

第四次作业: 带* 选做, 2020年11月6日上课前交

1. 教材习题2.3: A1 中偶数题目.

2. 教材习题2.3: A2.

3. 教材习题2.3: A3.

4. 教材习题2.3: A5.

5. 教材习题2.3: A7.

6. 教材习题2.3: B14.

7. 教材习题2.4: A1 中偶数题目.

8. 教材习题2.4: A4.

9. 教材习题2.4: A5.

10. 教材习题2.4: B6 中偶数题目.

*11. 教材习题2.3: B15.

*12. 教材习题2.4: C7.

*13. 在洗衣服的时候, 要先用少量的清水和洗衣液浸泡, 再用手或洗衣机揉搓并挤干衣服中的水, 然后继续这样做. 那么, 能不能无限增多洗涤次数来无限减少衣服上残留的污物呢? 答案是不可能的! 下面给出证明.

衣服里始终会有残留的污水, 假设其中包含洗涤液的污水有 m_0 克, 而残留的水有 w 千克. 给定一定量的 A 千克清水, 我们要尽量把衣服洗干净. 我们先把 A 千克清水分成 n 次使用, 每次使用 a_1, \dots, a_n 千克. 经过 n 次洗涤之后, 衣服上剩下的污物计算如下.

第一次把含有 m_0 克污物和 w 千克水的衣服放到 a_1 千克的清水中揉搓以后, m_0 克污物就均匀分布在 $w + a_1$ 千克的水中. 洗涤并把水挤干后得到

$$\text{第一次洗涤后衣服上尚存污物量 } m_1 = \frac{w}{w + a_1} m_0 = \frac{m_0}{1 + \frac{a_1}{w}}.$$

同理可得

$$\text{第二次洗涤后衣服上尚存污物量 } m_2 = \frac{m_1}{1 + \frac{a_2}{w}} = \frac{m_0}{\left(1 + \frac{a_1}{w}\right) \left(1 + \frac{a_2}{w}\right)}.$$

一般地, 得到

$$\text{第 } n \text{ 次洗涤后衣服上尚存污物量 } m_n = \frac{m_0}{\left(1 + \frac{a_1}{w}\right) \cdots \left(1 + \frac{a_n}{w}\right)}.$$

在这个数学模型下, 回答如下问题:

- (1) 对给定的 n , 如何选取 a_1, \cdots, a_n 可使 m_n 最小?
- (2) 当 n 增大时候, m_n 的最小值是增大还是减小, 或者按照别的规律变化?