c) 我们得到

推论15.4.29. (Euler) *(a)* 对每个 $t>0$, $(\cos(tx),\Gamma(z)\cos\frac{\pi z}{2}\cdot t^{-z})$ 是 Mellin 对. 因此

$$
\int_0^\infty \cos(tx)x^z\frac{dx}{x} = \frac{\Gamma(z)}{t^z}\cos\frac{\pi z}{2}, \quad \mathrm{Re}(z)>0, \tag{15.4.40}
$$

和

$$
\cos(tx) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty}\Gamma(z)\cos\frac{\pi z}{2}(tx)^{-z}dz. \tag{15.4.41}
$$

(b) 对每个 $t>0$, $(\sin(tx),\Gamma(z)\sin\frac{\pi z}{2}\cdot t^{-z})$ 是 Mellin 对. 因此

$$
\int_0^\infty \sin(tx)x^z\frac{dx}{x} = \frac{\Gamma(z)}{t^z}\sin\frac{\pi z}{2}, \quad \mathrm{Re}(z)>-1, \tag{15.4.42}
$$

和

$$
\sin(tx) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty}\Gamma(z)\sin\frac{\pi z}{2}(tx)^{-z}dz. \tag{15.4.43}
$$

上述练习给出了如下恒等式

$$
\frac{\pi}{2\Gamma(z)\sin\frac{\pi z}{2}} = \Gamma(1-z)\cos\frac{\pi z}{2} = \int_0^\infty \sin x\cdot x^{1-z}\frac{dx}{x} = \int_0^\infty\frac{\sin x}{x^z}dx. \tag{15.4.44}
$$

在 (15.4.44) 中令 $z=1$ 得到

$$
\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}. \tag{15.4.45}
$$

定理15.4.30. (1) 假设 $(f(x),F(z))$ 是 Mellin 对. 则下面命题等价

(i) $f(x)$ 满足

$$
f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos(tx)dt. \tag{15.4.46}
$$

(ii) $F(z)$ 满足

$$
\frac{F(z)}{2^{\frac{z}{2}}\Gamma(\frac{z}{2})} = \frac{F(1-z)}{2^{\frac{1-z}{2}}\Gamma(\frac{1-z}{2})}. \tag{15.4.47}
$$

(2) 假设 $(f(x),F(z))$ 是 Mellin 对. 则下面命题等价

(i) $f(x)$ 满足

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin(tx)\,dt. \tag{15.4.48}$$

(ii) $F(z)$ 满足

$$\frac{F(z)}{2^{\frac{z}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{z}{2})}=\frac{F(1-z)}{2^{\frac{1-z}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1-z}{2})}. \tag{15.4.49}$$

证: 我们给出 (1) 的证明. $(i)\Rightarrow(ii)$: 利用 (15.4.46) 和 (15.4.40) 得到

$$\begin{aligned}
F(z) &= \int_0^\infty f(x)x^z\frac{dx}{x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f(t)\cos(tx)\,dt\right]x^z\frac{dx}{x}\\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\left[\int_0^\infty \cos(tx)x^z\frac{dx}{x}\right]dt\\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(z)\cos\frac{\pi z}{2}\int_0^\infty f(t)t^{1-z}\frac{dt}{t} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(z)\cos\frac{\pi z}{2}F(1-z).
\end{aligned}$$

根据恒等式 (请诸位自证)

$$\frac{2^{\frac{z}{2}}\Gamma(\frac{z}{2})}{2^{\frac{1-z}{2}}\Gamma(\frac{1-z}{2})}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(z)\cos\frac{\pi z}{2},$$

得到 (15.4.47).

$(ii)\Rightarrow(i)$: 上面恒等式结合 (15.4.47) 给出

$$F(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f(t)\cos(tx)\,dt\right]x^z\frac{dx}{x}.$$

利用 Mellin 变换的唯一性推出 (15.4.46). □

令 $K_c(z)$ 和 $K_s(z)$ 分别为 $\sqrt{2/\pi}\cos x$ 和 $\sqrt{2/\pi}\sin x$ 的 Mellin 变换. 则

$$K_c(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(z)\cos\frac{\pi z}{2},\quad K_s(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(z)\sin\frac{\pi z}{2} \tag{15.4.50}$$

根据**练习15.4.28**.

练习15.4.31. 假设 $(f(x),F(z))$ 和 $(g(x),G(z))$ 是 Mellin 对.

(1) 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(t)\cos(tx)\,dt,\quad g(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos(tx)\,dt,$$

则

$$F(z)=G(1-z)K_c(z),\quad G(z)=F(1-z)K_c(z).$$

(2) 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(t)\sin(tx)\,dt,\quad g(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin(tx)\,dt,$$

则

$$F(z)=G(1-z)K_s(z),\quad G(z)=F(1-z)K_s(z).$$

为了应用**定理15.4.30** 我们需要找到满足条件 (15.4.46) 或 (15.4.48) 的函数. 比如考虑函数

(i) $x^{-\frac{1}{2}}, e^{-\frac{1}{2}x^2}, \operatorname{sech}(\sqrt{\frac{\pi}{2}}x), \cdots$, 满足 (15.4.46).

(ii) $x^{-\frac{1}{2}}, xe^{-\frac{1}{2}x^2}, \frac{1}{e^{\sqrt{2\pi x}}-1}-\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}, \cdots$, 满足 (15.4.48).

我们排除掉函数 $e^{-\frac{1}{2}}$ 这是因为它不属于 $L^1(\mathbb{R}^+,dx/x)$.

(1) $f(x)=2e^{-\frac{1}{2}x^2}$. 因为 $(e^{-x},\Gamma(z))$ 是 Mellin 对, 所以根据**练习15.4.12** (e) 得到 $(f(x),F(z))$ 是 Mellin 对, 这里 $F(z)=2^{\frac{z}{2}}\Gamma(\frac{z}{2})$. 因此得到 (15.4.47).

(2) $f(x)=\sqrt{2}xe^{-\frac{1}{2}x^2}$. 因为 $(2e^{-\frac{1}{2}x^2}, 2^{\frac{z}{2}}\Gamma(\frac{z}{2}))$ 是 Mellin 对, 根据**练习15.4.12** (d) 得到 $(f(x),F(z))$ 是 Mellin 对, 这里 $F(z)=2^{\frac{z}{2}}\Gamma(\frac{z+1}{2})$. 因此得到 (15.4.49).

(3) $f(x)=\operatorname{sech}(\sqrt{\frac{\pi}{2}}x)$. 回顾

$$\frac{1}{2}\operatorname{sech}(x)=\frac{1}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}=\sum_{n\ge 0}(-1)^n e^{-(2n+1)x}$$

从而积分得到

$$\int_0^\infty \frac{1}{2}\operatorname{sech}(x)\frac{dx}{x}=\sum_{n\ge 0}(-1)^n\int_0^\infty e^{-(2n+1)x}x^z\frac{dx}{x}=\Gamma(z)\sum_{n\ge 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^z}.$$

若定义 $\chi_1:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}_3$ 为

$$\chi_1(2k)=0,\quad \chi_1(4k+1)=1,\quad \chi_1(4k+3)=-1, \tag{15.4.51}$$

其相应的 Dirichlet 级数为

$$L(z,\chi_1)\equiv D_{\chi_1}(z):=\sum_{n\ge 1}\frac{\chi_1(n)}{n^z}. \tag{15.4.52}$$

所以得到

$$\left(\frac{1}{2}\operatorname{sech}(x),\Gamma(z)L(z,\chi_1)\right)\text{ 是 Mellin 对.} \tag{15.4.53}$$

作为推论可知 $(f(x),2(\frac{2}{\pi})^{\frac{z}{2}}\Gamma(z)L(z,\chi_1))$ 是 Mellin 对.

(4) $f(x)=\cosh(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}x)/\cosh(\sqrt{\pi}x)$ 满足 (15.4.46). 则 $(f(x),F(z))$ 是 Mellin 对, 这里 $F(z)=L(z,\chi_2)=\sum_{n\ge 1}\chi_2(n)/n^z$ 和

$$\chi_2(n):=\begin{cases}1, & n\equiv 1,3 \pmod 8,\\ -1, & n\equiv 5,7 \pmod 8,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{15.4.54}$$

(5) $f(x)=\sinh(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}x)/\sinh(\sqrt{\pi}x)$ 满足 (15.4.48). 则 $(f(x),F(z))$ 是 Mellin 对, 这里 $F(z)=L(z,\chi_3)=\sum_{n\geq 1}\chi_3(n)/n^z$ 和

$$\chi_3(n):=\begin{cases}1, & n\equiv 1,7 \pmod 8,\\ -1, & n\equiv 3,5 \pmod 8,\\ 0, & \text{otherwise}.\end{cases} \tag{15.4.55}$$

(6) $f(x)=\frac{1}{1+2\cosh(\sqrt{\frac{2\pi}{3}}x)}$ 满足 (15.4.46). 则 $(f(x),F(z))$ 是 Mellin 对, 这里 $F(z)=L(z,\chi_4)=\sum_{n\geq 1}\chi_4(n)/n^z$ 和

$$\chi_4(n):=\begin{cases}1, & n\equiv 1 \pmod 3,\\ -1, & n\equiv -1 \pmod 3,\\ 0, & \text{otherwise}.\end{cases} \tag{15.4.56}$$

(7) $f(x)=\frac{\sinh(\sqrt{\frac{\pi}{6}}x)}{\cosh(\sqrt{\frac{2\pi}{3}}x)-1}$ 满足 (15.4.48). 则 $(f(x),F(z))$ 是 Mellin 对, 这里 $F(z)=L(z,\chi_5)=\sum_{n\in\mathbf{N}}\chi_5(n)/n^z$ 和

$$\chi_5(n):=\begin{cases}1, & n\equiv 1,11 \pmod{12},\\ -1, & n\equiv 5,7 \pmod{12},\\ 0, & \text{otherwise}.\end{cases} \tag{15.4.57}$$

(8) $f(x)=(e^{\sqrt{2\pi}x}-1)^{-1}-(\sqrt{2\pi}x)^{-1}$. 则 $(f(x),F(z))$ 是 Mellin 对, 这里 $F(z)=(2\pi)^{-\frac{z}{2}}\Gamma(z)\zeta(z)$ 且 $\mathrm{Re}(z)\in(0,1)$. 如果定义

$$\lambda(z):=\frac{F(z)}{2^{\frac{z}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{z}{2})}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z), \tag{15.4.58}$$

则根据 (15.4.49) 得到

$$\lambda(z)=\lambda(1-z),\quad 0<\mathrm{Re}(z)<1. \tag{15.4.59}$$

作为推论, 对任意 $z\in\mathbf{C}$ 且 $0<\mathrm{Re}(z)<1$, 有

$$\zeta(1-z)=\left[\frac{2^{z+1}\Gamma(z)}{\pi\sin\frac{\pi z}{2}}\right]\zeta(z),\quad \zeta(z)=\left[2^z\pi^{z-1}\sin\frac{\pi z}{2}\Gamma(1-z)\right]\zeta(1-z). \tag{15.4.60}$$

进一步计算得到

$$\begin{aligned}\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)&=\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\left[2^z\pi^{z-1}\sin\frac{\pi z}{2}\Gamma(1-z)\right]\zeta(1-z)\\ &=\pi^{\frac{z}{2}-1}2^z\sin\frac{\pi z}{2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma(1-z)\zeta(1-z)\\ &=\pi^{\frac{z}{2}-1}2^z\frac{\pi}{\Gamma(\frac{z}{2})\Gamma(1-\frac{z}{2})}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma(1-z)\zeta(1-z)\end{aligned}$$

$$= \pi^{\frac{z}{2}} 2^z \frac{\Gamma(1-z)}{\Gamma(1-\frac{z}{2})}\zeta(1-z) \quad = \quad \pi^{\frac{z}{2}} 2^z \frac{\Gamma(\frac{1-z}{2})}{\sqrt{\pi}2^z}\zeta(1-z).$$

故

$$\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) = \pi^{-\frac{1-z}{2}}\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\zeta(1-z), \quad 0 < \mathrm{Re}(z) < 1. \quad (15.4.61)$$

定理15.4.32. (Riemann) 定义

$$\xi(z) := \begin{cases} \frac{1}{2}z(z-1)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma(\frac{z}{2})\zeta(z), & \mathrm{Re}(z) > 0, \\ \frac{1}{2}z(z-1)\pi^{-\frac{1-z}{2}}\Gamma(\frac{1-z}{2})\zeta(1-z), & \mathrm{Re}(z) < 1. \end{cases} \quad (15.4.62)$$

则 $\xi(z)$ 是整函数且对任意 $z \in \mathbf{C}$ 都满足

$$\xi(z) = \xi(1-z) \quad (15.4.63)$$

证: 根据**定理15.3.2** (3) 和**定理15.4.26** (b), 可知函数

$$\frac{1}{2}z(z-1)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma(\frac{z}{2})\zeta(z)$$

关于 z 是全纯的, 这里 $\mathrm{Re}(z) > 0$. 类似地可以证明函数

$$\frac{1}{2}z(z-1)\pi^{-\frac{1-z}{2}}\Gamma(\frac{1-z}{2})\zeta(1-z)$$

关于 z 也是全纯的, 这里 $\mathrm{Re}(z) < 1$. 在区间 $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$ 内, 根据 (15.4.61) 可知上述两个函数是一样的. □

因为 $(e^{-x}, \Gamma(z))$ 是 Mellin 对, 所以 $(e^{-\pi x^2}, \frac{1}{2}\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma(\frac{z}{2}))$ 也是是 Mellin 对.

(i) 对任意 $n \in \mathbf{N}$, $(2e^{-\pi n^2 x^2}, \pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma(\frac{z}{2})\frac{1}{n^z})$ 都是 Mellin 对. 即,

$$\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\frac{1}{n^z} = 2\int_0^\infty e^{-\pi n^2 x^2} x^z \frac{dx}{x}, \mathrm{Re}(z) > 0, \quad (15.4.64)$$

和

$$2e^{-\pi n^2 x^2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty} \pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\frac{x^{-z}}{n^z}dz, \sigma > 0. \quad (15.4.65)$$

(ii) 根据 (i) 可知 $(\sum_{n\in\mathbf{N}} 2e^{-\pi n^2 x^2}, \pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma(\frac{z}{2})\zeta(z))$ 是 Mellin 对. 定义

$$\theta(x) := \sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{-\pi n^2 x}, \quad \Lambda(z) := \pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z). \quad (15.4.66)$$

定理15.4.33. $(\theta(x^2-1), \Lambda(z))$ 是 Mellin 对. 即,

$$\Lambda(z) = \int_0^\infty \left[\theta(x^2) - 1\right] x^z \frac{dx}{x}, \mathrm{Re}(z) > 1 \tag{15.4.67}$$

和

$$\theta(x^2) - 1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty} \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z) x^{-z} dz, \sigma > 1. \tag{15.4.68}$$

因此, $(\frac{1}{2}[\theta(x)-1], \Lambda(2z))$ 对任意 $\mathrm{Re}(z) > \frac{1}{2}$ 都是 Mellin 对.

从 (15.4.68) 和**定理15.4.32** 我们看到对任何 $\sigma > 1$ 都有

$$\begin{aligned}
\theta(x^2) - 1 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{1-\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{1-\sigma+\sqrt{-1}\infty} \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z) x^{-z} dz + \frac{1}{x} - 1 \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty} \pi^{-\frac{1-z}{2}} \Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right) \zeta(1-z) x^{-1+z} dz + \frac{1}{x} - 1 \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty} \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z) \left(\frac{1}{x}\right)^{-z} dz + \frac{1}{x} - 1 \\
&= \frac{1}{x}\left[\theta\left(\frac{1}{x^2}\right) - 1\right] - \frac{1}{x} - 1.
\end{aligned}$$

这里第一个恒等式利用 Cauchy 积分公式和**定理15.4.26**.

定理15.4.34. 对任何 $x > 0$ 都有

$$\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \theta\left(\frac{1}{x}\right). \tag{15.4.69}$$

即 $\theta(x)$ 是权为 $1/2$ 的模形式 (具体细节见 §15.5).

练习15.4.35. 验证

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left(\int_{\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma+\sqrt{-1}\infty} - \int_{1-\sigma-\sqrt{-1}\infty}^{1-\sigma+\sqrt{-1}\infty} \right) \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z) x^{-z} dz = \frac{1}{x} - 1.$$

§15.4.2 * Ψ 和 Φ 函数

对任何 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\le 0}$ 定义

$$f(z) := -\sum_{n \ge 0} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

由于当 n 很大时有

$$\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1-z}{n^2} + \frac{z^2-1}{n^3} + \frac{1-z^3}{n^4} + \frac{z^4-1}{n^5} + \cdots \sim \frac{1-z}{n^2}$$

则级数 $\sum_{n\geq 0}(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n+1})$ 是收敛的. 注意到

$$f(z+1)=\frac{1}{z}+f(z).$$

如果 $g'(z)=f(z)$ 和 $h(z)=e^{g(z)}$, 则

$$h(z+1)=Czh(z).$$

因此 $h(z)$ 看起来像 $\Gamma(z)$, 或者 $f(z)$ 看起来像 $\Gamma'(z)/\Gamma(z)$.

定义Ψ 函数为

$$\Psi(z):=-\gamma-\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{n\geq 0}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{z+n}\right]. \tag{15.4.70}$$

定理15.4.36. $\Psi(z)$ 满足

$$\begin{aligned}
\Psi(z+1)-\Psi(z) &= \frac{1}{z}, &(15.4.71)\\
\Psi(1-z)-\Psi(z) &= \pi\cot(\pi z), &(15.4.72)\\
\Psi(1+z)-\Psi(1-z) &= \frac{1}{z}-\pi\cot(\pi z), &(15.4.73)\\
\psi\left(\frac{1}{2}+z\right)-\Psi\left(\frac{1}{2}-z\right) &= \pi\tan(\pi z). &(15.4.74)
\end{aligned}$$

证: 第一个恒等式时显然的. 利用恒等式 (如果 z 是复数则可令用复变函数知识给出证明. 如果 $z\in\mathbb{R}$ 则利用 Eisenstein 方法得到证明, 参见 (6.4.26))

$$\pi\cot(\pi z)=\frac{1}{z}+\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{z+n}+\frac{1}{z-n}\right) \tag{15.4.75}$$

得到 (15.4.72) 和 (15.4.73). 在 (15.4.72) 中把 z 换成 $\frac{1}{2}-z$ 得到 (15.4.74). □

定理15.4.37. $\Psi^{(k)}(z)$ 满足

$$\begin{aligned}
\Psi'(z) &= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(z+n)^2}, &(15.4.76)\\
\pi^2\csc^2(\pi z) &= \Psi'(z)+\Psi'(1-z), &(15.4.77)\\
\Psi^{(k)}(z) &= \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^{k+1}k!}{(z+n)^{k+1}} = (-1)^{k+1}k!\zeta(k+1,z), &(15.4.78)\\
\Psi^{(k)}(1) &= (-1)^{k+1}k!\zeta(k+1). &(15.4.79)
\end{aligned}$$

这里 $\zeta(k+1,z)$ 是由**练习15.4.27** 所给出的 Hurwitz zeta 函数.

证: 回顾到 (利用 (15.4.75))

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}=\pi^2\csc^2(\pi z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z+n)^2}.$$

这样我们就得到 (15.4.76) 和 (15.4.77). 最后两个恒等式是显然的. □

回顾 $\Psi(z)=-\gamma+f(z)$ 这里

$$f(z)=-\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

计算得到

$$f_{2N+1}(z):=\sum_{0\leq n\leq 2N+1}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+z}\right)$$

$$=\sum_{0\leq n\leq N}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+z}\right)+\sum_{0\leq n\leq N}\left[\frac{1}{(2n+1)+1}-\frac{1}{(2n+1)+z}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{0\leq n\leq N}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{z}{2}}\right)+\frac{1}{2}\sum_{0\leq n\leq N}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+\frac{z+1}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}f_N\left(\frac{z}{2}\right)+\frac{1}{2}f_N\left(\frac{z+1}{2}\right)+\frac{1}{2}\sum_{0\leq n\leq N}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[f_N\left(\frac{z}{2}\right)+f_N\left(\frac{z+1}{2}\right)\right]+\sum_{1\leq n\leq 2N}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

令 $N\to\infty$ 得到

定理15.4.38. Ψ 满足

$$\Psi(z)=\frac{1}{2}\left[\Psi\left(\frac{z}{2}\right)+\Psi\left(\frac{z+1}{2}\right)\right]+\ln 2, \tag{15.4.80}$$

$$\Psi(z)=\frac{1}{n}\sum_{0\leq k\leq n-1}\Psi\left(\frac{z+k}{n}\right)+\ln n,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{15.4.81}$$

练习15.4.39. 证明 (15.4.81).

定义积分

$$\Phi(z):=\int_1^z\Psi(w)\,dw \tag{15.4.82}$$

其中 $\Phi(1)=0$, 这里积分路径和负实轴不相交.

定理15.4.40. 我们有

$$\Phi(2)=0,\quad \Phi\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\sqrt{\pi}. \tag{15.4.83}$$

证: 计算得到

$$\Phi(2) = \int_1^2 \left[-\gamma - \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] dz$$

$$= -\gamma - \sum_{n\geq 0}\int_1^2 \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1}\right) dz = -\gamma - \sum_{n\geq 0}\left(\ln\frac{n+2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= -\gamma + \lim_{N\to\infty}\left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} - \ln(N+1)\right] = -\gamma + \gamma = 0.$$

回顾**Wallis 公式**如下 (参见 (5.4.31))

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{(2N-2)!!}{(2N-1)!!}\right]^2 2N. \tag{15.4.84}$$

计算可得到

$$\Phi\left(\frac{1}{2}\right) = \int_1^{\frac{1}{2}} \left[-\gamma - \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] dz$$

$$= \frac{1}{2}\gamma - \sum_{n\geq 0}\left(\ln\frac{\frac{1}{2}+n}{1+n} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} - \ln N\right)$$

$$- \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{0\leq n\leq N-1}\ln\frac{2n+1}{2n+2} + \frac{1}{2}\ln N\right) = \lim_{N\to\infty}\ln\left[\frac{(2N)!!}{(2N-1)!!}\cdot\frac{1}{\sqrt{N}}\right].$$

故得到 $2\Phi(1/2) = \ln\pi$. □

练习15.4.41. 利用 (15.4.84) 证明 $(2n)!!/(2n-1)!! \sim \sqrt{\pi n}$, 当 $n\to\infty$ 时.

对 (15.4.71) 积分得到

$$\Phi(z+1) - \Phi(z) = \ln z + C_1.$$

取 $z=1$ 得到 $C_1 = 0$. 对 (15.4.72) 积分得到

$$-\Phi(1-z) - \Phi(z) = \ln\sin(\pi z) + C_2.$$

取 $z=\frac{1}{2}$ 得到 $C_2 = -\ln\pi$. 对 (15.4.80) 积分得到

$$\Phi(z) = \Phi\left(\frac{z}{2}\right) + \Phi\left(\frac{z+1}{2}\right) + z\ln 2 + C_3.$$

取 $z=1$ 得到 $C_3 = -\ln 2 - \ln\sqrt{\pi}$.

定理15.4.42. $\Phi(z)$ 满足

$$\begin{aligned}\Phi(z+1) &= \Phi(z)+\ln z, &(15.4.85)\\ \Phi(z)+\Phi(1-z) &= \ln\pi-\ln\sin(\pi z), &(15.4.86)\\ \Phi(z) &= \Phi\left(\frac{z}{2}\right)+\Phi\left(\frac{1+z}{2}\right)\\ &\quad+\ln(2^{z-1})-\ln\sqrt{\pi}. &(15.4.87)\end{aligned}$$

若记 $F(z):=e^{\Phi(z)}$ 则**定理15.4.42** 可表述成

$$\begin{aligned}F(1+z) &= zF(z),\\ F(z)F(1-z) &= \frac{\pi}{\sin(\pi z)},\\ F(z)F\left(z+\frac{1}{2}\right) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}}F(2z).\end{aligned}$$

根据**定理5.5.23** 得到 $F(z)=\Gamma(z)$.

定理15.4.43. 我们有

$$\Phi(z)=\ln\Gamma(z),\quad \Psi(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \tag{15.4.88}$$

更进一步有

$$\Phi(z)=-\gamma z-\ln z+\sum_{n\geq 1}\left[\frac{z}{n}-\ln\left(1+\frac{z}{n}\right)\right]. \tag{15.4.89}$$

证: 对 (15.4.70) 积分得到

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \int_1^z\Psi(w)\,dw = \int_1^z\left[-\gamma-\frac{1}{w}-\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{w+n}-\frac{1}{n}\right)\right]dw\\ &= -\gamma z+\gamma-\ln z-\sum_{n\geq 1}\left(\ln\frac{z+n}{1+n}-\frac{z}{n}+\frac{1}{n}\right)\\ &= -\gamma z+\gamma-\ln z+\sum_{n\geq 1}\left(\frac{z}{n}-\ln\frac{z+n}{n}\right)+\sum_{n\geq 1}\left(\ln\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n}\right)\\ &= -\gamma z+\gamma-\ln z+\sum_{n\geq 1}\left(\frac{z}{n}-\ln\frac{z+n}{n}\right).\end{aligned}$$

注意到 (15.4.89) 中的级数时绝对收敛的, 这是因为 $\frac{z}{n}-\ln(1+\frac{z}{n})\sim\frac{z^2}{2n^2}$. □

练习15.4.44. 证明 (15.4.89) 中的级数时绝对收敛的.

利用 Taylor 级数展开 $\ln(1+\frac{1}{n})=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{kn^k}$ 得到

$$\ln(1+N)-\sum_{1\leq n\leq N}\frac{1}{n}=\sum_{1\leq n\leq N}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\sum_{1\leq n\leq N}\frac{1}{n}=\sum_{k\geq 2}\sum_{1\leq n\leq N}\frac{(-1)^{k-1}}{kn^k}.$$

令 $N\to\infty$ 得到如下的 (15.4.90), 这是因为 $\zeta(2)>\zeta(3)>\zeta(4)>\cdots$.

性质15.4.45. 我们有

$$\gamma = \sum_{k\geq 2}\frac{(-1)^k\zeta(k)}{k}, \tag{15.4.90}$$

$$\Psi(1+z) = -\gamma+\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\zeta(n+1)z^n,\ |z|<1, \tag{15.4.91}$$

$$\begin{aligned}\Phi(1+z) &= \ln\Gamma(1+z)\\ &= -\gamma z+\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n\zeta(n)}{n}z^n,\ |z|<1,\end{aligned} \tag{15.4.92}$$

$$\begin{aligned}\Psi(z) &= \Psi(z_0)\\ &\quad+\sum_{k\geq 1}(-1)^{k+1}\zeta(k+1,z_0)(z-z_0)^k,\ z_0\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{Z}_{\leq 0},\end{aligned} \tag{15.4.93}$$

$$\gamma = \sum_{n\geq 2}(-1)^n\frac{\zeta(n)-1}{n}+1-\ln 2, \tag{15.4.94}$$

$$\begin{aligned}\Phi(1+z) &= \ln\Gamma(1+z)\\ &= -\ln(1+z)+(1-\gamma)z+\sum_{n\geq 2}(-1)^n\frac{\zeta(n)-1}{n}z^n,\end{aligned} \tag{15.4.95}$$

$$\ln\Gamma(1+z) = \frac{1}{2}\ln\frac{\pi z}{\sin(\pi z)}-\gamma z-\sum_{n\geq 1}\frac{\zeta(2n+1)}{2n+1}z^{2n+1}, \tag{15.4.96}$$

$$\begin{aligned}\ln\Gamma(1+z) &= \frac{1}{2}\ln\frac{\pi z}{\sin(\pi z)}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-z}{1+z}+(1-\gamma)z\\ &\quad-\sum_{n\geq 1}\frac{\zeta(2n+1)-1}{2n+1}z^{2n+1},\end{aligned} \tag{15.4.97}$$

$$\gamma = 1+\ln 2-\ln 3-\sum_{n\geq 1}\frac{\zeta(2n+1)-1}{(2n+1)4^n}, \tag{15.4.98}$$

$$\Psi(1+z) = \frac{1}{2z}-\frac{\pi}{2}\cot(\pi z)-\sum_{n\geq 0}\zeta(2n+1)z^{2n}, \tag{15.4.99}$$

$$\begin{aligned}\Psi(1+z) &= \frac{1}{2z}-\frac{\pi}{2}\cot(\pi z)\\ &\quad-\frac{1}{1-z^2}-\sum_{n\geq 0}\left[\zeta(2n+1)-1\right]z^{2n}.\end{aligned} \tag{15.4.100}$$

这里 $\zeta(1):=\gamma$, (15.4.94) 是 Euler 得到的, (15.4.95) 和 (15.4.96) 是 Legendre 得到的, 和 (15.4.98) 是 Stieltjes 得到的.

证: 通过计算得到

$$\begin{aligned}\Psi(1+z) &= -\gamma-\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{z+1+n}-\frac{1}{n+1}\right) = -\gamma-\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right)\\ &= -\gamma-\sum_{n\geq 1}\left[\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{n}\left(\frac{z}{n}\right)^k-\frac{1}{n}\right] = -\gamma-\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{n^{k+1}}z^k\\ &= -\gamma+\sum_{k\geq 1}(-1)^{k+1}\zeta(k+1)z^k.\end{aligned}$$

这里我们可以把 γ 看作是 "$\zeta(1)$". 对 (15.4.91) 积分得到 (15.4.92).

对任意 $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\le 0}$ 有

$$\begin{aligned}\Psi(z_0+z)-\Psi(z_0) &= \sum_{n\ge 0}\left(\frac{1}{z_0+n}-\frac{1}{z_0+z+n}\right)\\ &= \sum_{n\ge 0}\left[\frac{1}{z_0+n}-\frac{1}{z_0+n}\sum_{k\ge 0}(-1)^k\left(\frac{z}{z_0+n}\right)^k\right]\\ &= \sum_{n\ge 0}\sum_{k\ge 1}\frac{(-1)^{k+1}}{(z_0+n)^{k+1}}z^k = \sum_{k\ge 1}(-1)^{k+1}\zeta(k+1,z_0)z^k\end{aligned}$$

因为

$$1<\zeta(n)<1+\frac{1}{2^{n-2}},\quad n\ge 2, \tag{15.4.101}$$

所以得到

$$0<\zeta(n)-1<\frac{1}{2^{n-2}}$$

和 (15.4.94). 公式 (15.4.95) 可从 (15.4.92) 和 $\ln(1+z)=\sum_{n\ge 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n$. 在 (15.4.95) 中把 z 替换成 $-z$ 得到

$$\ln\Gamma(1-z)=-\ln(1-z)-(1-\gamma)z+\sum_{n\ge 2}\frac{\zeta(n)-1}{n}z^n.$$

故

$$\ln\Gamma(1+z)-\ln\Gamma(1-z)-\ln\frac{1-z}{1+z}+2(1-\gamma)z-2\sum_{n\ge 1}\frac{\zeta(2n+1)-1}{2n+1}z^{2n+1}.$$

利用恒等式

$$\ln\Gamma(1+z)+\ln\Gamma(1-z)=\ln\frac{\pi z}{\sin(\pi z)},$$

我们得到 (15.4.97). 公式 (15.4.96) 可从恒等式

$$\ln\sin(\pi z)=\ln(\pi z)-\sum_{n\in\mathbf{N}}\frac{\zeta(2n)}{n}z^{2n} \tag{15.4.102}$$

得到. 最后在 (15.4.97) 中取 $z=1/2$ 得到 (15.4.98). □

练习15.4.46. 证明 (15.4.101) 和 (15.4.102).

定理15.4.47. (Binet) (1) 我们有

$$\Gamma(1+z)=\sum_{n\ge 0}a_nz^n,\quad |z|<1, \tag{15.4.103}$$

其中

$$a_0=1,\quad a_{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{0\le k\le n}(-1)^{k+1}\zeta(k+1)a_{n-k},\ n\ge 0. \tag{15.4.104}$$

实际上

$$a_n = (-1)^n \sum_{1\le k\le n} \sum_{r_1+\cdots+r_k=n} \frac{1}{k!} \frac{\zeta(r_1)\cdots\zeta(r_k)}{r_1\cdots r_k}. \tag{15.4.105}$$

这里 $\zeta(1) := \gamma$.

(2) 我们有

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)} = \sum_{n\ge 0} b_n z^n, \quad |z|<1, \tag{15.4.106}$$

其中

$$b_0 = 1, \quad b_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{0\le k\le n} (-1)^k \zeta(k+1) b_{n-k}, \ n \ge 0. \tag{15.4.107}$$

实际上

$$b_n = (-1)^n \sum_{1\le k\le n} \sum_{r_1+\cdots+r_k=n} \frac{(-1)^k}{k} \frac{\zeta(r_1)\cdots\zeta(r_k)}{r_1\cdots r_k}. \tag{15.4.108}$$

证: 由于 $\Gamma'(1+z) = \sum_{n\ge 1} n a_n z^{n-1}$, $|z|<1$, 和 $\Psi(1+z)\Gamma(1+z) = \Gamma'(1+z)$, 我们利用 (15.4.91) 得到

$$\sum_{0\le k\le n} (-1)^{k+1} \zeta(k+1) a_{n-k} = (n+1)a_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

公式 (15.4.105) 则立即得到. □

比如

$$a_1 = -\zeta(1) = -\gamma, \quad a_2 = \frac{1}{2}\zeta(2) + \frac{1}{2}\zeta(1)^2 = \frac{\pi^2}{12} + \frac{\gamma^2}{2}$$

and

$$b_1 = \zeta(1) = \gamma, \quad b_2 = -\frac{1}{2}\zeta(2) + \frac{1}{2}\zeta(1)^2 = -\frac{\pi^2}{12} + \frac{\gamma^2}{2}.$$

在 (15.4.70) 中取 $z = x + \sqrt{-1}y$ 就得到

$$\begin{aligned}\Psi(x+\sqrt{-1}y) &= -\gamma + \sum_{n\ge 0}\left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(x+n)+\sqrt{-1}y}\right] \\ &= -\gamma + \sum_{n\ge 0}\left[\frac{1}{n+1} - \frac{x+n}{(x+n)^2+y^2}\right] + \sqrt{-1}\sum_{n\ge 0}\frac{y}{(x+n)^2+y^2}.\end{aligned}$$

因此函数 $\Psi(z)$ 仅有实零点. 当 $x, y > 0$ 时我们得到

$$\Psi(x) - \Psi(y) = (x-y)\sum_{n\ge 0}\frac{1}{(x+n)(y+n)}. \tag{15.4.109}$$

即 $\Psi(x)$ 在区间 $(0,\infty)$ 内时单调递增的. 因为 $\Psi(1) = -\gamma < 0$ 和 $\Psi(2) = 1-\gamma > 0$, 所以存在唯一的 $r \in (1,2)$ 满足 $\Psi(r) = 0$. 另一方面, 对每个 $n \in \mathbb{N}$,

函数 $\Psi(x)$ 在区间 $(-n-1,-n)$ 内时单调递增的且 $\Psi(x)$ 在 $-n$ 处有单极点. 故存在唯一的 $r_n \in (-n-1,-n)$ 满足 $\Psi(r_n)=0$. 根据定义得到

$$\Psi(n) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}. \tag{15.4.110}$$

定理15.4.48. *我们有如下性质:*

(a) $\Psi(z)$ 仅有实零点.

(b) $\Psi(x)$ 在区间 $(0,\infty)$ 内单调递增且对每个 $n \in \mathbb{N}$ 函数 $\Psi(x)$ 在区间 $(-n-1,-n)$ 内也是单调递增的.

(c) $\Psi(x)$ 有唯一的正实零点 $r \in (1,2)$.

(d) $\Psi(x)$ 在每个区间 $(-n-1,-n)$ 内有唯一的零点 r_n.

(e) $\lim_{x\to\infty}[\Psi(x) - \ln x] = 0$.

计算表明

$r = 1.4616321451105, r_0 = -0.504083008, r_1 = -1.57349847, r_2 = -2.61072087.$

为了研究唯一的负零点, 记

$$r_n := -n-1+\epsilon_n, \quad \epsilon_n \in (0,1). \tag{15.4.111}$$

在 (15.4.72) 中取 $z = r_n = -n-1+\epsilon_n$, 则根据**定理15.4.48** (e) 得到

$$\pi\cot(\pi\epsilon_n) = \Psi(n+2-\epsilon_n) = \ln n + \delta_n$$

这里 $\delta_n \to 0$. 因此

$$\begin{aligned}\epsilon_n &= \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\pi}{\ln n+\delta_n}\right) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{\ln n+\delta_n} - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\ln n+\delta_n}\right)^3 + \cdots\right] \\ &= \frac{1}{\ln n+\delta_n} - \frac{\pi^2}{3(\ln n+\delta_n)^3} + \cdots.\end{aligned}$$

推论15.4.49. (Hermite) *我们有*

$$r_n = -n-1+\frac{1}{\ln n}+\delta_n', \tag{15.4.112}$$

这里 $\delta_n' = O(1/(\ln n)^3)$.

下面结论是**定理15.3.2** 的直接推论.

推论15.4.50. *$\Gamma(x)$ 函数满足如下性质:*

(a) $\Gamma(x)$ 在区间 $(0,\infty)$ 上恒为正的且在 r 处取到最小值.

(b) $\Gamma(x)$ 在区间 $(-2n,-2n+1)$ 上恒为正的且在 r_{2n-1} 处取到最小值.

(c) $\Gamma(x)$ 在区间 $(-2n-1,-2n)$ 上恒为负的且在 r_{2n-1} 处取到最大值.

§15.4.3 * Γ 函数的 Euler 定义

回顾

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \ln\Gamma(x) = \Phi(x), \quad \Phi'(x) = \Psi(x), \quad \Psi'(x) > 0 \text{ in } (0,\infty).$$

称函数 $F(x)$ 在 (a,b) 上是**凸的** 如果

$$F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda F(x_1) + (1-\lambda)F(x_2)$$

对任何 $\lambda \in (0,1)$ 和 $x_1, x_2 \in (a,b)$ 都成立. 如果 $F \in C^2((a,b))$, 则 F 是凸的当且仅当 $F'' > 0$. 从而以上部分性质可总结如下

(i) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(ii) $\ln\Gamma(x)$ 在 $(0,\infty)$ 内是凸的.

(iii) $\Gamma(1) = 1$.

定理15.4.51. *如果函数 $f:(0,\infty) \to (0,\infty)$ 满足如下条件*

(i) $f(x+1) = xf(x)$,

(ii) $\ln f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 内是凸的,

(iii) $f(1) = 1$,

则必有

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

证: 参见**定理** 3.1.17 的证明. □

推论15.4.52. **(Euler)** *我们有*

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}. \tag{15.4.113}$$

公式 (15.4.113) 可以通过直接计算得到. 根据

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^n dt = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

得到

$$G_n(x) = n^x \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^n dt = \int_0^n y^{x-1}\left(1-\frac{y}{n}\right)^n dy.$$

因此 $\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} G_n(x)$. 观察到

$$\frac{G_n(z)}{G_{n-1}(z)} = 1 + \frac{c_n(z)}{n^2}$$

这里 $\lim_{n\to\infty} c_n(z) = \frac{z(z+1)}{2}$. 故

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{n\ge 1}\left(1 + \frac{c_n(z)}{n^2}\right). \tag{15.4.114}$$

定理15.4.53. (Bohr-Mollerup-Artin) 如果函数 $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ 满足如下条件

(i) $f(x+1)=xf(x)$,

(ii) $\ln f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 内是凸的,

(iii) $f(1)=1$,

则 $f(x)=\Gamma(x)$ 对任意 $x\in(0,\infty)$ 都成立.

接下来则给出**定理15.4.53** 的几个应用.

(A) **定理15.4.18**: 对每个 $n\in\mathbb{N}$ 定义

$$f(x):=n^x\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right).$$

则 $f(x+1)=xf(x)$ 和 $\ln f(x)$ 是凸的. 根据**定理15.4.53** 我们得到 $f(x)=c_n\Gamma(z)$, 这里根据 (15.3.10) 有

$$c_n=f(1)=n\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=\sqrt{n}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.$$

(B) **定理15.3.3**: 令

$$g(x):=\frac{\pi}{\Gamma(1-x)\sin(\pi x)},\quad x\in(0,\infty).$$

则 $\ln g(x)$ 是凸的且 $g(x+1)=x\,g(x)$. 根据**定理15.4.53** 得到 $g(x)=c\Gamma(x)$, 这里

$$c=\frac{\pi}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin(\pi x)}.$$

令 $x\to 0$ 推出 $c=1$.

(C) $B(x,a)=\Gamma(x)\Gamma(a)/\Gamma(x+a)$: 计算得到

$$\begin{aligned}B(x,a)&=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(x+a)(x+a+1)\cdots(x=a+n)}{x(x+1)\cdots(x+n)a(a+1)\cdots(a+n)}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{x}{a+1}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{a+n}\right)\\&\cdot\frac{1}{x}\left(1-\frac{x}{x+1}\right)\left(1-\frac{x}{x+2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{x+n}\right).\end{aligned}$$

推论15.4.54. 我们有

$$B(a,x)=\frac{1}{x}\prod_{n\geq 1}\left[\left(1+\frac{x}{a+n-1}\right)\left(1-\frac{x}{x+n}\right)\right].\tag{15.4.115}$$

考虑多项式

$$P(x)=\prod_{1\le i\le d}(x-\alpha_i),\quad Q(x)=\prod_{1\le i\le d}(x-\beta_i),$$

这里 $\alpha_1,\cdots,\alpha_d,\beta_1,\cdots,\beta_d\in\mathbb{C}$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_d\notin\mathbb{Z}_{\le 0}$. 因此

$$\prod_{n\ge 1}\frac{P(n)}{Q(n)}\ \text{收敛}\iff\sum_{1\le i\le d}\alpha_i=\sum_{1\le i\le d}\beta_i. \tag{15.4.116}$$

此时推出

$$\prod_{n\ge 1}\frac{P(n)}{Q(n)}=\frac{\Gamma(1-\beta_1)\cdots\Gamma(1-\beta_d)}{\Gamma(1-\alpha_1)\cdots\Gamma(1-\alpha_d)}. \tag{15.4.117}$$

练习15.4.55. 证明等价刻画 (15.4.116). 取 $P(x)=x^2$ 和 $Q(x)=x^2-\frac{1}{4}$ 重新证明 (15.4.84).

§15.4.4 * Euler 和 Weierstrass 乘积公式

因为

$$\begin{aligned}n^z &= \left(1+\frac{1}{1}\right)^z\cdots\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^z\left(1+\frac{1}{n}\right)^z\cdot\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^z},\\ \frac{(z+1)\cdots(z+n)}{n!} &= \left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right),\end{aligned}$$

所以根据 (15.4.113) 得到

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}\prod_{n\ge 1}\frac{(1+\frac{1}{n})^z}{(1+\frac{z}{n})}, \tag{15.4.118}$$

称为**Euler 乘积公式(Euler product formula)**. 从 Taylor 级数展开

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}=\left(1+\frac{z}{n}\right)\sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{z^k}{n^k}=1-\sum_{k\ge 2}\frac{(-1)^k(k-1)}{k!}\frac{z^k}{n^k}$$

和

$$\ln[zG_N(z)]=z\sum_{1\le n\le N}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\sum_{1\le n\le N}\ln\left(1+\frac{z}{n}\right)-z\ln\left(1+\frac{1}{N}\right)$$

$$=\sum_{1\le n\le N}\left[\frac{z}{n}-\ln\left(1+\frac{z}{n}\right)\right]-z\sum_{1\le n\le N}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]-z\ln\left(1+\frac{1}{N}\right),$$

我们可知

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \frac{1}{z}\prod_{n\ge 1}\frac{e^{z[\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n}]}}{(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}} = \frac{e^{z\sum_{n\ge 1}[\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n}]}}{z\prod_{n\in\mathbf{N}}[(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}]}\\ &= \frac{e^{-\gamma z}}{z}\cdot\frac{1}{\prod_{n\ge 1}[(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}]}.\end{aligned}$$

定理15.4.56. **(Weierstrass)** 我们有

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n\ge 1}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right]. \tag{15.4.119}$$

上述公式表明 $1/\Gamma(z)$ 是整函数. 在 (15.4.119) 中取 $z = x+\sqrt{-1}y$ 得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\Gamma(x+\sqrt{-1}y)|} &= \sqrt{x^2+y^2}e^{\gamma x}\prod_{n\ge 1}\left[\sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2}e^{-\frac{x}{n}}\right]\\ &= \sqrt{x^2+y^2}e^{\gamma x}\prod_{n\ge 1}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\sqrt{1+\frac{y^2}{(x+n)^2}}\right].\end{aligned}$$

另一方面根据

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)} = \frac{1}{x\Gamma(x)} = e^{\gamma x}\prod_{n\ge 1}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right].$$

可得

$$\frac{1}{|\Gamma(x+\sqrt{-1}y)|} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\Gamma(x+1)}\sqrt{\prod_{n\ge 1}\left[1+\frac{y^2}{(x+n)^2}\right]}$$

如果 $x\in(0,1)$ 则有

$$\frac{1}{1+y^2}\prod_{n\ge 1}\left(1+\frac{y^2}{n^2}\right) < \prod_{n\ge 1}\left[1+\frac{y^2}{(x+n)^2}\right] < \prod_{n\ge 1}\left(1+\frac{y^2}{n^2}\right) = \frac{e^{\pi y}-e^{-\pi y}}{2\pi}.$$

定理15.4.57. 对任意 $x\in(0,1)$ 和 $y\ne 0$, 我们有

$$|\Gamma(x+\sqrt{-1}y)| = \lambda\cdot\frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{\frac{2\pi y}{e^{\pi y}-e^{-\pi y}}} \tag{15.4.120}$$

其中 $\lambda = \lambda(x)\in(1,\sqrt{1+y^2})$.

令 $\zeta_3 := \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ 则 $\zeta_3^3 = 1$.

推论15.4.58. **(Liouville)** 我们有

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(\zeta_3 z)\Gamma(\zeta_3^2 z)} = z^3\prod_{n\ge 1}\left(1+\frac{z^3}{n^3}\right). \tag{15.4.121}$$

证: 计算得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(\zeta_3 z)\Gamma(\zeta_3^2 z)} &= z^3\prod_{n\in\mathbf{N}}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)\left(1+\frac{\zeta_3 z}{n}\right)\left(1+\frac{\zeta_3^2 z}{n}\right)\right]\\ &= z^3\prod_{n\in\mathbf{N}}\left(1+\frac{z^3}{n^3}\right)\end{aligned}$$

这是由于 $1+\zeta_3+\zeta_3^2 = 0$. □

练习15.4.59. 如果 $\zeta_m := e^{2\pi\sqrt{-1}/m}$, 则

$$\prod_{0\le k\le m-1}\frac{1}{\Gamma(1-\zeta_m^k z)}=\prod_{n\ge1}\left(1-\frac{z^m}{n^m}\right).$$

对任意 $w\in\mathbb{C}$ 我们有

$$\prod_{0\le k\le m-1}(w-\zeta_m^k z)=w^m-z^m.$$

从而得到

$$\begin{aligned}
&\prod_{0\le k\le m-1}\frac{1}{\Gamma(w-\zeta_m^k z)}\\
=&\prod_{0\le k\le m-1}\left\{(w-\zeta_m^k z)e^{\gamma(w-\zeta_m^k z)}\prod_{n\ge1}\left[\left(1+\frac{w-\zeta_m^k z}{n}\right)e^{-\frac{w-\zeta_m^k z}{n}}\right]\right\}\\
=&(w^m-z^m)e^{m\gamma w}\prod_{n\ge1}\left\{\left[\left(1+\frac{w}{n}\right)^m-\left(\frac{z}{n}\right)^m\right]e^{-\frac{m}{n}w}\right\}\\
=&w^m\left(1-\frac{z^m}{w^m}\right)e^{m\gamma w}\prod_{n\ge1}\left[\left(1+\frac{w}{n}\right)^m e^{-\frac{m}{n}w}\right]\prod_{n\ge1}\left[1-\frac{z^m}{(w+n)^m}\right]\\
=&\frac{1}{[\Gamma(w)]^m}\prod_{n\ge0}\left[1-\frac{z^m}{(w+n)^m}\right].
\end{aligned}$$

定理15.4.60. (Mellin) 我们有

$$\prod_{1\le k\le m-1}\frac{\Gamma(w)}{\Gamma(w-\zeta_m^k z)}=\prod_{n\ge0}\left[1-\left(\frac{w}{z+n}\right)^m\right]. \tag{15.4.122}$$

因为 $1,\zeta_m,\cdots,\zeta_m^{m-1}$ 是代数方程 $X^m-1=0$ 的所有根, 我们可以问

$$\prod_{1\le i\le m}\frac{1}{\Gamma(w-r_i z)}$$

的无穷乘积展开, 这里 $r_1,\cdots,r_m$ 是多项式的根.

练习15.4.61. (Mellin) 证明

$$\begin{aligned}
w\Psi(z) &= -\gamma w-\frac{w}{z}-\sum_{n\ge1}\left(\frac{w}{z+n}-\frac{w}{n}\right),\\
e^{w\Psi(z)} &= e^{-\gamma w}e^{-\frac{w}{z}}\prod_{n\ge1}e^{-\frac{w}{z+n}+\frac{w}{n}},\\
e^{w\Psi(z)}\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+w)} &= \prod_{n\ge1}\left[\left(1+\frac{w}{z+n}\right)e^{-\frac{w}{z+n}}\right],\\
e^{\Psi(z)} &= \prod_{n\ge1}\left[\left(1+\frac{1}{z+n}\right)e^{-\frac{1}{z+n}}\right].
\end{aligned}$$

练习15.4.62. (Liouville) 令

$$f(z) := z^3 \prod_{n\in\mathbf{N}} \left(1+\frac{z^3}{n^3}\right), \quad g(z) := \prod_{n\in\mathbf{N}} \left[1+\frac{8z^3}{(2n+1)^3}\right],$$

和

$$g_1(z) := \prod_{n\in\mathbf{N}} \left[1+\frac{27z^3}{(3n+1)^3}\right], \quad g_2(z) := \prod_{n\in\mathbf{N}} \left[1+\frac{27z^3}{(3n+2)^3}\right].$$

则

$$f(2z) = 8f(z)g(z), \quad f(3z) = 27f(z)g_1(z)g_2(z).$$

§15.4.5 * $\Gamma(z)$ 的渐近展开

如果我们在 (15.4.110) 中把 $\frac{1}{k}$ 替换成

$$\int_0^1 u^{k-1}du$$

则得到

定理15.4.63. (Legendre) 当 $\mathrm{Re}(z) > 0$ 时我们有

$$\Psi(z) = -\gamma + \int_0^1 \frac{1-u^{z-1}}{1-u}du \tag{15.4.123}$$

$$= -\gamma + \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^z}\right]\frac{dt}{t} \tag{15.4.124}$$

$$= -\gamma + \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-x}-e^{-zx}}{1-e^{-x}}\right)dx. \tag{15.4.125}$$

证: 分别做变量替换 $u = \frac{1}{1+t}$ 和 $u = e^{-x}$ 就可以得到. □

练习15.4.64. 证明

$$\Psi\left(\frac{3}{2}\right) = -\gamma + 2 - \ln 2, \quad \Psi\left(\frac{4}{3}\right) = -\gamma + 3 - \frac{3}{2}\ln 3 - \frac{\pi}{6}\sqrt{3},$$

$$\Psi\left(\frac{3}{4}\right) = -\gamma + \frac{\pi}{2} - 3\ln 2, \quad \Psi\left(\frac{1}{4}\right) = -\gamma - \frac{\pi}{2} - 3\ln 2,$$

$$\Psi\left(\frac{2}{3}\right) = -\gamma + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{3}{2}\ln 3, \quad \Psi\left(\frac{1}{3}\right) = -\gamma - \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{3}{2}\ln 3.$$

推论15.4.65. (1) 如果 $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Re}(w) > 0$, 则

$$\Psi(z) - \Psi(w) = \int_0^1 \frac{u^w - u^z}{1-u}\frac{du}{u} \tag{15.4.126}$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{1}{(1+t)^w} - \frac{1}{(1+t)^z}\right]\frac{dt}{t} \tag{15.4.127}$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-wx} - w^{-zx}}{1-e^{-x}}dx. \tag{15.4.128}$$

(2) 如果 $-1 < \mathrm{Re}(z) < 1$, 则

$$\frac{1}{z} - \pi\cot(\pi z) = \int_0^1 \frac{u^{-z} - u^z}{1-u} du \tag{15.4.129}$$

$$= \int_0^\infty \left[(1+t)^{z+1} - \frac{1}{(`+t)^{z+1}} \right] \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \frac{e^{(1+z)x} - e^{(1-z)x}}{1-e^{-x}} dx.$$

(3) 我们有

$$\ln \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \int_0^1 \frac{u^z - u^{-z} - 2}{1-u} \frac{du}{\ln u}. \tag{15.4.130}$$

练习15.4.66. 证明

$$\begin{aligned} \ln\frac{\pi}{2} &= \int_0^1 \frac{v-1}{v+1}\frac{dv}{\ln v} = \int_0^1 \frac{(u^{\frac14} - u^{-\frac14})^2}{u-1}\frac{du}{\ln u}, \\ \ln\frac{\pi}{2\sqrt{2}} &= \int_0^1 \frac{(y^2-1)y^2}{(1+y)(1+y^2)}\frac{dy}{\ln y}. \end{aligned}$$

利用 (15.3.5) 得到

$$\begin{aligned} \gamma &= -\int_0^\infty e^{-t}\ln t\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_{\frac1n}^\infty \left(-e^{-t}\ln t\right) dt \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(e^{-t}\ln t \Big|_{\frac1n}^\infty - \int_{\frac1n}^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \right) = \lim_{n\to\infty} \left(e^{-\frac1n}\ln n - \int_{\frac1n}^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \right). \end{aligned}$$

另一方面, 因为 $e^{-1/n}\ln n \sim \ln n \sim \ln(n+1)$, 所以

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left[\int_0^\infty \frac{1}{t(t+1)} dt - \int_{\frac1n}^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \right].$$

定理15.4.67. (Euler) 我们有

$$\gamma = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t} - e^{-t} \right) \frac{dt}{t}. \tag{15.4.131}$$

练习15.4.68. 证明

$$\gamma = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{xe^x} \right) dx \tag{15.4.132}$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{1-v} - \frac{1}{\ln(1/v)} \right) dv \tag{15.4.133}$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{u} - \frac{e^{1-\frac1u}}{u^2} \right) du. \tag{15.4.134}$$

推论15.4.69. (Dirichlet-Gauss) 当 $\mathrm{Re}(z) > 0$ 时有

$$\Psi(z) = \int_0^\infty \left[e^{-t} - \frac{1}{(1+t)^z} \right] \frac{dt}{t} \tag{15.4.135}$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-zx}}{1-e^{-x}} \right) dx. \tag{15.4.136}$$

练习15.4.70. 通过考虑二重积分

$$\iint_{[0,\infty)\times[0,\infty)} e^{-u}u^{z-1}\left(e^{-y}-e^{-uy}\right)\frac{dydu}{y}.$$

重新给出 (15.4.135) 的证明.

练习15.4.71. 证明

$$\Psi(x)=\int_0^1\left(e^{1-\frac{1}{y}}-y^z\right)\frac{dy}{y(1-y)}=\int_0^1\left[\frac{1}{\ln(1/v)}-\frac{v^{z-1}}{1-v}\right]dv.$$

对 (15.4.135) 和 (15.4.136) 积分得到

推论15.4.72. (Plana) 当 $\mathrm{Re}(z)>0$ 时有

$$\ln\Gamma(z) = \int_0^\infty\left[e^{-t}(z-1)-\frac{(1+t)^{-1}-(1+t)^{-z}}{\ln(1+t)}\right]\frac{dt}{t}, \tag{15.4.137}$$

$$\ln\Gamma(z) = \int_0^\infty\left[e^{-x}(z-1)+\frac{e^{-zx}-e^{-x}}{1-e^{-x}}\right]\frac{dx}{x}. \tag{15.4.138}$$

回顾

$$\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}B_n'}{(2n)!}x^{2n-1}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\coth\frac{x}{2},\quad 0<|x|<1,$$

或

$$\frac{1}{2^{2\pi t}-1}-\frac{1}{2\pi t}+\frac{1}{2}=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}\zeta(2n)}{\pi}t^{2n-1},\quad 0<|t|<\frac{1}{2\pi}, \tag{15.4.139}$$

这里 $B_n':=B_{2n}=2(2n)!\zeta(2n)/(2\pi)^{2n}$ 是第 $2n$ 个 Bernoulli 数 (参见 (15.3.32)). 比如

$$B_1'=\frac{1}{6},B_2'=\frac{1}{30},\ B_3'=\frac{1}{42},B_4'=\frac{1}{30},B_5'=\frac{5}{66},B_6'=\frac{691}{2730},B_7'=\frac{7}{6},B_8'=\frac{3617}{510}.$$

又回顾到

$$x\coth(x)=1+2x^2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{x^2+(\pi n)^2}. \tag{15.4.140}$$

受 (15.4.139) 启发我们把 (15.4.136) 写成

$$\Psi(z+1) = \int_0^\infty\left(\frac{e^{-x}}{x}-\frac{e^{-zx}}{e^x-1}\right)dx$$

$$=\int_0^\infty\frac{1}{2}e^{-zx}dx+\int_0^\infty\frac{e^{-x}-e^{-zx}}{2}dx-\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)e^{-zx}dx.$$

定理15.4.73. 当 $\mathrm{Re}(z)>0$ 时有

$$\Psi(z+1) = \frac{1}{2z}+\ln z-\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)e^{-zx}dx, \tag{15.4.141}$$

$$\Psi(z) = -\frac{1}{2z}+\ln z-\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)e^{-zx}dx. \tag{15.4.142}$$

证: 可从 $\Psi(z+1)-\Psi(z)=\frac{1}{z}$ 得到. □

根据**定理15.4.48** 我们定义

$$\nu(z):=\ln z-\Psi(z). \tag{15.4.143}$$

推论15.4.74. 当 $\mathrm{Re}(z)>0$ 时有

$$\begin{aligned}\nu(z) &= \frac{1}{2z}+\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)e^{-zx}dx, &(15.4.144)\\ \nu(z) &= \sum_{n\geq 0}\left[\frac{1}{z+n}-\ln\left(1+\frac{1}{z+n}\right)\right], &(15.4.145)\\ \ln\Gamma(z+1) &= \frac{1}{2}\ln z+z(\ln z-1)+1+\mu(z)-\mu(1). &(15.4.146)\end{aligned}$$

这里

$$\mu(z):=\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)e^{-zx}\frac{dx}{x},\quad \mu'(z)=\frac{1}{2z}-\nu(z). \tag{15.4.147}$$

观察到 $\mu(z)$ 可写成

$$\mu(z)=\int_0^\infty\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)e^{-zx}\frac{dx}{x}.$$

证: 利用 (15.4.70) 和 $\lim_{N\to\infty}\ln\frac{z+N+1}{N+1}=0$ 得到

$$\begin{aligned}\nu(z) &= \ln z-\sum_{n\geq 0}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{z+n}\right]\\ &= \ln z-\lim_{N\to\infty}\sum_{1\leq n\leq N}\left(\ln\frac{n+1}{n}-\frac{1}{z+n}\right)\\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{0\leq n\leq N}\left[\frac{1}{z+n}-\ln\left(1+\frac{1}{z+n}\right)\right]\\ &+\lim_{N\to\infty}\sum_{0\leq n\leq N}\left(\ln\frac{z+n+1}{z+n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)+\ln z\\ &= \sum_{n\geq 0}\left[\frac{1}{z+n}-\ln\left(1+\frac{1}{z+n}\right)\right]+\lim_{N\to\infty}\ln\frac{z+N+1}{N+1}\\ &= \sum_{n\geq 0}\left[\frac{1}{z+n}-\ln\left(1+\frac{1}{z+n}\right)\right].\end{aligned}$$

对 (15.4.142) 求积分并使用

$$\ln\Gamma(z+1)=\ln\Gamma(z+1)-\ln\Gamma(2)=\int_1^z\Psi(w+1)dw$$

就得到 (15.4.146). □

从 (15.4.146) 我们得到

$$\Gamma(z+1)=z^{z+\frac{1}{2}}e^{1-z}e^{\mu(z)-\mu(1)}.$$

注意到 $\lim_{x\to\infty}\mu(x)=0$.

考虑二重积分

$$I:=\int_a^c\int_0^\infty\frac{e^{-vy}-e^{-by}}{y}dydv.$$

利用**定理5.5.24** 得到

$$\ln\frac{b}{v}=\int_0^\infty\frac{e^{-vy}-e^{-by}}{y}dy.$$

根据 Fubini 定理推出

$$\int_0^\infty\left[\frac{e^{-ax}-e^{-cx}}{x}-(c-a)e^{-bx}\right]\frac{dx}{x}=(c-a)(1+\ln b)-(c\ln c-a\ln a). \tag{15.4.148}$$

注意到

$$\mu(1)=\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)e^{-x}\frac{dx}{x}=\int_0^\infty\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)e^{-x}\frac{dx}{x}.$$

因为

$$\mu(1)=\int_0^\infty\left(\frac{1}{1-e^{-2x}}-\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}\right)e^{-2x}\frac{dx}{x}$$

和

$$\frac{1}{1-e^{-2x}}=\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{e^{-x}}{1-e^{-2x}},$$

所以

$$0=\int_0^\infty\left(\frac{1}{1-e^{-2x}}-\frac{2-e^{-x}}{2x}-\frac{1-e^{-x}}{2}\right)e^{-x}\frac{dx}{x}.$$

引理15.4.75. 我们有

$$\mu\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2,\quad \mu(1)=1-\ln\sqrt{2\pi}. \tag{15.4.149}$$

证: 利用上述恒等式和等式

$$\mu\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x}\frac{dx}{x}$$

$$=\int_0^\infty\left(\frac{1}{1-e^{-2x}}-\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}\right)e^{-x}\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(\frac{1-e^{-x}}{x}-e^{-x}\right)e^{-x}\frac{dx}{x}$$

在 (15.4.148) 中取 $a=1$ 和 $b=c=2$ 就得到

$$\mu\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}[(2-1)(1+\ln 2)-(2\ln 2-1\ln 1)]=\frac{1-\ln 2}{2}.$$

在 (15.4.146) 中取 $z=1/2$ 得到

$$\ln\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2}-1\right)+1+\mu\left(\frac{1}{2}\right)-\mu(1).$$

由此推出 $\mu(1)=\frac{1}{2}-\ln\sqrt{\pi}+\mu(1/2)=1-\ln\sqrt{2\pi}$. □

练习15.4.76. 本练习给出 $C:=1-\mu(1)$ 的另一个计算方法. 证明

(a) $\sum_{1\le k\le n}\ln k=C+(n+\frac{1}{2})\ln n-n+\mu(n)$.

(b) $\sum_{1\le k\le 2n}\ln k=C+(2n+1)\ln(2n)-2n+\mu(2n)$.

(c) $\sum_{1\le k\le n}\ln(2k)=n\ln 2+C+(n+\frac{1}{2})\ln n-n+\mu(n)$.

(d) $\sum_{1\le k\le n}(2k-1)=n\ln n+(n+\frac{1}{2})\ln 2-n+\mu(2n)-\mu(n)$.

(e) 当 $n\to\infty$ 时有

$$(2\ln 2-\ln 1)+\sum_{2\le k\le n-1}[2\ln(2k)-2\ln(2k-1)]+[\ln(2n)-2\ln(2n-1)]\to\ln\frac{\pi}{2}.$$

(f) $C=\ln\sqrt{2\pi}$.

推论15.4.77. (1) 当 $\mathrm{Re}(z)>0$ 时有

$$\ln\Gamma(z+1)=\left(z+\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\ln\sqrt{2\pi}+\mu(z),\tag{15.4.150}$$

$$\ln\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\ln\sqrt{2\pi}+\mu(z).\tag{15.4.151}$$

(2) 当 x 很大时有

$$\ln\Gamma(x+1)\sim\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x-x+\ln\sqrt{2\pi},\tag{15.4.152}$$

$$\Gamma(x)\sim\sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}.\tag{15.4.153}$$

(3) **(Stirling)** 当 n 很大时有

$$n!\sim\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.\tag{15.4.154}$$

证: (1) 中的两个恒等式可从 (15.4.146), (15.4.149), 和 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ 得到. 最后三个恒等式可从 $\mu(x)\to 0$, 当 $x\to\infty$ 时, 得到. □

性质15.4.78. (1) $\nu(z)$ 满足

$$\nu(z+1)=\nu(z)+\ln\left(1+\frac{1}{z}\right)-\frac{1}{z}. \tag{15.4.155}$$

(2) **(Binet)** $\mu(z)$ 满足

$$\mu(z+1)=\mu(z)+\left[1-\left(z+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{z}\right)\right]. \tag{15.4.156}$$

(3) **(Gudermann)** 我们有

$$\mu(z)=\sum_{n\geq 0}\left[\left(z+n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{z+n}\right)-1\right]. \tag{15.4.157}$$

(4) 我们有

$$\nu(z)=\sum_{k\geq 2}\frac{(-1)^k}{k}\zeta(k,z). \tag{15.4.158}$$

(5) 我们有

$$\mu(z)=\sum_{k\geq 2}\frac{(-1)^k(k-1)}{2k(k+1)}\zeta(k,z). \tag{15.4.159}$$

(6) **(Binet)** 我们有

$$\mu(z)=\sum_{k\geq 2}\frac{k-1}{2k(k+1)}\zeta(k,z+1). \tag{15.4.160}$$

(7) 我们有

$$\nu(z)=\frac{1}{z}-\sum_{k\geq 2}\frac{1}{k}\zeta(k,z+1). \tag{15.4.161}$$

证: (1) 可从 (15.4.145) 推出.
(2) 根据 (15.4.147) 得到

$$\begin{aligned}\mu'(z+1)-\mu'(z) &= \frac{1}{2(z+1)}-\nu(z+1)-\frac{1}{2z}+\nu(z)\\ &= \frac{1}{2(z+1)}+\frac{1}{2z}-\ln\left(1+\frac{1}{z}\right).\end{aligned}$$

在 $[1,z]$ 上积分得到

$$\begin{aligned}\mu(z+1)-\mu(2)-\mu(z)+\mu(1) &= \frac{\ln(z+1)-\ln 2}{2}+\frac{1}{2}\ln z+z(\ln z-1)+1\\ &\quad -(z+1)[\ln(z+1)-1]+2(\ln 2-1).\end{aligned}$$

然而 (15.4.146) 告诉我们 $\mu(2)-\mu(1)=-\frac{3}{2}\ln 2+1$ 从而

$$\mu(z+1)-\mu(z)=1-\left(z+\frac{1}{2}\right)\ln(z+1)+\left(z+\frac{1}{2}\right)\ln z.$$

(3) 对每个 $n \geq 0$ 都有

$$\begin{aligned}\mu(z) &= \mu(z+n+1) - \sum_{0\leq k\leq n}[\mu(z+k+1)-\mu(z+k)] \\ &= \mu(z+n+1) - \sum_{0\leq k\leq n}\left[1-\left(z+k+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{z+k}\right)\right] \\ &= \sum_{0\leq k\leq n}\left[\left(z+k+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{z+k}\right)-1\right]+\mu(z+n+1).\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$ 得到 (15.4.157).

(4) 因为 (15.4.145) 中的每项等于

$$\frac{1}{z+n}-\ln\left(1+\frac{1}{z+n}\right)=\frac{1}{z+n}-\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{1}{(z+n)^k}=\sum_{k\geq 2}\frac{(-1)^k}{k}\frac{1}{(z+n)^k},$$

所以得到 (15.4.158).

(5) 同样 (15.4.157) 中的每项等于

$$\left(z+n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{z+n}\right)-1=\sum_{k\geq 2}\frac{(-1)^k(k-1)}{2k(k+1)}\frac{1}{(z+n)^k}.$$

故得到 (15.4.159).

(6) 因为

$$\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}=\frac{e^x(x-2)+(x+2)}{2x^2(e^x-1)},$$

所以

$$\mu(x)=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{e^x(x-2)+(x+2)}{x^2}\cdot\frac{e^{-zx}}{e^x-1}dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty\sum_{k\geq 1}\frac{k}{(k+2)!}\frac{x^ke^{-zx}}{e^x-1}dx.$$

利用 $x^ke^{-zx}/(e^x-1)=\sum_{m\geq 0}x^kw^{-(z+m+1)x}$ 得到 (15.4.160). 同样方法可以得到 (15.4.161). □

练习15.4.79. (Lerch) 证明

$$|\Gamma(x+\sqrt{-1}y)|=\sqrt{2\pi}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})}e^{-x-y\tan^{-1}\frac{y}{x}}(1+\epsilon)$$

其中 $\epsilon\to 0$ (x 或 y 趋于 $+\infty$).

对任何 $k\in\mathbb{N}$ 不等式 $k^2-5k+6=(k-2)(k-3)\geq 0$ 推出

$$\frac{k-1}{k(k+1)}\leq\frac{1}{6}.$$

(这里我们取 $>$ 当 $l>3$ 时). 因此对任何 $x>0$ 有

$$0<\mu(x)<\frac{1}{12}\sum_{k\geq 2}\zeta(k,x+1). \tag{15.4.162}$$

另一方面

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 2}\zeta(k,x+1) &= \sum_{k\geq 2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(x+n)^k} = \sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 2}\frac{1}{(x+n)^k}\\ &= \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(x+n)^2}\frac{1}{1-\frac{1}{x+n}} = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(x+n)(x+n-1)}\\ &= \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{x+n-1}-\frac{1}{x+n}\right) = \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

从而得到

$$0<\mu(x)<\frac{1}{12x}. \tag{15.4.163}$$

定理15.4.80. (Stirling) 对任何 $x>0$ 得到

$$\Gamma(x)=\sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}e^{\frac{\theta_x}{12x}} \tag{15.4.164}$$

这里 $\theta_x\in(0,1)$. 特别地

$$n!=\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^{\frac{\theta_n}{12n}}. \tag{15.4.165}$$

从 (15.4.151) 得到

$$\Gamma(x)=\sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}e^{\mu(x)}.$$

根据 (15.4.140) 我们有

$$\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}=2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{x^2+(2\pi n)^2}.$$

然而

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+(2\pi n)^2} &= \frac{1}{(2\pi n)^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{(2\pi n)^2}}\\ &= \frac{1}{(2\pi n)^2}\left[\sum_{0\leq k\leq m-1}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2\pi n)^{2k}}+(-1)^m\frac{r_n}{(2\pi n)^{2m}}x^{2m}\right],\end{aligned}$$

其中 $r_n:=4n^2\pi^2/(4n^2\pi^2+x^2)\in(0,1)$. 故对每个 $m\in\mathbb{N}$ 有

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x} &= 2\sum_{1\leq k\leq m}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}x^{2k-2}}{(2\pi n)^{2k}}\\ &\quad +2(-1)^m\theta_m x^{2m}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2\pi n)^{2m+2}}\end{aligned}$$

其中 $\theta_m\in(0,1)$. 从 (15.3.32) 和 (15.4.147) 出发的到

$$\mu(z) = 2\sum_{1\leq k\leq m}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi n)^{2k}}\int_0^\infty x^{2k-2}e^{-zx}dx$$

$$+2(-1)^m\theta_m\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{(2\pi n)^{2m+2}}\int_0^\infty x^{2m}e^{-zx}dx$$
$$= 2\sum_{1\le k\le m}\sum_{n\ge1}\frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi n)^{2k}}\frac{(2k-2)!}{z^{2k-1}}+2(-1)^m\theta_m\sum_{n\ge1}\frac{1}{(2\pi n)^{2m+2}}\frac{(2m)!}{z^{2m+1}}$$
$$= 2\sum_{1\le k\le m}\frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{(2\pi)^{2k}z^{2k-1}}\zeta(2k)+2(-1)^m\theta_m\frac{(2m)!}{z^{2m+1}}\frac{1}{(2\pi)^{2m+2}}\zeta(2m+2)$$
$$= \sum_{1\le k\le m}\frac{(-1)^{k-1}B_{2k}}{2k(2k-1)z^{2k-1}}+(-1)^m\theta_m\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)(2m+1)z^{2m+1}}.$$

推论15.4.81. 给定 $\mathrm{Re}(z)>0$. 对每个 $m\in\mathbb{N}$ 存在 $\theta_m\in(0,1)$ 满足

$$\mu(z)=\sum_{1\le k\le m}\frac{(-1)^{k-1}B_{2k}}{2k(2k-1)z^{2k-1}}+(-1)^m\theta_m\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)(2m+1)z^{2m+1}}.\quad(15.4.166)$$

公式 (15.4.166) 的直接推论是

$$n!\approx\sqrt{2\pi}n^{n+\frac12}e^{-n}e^{\frac{1}{12n}-\frac{1}{360n^3}}=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^ne^{\frac{1}{12n}-\frac{1}{360n^3}}.\quad(15.4.167)$$

练习15.4.82. (Cauchy) 对每个 $n\in\mathbb{N}$ 证明

$$2\frac{(2n)^{2n+\frac12}}{(2\pi)^{2n-\frac12}}e^{-2n}<B_{2n}<\frac{1}{12}\frac{(2n)^{2n+\frac{1}{12}}}{(2\pi)^{2n-\frac52}}e^{-2n+\frac{1}{24n}}.$$

对恒等式

$$\frac{\frac12-u}{u+z}=\frac{z+\frac12}{u+z}-1$$

两边积分得到

$$\int_0^1\frac{\frac12-u}{u+z}du=\left(z+\frac12\right)\ln\left(1+\frac1z\right)-1.$$

一般地, 对每个 $n\ge0$ 可证明

$$\int_n^{n+1}\frac{\frac12-u+n}{u+z}du=\left(z+n+\frac12\right)\ln\left(1+\frac{1}{z+n}\right)-1.$$

故

$$\mu(z)=\sum_{n\ge0}\int_n^{n+1}\frac{\frac12-u+n}{u+z}du=\sum_{n\ge0}\int_0^1\frac{\frac12-t}{u+z+n}du.$$

定义函数

$$\Lambda(t):=\frac12-t+\lfloor t\rfloor,\quad t\in\mathbb{R}.\quad(15.4.168)$$

定理15.4.83. 当 $\mathrm{Re}(z)>0$ 时有

$$\mu(z)=\int_0^\infty\frac{\Lambda(t)}{t+z}dt.\quad(15.4.169)$$

练习15.4.84. (Binet-Liouville-Bourgoret) 证明

$$\mu(x) = 2\int_0^\infty \frac{\tan^{-1}(t/x)}{e^{2\pi t}-1}dt$$
$$= \frac{x}{\pi}\int_0^\infty \ln\left(\frac{1}{1-e^{-2\pi t}}\right)\frac{dt}{t^2+x^2} = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(2n\pi t)}{t+x}dt.$$

§15.5 ∗ 模形式

模群(modular group) 定义为

$$\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}) := \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ ab - bc = 1\right\}. \tag{15.5.1}$$

令 Γ 是由如下矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{15.5.2}$$

所生成的 $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的子群. 对所有整数 $n \in \mathbb{Z}$ 有

$$\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n.$$

下面练习证明了 $\Gamma = \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$; 即模群是由 (15.5.2) 所生成的.

练习15.5.1. 令 $\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 是 $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ 中的矩阵. 利用恒等式

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b' \\ c & nc+d \end{bmatrix}$$

来证明, 除非 $c = 0$, 某些矩阵 $\alpha\gamma$, $\gamma \in \Gamma$, 具有如下形式

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & -a \\ d & -c \end{bmatrix}$$

继续这个过程直到某些矩阵 $\alpha\gamma$, $\gamma \in \Gamma$, 的第二列为 $(0, *)$. 事实上第二列是 $(0, \pm 1)$, 且因为 $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = -I$, 第二列可以取 $(0, 1)$. 从而证明 $\alpha\gamma \in \Gamma$ 和 $\alpha \in \Gamma$.

模群中的每个元 $\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 可看成 Riemann 球 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上的自同构,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}(\tau) := \frac{a\tau + b}{c\tau + d},\quad \tau \in \widehat{\mathbb{C}}. \tag{15.5.3}$$

根据**练习15.5.1**这些自同构由

$$\tau \mapsto \tau+1, \quad \tau \mapsto -\frac{1}{\tau} \tag{15.5.4}$$

所生成.

§15.5.1 * k 权模形式

上半平面(upper half-plane) 定义为

$$\mathbb{H} := \{\tau \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(\tau) > 0\}. \tag{15.5.5}$$

Riemann 曲面理论告诉我们只有三类单连通 Riemann 曲面, 即, 复平面 $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, Riemann 球 $\widehat{\mathbb{C}} \cong \mathbb{S}^2$, 和上半平面 $\mathbb{H} \cong \mathbb{B}^2$.

练习15.5.2. 证明

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(\gamma(\tau)) &= \frac{\mathrm{Im}(\tau)}{|c\tau+d|^2}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}), \\
(\gamma\gamma')(\tau) &= \gamma(\gamma'(\tau)), \quad \gamma, \gamma' \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}),\ \tau \in \mathbb{H}, \\
\frac{d\gamma(\tau)}{d\tau} &= \frac{1}{(c\tau+d)^2}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

因此模群把上半平面映成上半平面.

定义15.5.3. 令 $k \in \mathbb{Z}$ 为整数. 亚纯函数 $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ 称为k **权弱模形式(weakly modular form of weight k)** 如果

$$f(\gamma(\tau)) = (c\tau+d)^k f(\tau), \quad \gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}) \text{ 和 } \tau \in \mathbb{H}. \tag{15.5.6}$$

可以证明如果 (15.5.6) 对形如 (15.5.2) 的 γ 成立, 则对任意 $\gamma \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ 也成立. 换句话说, f 是 k 权弱模形式的如果

$$f(\tau+1) = f(\tau), \quad f\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^k f(\tau). \tag{15.5.7}$$

0 权弱模形式具有 $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$- 不变性, $f \circ \gamma = f$ 对所有 $\gamma \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ 都成立.

根据 (15.5.7) 得到每个弱模形式 $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ 是 $\mathbb{Z}$- 周期的. 记 $\mathbb{D} = \mathbb{B}^2 := \{q \in \mathbb{C} : |q| < 1\}$ 是单位开复圆盘, 记 $\mathbb{D}' := \mathbb{D} \setminus \{0\}$, 并回顾到 $\mathbb{Z}$- 周期全纯映射 $\tau \mapsto e^{2\pi\sqrt{-1}\tau} = q$ 把 $\mathbb{H}$ 映成 $\mathbb{D}'$. 对应于 f, 函数 $g : \mathbb{D}' \to \mathbb{C}$ 其中

$$g(q) := f\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \ln q\right) \tag{15.5.8}$$

是有定义的且 $f(\tau) := g(e^{2\pi\sqrt{-1}\tau})$. 若 f 在上半平面上是全纯的, 则复合函数 g 在去心圆盘上是全纯的, 因此 g 有如下的 Laurent 级数展开

$$g(q) = \sum_{n\geq 1} a_n q^n, \quad q \in \mathbb{D}'. \tag{15.5.9}$$

根据 $|q| = e^{-2\pi \mathrm{Im}(\tau)}$ 我们可以证明当 $\mathrm{Im}(\tau) \to \infty$ 时 $q \to 0$. 称 f **在 ∞ 处全纯的(holomorphic at ∞)** 如果 g 可全纯延拓到 $q = 0$, 即, Laurent 级数只对 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 求和. 因此 f 具有如下 Fourier 级数展开

$$f(\tau) = \sum_{n\geq 0} a_n(f) q^n, \quad q := e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}. \tag{15.5.10}$$

定义15.5.4. *假设 k 是整数. 称 $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ 是* **k 权模形式** *如果*

(1) *f 在 $\mathbb{H}$ 上是全程的,*

(2) *f 是 k 权弱模形式,*

(3) *f 在 ∞ 处是全纯的.*

k 权模形式的集合记为 $\mathcal{M}_k(\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}))$.

练习15.5.5. *(a) 证明集合 $\mathcal{M}_k(\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}))$ 是 $\mathbb{C}$ 上的向量空间.*

(b) 若 $f \in \mathcal{M}_k(\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}))$ 和 $g \in \mathcal{M}_\ell(\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}))$, 则 $fg \in \mathcal{M}_{k+\ell}(\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}))$.

从而

$$\mathcal{M}(\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})) := \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{M}(\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})) \tag{15.5.11}$$

是分次环. $\mathbb{H}$ 上的零函数是任意权模形式, 和 $\mathbb{H}$ 上的常值函数是 0 权模形式.

§15.5.2 * k 权 Eisenstein 级数和尖点形式

假设 $k \geq 3$ 是偶数. 定义 **k 权 Einstein 级数(Einstein series of weight k)** 为

$$G_k(\tau) := \sum_{(c,d)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(c\tau+d)^k}, \quad \tau \in \mathbb{H}. \tag{15.5.12}$$

练习15.5.6. *证明 G_k 在 $\mathbb{H}$ 上是全纯函数且是 k 权弱模形式. 最后证明当 $\mathrm{Im}(\tau) \to \infty$ 时 G_k 时有界的从而是 k 权模形式.*

回顾恒等式

$$\frac{1}{\tau} + \sum_{d\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{\tau - d} + \frac{1}{\tau + d} \right) = \pi \cot(\pi\tau) = \pi\sqrt{-1} - 2\pi\sqrt{-1} \sum_{m\geq 0} q^m, \tag{15.5.13}$$

这里 $q=e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$. 对 (15.5.13) 关于 $\tau\in\mathbb{H}$ 求 $k-1$ 导数, $q=e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$, 得到

$$\sum_{d\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(\tau+d)^k}=\frac{(-2\pi\sqrt{-1})^k}{(k-1)!}\sum_{m\geq 1}m^{k-1}q^k,\quad k\geq 2. \tag{15.5.14}$$

对每个 $k\geq 3$,

$$\begin{aligned}\sum_{(c,d)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}}\frac{1}{(c\tau+d)^k} &= \sum_{d\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{1}{d^k}+2\sum_{c\geq 1}\left[\sum_{d\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(c\tau+d)^k}\right]\\ &= 2\zeta(k)+2\frac{(2\pi\sqrt{-1})^k}{(k-1)!}\sum_{c\geq 1}\sum_{m\geq 1}m^{k-1}q^{cm}\end{aligned}$$

所以

$$G_k(\tau)=2\zeta(k)+2\frac{(2\pi\sqrt{-1})^k}{(k-1)!}\sum_{n\geq 1}\sigma_{k-1}(n)q^n,\quad k\geq 3\text{ 和 }k\text{ 偶数} \tag{15.5.15}$$

这里的系数 $\sigma_{k-1}(n)$ 是算术函数

$$\sigma_{k-1}(n):=\sum_{m|n,\ m>0}m^{k-1}. \tag{15.5.16}$$

正规化 Eisenstein 级数(normalized Eisenstein series) 定义为

$$E_k(\tau):=\frac{G_k(\tau)}{2\zeta(k)}. \tag{15.5.17}$$

利用 (15.3.32) 得到

$$E_k(\tau)=1-\frac{2k}{B_k}\sum_{n\geq 1}\sigma_{k-1}(n)q^n. \tag{15.5.18}$$

练习15.5.7. 证明 (15.5.13) 中的第二个恒等式.

定义15.5.8. *k* **权尖点形式(cusp form of weight** *k***)** 是指 k 权模形式且其 Fourier 展开中首项系数 $a_0=0$, 即,

$$f(\tau)=\sum_{n\geq 1}a_nq^n,\quad q:=e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}.$$

k 权尖点形式的集合记为 $\boldsymbol{\mathcal{S}}_k(\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}))$.

当 $\lim_{\mathrm{Im}(\tau)\to\infty}f(\tau)=0$ 时, 可得模形式必是尖点形式. 从而尖点形式集合 $\boldsymbol{\mathcal{S}}_k(\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}))$ 构成了模形式集合 $\boldsymbol{\mathcal{M}}_k(\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}))$ 的向量子空间, 且分次环

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}))=\bigoplus_{k\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{\mathcal{S}}_k(\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}))$$

是 $\boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}))$ 的理想.

令

$$g_2(\tau) := 60G_4(\tau), \quad g_3(\tau) := 140G_6(\tau) \tag{15.5.19}$$

并定义**判别函数(discriminant function)** 为

$$\Delta : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \Delta(\tau) := g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2. \tag{15.5.20}$$

则 Δ 是 12 权弱模形式且在 $\mathbb{H}$ 上是全纯的.

练习15.5.9. 证明在函数 Δ 的 Fourier 级数展开中 $a_0 = 0$ 和 $a_1 = (2\pi)^{12}$. 故 $\Delta \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_{12}(\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}))$.

可以证明 $\Delta(\tau) \neq 0$ 对所有 $\tau \in \mathbb{H}$ 都成立从而 Δ 的唯一零点是 ∞. 因此**模函数(modular function)**

$$j : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad j(\tau) := 1728\frac{g_2(\tau)^3}{\Delta(\tau)} \tag{15.5.21}$$

在 $\mathbb{H}$ 上是全纯的.

练习15.5.10. 证明 j 是 $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$- 不变的, 即, $j(\gamma(\tau)) = j(\tau)$ 对所有 $\gamma \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ 和 $\tau \in \mathbb{H}$ 都成立.

练习15.5.11. 令 $\mu_3 := e^{2\pi\sqrt{-1}/3}$. 证明 $g_2(\mu_3) = 0$, $g_3(\mu_3) \neq 0$, $g_3(\sqrt{-1}) = 0$, 和 $g_2(\sqrt{-1}) \neq 0$, 因此 $j(\mu_3) = 0$ 和 $j(\sqrt{-1}) = 1728$.

我们可以证明

$$g_2(\sqrt{-1}) = 4\varpi_4^4, \quad \varpi_4 := 2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = 2\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})} \tag{15.5.22}$$

and

$$g_3(\mu_3) = \frac{27}{16}\varpi_3^6, \quad \varpi_3 := 2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}} = 2\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(\frac{5}{6})}. \tag{15.5.23}$$

§15.6 参考文献

1. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis I*, Translated from the 1988 German original by Gary Brookfield, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. xiv+426 pp. ISBN: 3-7643-7153-6

2. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis II*, Translated from the 1999 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. xii+400 pp. ISBN: 978-3-7643-7472-3; 3-7643-7472-3

3. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis III*, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. xii+468 pp. ISBN: 978-3-7643-7479-2; 3-7643-7479-2

4. Iwaniec, Henryk; Kowalski, Emmanuel. *Analytic number theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. xii+615 pp. ISBN: 0-8218-3633-1

5. Koblitz, Neal. *Introduction to elliptic curves and modular forms*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics **97**, Springer-Verlag, New York, 1993. x+248 pp. ISBN: 0-387-97966-2

6. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis I*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+574 pp. ISBN: 3-540-40386-8

7. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis II*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xvi+681 pp. ISBN: 3-540-40633-6

8. 布鲁斯· C. 伯恩特(Bruce C. Berndt) 主编: **拉玛努金笔记**(第1, 2, 3, 4 卷), 哈尔滨工业大学出版社, 2019.

9. 布鲁斯· C. 伯恩特(Bruce C. Berndt), 乔治· E. 安德鲁斯 (George E. Andrews) 主编: **拉玛努金遗失笔记**(第 1, 2, 3, 4 卷), 哈尔滨工业大学出版社, 2019.

10. 常庚哲, 史济怀 编: **数学分析教程** (上、下册), 高等教育出版社, 2003.

11. 陈天权 编著: **数学分析讲义** (第一、二、三册), 北京大学出版社, 2009.

12. 邓建平 编: **微积分I 和II**, 科学出版社, 2019.

13. Duhham, William 著(李伯民, 汪军, 张怀勇 译): **微积分的历程 – 从牛顿到勒贝格**, 人民邮电出版社, 2013.

14. 吉米多维奇 著(李荣涑, 李植 译): **数学分析习题集** (根据2010年俄文版翻译), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.

15. Kline, Morris 著(张理京, 张炎热, 江泽涵等 译): **古今数学思想** (第一、二、三册), 上海科学技术出版社, 2014.

16. 黎景辉, 赵春来 著: **模曲线导引** (第二版), 北京大学出版社, 2014.

17. 李傅山, 王培合 编著: **数学分析习题课讲义** (1、2、3), 北京大学出版社, 2018.

18. 李逸 编著: **数学分析讲义**, 上海交通大学数学分析课讲义(未出版), 2016.

19. 林源渠, 方企勤 编: **数学分析解题指南**, 北京大学出版社, 2003.

20. 梅加强 编著: **数学分析**, 高等教育出版社, 2015.

21. 裴礼文 编著: **数学分析中的典型问题与方法** (第二版), 高等教育出版社, 2015.

22. Riemann, Bernhard 著(李培廉 译): **黎曼全集** (第一、二卷), 高等教育出版社, 2016.

23. 谭琳 著: **Γ 函数札记**, 浙江大学出版社, 1997.

24. 汪林 著: **数学分析中的问题和反例**, 现代数学基础 **56**, 高等教育出版社, 2015.

25. Weir, D. Maurice; Hass, R. Joel; Giordano, R. Frank. *Thomas' calculus*, Eleventh Edition, (影印版, 上、下册), 高等教育出版社, 2016.

26. 徐森林, 薛春华 编著: **数学分析**, 清华出版社, 2005.

27. 杨小远, 孙玉泉, 薛玉梅, 杨卓琴 编著: **工科数学分析教程** (上、下册), 科学出版社, 2011.

28. 张福保, 薛金美, 潮小李 主编: **数学分析讲义**, 科学出版社, 2019.

29. 张筑生 编著: **数学分析新讲** (第一、二、三册), 北京大学出版社, 1990.

30. 周民强 编著: **数学分析习题演练** (第一、二、三册), 科学出版社, 2018.

31. 朱尧辰 编著: **数学分析例选通过范例学技巧**, 哈尔滨工业大学出版社, 2013.

第十六章　Fourier 级数

A more general value of b is easily formed by adding together several terms similar to the preceding, and we have

$$v = ae^{-x}\cos y + be^{-3x}\cos 3y + ce^{-5x}\cos 5y + de^{-7x}\cos 7y + \cdots.$$

It is evident that the function v denoted by $\phi(x,y)$ satisfies the equation $\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}=0$, and the condition $\phi(x,\pm\frac{1}{2}\pi)=0$. A third condition remains to be fulfilled, which is expressed thus, $\phi(0,y)=1$, and it is essential to remark that this result must exist when we give to y any value whatever included between $-\frac{1}{2}\pi$ and $+\frac{1}{2}\pi$.

—《The analytical theory of heat》, Joseph Fourier, 1822

§16.1　Fourier 级数展开

通常说的"**Fourier 定理**"是指, 当 $f(x)$ 属于某个合适的函数类时且存在某个三角级数

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n\ge1}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

在开区间 $(-\pi,\pi)$ 内收敛到 $f(x)$, 则

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Hardy (见参考文献) 在其专著中指出, 公式 a_n, b_n 的出现要早于Fourier 且根据Burkhardt 的论文这两个公式可追溯到Clairaut (1757). 其实Euler 早就对此很熟悉了, 在 1777 年利用逐项积分给出了一般化的推导.

du Bois-Reymond 和de la Vallée-Poussin 证明了"当 f 是有界的、可积的且三角级数在通常意义下收敛到 $f(x)$ 时", 则上述 Fourier 定理成立.

本节来给出这个定理的证明.

§16.1.1　平方可积函数空间和正交函数系

回顾记号 $R([a,b])$, 即闭区间 $[a,b]$ 上所有 (Riemann) 可积函数构成的集合. 为了研究方便我们引入记号

$$R^2([a,b]) := \left\{f\in R([a,b]) | f^2\in R([a,b])\right\}.$$

此时利用 Cauchy 不等式可知**内积(inner product)**

$$\langle f,g\rangle_{R^2([a,b])} := \int_a^b f(x)g(x)\,dx, \quad f,g\in R^2([a,b]),$$

在 $R^2([a,b])$ 上有定义. 则 $(R^2([a,b]),\langle\cdot,\cdot\rangle_{R^2([a,b])})$ 是向量空间.

定义16.1.1. (1) $f,g\in R^2([a,b])$ 称为**正交的(orthogonal)** 如果

$$\langle f,g\rangle_{L^2([a,b])}=0.$$

(2) 称函数列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}\subset R^2([a,b])$ 是**正交函数系(orthogonal system)** 如果

$$||f_n||^2_{R^2([a,b])}=0,\ \ \langle f_m,f_n\rangle_{R^2([a,b])}=0\ (m\neq n).$$

(3) 正交函数系 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}\subset R^2([a,b])$ 称为**规范正交函数系(normalized orthogonal system)** 如果进一步要求

$$\langle f_m,f_n\rangle_{R^2([a,b])}=\delta_{mn}.$$

例16.1.2. (1) 因为对任意 $m,n\in\mathbb{N}$,

$$\langle\sin mx,\sin nx\rangle_{R^2([-\pi,\pi])}=\langle\cos mx,\cos nx\rangle_{R^2([-\pi,\pi])}=\pi\delta_{mn}$$

和

$$\langle\sin mx,\cos nx\rangle_{R^2([-\pi,\pi])}=0$$

和

$$\langle 1,\sin nx\rangle_{R^2([-\pi,\pi])}=\langle 1,\cos nx\rangle_{R^2([-\pi,\pi])}=2\pi\delta_{n0},$$

故 $\{1,\cos nx,\sin nx\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是正交函数系和 $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是规范正交函数系.

(2) 根据 (1) 对任意 $T>0$

$$\left\{1,\cos\frac{\pi}{T}nx,\sin\frac{\pi}{T}nx\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

是 $[-T,T]$ 上的正交函数系从而

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2T}},\frac{1}{\sqrt{T}}\cos\frac{\pi}{T}nx,\frac{1}{\sqrt{T}}\sin\frac{\pi}{T}nx\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

是 $[-T,T]$ 上的规范正交函数系.

(3) 当 $a\neq b$ 时根据

$$\begin{aligned}\int_0^T\sin ax\sin bx\,dx &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin[(a-b)T]}{a-b}-\frac{\sin[(a+b)T]}{a+b}\right\}\\ &= \cos aT\sin bT\frac{b\tan aT-a\tan bT}{a^2-b^2}\end{aligned}$$

和

$$\int_0^T\sin^2 ax\,dx=\frac{T}{2}-\frac{1}{2}\int_0^T\cos 2ax\,dx=\begin{cases}0, & a=0,\\ \frac{T}{2}-\frac{\sin 2aT}{4a}, & a\neq 0.\end{cases}$$

因此, 若 $\{a_n\}_{n\ge1}$ 是严格递增数列且满足条件 $\tan a_nT = a_nc$ (这里 c 是任意给定的常数), 则 $\{\sin a_nx\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $[0,T]$ 上的正交函数系.

(4) Legendre 多项式

$$P_n(x) := \frac{1}{n!2^n}\left[(x^2-1)^n\right]^{(n)}, \quad n\ge1$$

构成了 $[-1,1]$ 上的正交函数系. 事实上, 因为所有次数 $k<n$ 的 Legendre 多项式都是 $1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$ 的线性组合, 所以只要证明 $\langle P_n(x),x^k\rangle_{R^2([-1,1])}=0$, $0\le k\le n-1$. 利用分部积分法得到

$$\int_{-1}^1 x^kP_n(x)dx = \frac{1}{n!2^n}\int_{-1}^1 (x^k)^{(k+1)}\left[(x^2-1)^n\right]^{(n-k-1)} = 0.$$

§16.1.2 2π 周期函数的 Fouorier 展开

考虑本章一开始提到的函数项级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n\ge1}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \quad x\in[-\pi,\pi]. \tag{16.1.1}$$

这里 a_0,a_n,b_n 都是常数. 回顾到 $e^{\sqrt{-1}x}=\cos x+\sqrt{-1}\sin x$. 因此 (16.1.1) 可写成复级数形式

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} A_ne^{\sqrt{-1}nx} \tag{16.1.2}$$

其中 $A_0=\frac{1}{2}a_0$, $A_n=\frac{1}{2}a_n-\frac{\sqrt{-1}}{2}b_n$, 和 $A_{-n}=\frac{1}{2}a_n+\frac{\sqrt{-1}}{2}b_n$.

如果级数 (16.1.1) 在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛到 $f(x)$, 则 $f\in C([-\pi,\pi])$ 且逐项积分得到

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \tag{16.1.3}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx. \tag{16.1.4}$$

从而得到

$$A_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-\sqrt{-1}nx}dx, \quad n\in\mathbb{Z}. \tag{16.1.5}$$

一般地, 对任意 $f\in R([-\pi,\pi])$ 定义其**Fourier 级数(Fourier series)** 为 (16.1.1) 其中系数 a_n,b_n 由 (16.1.3) 和 (16.1.4) 所给出, 或者形式上可记成

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n\ge1}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}A_ne^{\sqrt{-1}nx}, \quad x\in[-\pi,\pi]. \tag{16.1.6}$$

此时

$$S_N(f)(x) := \frac{a_0}{2}+\sum_{1\le n\le N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\sum_{-N\le n\le N}A_ne^{\sqrt{-1}nx}$$

称为 $f(x)$ 的**部分和 (partial sum)**.

例16.1.3. (1) 计算函数

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0,\\ 1, & 0\le x<\pi.\end{cases}$$

的 Fourier 级数. 这里我们按照周期 2π 将函数 $f(x)$ 作延拓, 从而得到 $f(\pi)=f(-\pi)=-1$. 根据 (16.1.3) 和 (16.1.4) 得到

$$a_n=0,\quad n\ge 0,$$

和

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx dx=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n],\quad n\ge 1.$$

故得到

$$f(x)\sim\frac{2}{\pi}\sum_{n\ge1}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin nx=\frac{4}{\pi}\sum_{k\ge0}\frac{1}{2k+1}\sin[(2k+1)x].$$

但是右边的函数项级数不一定等于右边的函数, 比如 $f(0)=1$, 但是右边函数项级数此时为 0. 但是我们发现

$$0=\frac{1+(-1)}{2}=\frac{f(0+)+f(0-)}{2}.$$

如果在不连续点作如下修改, 那左边函数值就等于右边的函数项级数值. 在之后的章节中我们会看到这是个普遍的现象.

(2) 计算函数 $f(x)=\frac{x}{2}$ 的在 $[-\pi,\pi)$ 上的 Fourier 级数. 同样我们也作周期为 2π 的延拓使得 $f(\pi)=f(-\pi)=-\pi/2$. 计算得到

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x}{2}\cos nx dx=0,\quad n\ge 0$$

和

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x}{2}\sin nx dx=\frac{(-1)^{n-1}}{n},\quad n\ge 1.$$

因此得到 Fourier 级数为

$$f(x)\sim\sum_{n\ge1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx.$$

(3) 计算函数 $f(x)=x^2$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上的 Fourier 级数. 同样我们也作周期为 2π 的延拓使得 $f(\pi)=f(-\pi)=\pi^2$, 且延拓后的函数时连续的. 计算得到

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx dx=0,\quad n\ge 1$$

和

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2$$

和

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\sin nx dx = \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi x^2 d\sin nx = \frac{4}{n^2\pi}\int_0^\pi x d\cos nx$$
$$= \frac{4}{n^2\pi}\pi(-1)^n - \frac{4}{n^2\pi}\int 6\pi_0\cos nx dx = \frac{4}{n^2}(-1)^n,\quad n\geq 1.$$

因此得到 Fourier 级数为

$$f(x)\sim\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}\cos nx.$$

(4) 计算函数 $f(x)=x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数. 此时

$$a_n=0,\quad n\geq 0$$

和

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx dx=\frac{-2}{n\pi}\int_0^\pi x d\cos nx=(-1)^{n-1}\frac{2}{n},\quad n\geq 1.$$

因此得到

$$f(x)\sim\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{2}{n}\sin(nx).$$

§16.1.3 正弦级数和余弦级数

上面例子促使我们引入正弦级数和余弦级数. 假设 $f\in R[(0,\pi)]$ 并考察其奇延拓 $f_{\mathbf{odd}}$

$$f_{\mathbf{odd}}(x):=-f(-x),\quad x\in(-\pi,0).$$

此时 $f_{\mathbf{odd}}$ 的系数“a_n”都是 0 而系数“b_n”为

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_{\mathbf{odd}}(x)\sin(nx)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)dx.$$

因此我们得到函数 $f(x)$ 的**Fourier 正弦级数 (Fourier sin series)**

$$f(x)\sim\sum_{n\geq 1}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)dx\right]\sin(nx). \tag{16.1.7}$$

同样我们可以考虑函数 $f(x)$ 的偶延拓 $f_{\mathbf{even}}$

$$f_{\mathbf{even}}(x):=f(-x),\quad x\in(-\pi,0).$$

并得到**Fourier 余弦级数 (Fourier cos series)**

$$f(x)\sim\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx+\sum_{n\geq 1}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)dx\right]\cos(nx). \tag{16.1.8}$$

例16.1.4. (1) 计算函数 $f(x)=x, 0<x<\pi$, 的正弦级数和余弦级数. 因为

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin(nx)dx=\frac{2}{n}(-1)^{n+1},\quad n\geq 1,$$

和

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(nx)dx=2\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi},$$

所以得到

$$f(x)\sim 2\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

和

$$f(x)\sim\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx.$$

(2) 计算函数 $f(x)=x(\pi-x), 0<x<\pi$, 的正弦级数和余弦级数. 计算可得

$$f(x)\sim\frac{8}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$$

和

$$f(x)\sim\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n\geq 1}\frac{\cos 2nx}{n^2}.$$

(3) 计算函数 $f(x)=x^2, 0<x<\pi$, 的正弦级数和余弦级数. 直接计算得到

$$x^2\sim 2\pi\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}\sin(nx)-\frac{8}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\sin[(2n-1)x]}{(2n-1)^3}$$

和

$$x^2\sim\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

如果**例16.1.4** 中的符号“$\sim$”改成“$=$”, 则取 $x=\pi$ 得到 (此时我们定义 $f(\pi)=\pi^2$)

$$\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\quad\Longrightarrow\quad\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

这就形式上给出了 Euler 公式的另一个证明.

§16.1.4 任意周期函数的 Fourier 展开

假设函数 $f(x)$ 在 $[-T,T]$ 上可积. 令 $x=\frac{T}{\pi}t$ 我们得到函数 $\varphi(t):=f(\frac{T}{\pi}t)$ 且 $t\in[-\pi,\pi]$. 由于

$$\varphi(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1}\Big[a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)\Big]$$

这里

$$a_n:=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos(nt)dt,\quad b_n:=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin(nt)dt,$$

我们得到

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi}{T}x\right)\right] \tag{16.1.9}$$

其中

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right)dx, \quad b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{T}x\right)dx. \tag{16.1.10}$$

例16.1.5. (1) 计算函数

$$f(x) = \begin{cases} C, & -T < x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq T \end{cases}$$

的 Fourier 级数. 事实上

$$a_0 \;=\; \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)dx \;=\; C,$$

和

$$a_n \;=\; \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{\pi n x}{T}dx \;=\; C\int_{-1}^{0}\cos(\pi n t)dt \;=\; 0, \quad n \geq 1,$$

和

$$b_n \;=\; \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\frac{\pi n x}{T}dx \;=\; C\int_{-1}^{0}\sin(\pi n t)dt \;=\; \frac{C}{n\pi}[1+(-1)^n], \quad n \geq 1.$$

因此

$$f(x) \sim \frac{C}{2} - \frac{2C}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n-1}\sin\left[\frac{(2n-1)\pi}{T}x\right].$$

(2) 计算函数 $f(x) = x\cos x$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, 的 Fourier 级数. 此时 $T = \pi/2$ 和 $a_n = 0$, 从而得到

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x\cos x\cdot\sin(2nx)dx = \frac{(-1)^{n-1}}{\pi}\frac{16n}{(4n^2-1)^2}.$$

故

$$x\cos x \sim \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{16n}{\pi(4n^2-1)^2}\sin(2nx).$$

§16.1.5 任意区间上函数的 Fourier 展开

现在假设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 定义

$$T := \frac{b-a}{2}, \quad \widetilde{f}(x) := f\left(x + \frac{b+a}{2}\right), \quad -T \leq x \leq T.$$

则得到 $[-T,T]$ 上的可积函数 $\widetilde{f}(x)$. 利用 (16.1.9) 得到

$$\widetilde{f}(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi}{T}x\right)\right]$$

其中

$$a_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\widetilde{f}(x)\cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right)dx=\frac{2}{b-a}\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}}f\left(x+\frac{b+a}{2}\right)\cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)dx$$

$$=\frac{2}{b-a}\int_{a}^{b}f(y)\cos\left(\frac{2n\pi y}{b-a}-\frac{b+a}{b-a}n\pi\right)dy\quad y:=x+\frac{b+a}{2}$$

和

$$b_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\widetilde{f}(x)\sin\left(\frac{n\pi}{T}x\right)dx=\frac{2}{b-a}\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}}f\left(x+\frac{b+a}{2}\right)\sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)dx$$

$$=\frac{2}{b-a}\int_{a}^{b}f(y)\sin\left(\frac{2n\pi y}{b-a}-\frac{b+a}{b-a}n\pi\right)dy\quad y:=x+\frac{b+a}{2}$$

暂时引入记号

$$\alpha_n:=\frac{2}{b-a}\int_{a}^{b}f(y)\cos\left(\frac{2n\pi y}{b-a}\right)dy,\quad \beta_n:=\frac{2}{b-a}\int_{a}^{b}f(y)\sin\left(\frac{2n\pi y}{b-a}\right)dy.$$

则得到

$$a_n=\cos\left(\frac{b+a}{b-a}n\pi\right)\alpha_n+\sin\left(\frac{b+a}{b-a}n\pi\right)\beta_n$$

和

$$b_n=\cos\left(\frac{b+a}{b-a}n\pi\right)\beta_n-\sin\left(\frac{b+a}{b-a}n\pi\right)\alpha_n$$

从而得到

$$f(y)\sim\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n\geq1}\left[\alpha_n\cos\left(\frac{2n\pi y}{b-a}\right)+\beta_n\sin\left(\frac{2n\pi y}{b-a}\right)\right].$$

即推出如下 Fourier 级数展开

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq1}\left[a_n\cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)+b_n\sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)\right]\tag{16.1.11}$$

这里

$$a_n := \frac{2}{b-a}\int_{a}^{b}f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)dx,\tag{16.1.12}$$

$$b_n := \frac{2}{b-a}\int_{a}^{b}f(x)\sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)dx.\tag{16.1.13}$$

特别地, 如果 $f\in R([0,2\pi])$ 则得到

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq1}\left[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right]\tag{16.1.14}$$

这里

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\cos(nx)dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\sin(nx)dx.\tag{16.1.15}$$

例16.1.6. 求函数

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1,\\ 1, & 1<x<2,\\ 3-x, & 2\le x\le 3,\end{cases}$$

的 Fourier 级数.

解: 在 (16.1.11) 中取 $a=0$ 和 $b=3$ 得到

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n\ge1}\left[a_n\cos\frac{2n\pi x}{3}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{3}\right]$$

这里

$$a_n=\frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\cos\frac{2n\pi x}{3}dx,\quad b_n=\frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\sin\frac{2n\pi x}{3}dx.$$

从而得到

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)dx = \frac{2}{3}\cdot 2 = \frac{4}{3},\\
a_n &= \frac{2}{3}\left[\int_0^1 x\cos\frac{2n\pi x}{3}dx+\int_1^2\cos\frac{2n\pi x}{3}dx+\int_2^3(3-x)\cos\frac{2n\pi x}{3}dx\right]\\
&= \frac{2}{3}\left[\left(\int_1^2+3\int_2^3\right)\cos\frac{2n\pi x}{3}dx+\left(\int_0^1-\int_2^3\right)x\cos\frac{2n\pi x}{3}dx\right]\\
&= \frac{1}{n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{3}\left[\Big|_1^2+3\Big|_2^3\right]+\frac{1}{n\pi}\left[x\sin\frac{2n\pi x}{3}+\frac{3}{2n\pi}\cos\frac{2n\pi x}{3}\right]\left[\Big|_0^1-\Big|_2^3\right]\\
&= \frac{1}{n\pi}\left[\sin\frac{4n\pi}{3}-\sin\frac{2n\pi}{3}-3\sin\frac{4n\pi}{3}\right]\\
&+\frac{1}{n\pi}\left[\sin\frac{2n\pi}{3}+\frac{3}{2n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3}-\frac{3}{2n\pi}-\frac{3}{2n\pi}+2\sin\frac{4n\pi}{3}+\frac{3}{2n\pi}\cos\frac{4n\pi}{3}\right]\\
&= \frac{3}{2n^2\pi^2}\left[\cos\frac{4n\pi}{3}+\cos\frac{2n\pi}{3}-2\right].
\end{aligned}$$

类似地得到

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{3}\left[\left(\int_1^2+3\int_2^3\right)\sin\frac{2n\pi x}{3}dx+\left(\int_0^1-\int_2^3\right)x\sin\frac{2n\pi x}{3}dx\right]\\
&= \frac{-1}{n\pi}\cos\frac{2n\pi x}{3}\left[\Big|_1^2+3\Big|_2^3\right]+\frac{-1}{n\pi}\left[x\cos\frac{2n\pi x}{3}-\frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{3}\right]\left[\Big|_0^1-\Big|_2^3\right]\\
&= \frac{-1}{n\pi}\left[\cos\frac{4n\pi}{3}-\cos\frac{2n\pi}{3}+3-3\cos\frac{4n\pi}{3}\right]\\
&+\frac{-1}{n\pi}\left[\cos\frac{2n\pi}{3}-\frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3}-3+2\cos\frac{4n\pi}{3}-\frac{3}{2n\pi}\sin\frac{4n\pi}{3}\right]\\
&= \frac{3}{2n^2\pi^2}\left[\sin\frac{4n\pi}{3}+\sin\frac{2n\pi}{3}\right] = 0.
\end{aligned}$$

因此最后得到

$$f(x)\sim\frac{2}{3}+\sum_{n\ge1}\frac{3}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n\cos\frac{n\pi}{3}-1\right]\cos\frac{2n\pi x}{3},\quad 0\le x\le 3.$$

§16.2 Fourier 级数的收敛判别法

如果函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上时可积的并记 $L := b-a$, 则 f 的**第 n 个 Fourier 系数(n-th Fourier coefficient)** 定义为

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{L}\int_a^b f(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}nx/L}dx, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{16.2.1}$$

此时 f 的 Fourier 级数可写成 (利用 (16.1.11))

$$f(x) \sim \sum_{n\geq 1}\hat{f}(n)e^{2\pi\sqrt{-1}nx/L}. \tag{16.2.2}$$

比如, 如果 $f \in R([-\pi,\pi])$ 则其第 n 个 Fourier 系数为

$$\hat{f}(n) = A_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-\sqrt{-1}nx}dx, \quad n \in \mathbb{Z},$$

从而 f 的 Fourier 级数为

$$f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n e^{\sqrt{-1}nx}.$$

如果 $f \in R([0,2\pi])$ 则得到

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-\sqrt{-1}nx}dx \quad \text{and} \quad f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)e^{\sqrt{-1}nx}. \tag{16.2.3}$$

若 f 是定义在圆 $\mathbb{S}^1$ 上的函数, 则我们可以把 f 看成是 $\mathbb{R}$ 上的 2π- 周期函数. 此时我们可以把函数 f 限制到任意长度为 2π 的区间上, 例如 $[0,2\pi]$ 或 $[-\pi,\pi]$, 从而计算出其 Fourier 系数. 观察到函数 f 的周期性表明计算得到的积分和起初选择的区间无关. 这就说明了圆上函数 f 的 Fourier 系数是有定义的.

如果 $g \in R([0,1])$ 则

$$\hat{g}(n) = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}nx}dx \quad 和 \quad g(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{g}(n)e^{2\pi\sqrt{-1}nx}. \tag{16.2.4}$$

这样只要 $f \in R([0,2\pi])$, 就有 $g(x) := f(2\pi x) \in R([0,1])$ 从而得到 f 的第 n 个 Fourier 系数等于 g 的第 n 个 Fourier 系数.

所谓的**三角级数(trigonometric series)** 是指如下的形式和

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi\sqrt{-1}nx/L}$$

这里 $c_n \in \mathbb{C}$. 如果三角级数中只包含有限多个非零项, 即 $c_n = 0$ 对任何充分大的 $|n|$ 都成立, 此时称为**三角多项式(trigonometric polynomial)**; 这个多项

式的**度(degree)** 定义为满足 $c_n \neq 0$ 的最大 $|n|$.

定义在 $[a,b]$ 上的函数 f 的 Fourier 级数的**第 N 个部分和(N-th partial sum)**是三角多项式且定义为

$$S_N(f)(x) := \sum_{-N\leq n\leq N} \hat{f}(n)e^{2\pi\sqrt{-1}nx/L}, \quad L := b-a. \tag{16.2.5}$$

注意到上述和是对称的, 这是因为 n 从 $-N$ 取到 N. 此时一个基本和自然的问题是

问题: *在什么意义下 $S_N(f)$ 收敛到 $f, N\to\infty$?*

我们首先要问 $S_N(f)$ 是否逐点收敛到 f. 即, 是否对每个 x 极限

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(x) = x$$

成立. 显然我们不可能期望这个结果对每个 x 都是对的, 这是因为我们可以改变可积函数在一点的值而不改变其 Fourier 系数. 如果 f 是连续的和周期的, 此时 $S_N(f)(x)$ 是否逐点收敛到 $f(x)$. 在很长时期内, 人们总是认为加上连续性和周期性, 逐点收敛应该是正确的. 但令人吃惊的是Du Bois-Reymond 证明了存在一个连续函数其 Fourier 级数在某点是发散的. 当 f 是连续可微时, 我们将看到此时 f 的 Fourier 级数一致收敛到 f.

当函数 f 是可积时, 我们将证明此时部分和 $S_N(f)$ 在 L^2 意义下收敛到 f, 即

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |S_N(f)(x) - f(x)|^2\, dx \to 0, \quad N\to +\infty.$$

在 1913 年, Lusin 提出了他著名的猜想: 如果 f 可积, 则除了一个零测度集外 f 的 Fourier 级数逐点收敛到 f. 这个猜想在 1966 年被Carleson 所解决.

例16.2.1. (Dirichlet 核) 第 N 个 Dirichlet 核(N-th Dirichlet kernel)定义为

$$D_N(x) := \sum_{-N\leq n\leq N} e^{\sqrt{-1}nx}, \quad -\pi\leq x\leq\pi. \tag{16.2.6}$$

若令 $\omega := e^{\sqrt{-1}x}$ 则得到

$$D_N(x) = \sum_{0\leq n\leq N}\omega^n + \sum_{-N\leq n\leq -1}\omega^n = \frac{1-\omega^{N+1}}{1-\omega} + \frac{\omega^{-N}-1}{1-\omega} = \frac{\omega^{-N}-\omega^{N+1}}{1-\omega}.$$

故

$$D_N(x) = \frac{\sin[(N+\frac{1}{2})x]}{\sin(x/2)}. \tag{16.2.7}$$

例16.2.2. (Poisson 核) Poisson 核(Poisson kernel) 定义为

$$P_r(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{\sqrt{-1}nx}, \quad -\pi\leq x\leq\pi, \quad 0\leq r<1. \tag{16.2.8}$$

注意到上述函数项级数是绝对和一致收敛的. 若令 $\omega = re^{\sqrt{-1}x}$ 我们得到

$$P_r(x) = \sum_{n\geq 0}\omega^n + \sum_{n\geq 1}\overline{\omega}^n = \frac{1}{1-\omega} + \frac{\overline{\omega}}{1-\overline{\omega}} = \frac{1-|\omega|^2}{|1-\omega|^2}.$$

即

$$P_r(x) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}. \tag{16.2.9}$$

例16.2.3. (Fejér 核) 第 N 个 Fejér 核(N-th Fejér kernel) 定义为

$$F_N(x) := \frac{1}{N}\sum_{0\leq n\leq N-1} D_n(x), \quad -\pi \leq x \leq \pi. \tag{16.2.10}$$

若令 $\omega = e^{\sqrt{-1}x}$ 我们得到

$$F_N = \frac{1}{N}\sum_{0\leq n\leq N-1}\frac{\omega^{-n}-\omega^{n+1}}{1-\omega} = \frac{1}{N}\frac{1}{1-\omega}\left[\frac{1-\omega^{-N}}{1-\omega} - \frac{\omega(1-\omega^N)}{1-\omega}\right].$$

即

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}, \quad x \in [\pi, \pi]. \tag{16.2.11}$$

§16.2.1 Fourier 级数的唯一性

假设 f 和 g 是定义在圆 $\mathbb{S}^1$ 上的可积函数且有相同的 Fourier 系数 $\hat{f}(n) = \hat{g}(n), n \in \mathbb{Z}$. 从而 $f-g$ 的 Fourier 系数为 0.

定理16.2.4. *假设 $f \in R(\mathbb{S}^1)$ 且 $\hat{f}(n) = 0$ 对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 都成立. 如果 f 在 x_0 处连续, 则 $f(x_0) = 0$.*

证: 假设定理对任意实值函数都成立. 下证对任意复值函数 f 也成立. 此时记

$$f(x) = u(x) + \sqrt{-1}v(x)$$

这里 u 和 v 都是实值函数. 如果定义 $\bar{f}(x) := \overline{f(x)}$, 则

$$u(x) = \frac{f(x)+\bar{f}(x)}{2}, \quad v(x) = \frac{f(x)-\bar{f}(x)}{2\sqrt{-1}},$$

并且由于 $\hat{\bar{f}}(x) = \overline{\hat{f}(-n)}$, 我们得到 u 和 v 的 Fourier 系数都消失, 故在连续点处有 $f = 0$.

不失一般性不妨假设 f 是定义在 $[-\pi,\pi]$ 上的实值函数, $x_0 = 0$, 且 $f(0) > 0$. 因为 f 在 0 处连续, 所以我们可以选择 $\delta \in (0,\pi/2]$ 使得 $f(x) > f(0)/2$ 只要 $|x| < \delta$ 成立. 令

$$p(x) := \epsilon + \cos x$$

这里选择 $\epsilon > 0$ 使得不等式 $|p(x)| < 1 - \frac{\epsilon}{2}$ 对任何 $\delta \le |x| \le \pi$ 都成立. 选择 $\eta \in (0, \delta)$ 使得 $p(x) > 1 + \frac{\epsilon}{2}$ 对任何 $|x| < \eta$ 都成立. 引入

$$p_k(x) := [p(x)]^k, \quad B := \max_{|x| \le \pi} |f(x)|.$$

由于 $\hat{f}(n) = 0$ 对任何 $n \in \mathbb{Z}$ 都成立, 故得到

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) p_k(x) dx$$

对任意 $k \in \mathbb{N}$ 都成立. 另一方面

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)p_k(x)dx &= \int_{|x|<\eta} f(x)p_k(x)dx + \int_{\eta \le |x| < \delta} f(x)p_k(x)dx \\ + \int_{|x| \ge \delta} f(x)p_k(x)dx &\ge 2\eta \frac{f(0)}{2}\left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)^k + 0 \\ - \left|\int_{|x| \ge \delta} f(x)p_k(x)dx\right| &\ge \eta f(0)\left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)^k - 2\pi B\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)^k.\end{aligned}$$

若令 $k \to \infty$ 就得到矛盾! 因此必有 $f(0) = 0$. □

推论16.2.5. 如果 $f \in C(\mathbb{S}^1)$ 且 $\hat{f}(n) = 0$ 对任何 $n \in \mathbb{N}$ 都成立, 则 $f \equiv 0$.

推论16.2.6. 如果 $f \in C(\mathbb{S}^1)$ 且 f 的 Fourier 级数是绝对收敛的, 则 f 的 Fourier 级数一致收敛到 f, 即

$$\lim_{N \to \infty} S_N(f)(x) = f(x)$$

关于 x 是一致收敛的.

证: 因为 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|$ 是绝对收敛的, 所以函数

$$g(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(x) e^{\sqrt{-1}nx}$$

在 $\mathbb{S}^1$ 上是连续的. 又因为 g 的 Fourier 系数就是 $\hat{f}(n)$, 所以根据**推论16.2.5** 可知在 $\mathbb{S}^1$ 上必有 $f \equiv g$. □

如果可以提高 f 的光滑性, 我们可以把**推论16.2.6** 中的假设条件 "f 的 Fourier 级数是绝对收敛" 去掉.

推论16.2.7. 如果 $f \in C^k(\mathbb{S}^1)$ $(k \ge 2)$, 则 $\hat{f}(n) = O(1/|n|^k)$ 当 $|n| \to \infty$ 时. 特别地, f 的 Fourier 级数是绝对和一致收敛到 f.

证: 不妨假设 $k = 2$ 并对 $n \ne 0$ 利用分部积分法. 计算

$$2\pi \hat{f}(n) = \int_0^{2\pi} f(x) e^{-\sqrt{-1}nx} dx$$

$$= \left[f(x) \frac{-e^{-\sqrt{-1}nx}}{\sqrt{-1}n} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{\sqrt{-1}n} \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-\sqrt{-1}nx} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}n} \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-\sqrt{-1}nx} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}n} \left[f'(x) \frac{-e^{-\sqrt{-1}nx}}{\sqrt{-1}n} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{(\sqrt{-1}n)^2} \int_0^{2\pi} f''(x) e^{-\sqrt{-1}nx} dx$$

$$= \frac{-1}{n^2} \int_0^{2\pi} f''(x) e^{-\sqrt{-1}nx} dx.$$

如果 $B := \max_{x \in \mathbf{S}^1} |f(x)|$, 则

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{C}{2\pi n^2}.$$

即 $\hat{f}(n) = O(1/n^2)$. □

§16.2.2 卷积

给定 $\mathbb{R}$ 上以 2π 为周期的可积函数 f, g, 定义它们的**卷积(convolution)** $f * g$ 为

$$f * g(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x-y) dy, \quad x \in [-\pi, \pi]. \tag{16.2.12}$$

根据定义 (16.2.12) 显然有 $f * g = g * f$. 观察到

$$(f * D_N)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\sum_{-N \leq n \leq N} e^{\sqrt{-1}n(x-y)} \right) dy$$

$$= \sum_{-N \leq n \leq N} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{\sqrt{-1}n(x-y)} \right) dy = \sum_{-N \leq n \leq N} \hat{f}(n) e^{\sqrt{-1}nx} = S_N(f)(x).$$

从而得到

$$f * D_N = S_N(f). \tag{16.2.13}$$

性质16.2.8. *假设 f, g, h 都是以 2π 为周期的可积函数. 则*

(i) $f * (g + h) = f * g + f * h$.

(ii) $(cf) * g = c(f * g) = f * (cg)$, $c \in \mathbb{C}$.

(iii) $(f * g) * h = f * (g * h)$.

(iv) $f * g$ 是连续的.

(v) $\widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n) \hat{g}(n)$.

证: 我们只给出 (iv) 和 (v) 的证明. 首先假设 f, g 都是连续的. 对任何 $n \in \mathbb{Z}$ 有

$$\begin{aligned}\widehat{f*g}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f*g)(x)e^{-\sqrt{-1}nx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(y)g(x-y)dy\right]e^{-\sqrt{-1}nx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)e^{-\sqrt{-1}ny}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x-y)e^{-\sqrt{-1}n(x-y)}dx\right]dy = \hat{f}(n)\hat{g}(n).\end{aligned}$$

由于 g 是连续周期函数, 因此 g 在 $\mathbb{R}$ 上是一致连续的. 故对任意 $\epsilon > 0$ 存在正数 $\delta > 0$ 满足 $|g(x) - g(y)| < \epsilon$ 只要 $|x - y| < \delta$. 利用恒等式

$$(f*g)(x_1) - (f*g)(x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)[g(x_1-y) - g(x_2-y)]dy,$$

得到

$$\begin{aligned}|(f*g)(x_1) - (f*g)(x_2)| &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(y)||g(x_1-y) - g(x_2-y)|dy \\ &\le \frac{\epsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(y)|dy \le \epsilon \cdot \max_{[-\pi,\pi]}|f|,\end{aligned}$$

只要 $|x_1 - x_2| < \delta$.

一般地, 当 f, g 仅是可积时, 我们要使用如下引理来证明 (iv).

引理16.2.9. *假设 f 在圆上可积且满足 $\sup_{[-\pi,\pi]}|f| \le B$. 则存在圆上的连续函数列 $\{f_k(x)\}_{k\ge1}$ 满足*

$$\sup_{[-\pi,\pi]}|f_k| \le B \quad \text{和} \quad \int_{-\pi}^{\pi}|f(x) - f_k(x)|dx \to 0 \quad \text{当 } k \to +\infty.$$

证: 假设 f 是实值的. 给定 $\epsilon > 0$ 我们选择区间 $[-\pi, \pi]$ 的一个划分

$$-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = \pi$$

使得 f 的 Darboux 上和与 Darboux 下和的差最多是 ϵ. 令 f^* 是如下定义的阶梯函数

$$f^*(x) := \sup_{y\in[x_{j-1},x_j]} f(y), \quad \text{如果 } x \in [x_{j-1}, x_j) \text{ 和 } 1 \le j \le N.$$

根据构造得到 $|f^*| \le B$ 和

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f^*(x) - f(x)|dx = \int_{-\pi}^{\pi}[f^*(x) - f(x)]dx < \epsilon.$$

现在我们对 f^* 做些修改使得修改后的函数是连续周期函数. 对充分小的 $\delta > 0$, 当 x 和分割点 $x_0, \cdots, x_N$ 的距离 $\ge \delta$, 我们定义 $\tilde{f}(x) := f^*(x)$. 在每个 x_j 的 δ- 邻域内, $j = 1, \cdots, N-1$, 定义 $\tilde{f}(x)$ 是线性函数且满足 $\tilde{f}(x_j \pm \delta) =$

$f^*(x_j \pm \delta)$. 在 $x_0 = -\pi$ 附近, $\tilde{f}$ 是线性的且满足 $\tilde{f}(-\pi) = 0$ 和 $\tilde{f}(-\pi+\delta) = f^*(-\pi+\delta)$. 同样在 $x_N = \pi$ 附近, $\tilde{f}$ 是线性的且满足 $\tilde{f}(\pi) = 0$ 和 $\tilde{f}(\pi-\delta) = f^*(\pi-\delta)$. 因为 $\tilde{f}(-\pi) = \tilde{f}(\pi)$, 我们可以把 $\tilde{f}$ 延拓成 $\mathbb{R}$ 上的连续函数和以 2π 为周期的函数. 另外, $|\tilde{f}| \le B$ 且 $\tilde{f}$ 与 f^* 仅在 N 个长度为 2δ 的区间上不同. 从而得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f^*(x) - \tilde{f}(x)|dx \le 4BN\delta.$$

故

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(x) - f(x)|dx \le \int_{-\pi}^{\pi} |f^*(x) - f(x)|dx + \int_{-\pi}^{\pi} |f^*(x) - \tilde{f}(x)|dx < 2\epsilon$$

只要 $\delta \in (0, \epsilon/4BN)$. 当 $2\epsilon = 1/k$ 时记 $f_k := \tilde{f}$ 如上构造, 则函数列 $\{f_k\}_{k\ge 1}$ 满足引理中的性质. □

应用**引理16.2.9** 到 f 和 g 我们得到 $\mathbb{S}^1$ 上的连续函数列 $\{f_k\}_{k\ge1}$ 和 $\{g_k\}_{k\ge1}$ 满足

$$\sup_{[-\pi,\pi]} |f_k| \le \sup_{[-\pi,\pi]} |f|, \quad \sup_{[-\pi,\pi]} |g_k| \le \sup_{[-\pi,\pi]} |g|$$

和

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_k(x)|dx \to 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - g_k(x)|dx \to 0, \quad k \to +\infty.$$

根据

$$f * g - f_k * g_k = (f - f_k) * g_k + f_k * (g - g_k),$$

和

$$\begin{aligned} |[(f-f_k)*g](x)| &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y) - f_k(x-y)||g(y)|dy \\ &\le \frac{1}{2\pi}\sup_{[-\pi,\pi]}|g| \int_{-\pi}^{\pi} |f(y) - f_k(y)|dy \ \to \ 0, \quad k \to +\infty, \end{aligned}$$

我们推出 $(f - f_k) * g \to 0$ 关于 x 是一致收敛的. 类似地, $f_k * (g - g_k) \to 0$ 一致地, 从而 $f_k * g_k$ 一致收敛到 $f * g$. 因为每个 $f_k * g_k$ 都是连续的, 所以 $f * g$ 也是连续的.

对每个固定的 $n \in \mathbb{Z}$, 必有 $\widehat{f_k * g_k}(n) \to \widehat{f * g}(n)$, 这是因为 $f_k * g_k$ 一致收敛到 $f * g$. 另一方面, $\widehat{f_k * g_k}(n) = \hat{f}_k(n)\hat{g}_k(n)$. 为了证明 $\widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$, 我们必须证明 $\hat{f}_k(n) \to \hat{f}(n)$ 和 $\hat{g}_k(n) \to \hat{g}(n)$, $k \to \infty$. 因为

$$|\hat{f}(n) - \hat{f}_k(n)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f_k(x)]e^{-\sqrt{-1}nx}dx\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_k(x)|dx,$$

我们得到 $\hat{f}_k(n) \to \hat{f}(n)$, $n \to \infty$. □

练习16.2.10. 证明性质**16.2.8** 中的其它条目.

§16.2.3 * 好核

圆上的核列 $\{K_n(x)\}_{n\geq 1}$ 称为**好核列(family of good kernels)** 如果满足如下性质:

(a) 对所有 $n\geq 1$,
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(x)dx=1.$$

(b) 存在 $M>0$ 使得对任意 $n\geq 1$ 都有
$$\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(x)|dx\leq M$$

(c) 对每个 $\delta>0$, 有
$$\int_{\delta\leq|x|\leq\pi}|K_n(x)|dx\to 0,\quad n\to+\infty.$$

例16.2.11. 令 $D_N(x)$ 是第 N 个 Dirichlet 核. 则 $\{D_N\}_{N\geq 1}$ 不是一个好核列. 对任意 $N\geq 1$ 有
$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(x)dx &= \sum_{-N\leq k\leq N,\ k\neq 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\sqrt{-1}kx}dx+1\\ &= \sum_{-N\leq k\leq N,\ k\neq 0}\frac{\sin(k\pi)}{k\pi}+1 = 1.\end{aligned}$$

令
$$L_N:=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_N(x)|dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin[(N+\frac{1}{2})x]}{\sin\frac{x}{2}}\right|dx.$$

对任意 $x\in[-\pi/2,\pi/2]$, 我们有 $\frac{2}{\pi}x\leq\sin x\leq x$. 因此
$$\begin{aligned}L_N &\geq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin[(N+\frac{1}{2})x]|}{|x|}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{N\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin\theta|}{\theta}d\theta\\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{0\leq k\leq N-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin\theta|}{\theta}d\theta+\int_{N\pi}^{N\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin\theta|}{\theta}d\theta\\ &\geq \frac{2}{\pi}\sum_{0\leq k\leq N-1}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin\theta|d\theta+\frac{2}{\pi(2N+1)}\int_{N\pi}^{N\pi+\frac{\pi}{2}}|\sin\theta|d\theta\\ &= \frac{4}{\pi^2}\sum_{1\leq k\leq N}\frac{1}{k}+\frac{4}{\pi^2}\frac{\pi}{2N+1}.\end{aligned}$$

因为数列 $\{a_N\}_{N\geq 1}$, 其中 $a_N=\sum_{1\leq k\leq N}\frac{1}{k}-\ln N$, 是单调递减的, 所以
$$\sum_{1\leq k\leq N}\geq\ln N+\gamma,$$

这里 γ 是 Euler 常数. 作为推论得到

$$L_N \geq \frac{4}{\pi^2}\ln N + \frac{4}{\pi^2}\left(\gamma + \frac{\pi}{2N+1}\right). \tag{16.2.14}$$

故 $\{D_N\}_{N\geq 1}$ 不是好核列.

练习16.2.12. 试着证明 $L_N \leq a\ln N + b_N$ 并求出 a 和 b_N.

回顾 §14.4 中的记号和定义. 考虑复级数 $c_0 + c_1 + c_2 + \cdots = \sum_{k\geq 0} c_k$. 定义第 n 个部分和 s_n 为

$$s_n := \sum_{0\leq k\leq n} c_k$$

并称该级数收敛到 s 如果 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. 数列 $\{s_k\}_{k\geq 0}$ 的**第 N 个 Cesàro 平均(N-th Cesàro mean)** 或级数 $\sum_{k\geq 0} c_k$ 的**第 N 个 Cesàro 和(N-th Cesàro sum)** 定义为

$$\sigma_N := \frac{1}{N}\sum_{0\leq k\leq N-1} s_k. \tag{16.2.15}$$

称级数 $\sum_{k\geq 0} c_k$ 是**Cesàro 可求和(Cesàro summable)** 到 σ 如果 σ_N 收敛到 σ 当 $N\to\infty$ 时.

(i) 级数 $\sum_{k\geq 0}(-1)^k$ 是 Cesàro 可求和到 $1/2$.

(ii) 如果级数 $\sum_{k\geq 0} s_k$ 收敛到 s, 则其是 Casàro 可求和到同一极限 s.

(iii) **(Tauber 定理)** 如果级数 $\sum_{n\geq 0} c_n$ 是 Cesàro 可求和到 σ 且 $c_n = o(1/n)$, 则 $\sum_{n\geq 0} c_n$ 收敛到 σ.

练习16.2.13. 证明上面的 Tauber 定理.

如果 $f \in R(\mathbf{S}^1)$, 则

$$S_N(f) = f * D_N.$$

我们可以定义 Fourier 级数的**第 N 个 Cesàro 平均(N-th Cesàro mean)**

$$\sigma_N(f) := \frac{S_0(f) + S_1(f) + \cdots + S_{N-1}(f)}{N} = f * F_N, \tag{16.2.16}$$

这里 $F_N(x)$ 是**第 N 个 Fejér 核(N-th Fejér kernel)**

$$F_N(x) = \frac{D_0(x) + D_1(x) + \cdots + D_{N-1}(x)}{N} = \frac{1}{N}\frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}. \tag{16.2.17}$$

练习16.2.14. 证明 $\{F_N\}_{N\geq 1}$ 是好核列.

复级数 $\sum_{k\geq 0} c_k$ 称为**Abel 可求和的(Abel summable)** 到 s 如果对每个 $r \in [0,1)$ 幂级数

$$A(r) := \sum_{k\geq 0} c_k r^k$$

都收敛, 且 $\lim_{r\to 1} A(r) = s$. 把 $A(r)$ 称为级数 $\sum_{k\geq 0} c_k$ 的**Abel 平均(Abel means)**.

(i) 级数 $\sum_{k\geq 0}(-1)^k(k+1)$ 是 Abel 可求和到 $1/4$.

(ii) 如果级数是 Cesàro 可求和到 σ 则其也是 Abel 可求和到 σ.

(iii) **(Tauber 定理)** 如果级数 $\sum_{n\geq 0}c_n$ 是 Abel 可求和到 σ 且 $c_n = o(1/n)$, 则 $\sum_{n\geq 0}c_n$ 收敛到 σ.

练习16.2.15. 证明以上的 Tauber 定理. (**提示:** 对 $A(r)=\sum_{n\geq 0}c_nr^n$ 和 $0<r<1$, 我们有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{0\leq n\leq N}c_n - f(x)\right| &= \left|\sum_{1\leq n\leq N}c_n(1-r^n) - \sum_{n\geq N+1}c_nr^n\right|\\ &\leq (1-x)\sum_{1\leq n\leq N}|nc_n| + \frac{1}{N(1-x)}\sup_{n>N}|nc_n|.\end{aligned}$$

令 $\sum_{0\leq n\leq N}c_n = s_N$ 和 $x=1-1/N$ 得到

$$\left|s_N - A\left(1-\frac{1}{N}\right)\right| \leq \frac{1}{N}\sum_{1\leq n\leq N}|nc_n| + \sup_{n>N}|nc_n|.$$

如果 $nc_n\to 0$ 和 $A(r)\to s$, 就有 $s_N\to s$.)

Tauber 在 1897 年导出了他的"第二定理", 即给出了 Abel 可求和级数是收敛的充要条件.

定理16.2.16. (Tauber, 1897) Abel 可求和级数 $\sum_{n\geq 0}c_n$ 是收敛的 $\Longleftrightarrow$

$$\frac{1}{n}\sum_{1\leq k\leq n}ka_k = s_n - \frac{1}{n}\sum_{0\leq k\leq n-1}s_k \to 0,\quad n\to+\infty.$$

练习16.2.17. 本练习来证明如下关系:

$$\text{收敛} \Longrightarrow \text{Cesàro 可求和} \Longrightarrow \text{Abel 可求和}, \tag{16.2.18}$$

但是反之都不对, 比如考察级数 $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$ 和 $\sum_{n\geq 0}(-1)^{n-1}n$.

如果 $f\in R(\mathbb{S}^1)$ 且 $f(x)\sim\sum_{n\in\mathbb{Z}}A_ne^{\sqrt{-1}nx}$, 则我们来定义 f 的**Abel 平均(Abel means)** 为

$$A_r(f)(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}}r^{|n|}A_ne^{\sqrt{-1}nx}. \tag{16.2.19}$$

由于 A_n 是一致有界的, 因此对每个 $r\in[0,1)$ 函数项级数 $A_r(f)$ 都是绝对一致收敛的. 注意到

$$A_r(f) = f * P_r \tag{16.2.20}$$

这里 $P_r(x)$ 是**Poisson 核(Poisson kernel)** 并根据如下定义

$$P_r(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}}r^{|n|}e^{\sqrt{-1}nx} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2},\quad r\in[0,1). \tag{16.2.21}$$

练习16.2.18. 证明 $\{P_r\}_{r\in[0,1)}$ 是好核列. 即证明

(a) 对每个 $r\in[0,1)$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(x)dx=1.$$

(b) 存在 $M>0$ 使得对所有 $r\in[0,1)$ 都有

$$\int_{-\pi}^{\pi}|P_r(x)|dx\le M$$

(c) 对每个 $\delta>0$ 有

$$\int_{\delta\le|x|\le\pi}|P_r(x)|dx\to 0,\quad r\to 1.$$

定理16.2.19. 假设 $\{K_n\}_{n\ge1}$ 是好核列且 $f\in R(\mathbb{S}^1)$. 则

$$\lim_{n\to\infty}(f*K_n)(x)=f(x)$$

只要 f 在 x 处连续. 特别地, 如果 f 是处处连续, 则上述极限是一致收敛的.

证: 根据好核的定义得到

$$\begin{aligned}f*K_n(x)-f(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(y)K_n(x-y)-f(x)K_n(y)]dy\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(y)[f(x-y)-f(x)]dy\end{aligned}$$

对任何 x 都成立. f 在 x 处的连续性推出对任意 $\epsilon>0$ 存在正数 $\delta>0$ 满足 $|f(x-y)-f(x)|<\epsilon$ 只要 $|y|<\delta$. 因此

$$|f*K_n(x)-f(x)|\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(y)||f(x-y)-f(x)|dy$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\le|y|\le\pi}|K_n(y)||f(x-y)-f(x)|dy+\frac{1}{2\pi}\int_{|y|<\delta}|K_n(y)||f(x-y)-f(x)|dy$$

$$\le\frac{\epsilon}{2\pi}\int_{|y|<\delta}|K_n(y)|dy+\frac{1}{2\pi}\cdot 2\max_{[-\pi,\pi]}|f|\cdot\int_{\delta\le|y|\le\pi}|K_n(y)|dy$$

$$\le\frac{\epsilon}{2\pi}M+\frac{1}{\pi}\max_{[-\pi,\pi]}|f|\cdot\int_{\delta\le|y|\le\pi}|K_n(y)|dy.$$

令 $n\to\infty$ 得到

$$\limsup_{n\to\infty}|f*K_n(x)-f(x)|\le\frac{\epsilon M}{2\pi},$$

即 $f*K_n(x)\to f(x)$ 只要 f 在 x 处连续. □

推论16.2.20. (1) 如果 f 在 $\mathbb{S}^1$ 上可积, 则 f 的 Fourier 级数在 f 的每个连续点上是 Cesaro 可求和到 f. 更进一步, 如果 f 在 $\mathbb{S}^1$ 上是连续的则 f 的 Fourier 级数是一致 Cesaro 可求和到 f.

(2) 如果 f 在 $\mathbb{S}^1$ 上可积, 则 f 的 Fourier 级数在 f 的每个连续点上是 Abel 可求和到 f. 更进一步, 如果 f 在 $\mathbb{S}^1$ 上是连续的则 f 的 Fourier 级数是一致 Abel 可求和到 f.

在**练习16.2.13** 和**练习16.2.15** 我们假设 $nc_n \to 0$. Hardy 问 Tauber 定理中上述条件可否减弱为数列 $\{nc_n\}_{n\geq 1}$ 是有界的. 根据**练习16.2.15** 中的提示, 我们看到数列 $\{nc_n\}_{n\geq 0}$ 的有界性并结合级数 $\sum_{n\geq 0} c_n$ 的 Abel 可求和, 推出数列 $\{s_N\}_{N\geq 0}$ 是有界的.

定理16.2.21. (Hardy-Landau, 1910) 如果级数 $\sum_{n\geq 0} c_n$ 是Cesaro 可求的且要么 $|nc_n| \leq C$ (Hardy) 或者要么 $nc_n \geq -C$ (Landau), 则级数 $\sum_{n\geq 0} c_n$ 收敛.

证: 下面证明是属于Kloosterman (1940). 不妨假设 c_n 是实数并记

$$s_n = c_0 + \cdots + c_n =: c_n^{(-1)}, \quad c_n^{(-2)} := c_0^{(-1)} + \cdots + c_n^{(-1)}.$$

对每个整数 $h > 0$ 和 $n < k \leq n+h$ 得到

$$\begin{aligned} c_{n+h}^{(-2)} &= c_n^{(-2)} + \left[c_{n+1}^{(-1)} + \cdots + c_{n+h}^{(-1)}\right] \\ &= c_n^{(-2)} + hc_n^{(-1)} + [hc_{n+1} + (h-1)c_{n+2} + \cdots + c_{n+h}]; \end{aligned}$$

最后的有限和是不会超过 $\frac{h(h+1)}{2} \max_{n+1\leq k\leq n+h} c_k$. 故我们得到离散 Taylor 公式:

$$c_{n+h}^{(-2)} = c_n^{(-2)} + hc_n^{(-1)} + \frac{h(h+1)}{2} c_\xi^*,$$

这里 c_ξ^* 是介于 $\min_{n<k\leq n+h} c_k$ 和 $\max_{n<k\leq n+h} c_k$ 之间的数.

不妨假设级数 $\sum_{n\geq 0} c_n$ 是 Cesàro 可求和到 0 从而得到 $c_n^{(-2)}/n \to 0$ 当 $n \to \infty$. 不等式 $nc_n \geq -C$ $(C > 0)$ 和 $|c_n^{(-2)}| \leq n\epsilon$ ($\epsilon > 0$ 充分小和 n 充分大), 推出对 $h \approx 2n\sqrt{\epsilon/C}$ 有

$$s_n = \frac{c_{n+h}^{(-2)} - c_n^{(-2)}}{h} - \frac{h(h+1)}{2} c_\xi^* \leq \frac{2n+h}{h}\epsilon + C\frac{h+1}{2n} < 3\sqrt{C\epsilon}.$$

对它方向上的估计我们可取 $h \approx -2n\sqrt{\epsilon/C}$; 当 $h < 0$ 时离散 Taylor 公式需要作些调整. 现在可得出 $s_n \to 0$ 当 $n \to \infty$ 时. □

Hardy 利用**定理16.2.21** 得出下面关于 Fourier 级数的结论:

(i) 假设 f 是以 2π 为周期的连续函数且其 Fourier 系数满足 $\hat{f}(n) = O(1/|n|)$ (根据**推论16.2.7** 的证明我们得到 $\hat{f}(n) = O(1/|n|)$ 对任何 $f \in C^1(\mathbb{S}^1)$ 都成立). 则 f 的 Fourier 级数逐点收敛到 f.

(ii) 假设 f 是周期函数且在周期上的变差是有界的. 则 Fourier 系数 $\hat{f}(n)$ 满足 $O(1/|n|)$, 因此 f 的 Fourier 级数在每点 x 处收敛到 $\frac{1}{2}[f(x-)+f(x+)]$.

定理16.2.22. (1) **(Littlewood, 1911)** 如果级数 $\sum_{n\geq 0} c_n$ 是 Abel 可求和的且

$$|nc_n| \leq C,$$

则 $\sum_{n\geq 0} c_n$ 是收敛的.

(2) **(Hardy-Littlewood, 1914)** 如果级数 $\sum_{n\geq 0} c_n$ 是 Abel 可求和的且

$$nc_n \geq -C,$$

则 $\sum_{n\geq 0} c_n$ 是收敛的.

§16.2.4 Riemann 引理

If $f \in C^1(\mathbb{S}^1)$, 根据**推论16.2.7** 我们得到 $\hat{f}(n) = O(1/|n|)$. 一般地我们有如下**Riemann 定理**, 这是Riemann 论文《Über die Darstellbarkeit einer Function durch einer trigonometrische Reihe》中的基本定理.

定理16.2.23. (Riemann, 1854) 假设 ψ 在 $[a,b]$ 上可积的或者在瑕积分意义下是绝对可积的, 则

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b \psi(x)\sin(px)dx = \lim_{p\to\infty}\int_a^b \psi(x)\cos(px)dx = 0. \tag{16.2.22}$$

证: (1) 首先假设 $\psi \in R([a,b])$. 此时 ψ 必有界. 对任意 $\epsilon > 0$ 总存在关于 $[a,b]$ 的一个划分 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 满足

$$\sum_{1\leq i\leq n}\omega_i\Delta x_i < \frac{\epsilon}{2}, \quad \Delta x_i := x_i - x_{i-1}, \quad \omega_i := M_i - m_i,$$

这里 $m_i := \min_{[x_{i-1},x_i]}\psi$ 和 $M_i := \max_{[x_{i-1},x_i]}\psi$. 计算得到

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \psi(x)\sin(px)dx\right| &= \left|\sum_{1\leq i\leq n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left\{[\psi(x)-m_i]\sin(px)+m_i\sin(px)\right\}dx\right| \\ &\leq \sum_{1\leq i\leq n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|\psi(x)-m_i||\sin(px)|dx + \sum_{1\leq i\leq n}|m_i|\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\sin(px)dx\right| \\ &\leq \sum_{1\leq i\leq n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|\psi(x)-m_i|dx + \frac{2}{p}\sum_{1\leq i\leq n}|m_i| \\ &\leq \sum_{1\leq i\leq n}\omega_i\Delta x_i + \frac{2}{p}\sum_{1\leq i\leq n}|m_i| \ \leq \ \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} \ = \ \epsilon,\end{aligned}$$

只要 $p \geq \frac{4}{\epsilon}\sum_{1\leq i\leq n}|m_i|$.

(2) 假设函数 ψ 的唯一瑕点是 b. 根据假设条件得到对任意 $\epsilon > 0$ 存在正数 $\delta > 0$ 使得当 $\eta \in (0, \delta)$ 时有

$$\int_{b-\eta}^{b} |\psi(x)| dx < \frac{\epsilon}{2}.$$

固定上面的 η, 由于 $\psi(x) \in R([a, b-\eta])$, 利用 (1) 存在正数 $P > 0$ 使得

$$\left| \int_{a}^{b-\eta} \psi(x) \sin px dx \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

只要 $p > P$. 从而推出

$$\begin{aligned} \left| \int_{a}^{b} \psi(x) \sin px dx \right| &\le \left| \int_{a}^{b-\eta} \psi(x) \sin px dx \right| + \int_{b-\eta}^{b} |\psi(x) \sin px| dx \\ &\le \frac{\epsilon}{2} + \int_{b-\eta}^{b} |\psi(x)| dx \ \le \ \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \ = \ \epsilon. \ \square \end{aligned}$$

§16.2.5 Fourier 级数的逐点收敛定理

回顾

$$S_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1 \le k \le n} \Big[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \Big],$$

和

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

这里 f 是以 2π 为周期的周期函数. 则可计算得到

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{1 \le k \le n} \cos n(t-x) \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(t-x)}{\sin \frac{t-x}{2}} dt \qquad (16.2.23) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} dt. \end{aligned}$$

给定函数 $\sigma(x)$ 我们就得到

$$S_n(f)(x) - \sigma(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left[\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - \sigma(x) \right] \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} dt. \quad (16.2.24)$$

推论16.2.24. (1) **(局部性原理; Riemann, 1854)** 如果 f 是以 2π 为周期的可积 (或者在瑕积分意义下是绝对可积) 函数, 则函数列 $\{S_n(f)(x)\}_{n \ge 1}$ 的收敛性只依赖于限制函数 $f|_{(x-\delta, x+\delta)}$, 这里 $\delta > 0$ 是充分小的数.

(2) 如果 ψ 在 $[0, \delta]$ 上是可积的或者在瑕积分意义下是绝对可积的, 则

$$\lim_{n \to \infty} \int_{0}^{\delta} \psi(x) \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \lim_{n \to \infty} \int_{0}^{\delta} \psi(t) \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{t} dt.$$

(3) **练习16.2.12** 可改进为 $L_N = \frac{4}{\pi^2} \ln N + O(1)$ 当 $N \to +\infty$ 时.

证: (1) 对任给 $\delta > 0$ 有 $\sin(t/2) > C_\delta$, 这里存在 $C_\delta > 0$ 和任意 $\delta \le t \le \pi$. 利用**定理16.2.23** 我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_\delta^\pi [f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}dt = 0.$$

所以根据 (16.2.23), $S_n(f)(x)$ 的手里性指依赖于 $f|_{(x-\delta,x+\delta)}$.

(2) 因为 $2\sin\frac{t}{2}\sim t$ 当 $t\to 0$ 时, 我们可以考虑函数

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}, & 0 < t \le \delta, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

显然它在 $[0,\delta]$ 上时连续的. 从而根据**定理16.2.23** 得证.

(3) 可由 (2) 直接推出. $\square$

作为**推论16.2.24** 的直接结果是

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{t}dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

对任意 $t\in[0,\pi]$ 有

$$\frac{1}{2}+\cos t+\cos(2x)+\cdots+\cos(nt) = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

在 $[0,\pi]$ 上积分得到

$$\int_0^\pi \frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}dt = \frac{\pi}{2}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

给定区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 和定义在 D 上的函数 f. 称 $f\in C^{0,\alpha}(D)$ ($C^{0,\alpha}(D)$ 称为α 阶 **Hölder 空间(Hölder's space with order α)**) 如果存在 $\alpha\in(0,1]$ 和 $L\ge 0$ 使得

$$|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})| \le L|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^\alpha$$

对任何 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in D$ 都成立. 记 $\mathbf{Lip}(D) := C^{0,1}(D)$. 观察到

$$C^1(D) \subsetneq \mathbf{Lip}(D) \subsetneq C(D). \tag{16.2.25}$$

练习16.2.25. 验证 (16.2.25).

函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 称为**分段单调(piecewise monotone)** 如果存在划分 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ 使得 $f|_{(x_{i-1},x_i)}$, $1\le i\le N$, 是单调的.

引理16.2.26. (Dirichlet 引理) 假设 ψ 在 $[0,\delta]$ 上是单调的, 则

$$\lim_{p\to\infty}\int_0^\delta \frac{\psi(t)-\psi(0+)}{t}\sin(pt)dt=0.$$

证: 不妨假设 ψ 是单调递增的. 对任意 $\epsilon>0$ 存在正数 $\eta\in(0,\delta)$ 使得 $0\le\psi(t)-\psi(0+)<\epsilon$ 对任何 $t\in(0,\eta]$ 都成立. 计算得到

$$\begin{aligned}
&\int_0^\delta \frac{\psi(t)-\psi(0+)}{t}\sin(pt)dt\\
=\ &\int_0^\eta \frac{\psi(t)-\psi(0+)}{t}\sin(pt)dt+\int_\eta^\delta \frac{\psi(t)-\psi(0+)}{t}\sin(pt)dt\\
=\ &[\psi(\eta)-\psi(0+)]\int_\xi^\eta \frac{\sin(pt)}{t}dt+\int_\eta^\delta \frac{\psi(t)-\psi(0+)}{t}\sin(pt)dt\\
\le\ &\epsilon\left|\int_{p\xi}^{p\eta}\frac{\sin u}{u}du\right|+\int_\eta^\delta \frac{\psi(t)-\psi(0+)}{t}\sin(pt)dt
\end{aligned}$$

这里存在 $\xi\in[0,\eta]$. By (15.2.11), 存在 $p_1>0$ 使得

$$\left|\int_{p\xi}^{p\eta}\frac{\sin u}{u}du\right|<1$$

对任何 $p\ge p_1$ 都成立. 由于函数 $[\psi(t)-\psi(0+)]/t$ 是可积的, 因

此从**定理16.2.23** 得到

$$\left|\int_\eta^\delta \frac{\psi(t)-\psi(0+)}{t}\sin(pt)dt\right|<\epsilon$$

只要 $p\ge p_2$, 这里 p_2 是充分大的数. 故

$$\left|\int_0^\delta \frac{\psi(t)-\psi(0+)}{t}\sin(pt)dt\right|<2\epsilon$$

只要 $p\ge\max(p_1,p_2)$. □

假设 $x\in[a,b]$ 是函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 的连续点或第一类间断点. 称 $f\in C^{0,\alpha}(x)$ 如果 $|f(x\pm t)-f(x\pm)|\le Lt^\alpha$ 对所有充分小的 $t>0$ 都成立, 这里 $L>0$ 和 $\alpha\in(0,1]$.

定理16.2.27. 假设函数 f 是以 2π 为周期的可积(或在瑕积分意义下是绝对可积)函数. 如果 f 满足

(1) **(Dirichlet-Jordan 判别法)** f 在某个区间 $(x-\delta,x+\delta)$ 上是分段单调, 或

(2) **(Dini-Lipschitz 判别法)** 对某个 $\alpha\in(0,1]$ 有 $f\in C^{0,\alpha}(x)$,

则 f 的 Fourier 级数在每点 x 都收敛到 $[f(x+)+f(x-)]/2$, 即,

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n\ge1}\Big[a_n\sin(nx)+b_n\sin(nx)\Big]=\frac{f(x+)+f(x-)}{2}. \tag{16.2.26}$$

证: (1) 从**引理16.2.26** 推出

$$\int_0^\delta \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\sin(pt)dt \to 0, \quad \int_0^\delta \frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}\sin(pt)dt \to 0.$$

利用 (16.2.24), **推论16.2.24**, 和**定理16.2.23**, 得到

$$\begin{aligned} & S_n(f)(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \\ = & \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)]\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}dt \\ \sim & \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left[\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}+\frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}\right]\sin\frac{2n+1}{2}t\,dt \end{aligned}$$

但是这个积分是趋于零的.

(2) 此时我们有 $|f(x\pm t)-f(x\pm 0)|/t \le L/t^{1-\alpha}$. 故

$$\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)-f(x+)-f(x-)}{t}\right| \le \frac{2L}{t^{1-\alpha}}.$$

即左边是可积的从而再次根据**定理16.2.23** 得证. □

定理16.2.27 最早出现在Dirichlet 1829 年的论文《Sur la convergence des séries trigonométriques》中.

例16.2.28. 函数 $f(x)=x^2, -\pi \le x \le \pi$, 的 Fourier 余弦级数为

$$f_{\mathbf{even}}(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\ge1}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

利用**定理16.2.27** 得到

$$\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{16.2.27}$$

例16.2.29. 函数 $f(x)=x, -\pi \le x \le \pi$, 的 Fourier 正弦级数为

$$f_{\mathbf{odd}}(x) \sim \sum_{n\ge1}(-1)^{n-1}\frac{2}{n}\sin(nx).$$

利用**定理16.2.27** 得到

$$\sum_{n\ge1}(-1)^{n-1}\frac{2}{n}\sin(nx) = \begin{cases} x, & -\pi < x < \pi, \\ 0, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

例16.2.30. 利用**定理16.2.27** 得到函数 $f(x)=\cos(ax), -\pi \le x \le \pi$, 的 Fourier 级数为

$$\frac{\pi}{2}\frac{\cos(ax)}{\sin(a\pi)} = \frac{1}{2a} + \sum_{n\ge1}(-1)^n\frac{a\cos(nx)}{a^2-n^2} \tag{16.2.28}$$

这里 $\alpha \notin \mathbf{Z}$.

作为应用我们给出**例15.2.14** (2) 的一个初等证明，这个证明是属于N. I. Lobatshewski. 在 (16.2.28) 中取 $x=0$ 得到

$$\frac{1}{\sin(a\pi)}=\frac{1}{a\pi}+2\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n a\pi}{(a\pi)^2-(n\pi)^2}$$

接下来令 $=a\pi$ 得到

$$\frac{1}{\sin t}=\frac{1}{t}+\sum_{n\geq 1}(-1)^n\left(\frac{1}{t-n\pi}+\frac{1}{t+n\pi}\right). \tag{16.2.29}$$

重新改写

$$I:=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\sum_{k\geq 0}\int_{k\pi/2}^{(k+1)\pi/2}\frac{\sin x}{x}dx.$$

由于

$$\begin{aligned}\int_{2m\pi/2}^{(2m+1)\pi/2}\frac{\sin x}{x}dx &= (-1)^m\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{m\pi+t}dt,\\ \int_{(2m+1)\pi/2}^{2m\pi/2}\frac{\sin x}{x}dx &= (-1)^{m-1}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{m\pi-t}dt,\end{aligned}$$

因此得到

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\pi/2}\sin t\left[\frac{1}{t}+\sum_{m\geq 1}(-1)^m\left(\frac{1}{t-m\pi}+\frac{1}{t+m\pi}\right)\right]dt\\ &= \int_0^{\pi/2}\sin t\cdot\frac{1}{\sin t}dt = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

§16.2.6 * Fourier 级数的一致收敛性

本小节内容主要取自周颂平的专著，见参考文献. 考虑非负数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$.

(1) 称 $\{a_n\}_{n\geq 1}\in$ **MS** (**monotone sequences**) 如果它是递减的.

(2) **(Shah, 1962)** 称 $\{a_n\}_{n\geq 1}\in$ **QMS** (**quasi-monotone sequences**) 如果存在某个 $\alpha\geq 0$ 使得数列 $\{a_n/n^{\alpha}\}_{n\geq 1}\in$ **MS**.

(3) 称 $\{a_n\}_{n\geq 1}\in$ **AMS** (**almost monotone sequences**) 如果 $a_k\leq Ma_n$ 对任何 $k\geq n$ 都成立.

(4) 称 $\{a_n\}_{n\geq 1}\in$ **RQMS** (**regularly-varying quasi-monotone sequences**) 如果数列 $\{a_n/R(n)\}_{n\geq 1}\in$ **MS** 对某个正则变化数列 $\{R(n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ 成立. 这里正则变化数列 $\{R(n)\}_{n\geq 1}$ 是指数列 $\{R(n)\}_{n\geq 1}$ 是正的，单调递增的且满足 $\lim_{n\to\infty}\frac{R(\lfloor\lambda n\rfloor)}{R(n)}<\infty$ 对某个 $\lambda>1$ 成立.

(5) 称 $\{a_n\}_{n\geq 1}\in$ **BVS** (**bounded variation sequences**) 如果 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ 且

$$\sum_{n\geq 1}|\Delta a_n|<\infty,$$

这里 $\Delta a_n:=a_n-a_{n+1}$.

(6) **(Leindler, 2001)** 称 $\{a_n\}_{n\geq 1} \in$ **RBVS (rest bounded variation sequences)** 如果 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 且

$$\sum_{k\geq n} |\Delta a_k| \leq M a_n$$

对任何 $n \geq 1$ 都成立, 这里 M 是非负常数.

(7) **(乐–周, 2005)** 称 $\{a_n\}_{n\geq 1} \in$ **GBVS (group bounded variation sequences)** 如果

$$\sum_{n\leq k\leq 2n} |\Delta a_k| \leq M a_n$$

对任何 $n \geq 1$ 都成立, 这里 M 是非负常数.

(8) **(虞–周, 2007)** 称 $\{a_n\}_{n\geq 1} \in$ **NBVS (non-onesided bounded variation sequences)** 如果

$$\sum_{n\leq k\leq 2n} |\Delta a_k| \leq M(a_n + a_{2n})$$

对任何 $n \geq 1$ 都成立, 这里 M 是非负常数.

(9) **(周, 2010)** 称 $\{a_n\}_{n\geq 1} \in$ **MVBVS (mean value bounded variation sequences)** 如果

$$\sum_{n\leq k\leq 2n} |\Delta a_k| \leq \frac{M}{n} \sum_{\lfloor n/\lambda \rfloor \leq k \leq \lfloor \lambda n \rfloor} a_k$$

对任何 $n \geq 1$ 都成立, 这里 M 是非负常数和 $\lambda \geq 2$.

练习16.2.31. 数列 $\{a_n\}_{n\geq 1} \in$ **QMS** $\iff$ 存在 $\alpha > 0$ 使得 $a_{n+1} \leq a_n(1 + \alpha/n)$ 对充分大 n 都成立.

练习16.2.32. 假设 $\{R(n)\}_{n\geq 1}$ 是正的递增数列. 证明 $\limsup_{n\to\infty} \frac{R(\lfloor \lambda n \rfloor)}{R(n)} < \infty$ 对某个 $\lambda > 1$ 成立 $\iff \limsup_{m\to\infty} \frac{R(2n)}{R(n)} < \infty$.

定理16.2.33. (Chaundy-Jolliffe, 1916) 如果数列 $\{a_n\}_{n\geq 1} \in$ **MS** 则函数项级数 $\sum_{n\geq 1} a_n \sin nx$ 一致收敛 $\iff \lim_{n\to\infty} n a_n = 0$.

证: 令 $S_n(x) := \sum_{1\leq k\leq n} a_k \sin(kx)$ 并记 $||f|| := \max_{\mathbb{R}} |f|$. 则

$$||S_{2n} - S_{n-1}|| \geq \sum_{n\leq k\leq 2n} a_k \sin\left(k\frac{\pi}{4n}\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n\leq k\leq 2n} a_k \geq \frac{n+1}{\sqrt{2}} a_{2n}.$$

如果函数项级数 $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n \sin nx$ 是一致收敛的, 则 $\lim_{n\to\infty} 2na_{2n} = 0$. 类似地我们有 $\lim_{n\to\infty}(2n+1)a_{2n+1} = 0$. 即 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

反之我们假设 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. 为证明一致收敛性, 我们只要验证函数列 $\{S_n(x)\}_{n\geq 1}$ 对每个 $x \in \mathbb{R}$ 是 Cauchy 的. 根据周期性, 我们不妨假设 $x \in (0, \pi)$.

对任意 $\epsilon > 0$, 存在整数 n_0 使得 $na_n < \epsilon$ 对任意 $n > n_0$ 都成立. 对任意 $x \in (0, \pi)$ 取 $N := \lfloor 1/x \rfloor$ 和 $n > n_0$. 则

$$\sum_{k \geq n} a_k \sin(kx) = \sum_{n \leq k \leq N-1} a_k \sin(kx) + \sum_{k \geq N} a_k \sin(kx) =: I_1 + I_2.$$

这里我们不妨假设 $N > n$. 利用不等式 $|\sin x| \leq |x|$ 得到

$$\left| \sum_{n \leq k \leq N-1} a_k \sin(kx) \right| \leq \sum_{n \leq k \leq N-1} a_k |\sin(kx)| \leq \max_{n \leq k \leq N-1} ka_k \leq \epsilon.$$

另一方面有

$$|I_2| \leq 4\pi N\epsilon.$$

事实上根据 Abel 变换推出

$$\sum_{k \geq N} a_k \sin(kx) = -a_N \widetilde{D}_N - 1(x) + \sum_{k \geq N} \Delta a_k \widetilde{D}_k(x),$$

这里

$$\widetilde{D}_n(x) := \sum_{1 \leq k \leq n} \sin(kx) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

注意到 $|\widetilde{D}_n(x)| \leq \pi/x$ 对任意 $x \in (0, \pi)$ 都成立. 故

$$\left| \sum_{k \geq N} a_k \sin(kx) \right| \leq \frac{\pi}{x} \left(a_N + \sum_{k \geq N} |\Delta a_k| \right) \leq 2\pi N \left(a_N + \sum_{k \geq N} |\Delta a_k| \right).$$

因为 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(na_n \cdot \frac{1}{n}) = 0$, 所以

$$\left| \sum_{k \geq K} a_k \sin(kx) \right| \leq 4\pi N \sum_{k \geq N} |\Delta a_k| = 4\pi N a_N < 4\pi\epsilon.$$

从而 $|\sum_{k\geq n} a_k \sin(kx)| \leq (1+4\pi)\epsilon$ 和 $\lim_{n\to\infty} ||\sum_{k\geq n} a_k \sin(kx)|| = 0$. □

定理16.2.34. (Shah, 1962; Nurcombe, 1992) 如果数列 $\{a_n\}_{n\geq 1} \in$ **QMS** 则函数项级数 $\sum_{n\geq 1} a_n \sin nx$ 一致收敛 $\iff \lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

上述定理可推广到其它单调数列集.

定理16.2.35. (谢 - 周, 1994) 对复数列 $\{c_n\}_{n\geq 1} \in$ **RQMS** 记

$$f(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\sqrt{-1}nx}.$$

若 $c_n + c_{-n} \in K(\theta_0)$ 对某个 $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2})$ 成立, 则 f 是连续的且

$$\lim_{n\to\infty} ||f - S_n|| = 0 \quad \iff \quad \lim_{n\to\infty} nc_n = 0 \text{ 和 } \sum_{n\geq 1} |c_n + c_{-n}| < \infty.$$

这里 $K(\theta_0) := \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| \leq \theta_0\}$.

推论16.2.36. 如果数列 $\{a_n\}_{n\geq1}\in$ **RQMS** 则函数项级数 $\sum_{n\geq1}a_n\sin nx$ 一致收敛 $\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}na_n=0$.

定理16.2.37. (Leindler, 2001) 如果数列 $\{a_n\}_{n\geq1}\in$ **RBVS** 则 $\sum_{n\geq1}a_n\sin nx$ 一致收敛 $\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}na_n=0$.

定理16.2.38. (乐 - 周; 2005; Tikhonov, 2007) 对复数列 $\{c_n\}_{n\geq1}\in$ **GBVS** 记

$$f(x):=\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_ne^{\sqrt{-1}nx}.$$

若 $c_n+c_{-n}\in K(\theta_0)$ 对某个 $\theta_0\in[0,\frac{\pi}{2})$ 成立, 则 f 是连续的且

$$\lim_{n\to\infty}||f-S_n||=0\quad\Longleftrightarrow\quad\lim_{n\to\infty}nc_n=0\text{ 和 }\sum_{n\geq1}|c_n+c_{-n}|<\infty.$$

定理16.2.39. (虞 - 周; 2007) 对复数列 $\{c_n\}_{n\geq1}\in$ **NBVS** 记

$$f(x):=\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_ne^{\sqrt{-1}nx}.$$

若 $c_n+c_{-n}\in K(\theta_0)$ 对某个 $\theta_0\in[0,\frac{\pi}{2})$ 成立, 则 f 是连续的且

$$\lim_{n\to\infty}||f-S_n||=0\quad\Longleftrightarrow\quad\lim_{n\to\infty}nc_n=0\text{ 和 }\sum_{n\geq1}|c_n+c_{-n}|<\infty.$$

定理16.2.40. (周, 2010) 对复数列 $\{c_n\}_{n\geq1}\in$ **MVBVS** 记

$$f(x):=\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_ne^{\sqrt{-1}nx}.$$

若 $c_n+c_{-n}\in K(\theta_0)$ 对某个 $\theta_0\in[0,\frac{\pi}{2})$ 成立, 则 f 是连续的且

$$\lim_{n\to\infty}||f-S_n||=0\quad\Longleftrightarrow\quad\lim_{n\to\infty}nc_n=0\text{ 和 }\sum_{n\geq1}|c_n+c_{-n}|<\infty.$$

§16.2.7 几个反例

I. 我们给出Du Bois-Reymond 的结论, 即存在连续周期函数其 Fourier 级数在某点是发散的. 这说明**定理16.2.27** (2) 中的**Dini-Lipschitz 判别法**的条件"$f\in C^{0,\alpha}(x)$"不能减弱为"f 在 x 附近连续".

考察锯齿函数 $f(x)$, 它关于 x 是奇函数且在 $0<x<\pi$ 上为 $\sqrt{-1}(\pi-x)$. 则

$$f(x)\sim\sum_{n\neq0}\frac{e^{\sqrt{-1}nx}}{n}=\sum_{n\leq-1}\frac{e^{\sqrt{-1}nx}}{n}+\sum_{n\geq1}\frac{e^{\sqrt{-1}nx}}{n}.\tag{16.2.30}$$

我们可以证明函数项级数

$$\sum_{n\geq -1}\frac{e^{\sqrt{-1}nx}}{n}$$

不是任何 Riemann 可积函数的 Fourier 级数. 事实上若假设它是可积函数 $\tilde{f}$ 的 Fourier 级数, 则 $\tilde{f}$ 是有界的. 利用 Abel 平均得到

$$|A_r(\tilde{f})(0)| = \sum_{n\geq 1}\frac{r^n}{n},$$

且当 $r\to 1$ 时趋于无穷. 这就给出了矛盾, 因为

$$|A_r(\tilde{f})(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\tilde{f}(x)|P_r(x)d1x \leq \sup_{x\in[-\pi,\pi]}|\tilde{f}(x)|$$

其中 $P_r(x)$ 是 Poisson 核.

对每个 $N\in\mathbb{N}$ 定义如下两个 $[-\pi,\pi]$ 上的函数,

$$f_N(x) := \sum_{1\leq|n|\leq N}\frac{e^{\sqrt{-1}nx}}{n},\quad \tilde{f}_N(x) := \sum_{-N\leq n\leq -1}\frac{e^{\sqrt{-1}nx}}{n}. \tag{16.2.31}$$

由于

$$\sum_{1\leq n\leq N}\frac{1}{n} \geq \sum_{1\leq n\leq N-1}\int_n^{n+1}\frac{dx}{x} = \int_1^N\frac{dx}{x} = \ln N,$$

因此

$$|\tilde{f}_N(0)| = \left|\sum_{-N\leq n\leq -1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{1\leq n\leq N}\frac{1}{n} \geq \ln N.$$

引理16.2.41. *假设级数 $\sum_{n\geq 1}c_n$ 的 Abel 平均 $A_r = \sum_{n\in\mathbf{N}}c_n r^n$ 当 $r\to 1-$ 时是有界的. 如果 $c_n = O(1/n)$, 则部分和 $S_N := \sum_{1\leq n\leq N}c_n$ 是有界的.*

证: 令 $r := 1-N^{-1}$ 并选择 M 使得 $n|c_n|\leq M$ 和 $|A_r|\leq M$ 成立. 根据

$$S_N - A_r = \sum_{1\leq n\leq N}(1-r^n)c_n - \sum_{n\geq N+1}c_n r^n,$$

我们得到

$$\begin{aligned}|S_N - A_r| &\leq \sum_{1\leq n\leq N}|c_n|(1-r^n) + \sum_{n\geq N+1}|c_n|r^n \\ \leq M\sum_{1\leq n\leq N}(1-r) + \frac{M}{N}\sum_{n\geq N+1}r^n &\leq MN(1-r) + \frac{M}{N}\frac{1}{1-r} = 2M.\end{aligned}$$

故得到 $|S_N|\leq 3M$. □

利用 (16.2.30) 函数项级数 $\sum_{n\neq 0}e^{\sqrt{-1}nx}/n$ 是锯齿函数 f 的 Fourier 级数. 因此

$$c_n = \frac{e^{\sqrt{-1}nx}}{n} + \frac{e^{-\sqrt{-1}nx}}{-n} = O\left(\frac{1}{|n|}\right).$$

因为 $A_r(f) = f * P_r$ 且 f 是有界的, 所以当 $r \to 1-$ 时 A_r 时有界的; 根据**引理16.2.41** 部分和 $S_N(f) = f_N$ 关于 N 和 x 是一致有界的.

定义

$$P_N(x) := e^{2N\sqrt{-1}x} f_N(x), \quad \widetilde{P}_N(x) := e^{2N\sqrt{-1}x} \tilde{f}_N(x). \tag{16.2.32}$$

则得到

$$S_M(P_N) = \begin{cases} P_N, & M \geq 3N, \\ \tilde{P}_N, & M = 2N, \\ 0, & M < N. \end{cases}$$

选择 $N_k := 3^{2^k}$ 和 $\alpha_k := 1/k^2$. 则

$$N_{k+1} > 3N_k, \quad \alpha_k \ln N_k \to \infty.$$

最后我们来定义

$$g(x) := \sum_{k \geq 1} \alpha_k P_{N_k}(x). \tag{16.2.33}$$

根据 P_N 的一致有界性, 上述函数项级数一致收敛到某个连续周期函数. 但是

$$|S_{2N_m}(f)(0)| \geq c\alpha_m \ln N_m + O(1) \to \infty, \quad m \to +\infty.$$

从而我们得到一个连续周期函数其 Fourier 级数在 0 处发散.

II. 回顾**共轭 Dirichlet 核** $\widetilde{D}_N$ 的定义

$$\widetilde{D}_N(x) := \sum_{|n| \leq N} \operatorname{sign}(x) e^{\sqrt{-1}nx} = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2N+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}. \tag{16.2.34}$$

类似于**例16.2.11** 我们可以证明

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \widetilde{D}_N(x) \right| dx \leq c \ln N \tag{16.2.35}$$

对某个 $c > 0$ 成立. 如果 f 是 (Riemann) 可积的, 则

$$f * \widetilde{D}_N = O(\ln N).$$

作为推论得到

(i) 函数项级数

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{\ln n}$$

对每个 x 都是收敛的, 但不是任何 (Riemann) 可积函数的 Fourier 级数.

(ii) 给定 $\alpha \in (0,1)$ 函数项级数

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$$

对每个 x 都是收敛的, 但不是任何 (Riemann) 可积函数的 Fourier 级数.

如果上面两种情形都成立则得到

$$\sum_{1\leq n\leq N}\frac{1}{\ln n}=O(\ln N),\quad \sum_{1\leq n\leq N}\frac{1}{n^{\alpha}}=O(\ln N)\ (0<\alpha<1). \tag{16.2.36}$$

练习16.2.42. 验证 (16.2.35), 并证明 (16.2.36) 不可能成立.

§16.2.8 * Gibbs 现象

考虑如下函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}-x, & 0<x\leq\frac{1}{2},\\ 0, & x=0,\\ -\frac{1}{2}-x, & -\frac{1}{2}<x<0,\end{cases}$$

并作周期为 $T=1$ 的周期化延拓. 显然函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}$ 上有跳跃间断点. 因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以 Fourier 系数为 (利用 (16.2.1))

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \int_{-1/2}^{1/2}f(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}nx}dx = -2\sqrt{-1}\int_0^{1/2}\left(\frac{1}{2}-x\right)\sin(2\pi nx)dx\\ &= \begin{cases}-\frac{\sqrt{-1}}{2n\pi}, & n\neq 0,\\ 0, & n=0.\end{cases}\end{aligned}$$

因此 Fourier 级数的部分和为

$$\begin{aligned}S_N(f)(x) &= (f*D_N)(x) = \sum_{|n|\leq N}\hat{f}(n)e^{2\pi\sqrt{-1}nx}\\ &= -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum_{|n|\leq N,\ n\neq 0}\frac{e^{2\pi\sqrt{-1}nx}}{n} = \sum_{|n|\leq N,\ n\neq 0}\frac{e^{2\pi\sqrt{-1}nx}}{2\pi\sqrt{-1}n},\end{aligned}$$

其中

$$D_N(x):=\sum_{|n|\leq N}e^{2\pi\sqrt{-1}nx}=\frac{\sin[(2N+1)\pi x]}{\sin(\pi x)}.$$

因为

$$(f*D_N)'(x)=\sum_{|n|\leq N,\ n\neq 0}e^{2\pi\sqrt{-1}nx}=D_N(x)-1,$$

所以得到

$$S_N(f)(x) = (f*D_N)(x) = \int_0^x[D_N(t)-1]dt$$

$$
\begin{aligned}
&= -x+\int_0^x \frac{\sin[(2N+1)\pi t]}{\sin(\pi t)}dt \\
&= -x+\int_0^x \sin[(2N+1)\pi t]\left[\frac{1}{\sin(\pi t)}-\frac{1}{\pi t}+\frac{1}{\pi t}\right]dt \\
&= -x+\int_0^x \frac{\sin[(2N+1)\pi t]}{\pi t}dt+\int_0^x \sin[(2N+1)\pi t]\left[\frac{1}{\sin(\pi t)}-\frac{1}{\pi t}\right]dt.
\end{aligned}
$$

先考虑函数

$$
h(t):=\frac{1}{\sin(\pi t)}-\frac{1}{\pi t}.
$$

在证明**推论16.2.24** (2) 中我们已经知道 $h(t)$ 在 $t=0$ 处连续且 $h(0)=0$. 根据渐进展开

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sin t} &= \frac{1}{t-\frac{t^3}{3!}+\cdots} = \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{t^2}{6}-\cdots\right)} \\
&= \frac{1}{t}\left[1+\left(\frac{t^2}{6}-\cdots\right)+\left(\frac{t^2}{6}-\cdots\right)^2+\cdots\right] = \frac{1}{t}+\frac{t}{6}+o(1),
\end{aligned}
$$

得到

$$
h'(0)=\lim_{t\to 0+}\frac{h(t)-h(0)}{t-0}=\pi\lim_{,t\to 0+}\frac{1}{t}\left(\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}\right)=\frac{\pi}{6}
$$

从而推出函数 $h(t)$ 在 $[0,1/2]$ 上是可导的且 $h'(0)=\pi/6$. 进一步计算表明 $h\in C^1([0,1/2])$, h,h' 非负的且在 $[0,1/2]$ 上递增, 和 $h'\le 4/\pi$. 分部积分得到

$$
\begin{aligned}
\int_0^x h(t)\sin[(2N+1)\pi t]dt &= \int_0^x h(t)d\left[-\frac{\cos[(2N+1)\pi t]}{(2N+1)\pi}\right] \\
&= -\frac{\cos[(2N+1)\pi x]}{(2N+1)\pi}h(x)+\int_0^x h'(t)\frac{\cos[(2N+1)\pi t]}{(2N+1)\pi}dt
\end{aligned}
$$

导致

$$
\left|\int_0^x h(t)\sin[(2N+1)\pi t]dt\right|\le\left[\frac{h(1/2)}{\pi}+\frac{h'(1/2)}{2\pi}\right]\frac{1}{2N+1}\le\frac{1/\pi}{2N+1}.
$$

故

$$
\begin{aligned}
S_N(f)(x) &= -x+\frac{1}{\pi}\int_0^x\frac{\sin[(2N+)\pi t]}{t}dt+O\left(\frac{1}{2N+1}\right) \\
&= -x+\frac{1}{\pi}\int_0^{(2N+1)\pi x}\frac{\sin t}{t}dt+O\left(\frac{1}{2N+1}\right) \qquad (16.2.37)\\
&= -x+\frac{\mathbf{Si}((2N+1)\pi x)}{\pi}+O\left(\frac{1}{2N+1}\right).
\end{aligned}
$$

从这里看到了 sine 积分函数 (14.4.38) 的出现.

因此对任意 $x\in(0,1/2]$, 得到

$$
\lim_{N\to+\infty}S_N(f)(x)=-x+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}-x=f(x).
$$

同样对任意 $t \in [-1/2, 0)$ 得到

$$\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x) = -x - \frac{1}{2} = f(x).$$

因为显然有

$$\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(0) = 0 = f(0),$$

所以

$$\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x) = f(x), \quad -\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}.$$

但是函数列 $\{S_N(f)(x)\}_{N\geq 1}$ 在 $[0, 1/2]$ 上不一致收敛到 $f(x)$. 对任意 $t \in (0, 1/2]$ 考虑函数差

$$S_N(f)(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int^{(2N+1)\pi t} 0 \frac{\sin t}{t} dt - \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{2N+1}\right).$$

由于 $O(1/(2N+1)) \leq 1/\pi(2N+1)$, 故

$$S_N(f)(x) - f(x) \leq \frac{\mathbf{Si}((2N+1)\pi x)}{\pi} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\frac{1}{2N+1};$$

根据 (14.4.43) 可知

$$S_N(f)(x) - f(x) \leq \frac{\mathbf{Si}(\pi)}{\pi} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\frac{1}{2N+1} \leq 0.08949\cdots + \frac{1/\pi}{2N+1}.$$

从而得到

$$\lim_{N\to+\infty} \sup_{(0,1/2]} |S_N(f)(x) - f(x)| \leq \frac{\mathbf{Si}(\pi)}{\pi} - \frac{1}{2} = 0.08949\cdots \approx 9\%$$

而且

$$\lim_{N\to+\infty}\left[S_N(f)\left(\frac{1}{2N+1}\right) - f\left(\frac{1}{2N+1}\right)\right] = \frac{\mathbf{Si}(\pi)}{\pi} - \frac{1}{2}.$$

最后得到

$$\lim_{N\to+\infty} \sup_{(0,1/2]} |S_N(f)(x) - f(x)| = \frac{\mathbf{Si}(\pi)}{\pi} - \frac{1}{2} = 0.08949\cdots \approx 9\%. \quad (16.2.38)$$

出现 9% 的现象就是著名的“**Gibbs 现象**”. 即函数的 Fourier 级数在跳跃点 $x = 0$ 有上冲 (overshoot) 或者下冲 (undershoot) 大概 9%.

Gibbs 现象最早是Wilbraham 在 1848 年发现的[1], 之后被Gibbs 在 1899 年又重新发现了[2]. Bôcher 在 1906 年对此现象给出了详细的数学证明[3]并称之为

[1]Wilbraham, Henry. *On a certain periodic function*, The Cambridge and Dublin Mathematical Journal, **3**(1848), 198-201.

[2]Gibbs, Josiah Willard. *Fourier's Series*, Nature **59**(1899), 606.

[3]Bôcher, Maxime. *Introduction to the theory of Fourier's series*, Ann. of Math., (2nd Ser.) **7**(1906), no. 3, 81-152.

“Gibbs 现象”.

关于 Gibbs 现象的详细历史可参考[4]:

HeWitt, Edwin; Hewitt, Robert E. *The Gibbs-Wilbraham phenomenon: an episode in Fourier analysis*, Arch. Hist. Exact Sci., **21**(1979/80), no. 2, 129-160.

§16.3 $\mathbb{R}$ 上的 Fourier 变换

回顾到对任何 $f \in C(\mathbb{S}^1)$ 有

$$f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n e^{\sqrt{-1}nx},$$

这里

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-\sqrt{-1}nx}dx.$$

做变量替换 $y = x/2\pi$ 得到

$$A_n = \int_0^1 f(y)e^{-2\pi\sqrt{-1}ny}dy, \quad f(y) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n e^{2\pi\sqrt{-1}ny}.$$

现在考虑定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的可积函数 $f(x)$. 对任意 $T > 0$ 定义函数

$$f_T(x) := f(x), \quad x \in (-T, T)$$

并以 $2T$ 为周期作周期化延拓. 从而得到相应的 Fourier 级数展开

$$\begin{aligned} f_T(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{T}x + b_n \sin\frac{n\pi}{T}x\right) \\ &\sim \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\,dt + \frac{1}{T}\sum_{n\geq 1}\int_{-T}^{T} f(t) \\ &\times \left[\cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right)\cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{T}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{T}x\right)\right]dt \\ &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\,dt + \sum_{n\geq 1}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\cos\left[\frac{n\pi}{T}(x-t)\right]dt. \end{aligned}$$

如果进一步假设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积并令 $T \to +\infty$, 则得到

$$f(x) \sim \lim_{T\to+\infty}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\cos\left[\frac{n\pi}{T}(x-t)\right]dt$$

[4]https://web.archive.org/web/20160304104811/http://ocw.nctu.edu.tw/course/fourier/supplement/hewitt-hewitt1979.pdf

$$\sim \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos[\omega(x-t)]dt\right]d\omega.$$

受此启发和为了研究方便, 我们引入如下概念. 如果 f 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数, 我们引入 (在 Cauchy 主值积分意义下)

$$f^{\wedge}(\xi)\equiv\hat{f}(\xi):=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi}dx$$

和

$$f(x)\sim\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{2\pi\sqrt{-1}x\xi}d\xi=:\check{f}(x)\equiv f^{\vee}(x),$$

如果第二个 $\sim$ 取等号这就是著名的 Fourier 反演公式.

对定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 f, 定义其 Cauchy 主值积分为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx:=\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} f(x)dx=\mathbf{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

注意极限不一定存在, 比如考虑函数 $f(x)=1/(1+|x|)$.

§16.3.1 适度递减函数

定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 f 称为**适度递减的(moderate decrease)** 如果 f 是连续的且存在常数 $A>0$ 使得

$$|f(x)|\le\frac{A}{1+x^2},\quad x\in\mathbb{R}$$

成立. 记 $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的所有适度递减函数的集合. 在函数通常加法下和 (复) 标量数乘下, $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{C}$ 上的向量空间. 如果 $f\in\mathcal{M}(\mathbb{R})$ 则

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx = \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}|f(x)|dx \le 2\lim_{N\to\infty}\int_0^N\frac{A}{1+x^2}dx$$
$$= 2\lim_{N\to\infty}\left[\int_0^1\frac{A}{1+x^2}dx+\int_1^N\frac{A}{1+x^2}dx\right] \le 2\lim_{N\to\infty}\left(A+\int_1^N\frac{A}{x^2}dx\right) = 4A.$$

因此 (Cauchy 主值) 积分 $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$ 存在.

性质16.3.1. *如上定义的关于适度递减函数的积分满足如下性质:*

(i) **(被积函数线性)** 如果 $f,g\in\mathcal{M}(\mathbb{R})$ 且 $a,b\in\mathbb{C}$, 则

$$\int_{\mathbb{R}}[af(x)+bg(x)]dx=a\int_{\mathbb{R}}(x)dx+b\int_{\mathbb{R}}(x)dx.$$

(ii) **(平移不变性)** 对每个 $a\in\mathbb{R}$ 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)dx=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

(*iii*) **(尺度变换)** 如果 $\delta > 0$ 则

$$\delta \int_{-\infty}^{\infty} f(\delta x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

(*iv*) **(连续性)** 如果 $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-a) - f(x)|dx \to 0, \quad a \to 0.$$

证: $(i) - (iii)$ 是显然的. 现在证明 (iv). 选择 $|a| \le 1$. 对任意 $\epsilon > 0$ 存在整数 $N \in \mathbb{N}$ 满足

$$\int_{|x|\ge N} |f(x)|dx < \frac{\epsilon}{4}, \quad \int_{|x|\ge N} |f(x-a)|dx \le \frac{\epsilon}{4}.$$

由于 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 因此 f 在闭区间 $[-N-1, N+1]$ 上一致连续. 存在 $\delta > 0$ 使得

$$\sup_{|x|\le N} |f(x-a) - f(x)| \le \frac{\epsilon}{4N}$$

成立, 只要 $|a| < \delta$. 故

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-a) - f(x)|dx &\le \int_{-N}^{N} |f(x-a) - f(x)|dx \\ + \int_{|x|\ge N} |f(x-a)|dx + \int_{|x\ge N} |f(x)|dx &\le \frac{\epsilon}{4N} \cdot 2N + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon\end{aligned}$$

对 $|a| \le \delta \le 1$ 成立. □

§16.3.2 Fourier 变换

如果 $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ 我们定义其**Fourier 变换 (Fourier transform)** 为

$$f^{\wedge}(\xi) \equiv \hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi}dx, \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{16.3.1}$$

显然此时积分存在. 更进一步有

(i) $\hat{f}$ 是有界的且连续的.

(ii) $\hat{f}(\xi) \to 0$ 当 $|\xi| \to \infty$ 时. 事实上

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) - f\left(x - \frac{1}{2\xi}\right) \right| e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi}dx \to 0$$

根据**性质16.3.1**, 当 $|\xi| \to \infty$ 时.

但是 Fourier 变换不保持函数的适度递减性, 即存在适度递减函数 f 其 Fourier 变换 $\hat{f}$ 不是适度递减的.

练习16.3.2. 考虑函数 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 f, 当 $|x| \geq 1$ 时 $f(x) = 0$, $f(0) = 0$, 且在 0 附近的小邻域内等于 $1/\ln(1/|x|)$. 证明 $\hat{f}$ 不是适度递减的.

$\mathbb{R}$ 上的**Schwartz 空间(Schwartz space)** $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 是由满足下面条件的光滑函数 f 所构成, 这里的条件是说各阶导数 $f^{(\ell)}$ 都是**迅速递减的(rapidly decreasing)** 即

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^k |f^{(\ell)}(x)| < \infty, \quad k, \ell \geq 0.$$

注意到 $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{M}(\mathbb{R})$.

练习16.3.3. 证明 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{C}$ 上的向量空间. 进一步如果 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 则

$$f'(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad xf(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

因此 Schwarz 空间关于求导和多项式数乘运算是封闭的.

例16.3.4. (Gaussian 函数) Gaussian 函数 $f(x) = e^{-ax^2}$, 这里 $a > 0$, 属于 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

例16.3.5. (隆起函数) 对 $a < b$ 定义的**隆起函数(bump function)**

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ e^{-1/(x-a)}e^{-1/(b-x)}, & a < x < b, \\ 0, & x \geq b, \end{cases}$$

属于 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

练习16.3.6. 证明 $e^{-|x|} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

虽然 $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{M}(\mathbb{R})$ 但是我们仍旧可以定义 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 的 Fourier 变换

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi}dx.$$

之后我们使用记号 $f(x) \mapsto \hat{f}(\xi)$ 来表示 $\hat{f}$ 是 f 的 Fourier 变换.

性质16.3.7. 如果 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 则

(i) $f(x+a) \to \hat{f}(\xi)e^{2\pi\sqrt{-1}a\xi}$, 任意 $a \in \mathbb{R}$.

(ii) $f(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}xa} \to \hat{f}(\xi + x)$, 任意 $a \in \mathbb{R}$.

(iii) $f(\delta x) \to \delta^{-1}\hat{f}(\delta^{-1}\xi)$, 任意 $\delta > 0$.

(iv) $f'(x) \to 2\pi\sqrt{-1}\xi\hat{f}(\xi)$.

(v) $-2\pi\sqrt{-1}xf(x) \to \frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi)$.

证: 我们只给出 (v) 的证明. 令 $F(x) = -2\pi\sqrt{-1}xf(x)$ 则得到

$$\hat{F}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} -2\pi\sqrt{-1}xf(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi}dx.$$

计算可知

$$\frac{\hat{f}(\xi+a)-\hat{f}(\xi)}{a} - \hat{F}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi}\left(\frac{e^{-2\pi\sqrt{-1}xa}-1}{a} + 2\pi\sqrt{-1}x\right)dx.$$

因为 $f(x), xf(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 所以存在整数 N 满足

$$\int_{|x|\geq N} |f(x)|dx, \quad \int_{|x|\geq N} |xf(x)|dx \leq \epsilon.$$

进一步对 $|x| \leq N$ 存在 a_0 使得当 $|a| < a_0$ 时推出

$$\left|\frac{e^{-2\pi\sqrt{-1}xa}-1}{a} + 2\pi\sqrt{-1}x\right| \leq \frac{\epsilon}{N}.$$

因此只要 $|a| < a_0$ 就有

$$\left|\frac{\hat{f}(\xi+a)-\hat{f}(\xi)}{a} - \hat{F}(\xi)\right|$$

$$\leq \int_{-N}^{N}\left|f(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi}\left(\frac{e^{-2\pi\sqrt{-1}xa}-1}{a} + 2\pi\sqrt{-1}x\right)\right|dx + C\epsilon \quad\leq\quad C'\epsilon.$$

这里 C, C' 都是常数. □

定理16.3.8. *如果 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 则 $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

证: 因为 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 所以得到 $C_{k,\ell}(f) := \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^k|f^{(\ell)}(x)| < \infty$. 特别地, $|\hat{f}(\xi)| \leq C < \infty$. 从

$$\left(1+|x|^2\right)|f(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)| + \sup_{x\in\mathbb{R}}|x|^2|f(x)| = C_{0,0}(f) + C_{2,0}(f) < \infty$$

我们可以找到常数 $C > 0$ 满足

$$|f(x)| \leq \frac{C}{1+|x|^2}$$

从而

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx \leq 2C\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} < \infty.$$

一般地, 对每对 (k,ℓ) 函数 $\xi^k\hat{f}^{(\ell)}(\xi)$ 是有界的, 这是因为它是

$$\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^k}\left(\frac{d}{dx}\right)^k\left[(-2\pi\sqrt{-1}x)^\ell f(x)\right]$$

的 Fourier 变换. □

回顾反常积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1.$$

定理16.3.9. (1) 如果 $f(x) = e^{-\pi x^2}$ 则 $\hat{f}(\xi) = f(\xi)$.

(2) 如果 $\delta > 0$ 和

$$K_\delta(x) := \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\frac{\pi x^2}{\delta}}$$

则 $\widehat{K_\delta}(\xi) = e^{-\pi\delta\xi^2}$.

(3) 当 $\delta \to 0+$ 时 $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ 是好核列. 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |K_\delta(x)| dx \le M,$$

且对任意 $\eta > 0$, 有

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{|x|>\eta} |K_\delta(x)| dx = 0.$$

证: (1) 定义

$$F(\xi) := \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi} dx.$$

则 $F(0) = 1$ 和

$$\begin{aligned} F'(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(-2\pi\sqrt{-1}x\right) e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi} dx \\ &= \sqrt{-1}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi} dx = \sqrt{-1}(2\pi\sqrt{-1}\xi)\hat{f}(\xi) = -2\pi\xi F(\xi). \end{aligned}$$

令

$$G(\xi) := F(\xi) e^{\pi\xi^2}.$$

我们得到 $G'(\xi) = 0$ 和 $G(0) = 1$ 从而推出 $G(\xi) \equiv 1$.

(2) 若记 $f(x) = e^{-\pi x^2}$ 则得到

$$\begin{aligned} \widehat{K_\delta}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(x) e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\delta}} f\left(\frac{x}{\sqrt{\delta}}\right) e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{\sqrt{\delta}}\right) e^{-2\pi\sqrt{-1}\frac{x}{\sqrt{\delta}}(\sqrt{\delta}\xi)} d\left(\frac{x}{\sqrt{\delta}}\right) = \hat{f}(\sqrt{\delta}\xi) = e^{-\pi\delta\xi^2}. \end{aligned}$$

最后一个结论是显然的. □

对 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 定义它们的**卷积(convolution)** 为

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) dt. \tag{16.3.2}$$

定理16.3.10. 当 $\delta \to 0$ 时 $(f * K_\delta)(x) \to f(x)$ 关于 x 是一致收敛的.

证: 对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $R > 0$ 满足 $|f(x)| < \epsilon/4$ 只要 $|x| \geq R$, 这是因为 $|f(x)| \leq C/|x|$ 对某个 $C > 0$ 成立. f 的连续性推出 f 在闭区间 $[-R, R]$ 上是一致连续的. 故可以找到 $\eta > 0$ 使得 $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2$ 对 $|x - y| < \eta$ 和 $x, y \in [-R, R]$ 都满足. 如果 $x \in [-R, R]$, $|y| > R$ 且 $|x - y| < \delta$, 则得到

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(R)| + |f(y) - f(R)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} < \epsilon.$$

如果 $|x|, |y| > R$ 且 $|x - y| < \eta$, 则 $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2$. 因此, f 在 $\mathbb{R}$ 上是一致连续的. 计算可得

$$\begin{aligned} |(f * K_\delta)(x) - f(x)| &\leq \left(\int_{|t| \geq \eta} + \int_{|t| < \eta}\right) K_\delta(t)|f(x - t) - f(x)|dt \\ &< \epsilon + 2\max_{\mathbb{R}} |f| \cdot \int_{|t| \geq \eta} K_\delta(t)dt < 2\epsilon \end{aligned}$$

只要 δ 充分小, 这是因为**定理16.3.9**. □

对任意 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 考虑

$$F(x, y) := f(x)g(y)e^{-2\pi\sqrt{-1}xy}.$$

因为 $|f(x)| \leq C_f/(1 + |x|^2)$ 和 $|g(y)| \leq C_g/(1 + |y|^2)$, 所以

$$|F(x, y)| \leq \frac{C_f C_g}{(1 + |x|^2)(1 + |y|^2)}.$$

故如下两个函数

$$F_1(x) := \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y)dy, \quad F_2(y) := \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y)dx$$

都是连续的和适度递减的. 根据**定理15.2.13** 得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(y)dy.$$

即

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)g(y)dy, \quad f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{16.3.3}$$

定理16.3.11. (Fourier 反演公式) 如果 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 则

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{2\pi\sqrt{-1}\xi x}d\xi. \tag{16.3.4}$$

证: 令 $G_\delta(x) := e^{-\pi\delta x^2}$ 这里 $\delta > 0$. 根据**定理16.3.7** 和**定理16.3.9** 得到

$$\widehat{G_\delta}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}\hat{f}\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\xi\right) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}f\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\xi\right) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{-\frac{\pi\xi^2}{\delta}} = K_\delta(x)$$

其中 $f(x) = e^{-\pi x^2}$. 利用 (16.3.3) 得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)K_\delta(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)G_\delta(\xi)d\xi.$$

令 $\delta \to 0$ 得到

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)d\xi.$$

一般地, 定义 $F(y) := f(y+x)$. 上面论证推出

$$f(x) = F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{2\pi\sqrt{-1}x\xi}d\xi.$$

这样就证明了 (16.3.4). □

定义如下两个映射

$$\mathscr{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad f \longmapsto \mathscr{F}(f) \tag{16.3.5}$$

和

$$\mathscr{F}^* : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad g \longmapsto \mathscr{F}^*(g), \tag{16.3.6}$$

其中

$$\mathscr{F}(f)(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi}dx = \hat{f}(\xi), \tag{16.3.7}$$

$$\mathscr{F}^*(g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{2\pi\sqrt{-1}x\xi}d\xi = \check{g}(x). \tag{16.3.8}$$

根据**定理16.3.11** 我们得到

$$\mathscr{F}\circ\mathscr{F}^* = \mathbf{1} = \mathscr{F}^*\circ\mathscr{F} \quad 在\ \mathcal{S}(\mathbb{R})\ 上. \tag{16.3.9}$$

这就表明 Fourier 变换 $\mathscr{F}$ 在 Schwartz 空间上是双射的.

性质16.3.12. *如果 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 则*

$$f*g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad f*g = g*f, \quad \widehat{(f*g)}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi). \tag{16.3.10}$$

证: (1) 首先回顾

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy.$$

故

$$|x|^k|(f*g)(x)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|\left(|x|^k|g(x-y)|\right)dy.$$

其次我们断言

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|x|^k|g(x-y)| = \sup_{z\in\mathbb{R}}|z+y|^k|g(z)| \le A_k\,(1+|y|)^k$$

这里 A_k 是仅依赖于 g 和 k 的常数. 事实上若 $|y|\le|z|$ 则

$$|z+y|^k|g(z)| \le 2^k|z|^k|g(z)| \le 2^kC_{k,0}(g);$$

若 $|y|\ge|z|$ 则

$$|z+y|^k|g(z)| \le 2^k|y|6k|g(z)| \le 2^kC_{0,0}(g)|y|^k.$$

无论哪种情形我们都得到所需要的结论. 从而

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|x|^k|(f*g)(x)| \le A_k\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)|\,(1+|y|)^k\,dy < \infty$$

因为 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$. 利用恒等式

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\ell}(f*g)(x) = \left(f*g^{(\ell)}\right)(x),\quad \ell\in\mathbb{N},$$

(这可以对 ℓ 作归纳得到), 推出 $f*g\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(2) 这是显然的.

(3) 为此引入二元函数

$$F(x,y) := f(y)g(x-y)e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi}$$

这是由于

$$\widehat{(f*g)}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(y)g(x-y)\,dy\right]e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi}dx.$$

同样考虑两个函数

$$F_1(x) := (f*g)(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi},\quad F_2(y) := f(y)e^{-2\pi\sqrt{-1}y\xi}\hat{g}(\xi).$$

根据**定理15.2.13** 得到

$$\widehat{(f*g)}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}F_1(x)\,dx = \iint_{\mathbf{R}^2}F(x,y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}F_2(y)\,dy = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

即 $\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}$. □

Schwartz 空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上可引入**Hermitian 内积 (Hermitian inner product)**

$$(f,g) := \int_{-\infty}^{\infty}f(x)\overline{g(x)}\,dx,\quad ||f|| := \sqrt{(f,f)}. \tag{16.3.11}$$

定理16.3.13. (Plancherel) 如果 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 则 $||\hat{f}|| = ||f||$.

证: 定义 $g(x) := \overline{f(-x)}$ 和 $h(x) := (f * g)(x)$. 则得到

$$\begin{aligned} \hat{g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(-x)} e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi} dx \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(-x) e^{2\pi\sqrt{-1}x\xi} dx} = \overline{\hat{f}(\xi)}. \end{aligned}$$

更进一步

$$\begin{aligned} \hat{h}(\xi) &= \widehat{(f * g)}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) = |\hat{f}(\xi)|^2, \\ h(0) &= (f * g)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(-y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2 dy. \end{aligned}$$

从而得到

$$||f||^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2 dy = h(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = ||\hat{f}||^2$$

这是因为 $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. □

§16.3.3 * ℝ 上的热核

考虑 ℝ 上的**热方程 (heat equation)**

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t), \quad u(x,0) = f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{16.3.12}$$

定义**热核 (heat kernel)** 如下

$$H_t(x) = H(x,t) := K_{4\pi t}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/t^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \ t > 0. \tag{16.3.13}$$

从而得到其 Fourier 变换

$$\widehat{H_t}(x) = e^{-4\pi^2 t \xi^2}. \tag{16.3.14}$$

对 (16.3.12) 作 Fourier 变换推出

$$\partial_t \hat{u}(\xi,t) = -4\pi^2\xi^2 \hat{u}(\xi,t), \ \hat{u}(\xi,t) = A(\xi) e^{-4\pi^2\xi^2 t}, \ \hat{u}(\xi,0) = \hat{f}(\xi), \ A(\xi) = \hat{f}(\xi).$$

定理16.3.14. 给定 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 令

$$u(x,t) := (f * H_t)(x), \quad t > 0$$

这里 H_t 是热核. 则

(*i*) 函数 u 是 C^2 的当 $x \in \mathbb{R}$ 和 $t > 0$, 且 u 满足热方程.

(*ii*) 当 $t \to 0$ 时 $u(x,t) \to f(x)$ 关于 x 是一致收敛的. 因此若记 $u(x,0) = f(x)$, 则 u 在上半平面的闭包 $\overline{\mathbb{R}^2_+} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, \ t \geq 0\}$ 上是连续的.

(iii) 当 $t \to 0$ 时有

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,t) - f(x)|^2 dx \to 0.$$

(iv) $u(\cdot, t)$ 关于 t 是一致属于 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, 即对任何 $T > 0$

$$\sup_{x\in\mathbb{R},\, t\in(0,T)} |x|^k \left| \frac{\partial^\ell}{\partial x^\ell} u(x,t) \right| < \infty \tag{16.3.15}$$

对每个 $k, \ell \geq 0$ 都成立.

证: (i) 因为 $u = f * H_r$, 对 x 变量取 Fourier 变换得到

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) e^{-4\pi^2 \xi t}$$

从而根据 Fourier 反演公式得到

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\xi,t) e^{2\pi\sqrt{-1}\xi x} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-4\pi^2\xi t} e^{2\pi\sqrt{-1}\xi x} d\xi.$$

在积分号下求导推出 (i). 实际上我们可以证明 u 是光滑的.

(ii) 这可从 $u = f * H_t = f * K_{4\pi t} \rightrightarrows f$. $t \to 0$, 得到.

(iii) 根据**定理16.3.13** 我们有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,t) - f(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(\xi,t) - \hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 \left| e^{-4\pi^2 t\xi^2} - 1 \right|^2 d\xi.\end{aligned}$$

因为 $|e^{-4\pi^2 t\xi^2} - 1|^2 \leq 4$ 和 $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 所以对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $N \in \mathbb{N}$ 满足

$$\int_{|\xi|\geq N} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \frac{\epsilon}{8}.$$

由于 $\hat{f}$ 是有界的, 我们可以找到 $\delta > 0$ 使得

$$\sup_{|\xi|\leq N} |\hat{f}(\xi)|^2 \left| e^{-4\pi^2 t\xi^2} - 1 \right|^2 < \frac{\epsilon}{4N}$$

对任何 $|t| < \delta$ 都成立. 这样就得到

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,t) - f(x)|^2 dx &\leq \int_{|\xi|\leq N} |\hat{f}(\xi)|^2 \left| e^{-4\pi^2 t\xi^2} - 1 \right|^2 d\xi \\ + \int_{|\xi|\geq N} |\hat{f}(\xi)|^2 \left| e^{-4\pi^2 t\xi^2} - 1 \right|^2 d\xi &\leq \frac{\epsilon}{4N} 2N + \frac{\epsilon}{8} 4 = \epsilon\end{aligned}$$

只要 $|t| < \delta$.

(iv) 该结论可从

$$\begin{aligned}|u(x,t)| &\leq \int_{|y|\leq\frac{|x|}{2}} |f(x-y)| H_t(y) dy + \int_{|y|\geq\frac{|x|}{2}} |f(x-y)| H_t(y) dy \\ &\leq \frac{C_N}{(1+|x|)^N} + \frac{C}{\sqrt{t}} e^{-\frac{cx^2}{t}}\end{aligned}$$

推出. 因为 f 是快速递减的, 所以得到 $|f(x-y)| \le C_N/(1+|x|)^N$ 只要 $|y| \le |x|/2$. 如果 $|y| \ge |x|/2$ 则 $H_t(y) \le Ct^{-1/2}e^{-cx^2/t}$, 此时我们也得到上述不等式. 我们已经证明了 $u(x,t)$ 对 $0<t<T$ 是一致快速递减的. 同样的论证可应用到高阶导数上去. □

定理16.3.15. *假设 $u(x,t)$ 满足如下条件:*

(i) u 在上半平面的闭包上是连续的,

(ii) 当 $t>0$ 时 u 满足热方程,

(iii) u 满足边界条件 $u(x,0)=0$,

(iv) $u(\cdot,t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 关于 t 是一致的 (见 (16.3.15)).

则得到 $u \equiv 0$.

证: 考虑函数 u 的能量积分

$$E(t) := \int_{-\infty}^{\infty} |u(x,t)|^2 dx \ge 0.$$

因为 $\partial_t u = \partial_x^2 u$ 我们得到

$$\begin{aligned}
E'(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\partial_t u(x,t)\overline{u(x,t)} + u(x,t)\overline{\partial_t u(x,t)}\right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\partial_x^2 u(x,t)\overline{u(x,t)} + u(x,t)\overline{\partial_x^2 u(x,t)}\right] dx \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \left[\partial_x u(x,t)\overline{\partial_x u(x,t)} + \partial_x u(x,t)\overline{\partial_x u(x,t)}\right] dx \\
&= -2\int_{-\infty}^{\infty} |\partial_x u(x,t)|^2 dx \le 0,
\end{aligned}$$

这里我们利用了 u 和其 x- 导数当 $|x| \to +\infty$ 时是快速递减的. 因为 $E(0)=0$, 所以 $E(t) \equiv 0$ 从而 $u \equiv 0$. □

§16.3.4 Poisson 求和公式

给定 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 定义

$$F_1(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n). \tag{16.3.16}$$

由于 $|f(x)| \le A/|x|^2$, F_1 在 $\mathbb{R}$ 中的任何紧开子集上都是绝对一致收敛的. 因此 $F \in C(\mathbb{R})$. 注意到 $F_1(x+1) = F_1(x)$. 称函数 F_1 是 f 的**周期化(periodization)**.

另一个连续周期函数

$$F_2(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi\sqrt{-1}nx} \tag{16.3.17}$$

来自恒等式

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi\sqrt{-1}\xi x} d\xi.$$

练习16.3.16. 验证 F_1 和 F_2 都是连续周期函数.

定理16.3.17. (Poisson 求和公式) 如果 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 则

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2\pi\sqrt{-1}nx} \tag{16.3.18}$$

对任何 $x \in \mathbb{R}$ 都成立. 特别地

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n). \tag{16.3.19}$$

证: 计算得到

$$\begin{aligned}
\widehat{F_1}(m) &= \int_0^1 F_1(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}mx}dx = \int_0^1 \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)\right) e^{-2\pi\sqrt{-1}mx}dx \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+n)e^{-2\pi\sqrt{-1}mx}dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(y)e^{-2\pi\sqrt{-1}my}dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-2\pi\sqrt{-1}my}dy = \hat{f}(m).
\end{aligned}$$

即 $\widehat{F_1}(m) = \widehat{F_2}(m)$. 根据**推论16.2.5** 得到 $F_1 \equiv F_2$. □

练习16.3.18. 证明 (16.3.18) 当 f 和 f' 都是适度递减函数时也成立.

例16.3.19. 考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

则

$$\hat{f}(\xi) = \left(\frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}\right)^2$$

和

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin \pi\alpha}\right)^2 \tag{16.3.20}$$

对 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ 都成立.

练习16.3.20. 证明

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n+\alpha} = \frac{\pi}{\tan \pi\alpha} \tag{16.3.21}$$

只要 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. (**提示:** 公式 (16.3.21) 的左边级数表示什么意思? 在 $\alpha = 1/2$ 处计算.)

练习16.3.21. 本练习利用 Poisson 公式来给出 (14.3.15) 和 (15.3.32) 的证明. 应用**定理16.3.17** 到 $f(x) = \frac{t}{\pi(x^2+t^2)}$ 和 $\hat{f}(\xi) = e^{-2\pi t|\xi|}$, 这里 $t > 0$, 得到

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{t}{t^2+n^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi t|n|}.$$

证明

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{t}{t^2+n^2} = \frac{1}{\pi t} + \frac{2}{\pi}\sum_{m\in\mathbb{N}}(-1)^{m+1}\zeta(2m)t^{2m-1}$$

和

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi t|n|} = \frac{2}{1-e^{-2\pi t}} - 1.$$

利用恒等式

$$\frac{z}{e^z-1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{m\in\mathbb{N}}\frac{B_{2m}}{(2m)!}z^{2m},$$

这里 B_k 是 Bernoulli 数, 来推导出

$$2\zeta(2m) = (-1)^{m+1}\frac{(2\pi)^{m+1}}{(2m)!}B_{2m}.$$

§16.3.5 * Theta 和 zeta 函数

我们已经定义了**(Jacobi) theta 函数** $\vartheta(s)$ (参见 (15.3.31))

$$\vartheta(s) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s}, \quad s > 0. \tag{16.3.22}$$

定理16.3.22. 当 $s > 0$ 时我们有

$$s^{-1/2}\vartheta(1/s) = \vartheta(s). \tag{16.3.23}$$

证: 定义 $f(x) := e^{-\pi s x^2}$. 则 $\hat{f}(\xi) = s^{-1/2}e^{-\pi\xi^2/s}$. 根据**定理16.3.17** 有

$$\vartheta(s) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n) = s^{-1/2}\theta(1/s)$$

从而推出 (16.3.23). □

练习16.3.23. 验证 (15.3.30).

§16.3.6 * $\mathbb{S}^1$ 上的热核

定义函数 $\Theta(z|\tau)$ 为

$$\Theta(z|\tau) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\sqrt{-1}\pi n^2\tau}e^{2\pi\sqrt{-1}nz} \tag{16.3.24}$$

这里 $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ 和 $z \in \mathbb{C}$. 注意到 $\Theta(0|\sqrt{-1}s) = \vartheta(s)$. 满足边界条件 $u(x,0) = f(x)$ 的方程

$$\partial_t u(x,t) = \partial_x^2 u(x,t)$$

的解, 其中 f 是周期为 1 的周期函数, 是

$$u(x,t)=\left(f*H_t^{\mathbb{S}^1}\right)(x)$$

这里 $H_t^{\mathbb{S}^1}(x)$ 是圆上的热核, 即,

$$H_t^{\mathbb{S}^1}(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-4\pi^2n^2t}e^{2\pi\sqrt{-1}nx}=\Theta(x|4\pi\sqrt{-1}t). \tag{16.3.25}$$

回顾 $\mathbb{R}$ 上的热核

$$H_t(x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}},\quad \widehat{H_t}(\xi)=e^{-4\pi^2\xi^2t}.$$

根据**定理16.3.17** 得到

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}H_t(x+n)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{H_t}(n)e^{2\pi\sqrt{-1}nx}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-4\pi^2n^2t}e^{2\pi\sqrt{-1}nx}.$$

定理16.3.24. *圆上的热核是数轴上的热核的周期化:*

$$H_t^{\mathbb{S}^1}(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}H_t(x+n). \tag{16.3.26}$$

$\{H_t^{\mathbb{S}^1}(x)\}_{t>0}$, $|x|\le 1/2$, 是好核列.

证: 显然 $\int_{|x|\le 1/2}H_t^{\mathbb{S}^1}(x)dx=1$ 和 $H_t^{\mathbb{S}^1}\ge 0$. 当 $|x|\le 1/2$ 时我们断言

$$H_t^{\mathbb{S}^1}(x)=H_t(x)+E_t(x)$$

这里误差项满足 $|E_t(x)|\le c_1e^{-c_2/r}$, 其中 $c_1,c_2>0$ 和 $0<t\le 1$. 事实上,

$$E_t(x):=\sum_{|n|\ge 1}H_t(x+n)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\sum_{|n|\ge 1}e^{-(x+n)^2/4t}\le Ct^{-1/2}\sum_{n\ge 1}e^{-cn^2/t}$$

这是因为 $|x|\le 1/2$. 注意到 $n^2/t\ge n^2$ 和 $n^2/t\ge 1/t$ 只要 $0<t\le 1$, 故 $e^{-cn^2/t}\le e^{-cn^2/2}e^{-c/2t}$. 因此

$$|E_t(x)|\le Ct^{-1/2}e^{-c/2t}\sum_{n\ge 1}e^{-cn^2/2}\le c_1e^{-c_2/t}.$$

因为当 $t\to 0$ 时 $\int_{|x|\le 1/2}|E_t(x)|dx\to 0$, 所以

$$\int_{|\eta<|x|\le 1/2}|H_t^{\mathbb{S}^1}(x)|dx\to 0,\quad t\to 0$$

这是由于 H_t 也满足此性质. $\square$

§16.3.7 * Heisenberg 不确定原理

在量子力学中, **Heisenberg 不确定原理(Heisenberg's uncertainty principle)** 是说

$$(\text{位置的不确定性}) \times (\text{动量的不确定性}) \geq \frac{\hbar}{16\pi^2} > 0$$

这里 $\hbar$ 是 Planck 常数.

定理16.3.25. (Heisenberg 不确定原理) *假设函数 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 满足条件*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 1.$$

则

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right) \geq \frac{1}{16\pi^2}, \tag{16.3.27}$$

且等号取到当且仅当 $f(x) = Ae^{-Bx^2}$, 这里 $B > 0$ 和 $A^2 = \sqrt{2B/\pi}$. 事实上我们有

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 |f(x)|^2 dx\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \xi_0)^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right] \geq \frac{1}{16\pi^2}. \tag{16.3.28}$$

证: 第二个不等式 (16.3.28) 可从第一个不等式 (16.3.27) 推出只要把 $f(x)$ 换成 $e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi_0} f(x + x_0)$ 即可. 现在我们来证明 (16.3.27). 计算得到

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \left(x\frac{d}{dx}|f(x)|^2\right) dx \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \left[xf'(x)\overline{f(x)} + x\overline{f'(x)}f(x)\right] dx \leq 2\int_{-\infty}^{\infty} |x||f(x)||f'(x)|dx \\ &\leq 2\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2|f(x)|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 dx\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

由于 $\widehat{f'}(\xi) = 2\pi\sqrt{-1}\xi\hat{f}(\xi)$, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f'}(\xi)|^2 d\xi = 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

从而得到 (16.3.27). □

Heisenberg 不确定原理可以用**Hermite 算子(Hermite operator)** 来描述:

$$\mathbf{L} := -\frac{d^2}{dx^2} + x^2. \tag{16.3.29}$$

这里对 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 定义

$$\mathbf{L}(f)(x) := -f''(x) + x^2 f(x). \tag{16.3.30}$$

考虑 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上的内积

$$(f,g) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx, \quad f,g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

在**定理16.3.25** 中我们已经证明了

$$(\mathbf{L}f,f) \geq (f,f), \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{16.3.31}$$

如上不等式我们常记作 $\mathbf{L} \geq \mathbf{I}$. 考虑 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上的**湮灭算子(annihilation operator)** 和**产生算子(creation operator)**

$$\mathbf{A} := \frac{d}{dx} + x, \quad \mathbf{A}^* := -\frac{d}{dx} + x. \tag{16.3.32}$$

练习16.3.26. 对所有 $f,g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 证明

$$(\mathbf{A}f,g) = (f,\mathbf{A}^*g), \quad (\mathbf{A}f,\mathbf{A}f) = (\mathbf{A}^*\mathbf{A}f,f) \geq 0, \quad \mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{L} - \mathbf{I}.$$

对每个 $t \in \mathbb{R}$ 定义

$$\mathbf{A}_t := \frac{d}{dx} + tx, \quad \mathbf{A}^* := -\frac{d}{dx} + tx. \tag{16.3.33}$$

我们可以把 $(\mathbf{A}_t^*\mathbf{A}_t f,f)$ 看成是 t 的多项式.

练习16.3.27. 利用不等式 $(\mathbf{A}_t^*\mathbf{A}_t f,f) \geq 0$ 来给出 Heisenberg 不确定原理的另一个证明.

Hermite 函数(Hermite functions) $h_k(x)$ 定义为

$$\sum_{k\geq 0} h_k(x)\frac{t^k}{k!} = e^{-\frac{x^2}{2}+2tx-t^2}. \tag{16.3.34}$$

练习16.3.28. 证明

$$h_k(x) = (-1)^k e^{x^2/2}\left(\frac{d}{dx}\right)^k e^{-x^2}. \tag{16.3.35}$$

对任何 $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ 我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-y^2}e^{2xy}dy = 0 \text{ 对任意 } x \in \mathbb{R} \Longrightarrow f \equiv 0.$$

实际上我们可以考虑 $f * e^{-x^2}$.

称 $\{h_k(x)\}_{k\geq 0}$ 是**完备的(complete)** 如果 $(f,h_k) = 0$ 对所有 $k \geq 0$ 和 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 都成立.

练习16.3.29. 验证在 (16.3.35) 中定义的 $\{h_k(x)\}_{k\geq 0}$ 是完备的.

定义

$$h_k^*(x) := h_k\left(\sqrt{2\pi}x\right). \tag{16.3.36}$$

练习16.3.30. 证明 $\widehat{h_k^*}(\xi) = (-\sqrt{-1})^k h_k^*(\xi)$. 从而每个 h_k^* 是 Fourier 变换的特征函数. 证明 $\mathbf{L}h_k = (2k+1)h_k$. 特别地, h_k 关于 Schwartz 空间上的 L^2- 内积是正交的. 最后证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h_k(x)|^2 dx = \pi^{1/2} 2^k k!.$$

§16.4 Fourier 级数的性质

假设 f 是以 2π 为周期的周期函数. 则

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) =: S(f)(x).$$

根据**定理16.2.23** 得到

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} b_n, \quad f \in R([-\pi,\pi]). \tag{16.4.1}$$

§16.4.1 Fourier 级数的分析性质

我们首先利用**定理16.4.2** 来证明如下关于 Fourier 级数的三个基本性质.

定理16.4.1. (A) **(Fourier 级数的逐项积分定理)** 假设 $f \in R([-\pi,\pi])$ 则

$$\int_c^x f(t)\,dt = \int_c^x \frac{a_0}{2}dt + \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_c^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\,dt \tag{16.4.2}$$

对任何 $c, x \in [-\pi,\pi]$ 都成立.

(B) **(Fourier 级数的逐项微分定理)** 如果 $f'' \in R([-\pi,\pi])$ 则

$$f'(x) = \sum_{n\in\mathbf{N}} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx) \tag{16.4.3}$$

对任何 $x \in [-\pi,\pi]$ 都成立.

(C) **(Fourier 级数的一致收敛定理)** 如果 $f' \in R([-\pi,\pi])$ 则 $S(f)(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛到 $f(x)$.

证: (C) 因为

$$f'(x) \sim \sum_{n\geq 1} (nb_n \cos nx - na_n \sin nx),$$

所以得到

$$\sum_{1\leq n\leq N} (|a_n| + |b_n|) \quad = \quad \sum_{1\leq n\leq N} \frac{|nb_n| + |na_n|}{n}$$

$$\leq \left[\sum_{1\leq n\leq N}\left((nb_n)^2+(na_n)^2\right)\right]^{1/2}\left(\sum_{1\leq n\leq N}\frac{2}{n^2}\right)^{1/2} \leq \frac{\pi}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2dx\right]^2.$$

因此 $S(f)(x)$ 绝对一致收敛到 $f(x)$.

(B) 因为 $f'' \in R([-\pi,\pi])$, 我们应用 (C) 到 f'.

(A) 考虑函数

$$g(x) := \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & t=0 \text{ or } t=x, \\ \pi, & 0<t<x, \\ 0, & x<t<2\pi. \end{cases}$$

则得到

$$g(x) \sim \frac{x}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{\sin nx}{x}\cos nt + \frac{1-\cos nx}{x}\sin nt\right).$$

利用 (16.4.7) 得到

$$\frac{1}{\pi}\int_0^x \pi f(t)dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{a_n}{n}\sin nx + \frac{b_n}{n}(1-\cos nx)\right)$$

对任何 $0\leq x\leq 2\pi$ 都成立. 从而证明了 (16.4.2) 对 $c=0$ 成立. 对一般的 c 作平移即得证. □

§16.4.2 Fourier 级数的平方逼近性质

我们将利用 Parseval 等式来证明下面的 Weierstrass 逼近定理.

定理16.4.2. (D) **(Weierstrass)** *如果 f 是以 2π 为周期的连续周期函数, 则存在三角多项式列 $\{T_n\}_{n\geq 1}$, 其中*

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0^n}{2} + \sum_{1\leq k\leq n}(\alpha_k^n \cos kx + \beta_k^n \sin kx),$$

使得对任意 $\epsilon>0$ 存在整数 $N\in\mathbb{N}$ 满足

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-T_n(x)| \leq \epsilon$$

只要 $n\geq N$.

(E) **(Parseval, 1799)** *如果 $f\in R([-\pi,\pi])$, 则*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(a_n^2+b_n^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx. \tag{16.4.4}$$

证: (D) 回顾

$$S_n(f)(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{1\leq k\leq n}(a_n\cos kx + b_k \sin kx) = (f*D_n)(x),$$

这里

$$D_n(x) := \sum_{|k|\le n} e^{\sqrt{-1}kx}.$$

Fejér 核是指

$$\sigma_n(f) := \frac{1}{n}\sum_{0\le i\le n-1} S_i(f) = f * F_n, \quad F_n(x) = \frac{1}{N}\frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}.$$

对任意 $x \in [-\pi,\pi]$ 我们有

$$\begin{aligned}|f(x)-\sigma_n(f)(x)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)F_n(y)dy - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)F_n(x-y)dy\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(y)|f(x)-f(x-y)|dy.\end{aligned}$$

因为 $f \in C([-\pi,\pi])$ 且是周期函数, 所以 f 在 $\mathbb{R}$ 上是一致连续的. 对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 满足 $|f(x_1)-f(x_2)| < \epsilon/3$ 只要 $|x_1 - x_2| < \delta$. 计算得到

$$\begin{aligned}|f(x)-\sigma_n(f)(x)| &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} F_n(y)|f(x)-f(x-y)|dy \\ + \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} F_n(y)|f(x)-f(x-y)|dy &+ \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} F_n(y)|f(x)-f(x-y)|dy \\ &:= I_1 + I_2 + I_3.\end{aligned}$$

对 I_1 有

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} F_n(y)|f(x)-f(x-y)|dy \\ \le \frac{1}{\pi}\sup_{[-\pi,\pi]}|f|\cdot\int_{-\pi}^{-\delta}\frac{\sin^2(Ny/2)}{N\sin^2(y/2)}dy &\le \frac{1}{\pi}\sup_{[-\pi,\pi]}|f|\cdot\int_{-\pi}^{-\delta}\frac{dy}{N\sin^2(\delta/2)} \\ = \frac{1}{\pi}\sup_{[-\pi,\pi]}|f|\cdot\frac{\pi-\delta}{\sin^2(\delta/2)}\cdot\frac{1}{N} &\le \frac{\sup_{[\pi,\pi]}|f|}{\sin^2(\delta/1)}\cdot\frac{1}{N}\end{aligned}$$

从而意味着存在整数 $N_1 \in \mathbb{N}$ 满足

$$I_1 < \frac{\epsilon}{3}, \quad n > N_1.$$

同样我们可以找到 $N_2 \in \mathbb{N}$ 满足

$$I_3 < \frac{\epsilon}{3}, \quad n > N_2.$$

对 I_2 有

$$I_2 \le \frac{\epsilon}{6\pi}\int_{-\delta}^{\delta} F_n(y)dy \le \frac{\epsilon}{6\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(y)dy \le \frac{\epsilon}{3}.$$

这样对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $n > N := \max\{N_1, N_2\}$ 满足 $|f(x)-\sigma_n(f)(x)| < \epsilon$ 只要 $x \in [-\pi,\pi]$.

(E) 回顾 $f \in R^2([a,b])$ 如果 $f, |f|^2 \in R([a,b])$. 在 $R^2([a,b])$ 中函数列 $\{f_n\}_{n\geq 1} \to f$ 如果 $f_n, f \in R^2([a,b])$ 且

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0.$$

下面事实是显然的:

(i) $f \in R^2([a,b]) \Rightarrow |f| \in R([a,b])$. 事实上,

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq \frac{1}{2}\left(\int_a^b |f(x)|^2 dx + b - a\right).$$

(ii) $f, g \in R^2([a,b]) \Rightarrow |fg| \in R([a,b])$ 且 $f+g \in R^2([a,b])$. 事实上我们有

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

和

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^2 dx\right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

现在来证明 (16.4.4). 根据**引理16.4.4** 可知对任意 $\epsilon > 0$ 存在整数 $N \in \mathbb{N}$ 满足

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(f)(x)|^2 dx < \epsilon$$

只要 $n \geq N$. 因为

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(f)(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{1\leq k\leq n}(a_k^2 + b_k^2)\right],$$

所以

$$0 \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{1\leq k\leq n}(a_k^2 + b_k^2)\right] < \epsilon$$

只要 $n \geq N$. □

引理16.4.3. (最佳逼近) 假设 $f \in R([-\pi,\pi])$. 对任意三角多项式

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{1\leq k\leq n}(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

我们有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(f)(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_n(x)|^2 dx. \tag{16.4.5}$$

证: 由于 $f-T_n\in R([-\pi,\pi])$, 我们定义

$$\Delta_n:=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-T_n(x)|^2dx\right)^{1/2}.$$

计算得到

$$\begin{aligned}\Delta_n^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-R_n(x)|^2dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)T_n(x)dx+\int_{-\pi}^{\pi}T_n^2(x)dx\right]\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left[\frac{\alpha_2}{2}+\sum_{1\le k\le n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right]dx\\
&\quad+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{1\le k\le n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right]^2dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\frac{\alpha_0a_0}{2}-\sum_{1\le k\le n}(\alpha_ka_k+\beta_kb_k)+\frac{\alpha_0^2}{2}+\frac{1}{2}\sum_{1\le k\le n}\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx+\frac{1}{2}\left[\frac{(\alpha_0-a_0)^2}{2}+\sum_{1\le k\le n}(\alpha_k-a_k)^2+(\beta_k-b_k)^2\right]\\
&\quad-\frac{a_0^2}{4}-\frac{1}{2}\sum_{1\le k\le n}\left(a_k^2+b_k^2\right).\end{aligned}$$

另一方面

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(f)(x)|^2dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\frac{a_0^2}{4}-\frac{1}{2}\sum_{1\le k\le n}\left(a_k^2+b_k^2\right).$$

因此

$$\begin{aligned}&\Delta_n^2-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(f)(x)|^2dx\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{(\alpha_0-a_0)^2}{2}+\sum_{1\le k\le n}(\alpha_k-a_k)^2+(\beta_k-b_k)^2\right]\ \ge\ 0.\end{aligned}$$

故得到 (16.4.5). □

引理16.4.4. 如果 $f\in R([-\pi,\pi])$, 则在 $R^2([-\pi,\pi])$ 上有 $S_n(f)\to f$. 即,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(f)(x)|^2dx=0. \tag{16.4.6}$$

证: 对任意 $m<n$ 我们有

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(f)(x)|^2dx\le\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_m(f)(x)|^2dx$$

这是由于**引理16.4.3**. 因此数列

$$\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(f)(x)|^2dx\right\}_{n\geq 1}$$

是递减的. 根据连续函数 Weierstrass 定理我们可以找到函数 $g\in C([-\pi,\pi])$ 满足 $g(-\pi)=g(\pi)$ 使得

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|^2dx<\frac{\epsilon}{4}$$

对给定的 $\epsilon>0$ 成立. 根据 (D), 存在三角多项式

$$T_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{1\leq k\leq n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)$$

使得

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]}|g(x)-T_n(x)|<\sqrt{\frac{\epsilon}{8\pi}}$$

成立. 故

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-T_n(x)|^2dx\leq 2\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|^2+2\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)-T_n(x)|^2dx<\epsilon.$$

再次利用**引理16.4.3** 推出

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(f)(x)|^2dx\leq\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-T_n(x)|^2dx<\epsilon.$$

故得到 (16.4.6). □

注16.4.5. *我们可以找到三角级数* $T(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n\geq 1}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)$ *使得对任何可积周期函数* $f(x)$ *有* $S(f)(x)\neq T(x)$*. 事实上, 考虑三角级数*

$$T(x):=\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(nx)}{\sqrt{n}}.$$

如果 $T(x)=S(f)(x)$*, 则* (16.4.4) *推出*

$$\infty=\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx<\infty$$

产生矛盾!

公式 (16.4.4) 可显然作推广. 如果 $f,g\in R([-\pi,\pi])$, 则

$$\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n\geq 1}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx, \tag{16.4.7}$$

这里

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

和

$$g(x)\sim\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n\geq 1}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx).$$

练习16.4.6. 验证 (16.4.7).

例16.4.7. 考虑级数 $f(x) = \frac{x^2}{2} - \pi x, 0 \le x \le 2\pi$. 因为

$$\frac{\pi - x}{2} \sim \sum_{n\ge1} \frac{\sin nx}{n}$$

所以

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\pi - t}{2} dt = \frac{1}{2}\sum_{n\ge1}\int_0^x \frac{\sin nt}{n} dt = \frac{1}{2}\left[-\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^2} + \sum_{n\ge1}\frac{cosnx}{n^2}\right].$$

故

$$\frac{x^2}{2} - \pi x = -\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n\ge1}\frac{2\cos nx}{n^2}, \quad x \in [0, 2\pi]. \tag{16.4.8}$$

§16.5 * 等周不等式

再次回顾曲线的基本概念. 参数曲线 γ 定义为映射 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$. γ 的像集称为**曲线**并记为 Γ. 曲线是**简单的**如果自身不相交, 称为是**闭的**如果两个端点重合. 我们可以把 γ 延拓成周期为 $b - a$ 的 $\mathbb{R}$ 上的周期函数, 从而可以把 γ 看成是圆上的函数. 更进一步 γ 的参数诱导出 Γ 上的定向: 参数 s 从 a 到 b.

假设: 我们总是假设 γ 是 C^1 的, 且其导数 $\dot{\gamma}$ 满足 $\dot{\gamma}(s) \neq 0$.

任何 C^1 双射 $s : [c, d] \to [a, b]$ 给出了 Γ 的另一个参数化

$$\eta(t) := \gamma(s(t)).$$

注意到条件 "γ 是闭的和简单的" 和所选择的参数化无关. 称上述两个参数化 γ 和 η 是**等价的**如果 $\dot{s}(t) > 0$ 对所有 $t \in [c, d]$ 都成立; 这意味着 η 和 γ 诱导出曲线 Γ 上相同的定向. 如果 $\dot{s}(t) < 0$ 则此时 η 转变定向.

§16.5.1 弧长和面积

假设 γ 的参数方程为 $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ 则曲线 Γ 的长度定义为

$$L(\gamma) := \int_a^b |\dot{\gamma}(s)| ds = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2} ds. \tag{16.5.1}$$

γ 的长度不依赖于所选的参数化. 事实上如果 $\gamma(s(t)) = \eta(t)$, 这里 $s : [c, d] \to [a, b]$ 是某个 C^1 双射, 则

$$\int_a^b |\dot{\gamma}(s)| ds = \int_c^d |\dot{\gamma}(s(t))||\dot{s}(t)| dt = \int_c^d |\dot{\eta}(t)| dt.$$

称 γ 是**弧长参数化(parametrization by arc-length)** 如果 $|\dot{\gamma}(s)| = 1$ 对所有 s 都成立. 这也就是说 $\gamma(s)$ 以常速度行进从而 Γ 的长度为 $b - a$. 因此, 在差一个可能的平移变换外, 弧长的参数化区间记作 $[0, \ell]$, 这里 $\ell := L(\gamma)$.

练习16.5.1. 令 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ 是闭曲线 Γ 的参数化.

(i) 证明 γ 是弧长参数化 $\Longleftrightarrow$ 从 $\gamma(a)$ 到 $\gamma(s)$ 的曲线长度为 $s-a$, 即,

$$\int_a^s |\dot{\gamma}(t)|dt = s-a.$$

(ii) 证明任何曲线 Γ 都有弧长参数化.

(iii) 如果 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, 则曲线长度等于

$$\frac{1}{2}\int_a^b [x(s)\dot{y}(s) - y(s)\dot{x}(s)]ds = \int_a^b x(s)\dot{y}(s)ds = -\int_a^b y(s)\dot{x}(s)ds.$$

(iv) 定义 γ 的**反向参数化(reverse parametrization)** 为 $\gamma^- : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ 其中 $\gamma^-(t) := \gamma(b+a-t)$. γ^- 的像是 Γ, 但是 $\gamma^-(t)$ 和 $\gamma(t)$ 沿着相反的方向行进. 即 γ^- 把曲线的方向"反向". 证明

$$\int_\gamma (xdy + ydx) = -\int_{\gamma^-} (xdy - ydx).$$

§16.5.2 等周不等式

假设 Γ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的 Jordan 曲线并令 D 是由此曲线所围成的区域. 根据 Green 公式 (13.9.2) 区域 D 的面积为

$$A = \frac{1}{2}\left|\int_\Gamma (xdy - ydx)\right|. \tag{16.5.2}$$

定理16.5.2. (等周不等式) 假设 Γ 是 $\mathbb{R}^2$ 中长为 L 的 Jordan 曲线并令 A 是由此曲线所围成的区域的面积. 则

$$A \le \frac{L^2}{4\pi} \tag{16.5.3}$$

且等号取到当且仅当 Γ 是圆.

证: 不失一般性我们不妨假设 $L := 2\pi$. 令

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(s) := (x(s), y(s))$$

是曲线 Γ 的弧长参数化, 即, $\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2 = 1$ 对所有 $s \in [0, 2\pi]$ 都成立. 这意味着

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2\right] ds = 1. \tag{16.5.4}$$

因为曲线是闭的, 所以函数 $x(s)$ 和 $y(s)$ 都是以 2π 为周期的, 故

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^2 \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) = 1, \tag{16.5.5}$$

根据 (16.5.4) 和 (16.4.4), 这里

$$x(s) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{\sqrt{-1}ns}, \quad y(s) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n e^{\sqrt{-1}ns}.$$

因为 $x(s)$ 和 $y(s)$ 都是实值的, 所以我们得到 $a_n = \overline{a_{-n}}$ 和 $b_n = \overline{b_{-n}}$. 因此根据 (16.4.7), 得到

$$A = \frac{1}{2}\left|\int_0^{2\pi} [x(s)\dot{y}(s) - y(s)\dot{x}(s)]\, ds\right| = \pi\left|\sum_{n\in\mathbb{N}} n\left(a_n\overline{b_n} - b_n\overline{a_n}\right)\right|.$$

从不等式

$$\left|a_n\overline{b_n} - b_n\overline{a_n}\right| \le 2|a_n||b_n| \le |a_n|^2 + |b_n|^2, \tag{16.5.6}$$

和 (16.5.5) 我们得到

$$A \le \pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^2\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) \le \pi.$$

当 $A = \pi$ 时得到

$$x(s) = a_{-1}e^{-\sqrt{-1}s} + a_0 + a_1 e^{\sqrt{-1}s}, \quad y(s) = b_{-1}e^{-\sqrt{-1}s} + b_0 + b_1 e^{\sqrt{-1}s}$$

这是因为 $|n| < |n|^2$ 仅当 $|n| \ge 2$ 时成立. 我们知道 $x(s)$ 和 $y(s)$ 都是实值的, 因此 $a_{-1} = \overline{a_1}$ 和 $b_{-1} = \overline{b_1}$. 恒等式 (16.5.5) 推出 $2(|a_1|^2 + |b_1|^2) = 1$, 但是在 (16.5.6) 中我们取等式从而必有 $|a_1| = |b_1| = 1/2$. 记 $a_1 = \frac{1}{2}e^{\sqrt{-1}\alpha}$ 和 $b_1 = \frac{1}{2}e^{\sqrt{-1}\beta}$. $1 = 2|a_1\overline{b_1} - \overline{a_1}b_1|$ 这个事实蕴含了 $|\sin(\alpha-\beta)| = 1$, 所以 $\alpha - \beta = k\pi/2$ 其中 k 是整数. 由此我们得到

$$x(s) = a_0 + \cos(\alpha + s), \quad y(s) = b_0 \pm \sin(\alpha + s)$$

这里 $y(s)$ 中的正负号依赖于整数的 k 的奇偶性. 但是无论如何我们证明了 Γ 是一圆. □

练习16.5.3. 本练习构造 $[0,1]$ 上的 (Riemann) 可积函数使得它的不连续点集是稠密的. 从而在 $[0,1]$ 上得到了一个几乎处处不连续的可积函数.

(a) 取 $f(x) = 0$ 当 $x < 0$ 时, 和 $f(x) = 1$ 当 $x \ge 0$ 时. 选择 $[0,1]$ 内的可数稠密数列 $\{r_n\}_{n\ge1}$ (比如取 $[0,1]$ 内的有理数点). 则证明函数

$$F(x) := \sum_{n\ge1} \frac{f(x - r_n)}{n^2}$$

是可积的且仅在 r_n 处是不连续的.

(b) 接下来考虑函数

$$F(x) := \sum_{n\ge1} \frac{g(x - r_n)}{3^n},$$

这里 $g(x) = \sin(1/x)$ 当 $x \ne 0$ 时和 $g(0) = 0$. 证明 F 时可积的, 在每个 $x = r_n$ 处时不连续的, 且在 $[0,1]$ 中的任意子区间内是不单调的.

(c) Riemann 最初是研究函数

$$F(x) := \sum_{n\geq 1}\frac{(nx)}{n^2},$$

这里 $(x) = x$ 当 $x \in (-1/2, 1/2]$ 时并把它按照周期函数延拓到整个 $\mathbb{R}$ 上来, 即, $(x+1) = (x)$. 可以证明 F 在 $x = m/2n$, 这里 $m, n \in \mathbb{Z}$ 且满足 m 是奇数和 $n \neq 0$, 处是不连续的.

§16.6 * 大筛法简介及在孪生素数猜想中的应用

本节主要内容来源于Tenenbaum 的专著 (见参考文献). 回顾下著名的孪生素数猜想, **猜想1.6.8**. 为了更好的来理解这个猜想, Hardy 和Littlewood 在 1922 年提出了如下的猜想

$$\mathbf{TP}(x) \sim 2\prod_{2<p\in\mathbb{P}}\left[1-\frac{1}{(p-1)^2}\right]\frac{x}{\ln^2 x}, \quad x \to +\infty, \tag{16.6.1}$$

这里 $\mathbb{P}$ 表示全体的素数, 和

$$\mathbf{TP}(x) := |\mathbb{TP}\cap[1,x]|, \quad \mathbb{TP} := \{p \in \mathbb{P} | p+2 \in \mathbb{P}\}.$$

常数

$$\prod_{2<p\in\mathbb{P}}\left[1-\frac{1}{(p-1)^2}\right] \approx 0.660161815846869573927812110014\cdots$$

称为**Hardy-Littlewood 孪生素数常数**.

Brun[5] 利用他自己创造的**Brun 组合筛法** (1917 - 1924) 证明了

$$\mathbf{TP}(x) \ll x\left(\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right)^2, \tag{16.6.2}$$

这里Vinogradov[6] 记号 $f \ll g$ 表示为 $|f| \leq C|g|$, 其中 C 是某个正常数.

[5] Viggo Burn, 1885 年 10 月 13 日 - 1978 年 8 月 15 日, 挪威数学家, 奥斯陆大学毕业, 挪威皇家科学与文学院院士, 主要研究方向是数论.

[6] Ivan Matveevich Vinogradov, 1891 年 9 月 14 日 - 1983 年 3 月 20 日, 前苏联数学家, 圣彼得堡大学毕业, 苏联科学院院士, 主要研究领域是解析数论. 是现代解析数论的创始人之一, 一直担任 Steklov 数学所所长直到去世 (1941 年 - 1946 年是由Sergei Sobolov 担任). 最重要的工作是在 1937 年证明了每个充分大的奇数都可表为三个素数之和, 即证明了充分大时的奇数 Goldbach 猜想或 Goldbach 弱猜想. 2012 年 Terence Tao 证明了每个奇数都可表为最多五个素数之和. 2013 年Harald Helfgott 改进了大弧和小弧估计从而最终证明了奇数 Goldbach 猜想, 即每个奇数都可表为三个素数之和.

§16.6.1 * 大筛法的解析形式

大筛法是Linnik[7] 在 1941 年引入的. Davenport[8] 和Halberstam[9] 最早将解析形式从大筛法中剥离出来 (1966).

假设 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ 是复数列. 对给定的整数 $M\geq -1$ 和 $N\geq 1$ 定义三角多项式

$$\mathcal{S}(\alpha;M,N,\{a_n\}_{n\geq 0})\equiv\mathcal{S}(\alpha):=\sum_{M<n\leq M+N}a_n e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha n}. \tag{16.6.3}$$

大筛法的解析形式是指如下形式的不等式

$$\sum_{1\leq i\leq R}|\mathcal{S}(\alpha_i)|^2\leq\Delta(N,\delta)\sum_{M<n\leq M+N}|a_n|^2, \tag{16.6.4}$$

对满足条件

$$\min_{1\leq i<j\leq R}||\alpha_j-\alpha_i||>\delta>0,$$

的任意 R- 元实数组 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_R\}$ 都成立, 这里 $||u||$ 表示实数 u 到整数集 $\mathbb{Z}$ 的距离.

定理16.6.1. (Montgomery-Vaughan, 1978; Selberg) *在大筛法不等式 (16.6.4) 中可以取*

$$\Delta(N,\delta)=N+\frac{1}{\delta}-1. \tag{16.6.5}$$

Montgomery 和Vaughan 证明了可以取 $\Delta(N,\delta)=N+1/\delta$. 但是下面例子表明 (16.6.5) 是最佳的, 即存在 α_i,N,δ 使得 (16.6.5) 成立.

例16.6.2. *对任意 $R\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, 定义 $\alpha_i:=i/R$, $1\leq i\leq R$. 则得到 $\delta=1/R$. 当 $N\equiv 1(\operatorname{mod} R)$ 和 $M=-1$ 考虑复数列*

$$a_n:=\begin{cases}1, & R|n,\\ 0, & R\nmid n.\end{cases}$$

计算得到

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i\leq R}|\mathcal{S}(\alpha_i)|^2 &= \sum_{1\leq i\leq R}\left|\sum_{0\leq n\leq N-1,\ n\equiv 0(\operatorname{mod} R)}e^{2\pi\sqrt{-1}(in/R)}\right|^2\\ &= \sum_{1\leq i\leq R}\left|\sum_{0\leq n\leq N-1,\ n\equiv 0(\operatorname{mod} R)}1\right|^2 = R\left(\frac{N-1}{R}+1\right)^2\end{aligned}$$

[7]Yuri Vladimirovich Linnik, 1915 年 1 月 8 日 - 1972 年 6 月 30 日, 前苏联数学家, 圣彼得堡大学毕业, 苏联科学院院士, 主要研究邻域是数论、概率论和数学统计.

[8]Harold Davenport, 1907 年 10 月 30 日 - 1969 年 6 月 9 日, 英国数学家, 剑桥大学毕业, 英国皇家学会会员. 主要研究领域是数论.

[9]Heini Halberstam, 1926 年 9 月 11 日 - 2014 年 1 月 25 日, 英国和智利数学家, 伦敦大学学院毕业, 美国数学会会员, 主要研究领域是解析数论和组合数论.

$$= \quad (N-1+R)\left(1+\frac{N-1}{R}\right) \quad = \quad (N+\delta^{-1}-1)\sum_{0\le n\le N-1}|a_n|^2.$$

引理16.6.3. 假设 (c_{nr}) 是 $N\times R$ 复矩阵. 则下面关于正实数 D 的三个断言等价:

(1) 对任何 $x_n\in\mathbb{C}$ 有

$$\sum_{1\le r\le R}\left|\sum_{1\le n\le N}c_{nr}x_n\right|^2 \le D\sum_{1\le n\le N}|x_n|^2;$$

(2) 对任何 $x_n, y_r\in\mathbb{C}$ 有

$$\left|\sum_{1\le n\le N,\ 1\le r\le R}c_{nr}y_rx_n\right|^2 \le D\sum_{1\le n\le N}|x_n|^2\sum_{1\le r\le R}|y_r|^2;$$

(3) 对任何 $y_r\in\mathbb{C}$ 有

$$\sum_{1\le n\le N}\left|\sum_{1\le r\le R}c_{nr}y_r\right|^2 \le D\sum_{1\le r\le R}|y_r|^2.$$

证: (1) $\Longleftrightarrow$ (2). 假设 (1) 成立, 则得到

$$\left|\sum_{1\le n\le N,\ 1\le r\le R}c_{nr}y_rx_n\right|^2 \quad = \quad \left|\sum_{1\le r\le R}y_r\cdot\sum_{1\le n\le N}c_{nr}x_n\right|^2$$

$$\le \quad \sum_{1\le r\le R}|y_r|^2\sum_{1\le r\le R}\left|\sum_{1\le n\le N}c_{nr}x_n\right|^2 \quad \le \quad D\sum_{1\le r\le R}|y_r|^2\sum_{1\le n\le N}|x_n|^2.$$

反之假设 (2) 成立. 定义

$$L_r := \sum_{1\le n\le N}c_{nr}x_n, \quad y_r := \overline{L_r}.$$

从而得到

$$\left({}_{1\le r\le R}|L_r|^2\right) \le D\sum_{1\le n\le N}|x_n|^2\cdot\sum_{1\le r\le R}|L_r|^2.$$

类似可证 (3) $\Longleftrightarrow$ (2). □

引理16.6.4. 假设 $\{\alpha_r\}_{1\le r\le R}$ 是固定的一组实数. 对任意满足条件

$$b_n>0, \quad M<n\le M+N$$

的非负实数列 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 和任意正数 B, 下面两个断言等价:

(1) 对任意 $a_n \in \mathbb{C}$ 有

$$\sum_{1\le r\le R} |\mathcal{S}(\alpha_r)|^2 \le B \sum_{M<n\le M+N} \frac{|a_n|^2}{b_n}.$$

(2) 对任意 $y_r \in \mathbb{C}$ 有

$$\sum_{M<n\le M+N} b_n \left|\sum_{1\le r\le R} y_r e^{2\pi\sqrt{-1}n\alpha_r}\right|^2 \le B \sum_{1\le r\le R} |y_r|^2.$$

证: (1) 等价于

$$\sum_{1\le r\le R} \left|\sum_{M<n\le M+N} a_n\sqrt{b_n} e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha_r n}\right|^2 \le B \sum_{1\le n\le N} |a_n|^2, \quad \forall\, a_n \in \mathbb{C}.$$

在**引理16.6.4** 中取 $c_{nr} = \sqrt{b_n} e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha_r n}$ 得证. □

推论16.6.5. 假设

$$B(\alpha) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n e^{2\pi\sqrt{-1}n\alpha}$$

是一收敛的 Fourier 级数, 其中 b_n 是非负实数且满足 $b_n > 0$, $M < n \le M+N$. 则对每个正数 B, 只要满足

$$\sum_{1\le r,s\le R} y_r\overline{y_s} B(\alpha_r - \alpha_s) \le B \sum_{1\le r\le R} |y_r|^2, \quad \forall\, y_r \in \mathbb{C},$$

就有不等式

$$\sum_{1\le r\le R} |\mathcal{S}(\alpha_r)|^2 \le B \sum_{M<n\le M+N} \frac{|a_n|^2}{b_n}, \quad \forall\, a_n \in \mathbb{C},$$

成立.

证: 把假设条件展开得到

$$B \sum_{1\le r\le R} |y_r|^2 \ \ge \ \sum_{1\le r,s\le R} y_r\overline{y_s} \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n e^{2\pi\sqrt{-1}n(\alpha_r-\alpha_s)}$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n \sum_{1\le r,s\le R} y_r\overline{y_s} e^{2\pi\sqrt{-1}n\alpha_r} e^{-2\pi\sqrt{-1}n\alpha_s} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n \left|\sum_{1\le r\le R} y_r e^{2\pi\sqrt{-1}n\alpha_r}\right|^2.$$

此时结论立即从**引理16.6.4** 得到. □

假设 Fourier 级数 $B(\alpha) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n e^{2\pi\sqrt{-1}n\alpha}$ 满足如下条件

(a) $b_n \ge 0$ $(n \in \mathbb{Z})$ 和 $b_n \ge 1$ $(M < n \le M+N)$,

(b) $B(\alpha)=0\ (||\alpha||\geq\delta)$,

这里 δ 出现在 (16.6.4) 中. 为了方便期间我们不妨再假设

(c) $\delta\in(0,1/2)$.

此时根据**推论16.6.5** 得到只要满足条件

$$\sum_{1\leq r,s\leq R}y_r\overline{y_s}B(\alpha_r-\alpha_s)\leq B\sum_{1\leq r\leq R}|y_r|^2,\quad\forall\, y_r\in\mathbb{C}$$

就有不等式

$$\sum_{1\leq r\leq R}|\mathcal{S}(\alpha_r)|^2\leq\sum_{M<n\leq M+N}\frac{B}{b_n}|a_n|^2,\quad\forall\, a_n\in\mathbb{C}$$

成立. 但是根据条件 (b) 可知

$$\min_{1\leq r,s\leq R}||\alpha_r-\alpha_s||\geq\delta>0\quad\Longrightarrow\quad B(\alpha_r-\alpha_s)=0;$$

因此得到 (16.6.4) 这是

$$\Delta(N,\delta)=B(0)$$

(即若所有的 α_r 都相等就得到 $B=B(0)$).

下面的工作就是具体构造满足上述条件 (a), (b) 和 (c) 的 Fourier 级数 $B(\alpha)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}b_ne^{2\pi\sqrt{-1}n\alpha}$. 假设 $b\in L^1(\mathbb{R})$ (Lebesgue 绝对可积, Lebesgue 积分的定义在之后的章节中给出, 暂且可当作是 Riemann 绝对可积) 的 Fourier 变换

$$\widehat{b}(\theta):=\int_{-\infty}^{+\infty}b(t)e^{-2\pi\sqrt{-1}\theta t}dt$$

的紧撑集包含在 $[-\delta,\delta]$ 内. 根据 Poisson 求和公式, **定理16.3.17**, 得到

$$B(\alpha)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}b_ne^{2\pi\sqrt{-1}n\alpha}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{b}(k-\alpha),\quad b_n:=b(n).\tag{16.6.6}$$

事实上, 虽然 Poisson 求和公式对 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 成立, 但是对我们选择的 $b\in L^1(\mathbb{R})$ 也是成立的. 具体证明如下, 主要是用到了 Fourier 变换的紧撑集包含在某个闭区间内. 虽然 Fourier 变换可以定义在 $L^1(\mathbb{R})$ 上, 但此时 Fourier 反演公式 (16.3.4) 不一定成立. 如果 $f\in L^1(\mathbb{R})$ 且 $\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R})$ 则 (16.3.4) 也成立 (具体证明在之后的章节中给出, 或参考Grafakos 的专著 (第 117 页)). 因为 $\widehat{b}$ 的紧撑集落在 $[-\delta,\delta]$ 内, 所以 $\widehat{b}\in L^1(\mathbb{R})$ 从而得到

$$b(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{b}(\theta)e^{2\pi\sqrt{-1}\theta t}d\theta=\int_{-\delta}^{\delta}\widehat{b}(\theta)e^{2\pi\sqrt{-1}\theta t}d\theta.\tag{16.6.7}$$

故对 $N\geq 1$ 和 $|\alpha|\leq 1/2$ 得到, 此时 $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{b}(k-\alpha)=\widehat{b}(-\alpha)$,

$$\begin{aligned}&\sum_{|n|\leq N}b(n)e^{2\pi\sqrt{-1}n\alpha}-\int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}}b(t)e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha t}dt\\ =&\sum_{|n|\leq N}\int_{-\delta}^{\delta}\widehat{b}(\theta)e^{2\pi\sqrt{-1}(\theta+\alpha)n}d\theta-\int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}}\left[\int_{-\delta}^{\delta}\hat{b}(\theta)e^{2\pi\sqrt{-1}(\theta+\alpha)t}d\theta\right]dt\\ =&\int_{-\delta+\alpha}^{\delta+\alpha}\widehat{b}(\theta-\alpha)\left[\sum_{|n|\leq N}e^{2\pi\sqrt{-1}\theta n}-\int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}}e^{2\pi\sqrt{-1}\theta t}dt\right]d\theta.\end{aligned}$$

利用 (16.2.7) 得到

$$\sum_{|n|\leq N}b(n)e^{2\pi\sqrt{-1}n\alpha}-\int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}}b(t)e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha t}dt=\int_{-\delta+\alpha}^{\delta+\alpha}\lambda_\alpha(\theta)\sin[(2N+1)\pi\theta]d\theta, \tag{16.6.8}$$

这里

$$\lambda_\alpha(\theta):=\widehat{b}(\theta-\alpha)\left[\frac{1}{\sin(\pi\theta)}-\frac{1}{\pi\theta}\right].$$

因为 $\lambda_\alpha\in L^1([-\delta+\alpha,\delta+\alpha])$, 所以从**定理16.2.23** 得到 (16.6.8) 右边当 $N\to+\infty$ 时趋于 0. 故

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}b(n)e^{2\pi\sqrt{-1}n\alpha}=\int_{-\infty}^{+\infty}b(t)e^{2\pi\sqrt{-1}t}dt=\widehat{b}(-\alpha)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{b}(k-\alpha).$$

根据周期性对其它 α 上述等式亦成立.

从 (16.6.6) 马上得到条件 (b) 成立. 接下来要去寻找可积函数 $b\in L^1(\mathbb{R})$ 使得

$$B(0)=\widehat{b}(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}b(t)dt \tag{16.6.9}$$

足够小且满足限制条件

$$b(t)\geq 0\ (t\in\mathbb{R}),\quad b(t)\geq 1\ (M+1\leq t\leq M+N),\quad \widehat{b}(\theta)=0\ (|\theta|\geq\delta). \tag{16.6.10}$$

最简单的 $b(t)$ 是 Fejér 型核,

$$b(t):=C\sum_{\delta(M+1)\leq n\leq\delta(M+N)}\left[\frac{\sin[\pi(n-2\delta t)/2]}{\pi(n-2\delta t)/2}\right]^2.$$

计算得到

$$\begin{aligned}\widehat{b}(\theta)&=\int_{-\infty}^{+\infty}b(t)e^{-2\pi\sqrt{-1}\theta t}dt\\ &=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi\sqrt{-1}\theta t}\left\{C\sum_{\delta(M+1)\leq n\leq\delta(M+N)}\left[\frac{\sin\frac{\pi(n-2\delta t)}{2}}{\frac{\pi(n-2\delta t)}{2}}\right]^2\right\}dt\end{aligned}$$

$$= C \sum_{\delta(M+1)\le n\le\delta(M+N)} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\sin\frac{\pi(n-2\delta t)}{2}}{\frac{\pi(n-2\delta t)}{2}}\right]^2 e^{-2\pi\sqrt{-1}\theta t}dt$$

$$= \frac{C}{\pi\delta} \sum_{\delta(M+1)\le n\le\delta(M+N)} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 e^{\pi\sqrt{-1}(-n\theta\delta^{-1})} e^{2\theta\delta^{-1}y\sqrt{-1}}dy$$

$$= \frac{C}{\pi\delta} \sum_{\delta(M+1)\le n\le\delta(M+N)} e^{\pi\sqrt{-1}(-n\theta\delta^{-1})} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 \cos(2\theta\delta^{-1}y)\,dy$$

这里 $y := \frac{\pi(n-2\delta t)}{2}$. 为了求最后一个含参变量积分, 引入 $A := 2\theta\delta^{-1}$ 并考虑

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 \cos(Ay)\,dy = 2\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 \cos(Ay)\,dy.$$

分部积分得到

$$\begin{aligned} I &= 2y\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 \cos(Ay)\Big|_0^{+\infty} - 2\int_0^{+\infty} y\Big[-A\sin(Ay)\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 \\ &\qquad + 2\cos(Ay)\cdot\frac{\sin y}{y}\cdot\frac{y\cos y-\sin y}{y^2}\Big]dy \\ &= 2A\int_0^{+\infty}\frac{\sin(Ay)\sin^2 y}{y}dy - 2\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2y)\cos(Ay)}{y}dy + 2I \end{aligned}$$

从而得到

$$I = 2\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2y)\cos(Ay)}{y}dy - 2A\int_0^{+\infty}\frac{\sin(Ay)\sin^2 y}{y}dy.$$

利用三角函数积化和差公式

$$\sin(Ay)\sin y = \frac{\cos[(A-1)y]-\cos[(A+1)y]}{2}$$

得到

$$\begin{aligned} I &= 2\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2y)\cos(Ay)}{y}dy - A\int_0^{+\infty}\frac{\sin y\cos[(A-1)y]}{y}dy \\ &\qquad + A\int_0^{+\infty}\frac{\sin y\cos[(A+1)y]}{y}dy. \end{aligned}$$

利用 (15.2.11) 和三角函数积化和差公式

$$\sin(ay)\cos(by) = \frac{\sin[(a+b)y]+\sin[(a-b)y]}{2}$$

得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(ay)\cos(by)}{y}dy = \int_0^{+\infty}\frac{\sin[(a+b)y]+\sin[(a-b)y]}{2y}dy$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\operatorname{sgn}(a+b)+\operatorname{sgn}(a-b)\right].$$

故

$$I = \frac{\pi}{2}\left[\operatorname{sgn}(2+A)+\operatorname{sgn}(2-A)\right]-\frac{\pi}{4}A\left[\operatorname{sgn}(2+A)-2\operatorname{sgn}(A)-\operatorname{sgn}(2-A)\right]$$

$$= \left\{\begin{array}{cc} 0, & A<-2, \\ 0, & A=-2, \\ \pi+\frac{\pi}{2}A, & -2<A<0, \\ \pi, & A=0, \\ \pi-\frac{\pi}{2}A, & 0<A<2, \\ 0, & A=2, \\ 0, & A>2 \end{array}\right\} = \pi\left(1-|A/2|\right)^{+}.$$

最后得到

$$\begin{aligned} \widehat{b}(\theta) &= \frac{C}{\pi\delta}\sum_{\delta(M+1)\le n\le\delta(M+N)} e^{\pi\sqrt{-1}(-n\theta\delta^{-1})}\pi\left(1-|A/2|\right)^{+} \\ &= \frac{C}{\delta}\left(1-|\theta\delta^{-1}|\right)^{+}\sum_{\delta(M+1)\le n\le\delta(M+N)} e^{\pi\sqrt{-1}(-n\theta\delta^{-1})}. \end{aligned}$$

这样就得到粗略但实用的上界估计

$$\widehat{b}(0)\le\frac{C}{\delta}\sum_{\delta(M+1)\le n\le\delta(M+N)}\le\frac{C}{\delta}(\delta N-\delta+1)=C\left(N-1+\frac{1}{\delta}\right).$$

Selberg 利用如下引理选择了一个较好的 $b(t)$.

引理16.6.6. 令

$$F(z):=\left[\frac{\sin(\pi z)}{\pi}\right]^2\left[\sum_{n\ge0}\frac{1}{(z-n)^2}-\sum_{n\ge1}\frac{1}{(z+n)^2}+\frac{2}{z}\right].$$

则 F 是 z 的整函数满足

$$F(z)=O\left(e^{2\pi|\mathrm{Im}(z)|}\right),\quad F(x)\ge\operatorname{sgn}(x)\ (x\in\mathbb{R}),\quad F(0)=1,$$

和

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[F(x)-\operatorname{sgn}(x)\right]dx=1. \tag{16.6.11}$$

证: F 是满足 $F(z)=O(\exp(2\pi|\mathrm{Im}(z)|))$ 的整函数是显然的, 这是因为如果 $z=x+\sqrt{-1}y$ 且 $|y|\ge1$ 则得到 $|z\pm n|^2\ge1+(|x|-n)^2$ 对任何 $n\ge0$ 都成立. 回顾 (16.3.20)

$$\left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right]^2\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(x-n)^2}=1,\quad x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}.$$

但是注意到上述公式对 $x \in \mathbb{Z}$ 也成立, 原因是 $[\sin(\pi x)/\pi]^2$ 把可能的极点都吃掉了. 根据复变函数知识 (在之后的章节中会证明) 上述公式对 $z \in \mathbb{C}$ 也成立, 即

$$\left[\frac{\sin(\pi z)}{\pi}\right]^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = 1, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{16.6.12}$$

对任意 $x > 0$ 有

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(x+n)^2} \leq \sum_{n\geq 1} \int_{x+n-1}^{x+n} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{x} = \sum_{n\geq 0} \int_{x+n}^{x+n+1} \frac{du}{u^2} \leq \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(x+n)^2}.$$

此时得到

$$\begin{aligned} F(x) &= \left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right]^2 \left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x-n)^2} - 2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(x+n)^2} + \frac{2}{x}\right] \\ &= 1 + 2\left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right]^2 \left[\frac{1}{x} - \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(x+n)^2}\right] \geq 1, \quad x > 0. \end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned} F(x) &= \left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right]^2 \left[-\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x-n)^2} + 2\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(-x+n)^2} - \frac{2}{-x}\right] \\ &= -1 + 2\left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right]^2 \left[\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(-x+n)^2} - \frac{2}{-x}\right] \geq -1, \quad x < 0. \end{aligned}$$

当 $x = 0$ 时得到

$$F(0) = \lim_{z\to 0} \left[\frac{\sin(\pi z)}{\pi}\right]^2 \left(\frac{1}{z^2} + \frac{2}{z}\right) = \lim_{z\to 0} \left[\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}\right]^2 = 1 \geq 0 = \mathrm{sgn}(0).$$

最后来证明 (16.6.11). 根据定义有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) - \mathrm{sgn}(x)]dx &= \int_0^{+\infty} [f(x) - 1]dx + \int_{-\infty}^0 [F(x) + 1]dx \\ &= \int_0^{+\infty} [F(x) - 1 + F(-x) + 1]dx = \int_0^{+\infty} [F(x) + F(-x)]dx \\ &= 2\int_0^{+\infty} \left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right]^2 dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1. \quad \square \end{aligned}$$

证明定理 16.6.1. 定义函数

$$b(t) := \frac{F(\delta(t-M-1)) + F(\delta(M+N-t))}{2}.$$

计算可得

$$b(t) \geq \begin{cases} \frac{-1+1}{2} = 0, & t < M+1, \\ \frac{1+F(\delta(N-1))}{2} \geq 1, & t = M+1, \\ \frac{1+1}{2} = 1, & M+1 < t < M+N, \\ \frac{F(\delta(N-1))+1}{2} \geq 1, & t = M+N, \\ \frac{1-1}{2} = 0, & t > M+N. \end{cases}$$

即满足条件 (16.6.10) 中的前面两条. 下证也满足条件 (16.6.10) 中的第三条从而根据 (16.6.11) 得到

$$\begin{aligned} B(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} b(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [b_1(t)+b_2(t)+b_3(t)]dt \\ &= \frac{1}{2}\delta^{-1} + \frac{1}{2}\delta^{-1} + \int_{M+1}^{M+N} dt = \frac{1}{\delta} + N - 1, \end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned} b(t) &= \frac{1}{2}[F(\delta(t-M-1)) - \mathrm{sgn}(\delta(t-M-1))] \\ &\quad + \frac{1}{2}[F(\delta(M+N-t)) - \mathrm{sgn}(\delta(M+N-t))] \\ &\quad + \frac{1}{2}[\mathrm{sgn}(\delta(t-M-1)) + \mathrm{sgn}(\delta(M+N-t))] =: b_1(t)+b_2(t)+b_3(t) \end{aligned}$$

且最后一项满足

$$b_3(t) = \begin{cases} 0, & t < M+1, \\ \frac{\mathrm{sgn}(\delta(N-1))}{2}, & t = M+1, \\ 1 & M+1 < t < M+N, \\ \frac{\mathrm{sgn}(\delta(N-1))}{2}, & t = M+N, \\ 0, & t > M+N. \end{cases}$$

由于 $b(z) = O(\exp(2\pi\delta|\mathrm{Im}(z)|))$ 和 $b \in L^1(\mathbb{R})$, 所以 b 在 $\mathbb{R}$ 上有界从而得到 $b \in L^2(\mathbb{R})$. 从**Paley-Wiener 定理**[10]得到 $\widehat{b}(\theta) = 0$ 只要 $|\theta| \geq \delta$. □

§16.6.2 * 大筛法的算术形式

假设 $\{a_n\}_{M+1 \leq n \leq M+N}$ 是复数列并令

$$\mathcal{S}(\alpha) := \sum_{M<n\leq M+N} a_n e^{2\pi\sqrt{-1}n\alpha}.$$

[10]该定理是说, 假设 F 是关于 z 的整函数且 $a > 0$, 则下面两个断言等价:

(i) $F|_{\mathbb{R}} \in L^2(\mathbb{R})$ 且 $|F(z)| = O(e^{2\pi a|z|})$,

(ii) 存在函数 $\widetilde{f} \in L^2(\mathbb{R})$ 满足

$$\widetilde{f}(\xi) = 0 \ (|\xi| > a), \quad F(z) = \int_{-a}^{a} \widetilde{f}(\xi) e^{2\pi\sqrt{-1}\xi z} d\xi.$$

证明可参考Katznelson 的专著.

在**定理16.6.1** 中取 (这里 Q 是固定的自然数)

$$\alpha_r = \frac{a}{q}, \quad (a,q)=1, \quad 1 \le a \le q, \quad q \le Q.$$

当 $r \neq s$ 得到

$$||\alpha_r - \alpha_s|| = \left|\left|\frac{a}{q} - \frac{a'}{q'}\right|\right| = \left|\left|\frac{aq' - a'q}{qq'}\right|\right| \ge \frac{1}{Q^2}$$

从而有

$$\sum_{q \le Q} \sum_{1 \le a \le q,\ (a,q)=1} |\mathcal{S}(a/q)|^2 \le (N-1+Q^2) \sum_{M<n\le M+N} |a_n|^2. \tag{16.6.13}$$

对每个素数 $p \in \mathbb{P}$ 定义

$$w(p) := |\{h | 0 \le h < p,\ n \equiv h \pmod p \quad \Longrightarrow \quad a_n = 0\}|\,. \tag{16.6.14}$$

不妨假设 $w(p) < p$ 对所有 $p \in \mathbb{P}$ 都成立, 否则对某个 $p_0 \in \mathbb{P}$ 有 $w(p_0) = p_0$ 从而推出 $a_n \equiv 0$. 记 Möbius 函数为

$$\mu(n) := \begin{cases} (-1)^{\omega(n)}, & n \text{ 不含平方因子}, \\ 0, & \text{其余情形} \end{cases}$$

其中 $\omega(n) := \sum_{p|n} 1$. 令

$$g(q) := \mu(q)^2 \prod_{p|q,\ p\in\mathbb{P}} \frac{w(p)}{p-w(p)}. \tag{16.6.15}$$

定理16.6.7. 在上述记号和假设下, 对所有 $q \ge 1$ 有估计

$$\left|\sum_{M<n\le M+N} a_n\right|^2 g(q) \le \sum_{1\le a\le q,\ (a,q)=1} |\mathcal{S}(a/q)|^2. \tag{16.6.16}$$

证: 显然 (16.6.16) 等价于

$$|\mathcal{S}(0)|^2 g(q) \le \sum_{1\le a\le q,\ (a,q)=1} |\mathcal{S}(a/q)|^2.$$

因为变换 $a_n \mapsto a_n \exp(2\pi\sqrt{-1}n\beta)$ 并不改变 $w(p)$ 的定义, 所以 (16.6.16) 等价于

$$|\mathcal{S}(\beta)|^2 g(q) \le \sum_{1\le a\le q,\ (a,q)=1} |\mathcal{S}(a/q+\beta)|^2, \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{16.6.17}$$

假设 (16.6.17) 对互素的 q 和 q' 都成立. 则

$$\sum_{1\le c\le qq',\ (c,qq')=1} |\mathcal{S}(c/qq')|^2 \quad = \quad \sum_{1\le a\le q,\ (a,q)=1} \sum_{1\le a'\le q',\ (a',q')=1} |\mathcal{S}(a/q+a'/q')|^2$$

$$\geq \sum_{1\leq a\leq q,\ (a,q)=1} |\mathcal{S}(q/a)|^2 g(q') \ \geq\ |\mathcal{S}(0)|^2 g(q)g(q').$$

因为 g 是乘性函数, 所以 (16.6.16) 或 (16.6.17) 对 qq' 亦成立. 但是当 q 不含平方因子时 $g(q)=0$, 我们只要验证 (16.6.16) 对 $q\in\mathbb{P}$ 成立.

当 p 是素数时得到

$$\begin{aligned}
|\mathcal{S}(0)|^2 + \sum_{1\leq a\leq p-1} |\mathcal{S}(a/p)|^2 &= \sum_{0\leq a,a'\leq p-1} \mathcal{S}(a/p)\overline{\mathcal{S}(a'/p)}\delta_{aa'} \\
&= \sum_{0\leq a,a'\leq p-1} \mathcal{S}(a/p)\overline{\mathcal{S}(a'/p)}\frac{1}{p}\sum_{0\leq h\leq p-1} e^{2\pi\sqrt{-1}(a'-a)h/p} \\
&= \frac{1}{p}\sum_{0\leq h\leq p-1}\left|\sum_{0\leq a\leq p-1} e^{2\pi\sqrt{-1}(-ah/p)}\mathcal{S}(a/p)\right|^2 \\
&= \frac{1}{p}\sum_{0\leq h\leq p-1}\left|\sum_{M<n\leq M+N} a_n \sum_{0\leq a\leq p-1} e^{2\pi\sqrt{-1}(a(n-h)/p)}\right|^2 \\
&= p\sum_{0\leq h\leq p-1}|\mathcal{S}(p,h)|^2,
\end{aligned}$$

这里

$$\mathcal{S}(p,h) := \sum_{M<n\leq M+N,\ n\equiv h \pmod p} a_n.$$

根据 $w(p)$ 定义和 Cauchy-Schwarz 不等式推出

$$|\mathcal{S}(0)|^2 = \left|\sum_{0\leq h\leq p-1}\mathcal{S}(p,h)\right|^2 \leq [p-w(p)]\sum_{0\leq h\leq p-1}|\mathcal{S}(p,h)|^2$$

从而得到

$$\sum_{1\leq a\leq p-1}|\mathcal{S}(a/p)|^2 \ \geq\ \left[\frac{p}{p-w(p)}-1\right]|\mathcal{S}(0)|^2 \ =\ g(p)|\mathcal{S}(0)|^2.$$

这就证明 (16.6.16) 当 $q=p\in\mathbb{P}$ 成立. □

推论16.6.8. (算术大筛法) 在上述记号和假设下, 我们有

$$\left|\sum_{M<n\leq M+N} a_n\right|^2 \leq \frac{N-1+Q^2}{L}\sum_{M<n\leq M+N}|a_n|^2,\quad L:=\sum_{q\leq Q} g(q). \qquad (16.6.18)$$

证: 结合 (16.6.13) 和 (16.6.16) 得到. □

之前已证了 $\mathcal{S}(0)=\sum_{0\leq h\leq p-1}\mathcal{S}(p,h)$ 故

$$\sum_{0\leq h\leq p-1}\left[\mathcal{S}(p,h)-\frac{1}{p}\mathcal{S}(0)\right]=0$$

和

$$p\sum_{0\le h\le p-1}\left|\mathcal{S}(p,h)-\frac{1}{p}\mathcal{S}(0)\right|^2 = p\sum_{0\le h\le p-1}|\mathcal{S}(p,h)|^2-|\mathcal{S}(0)|^2$$
$$= \sum_{1\le a\le p-1}|\mathcal{S}(a/p)|^2.$$

结合 (16.6.13) 得到

定理16.6.9. (弱型大筛法不等式) 在上述记号和假设下, 我们有

$$\sum_{p\le Q,\ p\in\mathbb{P}}\ \sum_{0\le h\le p-1}\left|\mathcal{S}(p,h)-\frac{1}{p}\mathcal{S}(0)\right|^2 \le (N-1+Q^2)\sum_{M<n\le M+N}|a_n|^2. \tag{16.6.19}$$

注意到上述不等式只对 p 是素数时成立.

§16.6.3 * 大筛法的应用

大筛法的一个应用是有效地改进了 Burn 估计 (16.6.2) 且给出几乎最优的上界估计.

定理16.6.10. 我们有

$$\mathbf{TP}(x)\le\left\{16\prod_{2<p\in\mathbb{P}}\left[1-\frac{1}{(p-1)^2}\right]+o(1)\right\}\frac{x}{\ln^2 x},\quad x\to+\infty. \tag{16.6.20}$$

证: 为了方便期间令

$$C:=2\prod_{2<p\in\mathbb{P}}\left[1-\frac{1}{(p-1)^2}\right].$$

在 (16.6.18) 中取

$$N:=\lfloor x\rfloor,\quad Q:=x^{1/2-\epsilon},\quad M:=0,\quad a_n:=\begin{cases}1, & Q<n(n+2)\text{ 的最小素因子},\\ 0, & \text{其余情形}.\end{cases}$$

简单计算得到

$$\mathbf{TP}(x)-\mathbf{TP}(\sqrt{x})\le[1+o(1)]\frac{x}{L}$$

这里用到了 $a_p=1$ 如果 $p>x^{1/2-\epsilon}$. 注意到

$$w(2)=1,\quad w(p)=2\ (p\ge 3)$$

我们得到 $g(q)=[(2^\omega*h)(q)]/q$ 这里 h 是乘性函数且满足

$$h(2)=0,\quad h(2^\nu)=2(-1)^{\nu-1}\ (\nu\ge 2)$$

和

$$h(p)=\frac{4}{p-2},\quad h(p^\nu)=2(-1)^{\nu-1}\left(\frac{p+2}{p-2}\right)\ (\nu\ge 2).$$

易证级数 $\sum_{d\geq 1} h(d)/d^\sigma$ 当 $\sigma > 1/2$ 时绝对收敛, 从而推出

$$\sum_{q\leq y} g(q) = \sum_{md\leq y} \frac{h(d)}{d}\frac{2^{\omega(m)}}{m} \sim \frac{3}{\pi^2}(\ln y)^2 \sum_{d\geq 1}\frac{h(d)}{d}, \quad y\to+\infty$$

这里用到了估计

$$\sum_{m\leq y} 2^{\omega(m)} = \sum_{m\leq y}(1*\mu^2)(m) \sim \frac{6}{\pi^2} y\ln y.$$

最后得到 $\mathbf{TP}(x) \leq [2C + o(1)]x(\ln\sqrt{x})^{-2}$ 其中

$$\begin{aligned} C &= \frac{\pi^2}{6}\left[\sum_{d\geq 1}\frac{h(d)}{d}\right]^{-1} \\ &= \prod_{p\in\mathbb{P}}(1-p^{-2})^{-1}\frac{3}{2}\prod_{p\geq 3}\left[1+\frac{4}{p(p-2)}-\frac{2(p+2)}{p^2(p-2)(1+p^{-1})}\right]^{-1} \\ &= 2\prod_{p\geq 3}\left[1-\frac{1}{(p-1)^2}\right]. \quad \square \end{aligned}$$

§16.7 参考文献

1. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis I*, Translated from the 1988 German original by Gary Brookfield, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. xiv+426 pp. ISBN: 3-7643-7153-6

2. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis II*, Translated from the 1999 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. xii+400 pp. ISBN: 978-3-7643-7472-3; 3-7643-7472-3

3. Amann, Herbert; Escher, Joachim. *Analysis III*, Translated from the 2001 German original by Silvio Levy and Matthew Cargo, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. xii+468 pp. ISBN: 978-3-7643-7479-2; 3-7643-7479-2

4. Fourier, Joseph. *The analytical theory of heat*, translated, with notes, by Alexander Freeman, HEP World's Classics, Higher Education Press, 2016.

5. Grafakos, Loukas. *Classical Fourier analysis*, Third edition, Graduate Texts in Mathematics, **249**, Springer, New York, 2014. xviii+638 pp. ISBN: 978-1-4939-1193-6; 978-1-4939-1194-3

6. Hardy, G. H. *Divergent series*, Oxford, at the Clarendon Press, 1949. xvi+396 pp.

7. HeWitt, Edwin; Hewitt, Robert E. *The Gibbs-Wilbraham phenomenon: an episode in Fourier analysis*, Arch. Hist. Exact Sci., **21**(1979/80), no. 2, 129-160.

8. Iwaniec, Henryk; Kowalski, Emmanuel. *Analytic number theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. xii+615 pp. ISBN: 0-8218-3633-1

9. Katznelson, Yitzhak. *An introduction to harmonic analysis*, Third edition, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 2004. xviii+314 pp. ISBN: 0-521-83829-0; 0-521-54359-2

10. Tenenbaum, Gérald. *Introduction to analytic and probabilistic number theory*, Translated from the second French edition (1995) by C. B. Thomas, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **46**, Cambridge University Press, Cambridge, 1995. xvi+448 pp. ISBN: 0-521-41261-7

11. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis I*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xviii+574 pp. ISBN: 3-540-40386-8

12. Zorich, Vladimir A. *Mathematical Analysis II*, Translated from the 2002 fourth Russian edition by Roger Cooke, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. xvi+681 pp. ISBN: 3-540-40633-6

13. 布鲁斯· C. 伯恩特(Bruce C. Berndt) 主编: **拉玛努金笔记**(第1, 2, 3, 4 卷), 哈尔滨工业大学出版社, 2019.

14. 布鲁斯· C. 伯恩特(Bruce C. Berndt), 乔治· E. 安德鲁斯 (George E. Andrews) 主编: **拉玛努金遗失笔记**(第 1, 2, 3, 4 卷), 哈尔滨工业大学出版社, 2019.

15. 常庚哲, 史济怀 编: **数学分析教程** (上、下册), 高等教育出版社, 2003.

16. 陈天权 编著: **数学分析讲义** (第一、二、三册), 北京大学出版社, 2009.

17. 邓建平 编: **微积分I 和II**, 科学出版社, 2019.

18. Duhham, William 著(李伯民, 汪军, 张怀勇 译): **微积分的历程 – 从牛顿到勒贝格**, 人民邮电出版社, 2013.

19. 吉米多维奇 著(李荣涷, 李植 译): **数学分析习题集** (根据2010年俄文版翻译), 俄罗斯数学教材选译, 高等教育出版社, 2012.

20. Kline, Morris 著(张理京, 张炎热, 江泽涵等 译): **古今数学思想** (第一、二、三册), 上海科学技术出版社, 2014.

21. 李傅山, 王培合 编著: **数学分析习题课讲义** (1、2、3), 北京大学出版社, 2018.

22. 李逸 编著: **数学分析讲义**, 上海交通大学数学分析课讲义(未出版), 2016.

23. 林源渠, 方企勤 编: **数学分析解题指南**, 北京大学出版社, 2003.

24. 梅加强 编著: **数学分析**, 高等教育出版社, 2015.

25. 裴礼文 编著: **数学分析中的典型问题与方法** (第二版), 高等教育出版社, 2015.

26. Riemann, Bernhard 著(李培廉 译): **黎曼全集** (第一、二卷), 高等教育出版社, 2016.

27. 汪林 著: **数学分析中的问题和反例**, 现代数学基础 **56**, 高等教育出版社, 2015.

28. Weir, D. Maurice; Hass, R. Joel; Giordano, R. Frank. *Thomas' calculus*, Eleventh Edition, (影印版, 上、下册), 高等教育出版社, 2016.

29. 徐森林, 薛春华 编著: **数学分析**, 清华出版社, 2005.

30. 杨小远, 孙玉泉, 薛玉梅, 杨卓琴 编著: **工科数学分析教程** (上、下册), 科学出版社, 2011.

31. 张福保, 薛金美, 潮小李 主编: **数学分析讲义**, 科学出版社, 2019.

32. 张筑生 编著: **数学分析新讲** (第一、二、三册), 北京大学出版社, 1990.

33. 周民强 编著: **数学分析习题演练** (第一、二、三册), 科学出版社, 2018.

34. 周颂平 著: **三角级数研究中的单调性条件: 发展和应用**, 科学出版社, 2012.

35. 朱尧辰 编著: **数学分析例选通过范例学技巧**, 哈尔滨工业大学出版社, 2013.

第四部分

数学分析后续：高等分析初步

第十七章　Fourier 分析

第十八章　实分析

第十九章　复分析

第二十章　泛函分析

第五部分

数学分析后续：拓扑学初步

第二十一章　范畴理论

第二十二章　基本群

第二十三章　微分流形

第二十四章　代数拓扑

第六部分

数学分析后续：微分几何学初步

第二十五章　Riemann 流形

第二十六章　复流形

第二十七章　Riemann 曲面

第二十八章　Einstein 方程

第七部分

数学分析后续：**Lie** 群初步

第二十九章　群论和 Galois 理论

第三十章　拓扑群与 Lie 群

第三十一章　$\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ 上的分析

第三十二章　Poincaré 模型

第八部分

数学分析后续：模形式初步

第三十三章　模形式和 Eisenstein 级数

第三十四章　Hecke 算子

第三十五章 L 函数

第三十六章　Galois 表示

第九部分

数学分析后续: (待补充)